Nicht-Euklidische Geometrie

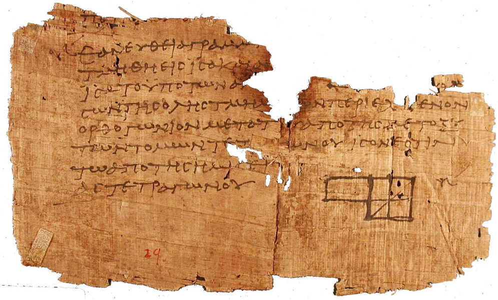
~~Nicht-~~Euklidische Geometrie

Euklid

- Griechischer Mathematiker
- lebte wahrscheinlich im 3. Jh. v. Chr
- war wahrscheinlich Lehrer in Alexandria

Euklids Werk "Elemente"

- älteste systematische Abhandlung über Geometrie
- 13 (später 15) Bücher
- erstmals 1482 gedruckt
- Buch 1: Definitionen bis zum Satz des Pythagoras
- Buch 1: beginnt mit 23 Definitionen, 5 Axiomen und 5 Postulaten



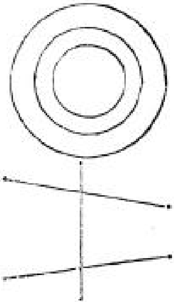
Papyrusfragment (Buch II, §5)
Quelle: Wikimedia-Commons

Eine Seite in der Druckausgabe von 1482
Quelle: Wikimedia-Commons

Die Axiome (selbstverständliche, unveränderbare Tatsachen)

1. Dinge, die zu dem selben gleich sind, sind auch untereinander gleich.
2. Wenn man zu gleichen Dingen Gleiches hinzufügt, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn man von gleichen Dingen Gleiches abzieht, sind die Reste gleich.
4. Dinge, die einander decken, sind gleich.
5. Das Ganze ist größer als ein Teil davon.

Die Postulate (Arbeitshypothesen)



Petitiones sunt quinq3: ¶ A quolibet pũcto in quemlibet punctum rectã lineã ducere atq3 lineã definitã in cõtinuũ rectũq3 quãtũlibet protrahere. ¶ Super centrũ quodlibet quãtumlibet occupando spacium circulu3 designare. ¶ Omnes rectos angulos sibiinuicem esse equales. ¶ Si linea recta sup duas lineas rectas ceciderit duoq3 anguli ex vna parte duobꝰ rectis angulis minores fuerint istas duas lineas in eãdẽ ptẽ ꝓtractas ꝓculdubio cõiũctim ire.

Die 5 Postulate (Version 1482)

Quelle: Zebra-Buch zur Geometrie (F.Verhulst/S.Walcher)

Die Postulate (Arbeitshypothesen)

1. Von einem Punkt zu einem anderen Punkt kann man eine Strecke ziehen.
2. Man kann eine Strecke zu einer Geraden verlängern.
3. Man kann einen Kreis mit jedem gegebenen Radius und jedem gegebenen Mittelpunkt ziehen.
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
5. Wenn bei einer Geraden, die zwei andere Geraden schneidet, die Summe der beiden Innenwinkel (Nachbarwinkel) an der gleichen Seite kleiner ist als die Summe von zwei rechten Winkeln, so werden sich die beiden Geraden auf der Seite schneiden, an der sich diese beiden Winkel befinden.

Das 5. Postulat

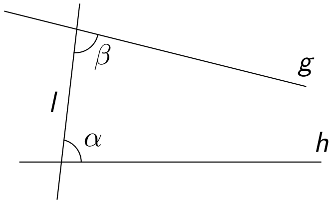
Postulat

Wenn bei einer Geraden, die zwei andere Geraden schneidet, die Summe der beiden Innenwinkel (Nachbarwinkel) an der gleichen Seite kleiner ist als die Summe von zwei rechten Winkeln, so werden sich die beiden Geraden auf der Seite schneiden, an der sich diese beiden Winkel befinden.

Das 5. Postulat

Postulat

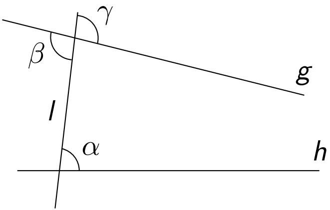
Wenn bei einer Geraden, die zwei andere Geraden schneidet, die Summe der beiden Innenwinkel (Nachbarwinkel) an der gleichen Seite kleiner ist als die Summe von zwei rechten Winkeln, so werden sich die beiden Geraden auf der Seite schneiden, an der sich diese beiden Winkel befinden.



Sätze ohne direkte Anwendung von Postulat 5

Die ersten 28 Sätze werden ohne das 5. Postulat bewiesen.
Beispiele:

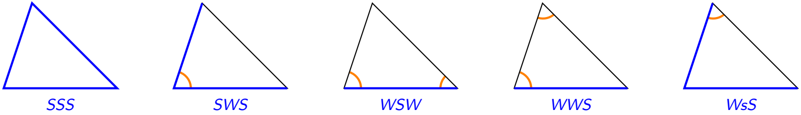
- Konstruktion von gleichseitigem Dreieck
- Strecke/Winkel halbieren
- Scheitelwinkel sind gleich
- Z-Winkel: Falls $\alpha = \beta$, dann $g||h$
- F-Winkel: Falls $\alpha = \gamma$, dann $g||h$



Kongruente und ähnliche Dreiecke

Definition

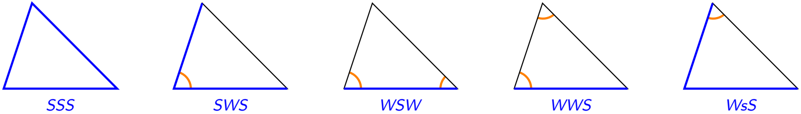
Zwei Figure der Ebene heißen kongruent, wenn sie durch eine Kongruenzabbildung (Isometrie) ineinander überführt werden können.



Kongruente und ähnliche Dreiecke

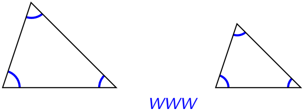
Definition

Zwei Figure der Ebene heißen kongruent, wenn sie durch eine Kongruenzabbildung (Isometrie) ineinander überführt werden können.



Definition

Können sie durch eine Ähnlichkeitsabbildung ineinander überführt werden (Isometrie oder zentrische Streckung) heißen sie ähnlich.



Korrekturen das Parallelenpostulats

- John Playfair (1748 - 1819)
- Winkelsumme im Dreieck
- John Wallis (1616 - 1703)
- Girolamo Saccheri (1667 - 1733)
- Nikolai Ivanovich Lobacevskii (1792 - 1856), Janos Bolyai (1802 - 1860) und Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855)

John Playfair: alternative Formulierung

Satz

Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden verläuft genau eine Gerade, die parallel zu dieser ist.

John Playfair: alternative Formulierung

Satz

Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden verläuft genau eine Gerade, die parallel zu dieser ist.

Definition (Euklid)

Parallele Geraden sind Geraden, die in derselben Ebene liegen und sich in beide Richtungen bis ins Unendliche verlängert in keinem Punkt schneiden.

John Playfair: alternative Formulierung

Satz

Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden verläuft genau eine Gerade, die parallel zu dieser ist.

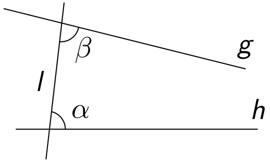
Definition (Euklid)

Parallele Geraden sind Geraden, die in derselben Ebene liegen und sich in beide Richtungen bis ins Unendliche verlängert in keinem Punkt schneiden.

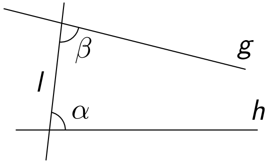
Aufgabe:

Überlegen Sie sich, dass der Satz von Playfair äquivalent ist zum 5. Postulat von Euklid.

Äquivalente Formulierungen zum Parallelenpostulat



Äquivalente Formulierungen zum Parallelenpostulat



- Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden verläuft genau eine Gerade, die parallel zu dieser ist. (Playfair)
- Die Summe der Winkel eines Dreiecks ergibt 180°. (Prop. I. 32 Euklid)
- Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC und eine Strecke DE. Dann gibt es ein Dreieck DEF das ähnlich ist zum Dreieck ABC. (Wallis)

Lobacevskii, Bolyai und Gauß: neue Geometrie

- lebten Ende 18./Anfang 19. Jahrhundert
- behaupteten, dass das 5. Postulat nicht bewiesen werden kann
- entwerfen (unabhängig voneinander) neue, nicht-Euklidische Geometrie: Postulate 1 - 4 und Negation von Postulat 5.

Lobacevskii, Bolyai und Gauß: neue Geometrie

- lebten Ende 18./Anfang 19. Jahrhundert
- behaupteten, dass das 5. Postulat nicht bewiesen werden kann
- entwerfen (unabhängig voneinander) neue, nicht-Euklidische Geometrie: Postulate 1 - 4 und Negation von Postulat 5.

Anstatt des 5. Postulats:
Es gibt *mehrere* zu einer Geraden g parallele Geraden, die durch einen Punkt P verlaufen, welcher nicht auf g liegt.

$\rightsquigarrow$ hyperbolische Geometrie

Nicht-Euklidische Geometrien

Ersetzungen des 5. Postulats:

- Es gibt *mehrere* zu einer Geraden g parallele Geraden, die durch einen Punkt P verlaufen, welcher nicht auf g liegt.

  $\rightsquigarrow$ hyperbolische Geometrie

- Es gibt *keine* zu einer Geraden g parallele Geraden, die durch einen Punkt P verlaufen, welcher nicht auf g liegt.

  $\rightsquigarrow$ sphärische Geometrie