Normen & Metriken

28.4.21

V ein endl.-dim $\mathbb{K}$-VR ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ od $\mathbb{C}$)

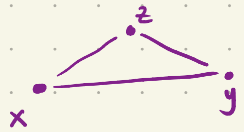
Metrik auf V: $d: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ s.d. $\forall x,y,z \in V$ gilt:

geht auch für allg Menge

M1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

M2) $d(x,y) = d(y,x)$ Symmetrie

M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ Δ-Ungleichung



Norm auf V $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ s.d. $\forall x,y,z \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

mit N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

$\|-x\| = \|x\|$ $\xleftarrow{\lambda = -1}$ N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ „Symmetrie"

N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Δ-Ungleichung

Zusammenhang

* $\|\cdot\|$ auf V gegeben $\rightsquigarrow$ induzierte Metrik auf V

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

* d auf V gegeben $\rightsquigarrow$ ist $\|x\| := d(x,0)$ eine Norm ?

NEIN Bsp diskrete Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\|x\| := d(x,0)$ gilt: $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ✓

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ABER $\|\lambda x\| \neq |\lambda| \, \|x\|$

(falls $|\lambda| \neq 1$, $x \neq 0$)

Kreis um m mit Radius r : $B_r(x) = \{x \in V \mid d(x,m) \leq r\}$

Einheitsball $B_{\|\cdot\|} = \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$

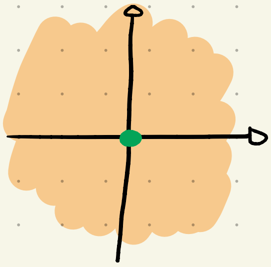
Beispiele

Diskrete Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2$

$B_1(0)$

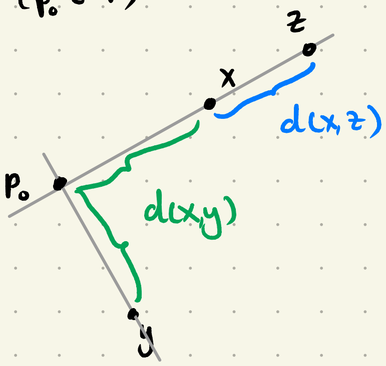


$B_{1/2}(0)$

SNCF-Metrik

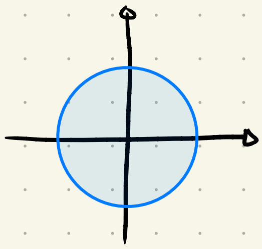
$(p_0 \in V)$

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|, & \text{falls } x,y \text{ auf Gerade durch } p_0 \\ \|x-p_0\| + \|p_0 - y\|, & \text{sonst} \end{cases}$$

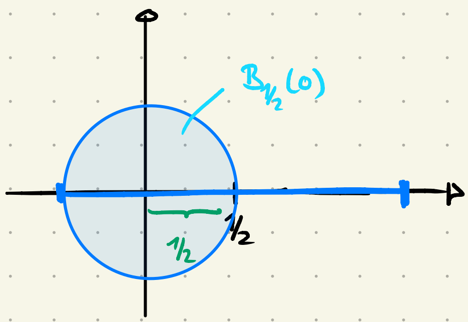


↳ ist eine Metrik (Übung)

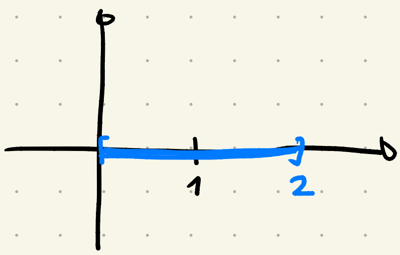
sei $p_0 = 0$ $\quad \underline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) \leq 1\}$



$\underline{B_1\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d\left(x, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq 1\right\}$



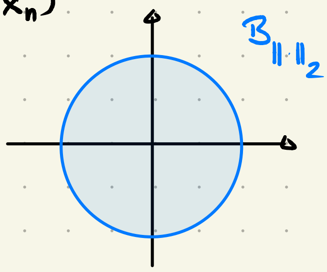
$\underline{B_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d\left(x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) < 1\right\}$



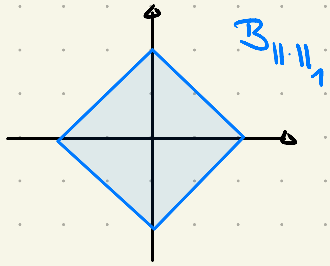
Beispiele Normen

$x = (x_1, \dots, x_n)$

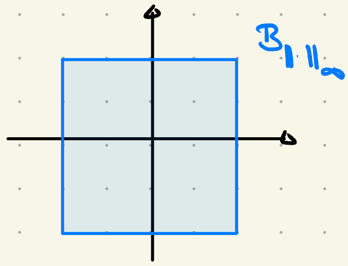
Euklidische Norm $\|x\|_2 = \|x\|_E = \sqrt{\sum |x_i|^2}$



Summen-Norm $\|x\|_1 = \|x\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$



Maximum-Norm $\|x\|_\infty = \|x\|_M = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$



p - Normen sei $p \geq 1$

$$\boxed{\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}$$

Lemma $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm

Bew N1) $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$

N2) $\|\lambda x\|_p = \left(\sum |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$= |\lambda| \, \|x\|_p$

N3) Hölder-Ungleichung: seien $\underbrace{p, q}_{>0}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|a\|_p \|b\|_q$$

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum |x_i + y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\leq \sum \underbrace{|x_i|}_{a_i} \underbrace{|x_i + y_i|^{p-1}}_{b_i} + \sum |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q(p-1) = p$$

$$+ \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \left(\sum |x_i+y_i|^{q\cdot(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \left(\sum |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \left[\left(\sum |x_i+y_i|^p\right)^p\right]^{\frac{q}{p}}$$

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \|x+y\|_p^{q/p}$$

$$\Rightarrow \quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad //$$

<u>Bsp</u> $p = 1$ Summen - Norm

$p = 2$ Euklidische Norm

$$p = \frac{3}{2} \qquad \|x\|_{\frac{3}{2}} = \left(\sum |x_i|^{3/2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\sum |x_i|^{\frac{3}{2}}\right)^2}$$

<u>Grenzwert $p \to \infty$</u> sei $S(x) := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_M}\right)^p$

es gilt: $1 \leq S \leq n$

$$\sqrt[p]{S} = S^{\frac{1}{p}} \to 1$$

damit

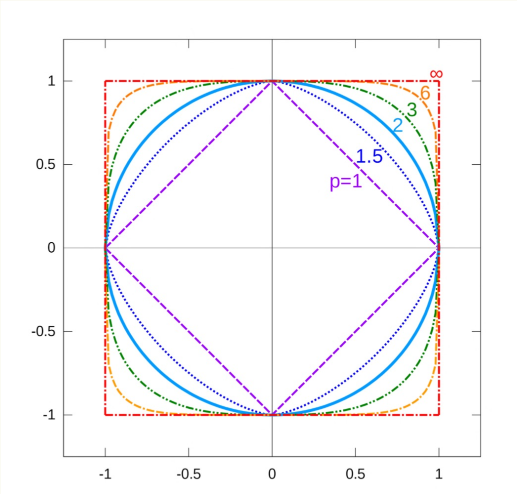
$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_M \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_M}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|x\|_M \lim_{p\to\infty} S^{\frac{1}{p}} = \|x\|_M$$

schreibe $\|x\|_\infty = \|x\|_M$

Ähnlich lässt sich zeigen: $\|x\|_r \leq \|x\|_p \quad \forall\, 1 \leq p < r \leq \infty$

insb gilt dann $B_{\|\cdot\|_p} \subseteq B_{\|\cdot\|_r}$



<u>Bem</u> für $p < 1$ ist $B_{\|\cdot\|_p}$ nicht konvex

$\lightning$ Δ - Ungleichung