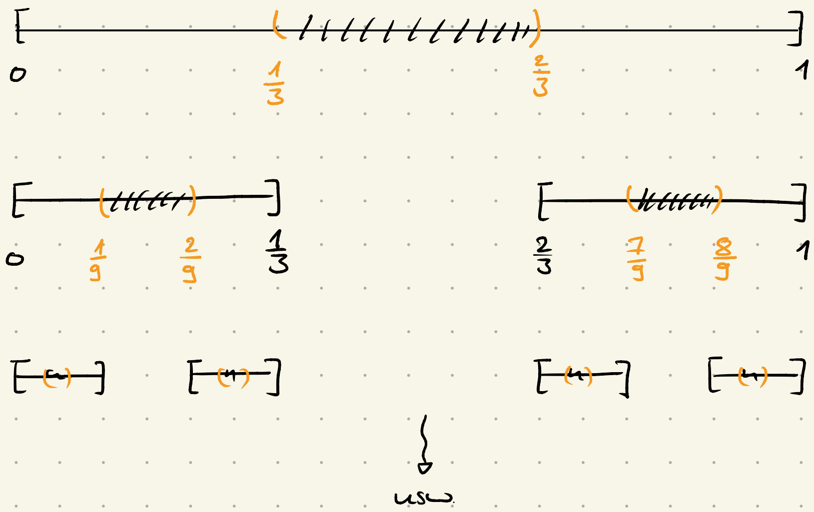
Die Cantor-Menge

1.2.21



C_0 1 Intervall

C_1 2 Intervalle

C_2 4 Intervalle ...

Beob
- nach n Schritten: 2^n Intervalle
- $C_0 = [0,1]$, $\quad C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right)$

Definiere

$$\boxed{C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} C_n \quad \text{Cantor-Menge}}$$

Ternäre Darstellung

Dezimalsystem: $x \in [0,1]$ $\quad x = 0,x_1x_2x_3\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{1}{10^i}$, $\quad x_i \in \{0,\ldots,9\}$

Ternarsystem: $x \in [0,1]$ $\quad x = 0,x_1x_2x_3\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{1}{3^i}$ $\quad x_i \in \{0,1,2\}$

Stellwertsystem zur Basis 3

Bsp

$$\left(\tfrac{5}{9}\right)_{10} = \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}\right)_{10} = (0,12)_3$$

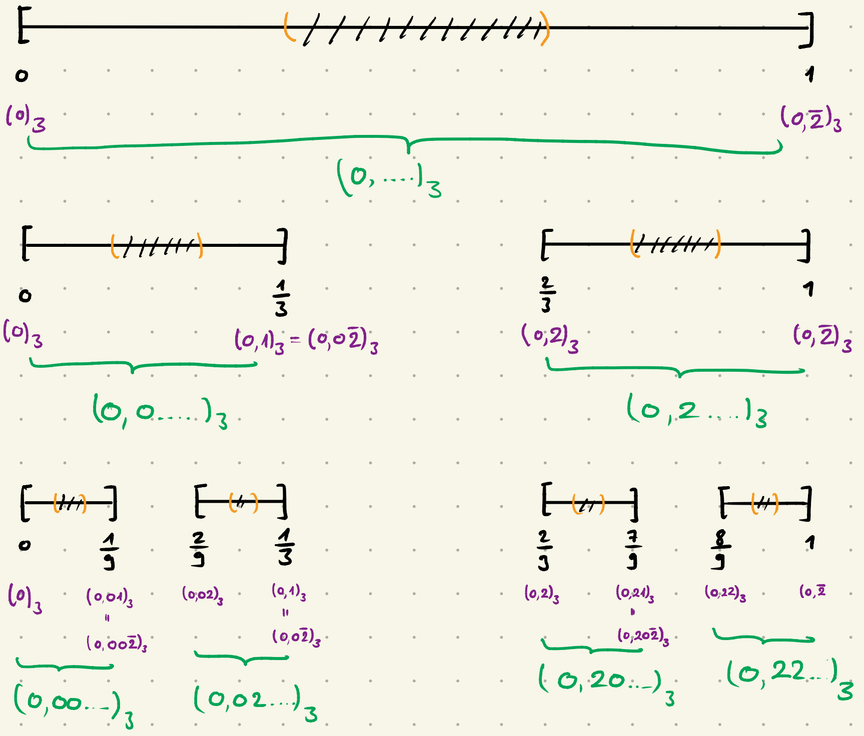
$$\left(\tfrac{7}{9}\right)_{10} = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{9}\right)_{10} = (0,21)_3$$

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)_{10} = (0,\overline{02})_3$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)_{10} = (0,1)_3 = (0,0\overline{2})_3$$

geom. Reihe

Bemerkung: $\ldots x_j 1\overline{0} = \ldots x_j 0\overline{2}$



$C_0 \rightarrow$ mit $0,\ldots$ beginnen

$C_1 \rightarrow x_1 \in \{0,2\}$

$C_2 \rightarrow x_2 \in \{0,2\}$

allgemein gilt: $C_n = \{c \in [0,1] \mid c_i \in \{0,2\} \ \forall i \leq n\}$

$$\rightarrow \boxed{C = \{c \in [0,1] \mid c_i \in \{0,2\} \ \forall i \in \mathbb{N}\}}$$

Eigenschaften

Länge: C_n besteht aus 2^n Intervallen der Länge jeweils $\frac{1}{3^n}$

$\Rightarrow$ Länge $(C_n) = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Limes: Länge $(C) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Mächtigkeit: Intervall-Randpunkte haben Form $\frac{x}{3^n}$ mit $x, n \in \mathbb{N}$

„Endpunkt" vom Intervall ganz links ist $\frac{1}{3^n}$

$\rightarrow$ alle Punkte $\frac{1}{3^n}$ gehören zu C

$\Rightarrow$ es gibt abzählbar unendlich viele Intervall-Randpunkte

Cantor-Menge ist überabzählbar

Beweis 2. Cantorsches Diagonalverfahren

Angenommen: C wäre abzählbar

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\} \quad \text{mit} \quad c_i = (0,c_{i1}\,c_{i2}\,c_{i3}\dots)_3$$

$$c_{ij} \in \{0,2\} \ \forall i,j$$

betrachte $x \in C$, $x = (0,x_1x_2\dots)_3$

mit $x_i \neq c_{ii}$

Bsp $c_1 = (0,\underline{0}2200\dots)_3 \rightarrow x_1 \neq 0$, $x_1 = 2$

$c_2 = (0,0\underline{2}0022\dots)_3 \rightarrow x_2 \neq 2$, $x_2 = 0$

$c_3 = (0,20\underline{2}2\dots)_3 \rightarrow x_3 \neq 2$ $x_3 = 0$

$\vdots$

$\Rightarrow x = (0,200\dots)_3$

da $x \in C \rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: x = c_k$

ABER $x_k \neq c_{kk}$ ↯

Korollar Es gibt überabzählbar viele Punkte in C, die keine Intervall-Randpunkte sind.

Bsp $\frac{1}{4} = (0,\overline{02})_3$

C und $[0,1]$ sind gleichmächtig

betrachte $f: C \longrightarrow [0,1]$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \frac{1}{3^i} \longmapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{x_j}{2}\frac{1}{2^j} \quad (\text{Binärdarstellung})$$

$x_i \in \{0,2\}$ $\qquad$ $\frac{x_j}{2} \in \{0,1\}$

es gilt: f ist surjektiv aber nicht injektiv

Bsp $\quad f\left(\tfrac{1}{3}\right) = f\left((0,0\overline{2})_3\right) = (0,0\overline{1})_2 = (0,1)_2 = \tfrac{1}{2}$

$\quad\quad f\left(\tfrac{2}{3}\right) = f\left((0,2)_3\right) = (0,1)_2 = \tfrac{1}{2}$

$\hookrightarrow$ linker und rechter Rand von rausgenommenem Intervall werden auf gleichen Punkt abgebildet

$\rightarrow \quad |C| = |[0,1]|$

Topologische Eigenschaften

Def Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt offen, falls $\forall m \in M \; \exists \varepsilon > 0$:

$$\{ y \in \mathbb{R} \mid |y-m| < \varepsilon \} \subseteq M$$

$M \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus M$ offen ist

Bsp $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ offen

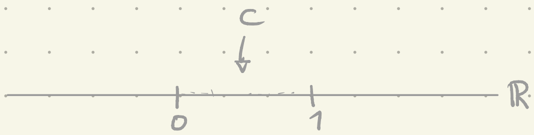
$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen

$(a,b] \subseteq \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen

Es gilt: Beliebige Vereinigung offener Mengen ist offen

Satz von Heine-Borel: $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt $\iff$ M ist abgeschlossen und beschränkt

Satz C ist abgeschlossen und kompakt



Beweis zeige: $\mathbb{R} \setminus C$ ist offen

$$\mathbb{R} \setminus C = \underbrace{\mathbb{R} \setminus [0,1]}_{\text{offen}} \cup \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i}_{\text{offen}} \quad \text{ist offen}$$

rausgenommene Intervalle

$\Rightarrow \; C$ ist abgeschlossen

$C \subseteq [0,1] \;\Rightarrow\; C$ ist beschränkt

$\Big\}$ C ist kompakt

Satz C ist total unzusammenhängend (d.h außer $\emptyset$, $\{x\}$ gibt es keine zusammenhängenden Mengen)

Beweis zz $\forall a,b \in C$, $a<b$ $\exists r \in \mathbb{R}\setminus C$: $a<r<b$

sei $a \neq b$ $\rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}$ minimal : $\underbrace{a_k \neq b_k}_{\text{Nachkommastellen}}$

setze $r = 0,a_1 a_2 \dots a_{k-1} 1 1 \notin C$

Korollar : C enthält keine Intervalle

Bemerkung :

- C hat keine isolierten Punkte

  $\downarrow$

  $x \in X$ heißt isoliert, falls es Umgebung um x gibt, die außer x keinen Punkt aus X enthält

- $C - C = \{x - y \mid x,y \in C\} = [-1,1]$