Aufgabe 1. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a. $\overline{M} := M \cup \partial M$ ist abgeschlossen.

Beweis. Die Behauptung ist äquivalent zu der Aussage $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ ist offen (Lemma 4.10.ii). Wir können diese Menge umschreiben

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n \setminus \overline{M} &= \mathbb{R}^n \setminus (M \cup \partial M) \\
&= (\mathbb{R}^n \setminus M) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \partial M) \\
&= (\mathbb{R}^n \setminus M) \setminus \partial M \\
&= (\mathbb{R}^n \setminus M) \setminus \partial(\mathbb{R}^n \setminus M),
\end{aligned}$$

in der letzten Umformung haben wir Beispiel 3 aus Vorlesung 14 benutzt. Nach Lemma 4.15 a) ist die Menge $(\mathbb{R}^n \setminus M) \setminus \partial(\mathbb{R}^n \setminus M)$ offen. □

b. A abgeschlossen und $M \subset A \Rightarrow \overline{M} \subset A$.

Beweis. Sei $p \in \overline{M}$, angenommen $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$ (äquivalent zu $p \notin A$). Insbesondere folgt, dass $p \in \partial M$, denn M ist in eine Teilmenge von A. Da $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist (Beispiel 3, nach Definition 4.8) gibt es ein $r > 0$, sodass $B_r(p) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ (Lemma 4.11). Da $M \subset A$ ergibt sich, dass $B_r(p) \cap A = \emptyset$. Die widerspricht jedoch der Beobachtung $p \in \partial M$, es folgt $p \in A$ und $\overline{M} \subset A$. □

c. $\overline{M} = \bigcap \{A \subset \mathbb{R}^n \mid M \subset A \text{ und } A \text{ abgeschlossen}\}$.

Beweis. Wir zeigen beide Inklusionen.

$\underline{\subset}$: Jede abgeschlossene Menge, die M enthält, enthält auch $\overline{M}$ (vergleiche b). Damit ist $\overline{M}$ auch im Schnitt all dieser Mengen enthalten.

$\underline{\supset}$: $\overline{M}$ ist eine abgeschlossene Menge, welche M enthält (vergleiche a). Daher ist der Schnitt über alle Mengen mit dieser Eigenschaft eine Teilmenge von $\overline{M}$. □

Aufgabe 2. Es sei $d \in \mathbb{N}$.

a. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $K_n \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge und es gelte $\bigcap_{f \in F} K_f \neq \emptyset$ für alle endlichen Teilmengen $F \subset \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ gilt.

Beweis. Für alle $k \in \mathbb{N}$ betrachten die Menge $M_k = \bigcap_{n \leq k} K_n$. Nach Voraussetzung gilt $M_k \neq \emptyset$. Zu jedem M_k wählen wir ein Element $x_k \in M_k$. Da $M_k \subset K_1$, für alle k, ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K_1. Nach der vorausgesetzten Kompaktheit von K_1 gibt es eine (in K_1) konvergente Teilfolge $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$, wir bezeichnen den Grenzwert mit $x^* \in K_1$. Die Teilfolge von (x_{k_l}) bestehend aus allen Elementen deren Index $k_l \geq 2$ erfüllt ist eine Folge in K_2. Als Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert auch $(x_{k_l})_{k_l \geq 2}$, der Grenzwert ist wieder x^*. Da jede kompakte Menge abgeschlossen ist folgt $x^* \in K_2$. Das selbe Argument gilt für alle K_n und die Teilfolge mit Indizes $k_l \geq n$. Wir sehen also, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x^* \in K_n$. Also $x^* \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. $\square$

b. Geben für alle $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossene, nichtleere Mengen $A_n \subset \mathbb{R}^d$ an mit $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.
(In dieser Situation sind beliebige *endliche* Schnitte notwendigerweise nichtleer!)

Beweis. Wir betrachten die Mengen $A_n = [n, \infty)^d$. Dann ist A_n abgeschlossen nach Vorlesung und $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Für jedes $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > x_1$. Dann gilt $x \notin A_N$, also auch $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Da x beliebig war, folgt dass der Schnitt leer ist. $\square$

Aufgabe 3. Sei $C_0 := [0, 1]$, und ist per Induktion

$$C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$$

gegeben als Vereinigung von 2^n disjunkten abgeschlossenen Intervallen $I_{n,k}$ der Länge 3^{-n}, so sei C_{n+1} definiert als Vereinigung aller disjunkten abgeschlossenen Intervalle $I_{n+1,2k-1}$, $I_{n+1,2k}$, die durch Entfernung des offenen mittleren Drittels aus $I_{n,k}$ von C_n entstehen, d. h.

$$C_{n+1} := \bigcup_{k=1}^{2^n} (I_{n+1,2k-1} \cup I_{n+1,2k}) = \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}} I_{n+1,k}.$$

Auf diese Art wird rekursiv eine Folge $C_0, C_1, \ldots$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert, und wir setzen $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Diese Menge heißt *Cantor Menge*. Nach Aufgabe 2 a) ist C nicht leer.

Zeigen Sie:

a. C ist kompakt.

Beweis. Allgemein kann man zeigen, dass abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen wieder kompakt sind.

In dem vorliegenden Fall ist C abgeschlossen, als Schnitt von abgeschlossenen Mengen. Jedes C_n ist abgeschlossen als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen. Da $C \subset C_0 = [0, 1]$ ist C eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Mit dem Satz von Heine–Borel ist C kompakt. $\square$

b. Die Gesamtlänge von C_n geht gegen 0: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} |I_{n,k}| = 0$.

Beweis. Jedes $I_{n,k}$ hat Länge 3^{-n}, die Gesamtlänge von C_n ergibt sich als $\sum_{k=1}^{2^n} |I_{n,k}| = \frac{2^n}{3^n}$. Es bleibt zu zeigen, dass die Folge $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ gegen 0 konvergiert. Da die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt ist bleibt nur die Behauptung über den Limes zu zeigen. Mit $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergiert auch die Teilfolge $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ und zwar mit demselben Grenzwert. Sei $c = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Damit ergibt sich

$$c = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{3} \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} c.$$

Wir sehen, dass dies nur für $c = 0$ möglich ist. $\square$

c. Das Innere von C ist leer: $\mathring{C} = \emptyset$.

Beweis. Per Widerspruch nehmen wir an, es gebe ein $x \in \mathring{C}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathring{C} \subset C$. Dann gilt auch für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset C_n$. Die Gesamtlänge von C_n erfüllt also $2\varepsilon \leq \sum_{k=1}^{2^n} |I_{n,k}| = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Dies widerspricht jedoch der in b. bewiesenen Konvergenz. $\square$

d. Für jeden Punkt $c \in C$ gibt es eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in C mit $c_k \to c$, aber $c_k \neq c \, \forall k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $c \in C$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $c \in C_n$, also gibt es ein $I_{n,k}$ mit $c \in I_{n,k}$, für ein $1 \leq k \leq 2^n$. Falls $c \neq \inf I_{n,k}$ so setzen wir $c_n = \inf I_{n,k}$, falls $c = \inf I_{n,k}$ so setzen wir $c_n = \sup I_{n,k}$. Da alle C_n abgeschlossen sind gilt $c_n \in C_n$. Wir müssen noch zeigen, dass c_n gegen c konvergiert und dass die Folge in C liegt.

Zur Konvergenz: Da c_n und c im selben Intervall $I_{n,k}$ liegen folgt, dass $|c - c_n| \leq |I_{n,k}| = 3^{-n}$. Dies zeigt die Konvergenz, da 3^{-n} eine Nullfolge ist.

Zu $c_n \in C$: Wir haben $c_n = \inf I_{n,k}$ oder $c_n = \sup I_{n,k}$. Da die Intervalle von C_{n+1} aus denen von C_n durch entfernen des mittleren Drittels, das heißt insbesondere, dass $\inf I_{n+1,2k-1} = \inf I_{n,k}$ und $\sup I_{n+1,2k} = \sup I_{n,k}$. Damit liegt c_n in C_{n+1}. Induktiv folgt, dass c_n in allen C_k liegt und damit auch in C. $\square$