1. Topologische Grundlagen

1.1. Metrische Räume

Definition 1.1.: Eine <u>Metrik d</u> auf einer Menge M ist eine Abbildung $d: M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(M1) $\forall x,y \in M: \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

(M2) $\forall x,y \in M: \quad d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(M3) $\forall x,y,z \in M: \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (M,d) heißt <u>metrischer Raum</u>.

Definition 1.2.: Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt <u>Norm</u>, falls gilt:

(N1) $\forall x \in V: \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in V: \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(N3) $\forall x,y \in V: \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt <u>normierter (Vektor-)Raum</u>.

<u>Bemerkung:</u> $d(x,y) := \|x-y\|$ ist dann eine Metrik auf V.

<u>Beispiele:</u> 1) Es gibt viele verschiedene Normen auf $V = \mathbb{R}^n$:

$$|x|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \quad , \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$|x|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad ; \quad |x|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

$\rightsquigarrow$ Induzierten Metriken auf $\mathbb{R}^n$ sind d_1, d_2, d_∞.

2) M sei eine Menge und $d(x,y) := \begin{cases} 0 & : x = y \\ 1 & : x \neq y \end{cases}$ für $x,y \in M$.

Dann d eine Metrik (ÜA), die triviale Metrik.

3) Es sei (M,d) ein metrischer Raum und $N \subset M$. Die induzierte Metrik d_N auf N ist durch Einschränken definiert:

$$d_N(x,y) := d(x,y) \quad \forall\, x,y \in N.$$

Damit wird (N, d_N) ein metrischer Raum.

4) Es sei X eine Menge und

$$\mathcal{B}(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt} \},$$

der $\mathbb{R}$-VRaum der beschränkten Funktionen.

$$f \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

$\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(X)$:

(N1) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in X$ ✓

(N2) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ✓

(N3) $\|f+g\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)+g(x)| \leq \sup\limits_{x \in X} \big(|f(x)| + |g(x)|\big)$

$\leq \sup\limits_{x\in X} f(x) + \sup\limits_{x \in X} g(x) = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ ✓

Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Für $a \in M$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $B_r(a) := \{ x \in M \mid d(x,a) < r \}$ der (offene) Ball vom Radius r um a.

ÜA: Zeichnen Sie die "Einheitsbälle" von $|\cdot|_1, |\cdot|_2, |\cdot|_\infty$, d.h. $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\bullet \leq 1\}$ für $n = 2,3$

<u>Erinnerung / Definition:</u> Es sei (M,d) ein metrischer Raum und $Y \subset M$ eine Teilmenge.

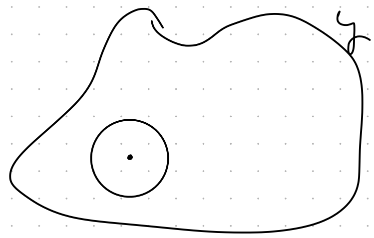
- $p \in M$ heißt <u>Randpunkt von Y</u>, falls gilt:

$$\forall r>0 : \quad B_r(p) \cap Y \neq \emptyset \neq B_r(p) \cap (M \setminus Y)$$

- Y ist <u>offen</u> $\iff$ $Y \cap \partial Y = \emptyset$
- Y ist <u>abgeschlossen</u> $\iff$ $\partial Y \subset Y$.

Die Charakterisierung Ana 1 - Lemma 4.11 (bzw. 4.11') gilt weiterhin:

(O) $Y \subset M$ ist genau dann offen, wenn es um jeden Punkt von Y einen Ball gibt, der ganz in Y liegt.



Der Beweis aus Analysis 1 gilt unverändert.

<u>Beispiele:</u> a) Obwohl d_1, d_2, d_∞ verschiedene Metriken auf $\mathbb{R}^n$ sind, definieren alle denselben Begriff von offenen Mengen, nämlich den aus Analysis 1. (Beweis später)

b) Die Menge M sei mit der trivialen Metrik ausgestattet.

$$\Rightarrow \quad B_r(a) = \begin{cases} \{a\} & : r \leq 1 \\ M & : r > 1 \end{cases}$$

$\overset{(O)}{\Longrightarrow}$ Jede Teilmenge von M ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

Satz 1.3.:

Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1) $\emptyset$ und M sind offen.

2) U_i, $i \in I$, seien offene Teilmengen von M.

   Dann ist $\bigcup_{i\in I} U_i \subset M$ offen in M.

3) $U_1, \ldots, U_k$, $k \in \mathbb{N}$, seien offene Teilmengen von M.

   Dann ist $U_1 \cap \ldots \cap U_k \subset M$ offen in M.

Beweis: (HA) vgl. Ana 1 – Satz 4.13. $\blacksquare$

Dieser Satz motiviert die folgende Definition.

Definition 1.4.: Ein <u>topologischer Raum</u> ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einem System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X (genannt offene Mengen), so dass gilt:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

ii) $U_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.

iii) $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{O}$, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $U_1 \cap \ldots \cap U_k \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ heißt dann auch <u>Topologie auf X</u>.

Beispiele: 1) (M,d) sei ein metrischer Raum. Dann ist die metrische Topologie $\mathcal{O} := \{ U \subset M \mid U \text{ ist offen bzgl. } d\}$ nach Satz 1.3 tatsächlich eine Topologie.

2) $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$; indiskrete Topologie

3) $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ = Menge aller Teilmengen von X; diskrete Topologie

4) Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist $\mathcal{O}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf Y, die induzierte Topologie.

ÜA: 2) & 4) sind Topologien; 3) = metrische Top. der trivialen Metrik

Beispiel: $(\frac{1}{2}, 1]$ ist offen in $[0,1]$ in der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie auf $[0,1]$. Vgl. Aua 1 – "offen in".

Definition 1.5.: Es sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum und x ein Punkt in X (d.h. $x \in X$). Eine Menge $U \subset X$ heißt Umgebung von x, falls eine offene Menge V existiert (d.h. $V \in \mathcal{O}$) mit

$$x \in V \subset U.$$

Beispiel: a) $U := [0,1] \subset \mathbb{R} =: X$ ist eine Umgebung für jedes $x \in (0,1)$. U ist aber keine Umgebung von $x=0$ oder $x=1$.

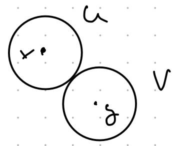
b) (M,d) metrischer Raum, $\mathcal{O}$ metrische Topologie.

U Umgebung von $x \in M \overset{(O)}{\Longleftrightarrow} \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U.$

Definition 1.6.: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt <u>Hausdorff-Raum</u>, falls zu allen $x \neq y \in X$ Umgebungen U von x und V von y existieren mit $U \cap V = \emptyset$.

<u>Beispiele:</u> 0) $(X, \mathcal{O} = \mathcal{P}(X))$ ist ein Hausdorff-Raum, da $\{x\}, \{y\}$ offen sind.

1) Jeder metrische Raum (M, d) mit der metrischen Topologie ist ein Hausdorff-Raum:



$$U := B_r(x) \; ; \; V := B_r(y) \; ; \; r := \tfrac{1}{2} d(x,y)$$

2) $(X, \{\emptyset, X\})$ ist nicht Hausdorffsch, falls X mindestens zwei Elemente enthält.

Analog zu Analysis 1 wird folgendes bewiesen.

Es sei (M, d) ein metrischer Raum (immer mit der metrischen Topologie ausgestattet).

Es sei $Y \subset M$ eine Teilmenge.

1) $\mathring{Y} := Y \setminus \partial Y$ "Innen"

$$= \bigcup \{ U \subset M \mid U \text{ offen und } U \subset Y \}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathring{Y}$ offen ; Y offen $\Leftrightarrow Y = \mathring{Y} \Leftrightarrow Y \cap \partial Y = \emptyset$.

2) $\overline{Y} := Y \cup \partial Y$ "Abschluss"

$$= \bigcap \{ A \subset M \mid A \text{ abgeschlossen und } Y \subset A \}$$

$\rightsquigarrow$ $\overline{Y}$ abgeschlossen ; Y abgeschlossen $\Leftrightarrow Y = \overline{Y} \Leftrightarrow \partial Y \subset Y$.

3) $\partial Y = \partial (M \setminus Y)$

4) Y abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ $M \setminus Y$ offen

Y offen $\Longleftrightarrow$ $M \setminus Y$ abgeschlossen

5) a) $\emptyset$, M abgeschlossen

b) $A_i \subset M$, $i \in I$, abgeschlossen $\Longrightarrow$ $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen

c) $A_1, \dots, A_k \subset M$, $k \in \mathbb{N}$, abgeschlossen $\Longrightarrow$ $A_1 \cup \dots \cup A_k$ abgeschlossen.

6) $\partial(\partial Y) \subset \partial Y$, insb. ist ∂Y abgeschlossen.

7) Der offene Ball $B_r(a)$ ist offen

Der abgeschlossene Ball $\overline{B}_r(a) = \{ x \in M \mid d(x,a) \leq r \}$

ist abgeschlossen und $\overline{B_r(a)} = \overline{B}_r(a)$.

8) Y ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt:

Für alle konvergenten Folgen in Y liegt auch der Grenzwert in Y.

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y \text{ konvergent} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} y_n \in Y.$$

1.2. Konvergenz und Stetigkeit

Definition 1.7.: Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im metrischen Raum (M,d), d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to M$, $n \mapsto x_n$.

i) (x_n) heißt <u>konvergent</u> gegen $a \in M$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \varepsilon. \quad [x_n \in B_\varepsilon(a)]$$

Zu jeder Umgebung U von a ——" —— $x_n \in U$.

Notation: $x_n \to a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

ii) (x_n) heißt <u>Cauchy-Folge</u>, falls gilt:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n,m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

iii) $a \in M$ heißt <u>Häufungspunkt</u> von (x_n), falls gilt:

$\forall \varepsilon>0$ enthält $B_\varepsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder.

Jede Umgebung von a enthält ——" ——.

<u>Bemerkung:</u> Definition 1.7. i) & iii) gilt analog für topologische Räume, indem "$B_\varepsilon(a)$" durch "Umgebung von a" ersetzt wird. In ii) ist der Abstandsbegriff essentiell.

<u>Beispiele:</u> 1) Sei $\mathcal{O}$ die indiskrete Topologie auf X, d.h. $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. Dann konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt.

2) In einem Hausdorff-Raum ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt (also insb. auf metrischen Räumen).

<u>Bew.:</u> Angenommen $x_n \to a$, $x_n \to b$ und $a \neq b$.

$\Rightarrow \exists$ Umgebungen U bzw. V von a bzw. b mit $U \cap V = \emptyset$

und $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : x_n \in U \cap V$ ↯

■

3) Für die Menge $\mathcal{B}(X)$ der beschränkten Funktionen auf X mit $\|\cdot\|_\infty$ und $d(f,g) := \|f-g\|_\infty$ gilt:

$$f_n \to f \text{ in } (\mathcal{B}(X), d) \iff f_n \to f \text{ gleichmäßig.}$$

<u>Bew.:</u> Es gilt: $f_n \to f \iff d(f_n, f) = \|f_n - f_\infty\| \to 0$.

D.h. $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$. ☒

4) Wie in Anm 1 zeigt man: Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. $[\, d(x_n, x_m) \le d(x_n, a) + d(a, x_m) \,]$.

Die Umkehrung ist falsch!

$M := (0, \infty)$; $d(x,y) := |x-y|$

$\Rightarrow$ $x_n := \frac{1}{n}$ definiert eine Cauchy-Folge, die in M nicht konvergiert.

Definition 1.8.

(i) (M,d) heißt <u>vollständiger</u> metrischer Raum, falls jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

(ii) Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt <u>Banachraum</u>, falls er bzgl. $d(x,y) = \|x-y\|$ vollständig ist.

<u>Beobachtung:</u> Es sei (M,d) ein metrischer Raum und $Y \subset M$.

a) (x_n) sei eine Folge in Y. Dann gilt

(x_n) ist eine Cauchy-Folge bzgl. (M,d)

$\iff$ (x_n) ist eine Cauchy-Folge bzgl. (Y, d_Y).

b) Es sei (M,d) vollständig und (x_n) eine Folge in Y mit $x_n \longrightarrow x$ in M.

Falls $x \notin Y$, so ist Y nicht vollständig.

<u>Bew.:</u> ÜA. ☒

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, denn

$$\mathbb{Q} \ni \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow{\text{in } \mathbb{R}} e \notin \mathbb{Q}.$$

<u>Beispiel:</u> $\left(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right)$ ist vollständig.

<u>Bew.:</u> Wir wissen $C^0([a,b]) \subset \mathcal{B}([a,b])$.

$\Longrightarrow$ Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ist gleichmäßige Konvergenz.

Nun sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^0([a,b])$.

<u>Zu zeigen:</u> (f_n) ist in $C^0([a,b])$ konvergent.

Wissen: $\forall x \in [a,b]: (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

$\left[\forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n,m \geq n_0 : \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.\right]$

$\rightsquigarrow$ $f^*(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ def. eine Funktion $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$

und $f_n \longrightarrow f^*$ gleichmäßig.

Ana 1 - S. 8.3 $\Longrightarrow$ f^* stetig, d.h. $f^* \in C^0([a,b])$. ☒