Aufgabenblatt 12

Abgabe am 16. Juli 2020 bis um 12 Uhr, per heiBox

Aufgabe 1 (Grenzwertig)**.** Sei $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ der sogenannte *Arccosinus*, die Umkehrabbildung des (eingeschränkten) Cosinus

$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]. \tag{1}$$

Sowohl in dieser als in der nächsten Aufgabe, denken Sie daran, dass, wie in der Vorlesung erwähnt, sich Integrale und Potenzreihen unter Umständen vertauschen lassen.

(i) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie die Ableitungen des Arccosinus, und der Funktion $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x)\right). \tag{2}$$

Nun definieren wir die reelle Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch

$$a_n = \int_0^1 dx\,(1-x^2)^{n/2}. \tag{3}$$

(ii) *(2 Punkte)* Berechnen Sie a_0 und a_1.

(iii) *(3 Punkte)* Zeigen Sie die Rekursionsformel

$$a_n = \frac{n+3}{n+2}a_{n+2}. \tag{4}$$

(iv) *(2 Punkte)* Berechnen Sie schließlich den Grenzwert der Folge

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}, \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}, \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}, \ldots. \tag{5}$$

Aufgabe 2 (Allnächtlich im Traume)**.** In dieser Aufgabe, werden partielle Integration und Integration durch Substitution angewandt, um eine auffällige Formel zu beweisen.

(i) *(2 Punkte)* Leiten Sie, mithilfe partieller Integration, eine Formel für die Stammfunktionen F_n von

$$f_n(u) = u^n e^{-u} \tag{6}$$

auf $\mathbb{R}_+$ her, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *(2 Punkte)* Setzen Sie diese Formel ein und beweisen Sie damit, dass

$$\int_0^\infty du\, u^n e^{-u} = n! \tag{7}$$

In den nächsten Teilen der Aufgabe, werden wir (7) benutzen, um einen weiteren Beweis durchzuführen. Ist es Ihnen nicht gelungen, die ersten Teile zu lösen, so dürfen Sie einfach (7) einsetzen.

(iii) *(3 Punkte)* Berechnen Sie nun

$$\int_0^1 dx\, \frac{(x\ln x)^n}{n!}, \tag{8}$$

indem Sie eine geeignete Substitution finden, die diese Rechnung in (7) umwandelt.

(iv) *(3 Punkte)* Beweisen Sie nun schließlich die etwas überraschende Gleichung

$$\int_0^1 dx\, x^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}. \tag{9}$$

Hierfür empfielt es sich, die Potenzreihe der Exponentialfunktion auf den Integrand anzuwenden.

Aufgabe 3 (Stammkneipe)**.** Bestimmen Sie, auf geeigneten Teilmengen von $\mathbb{R}$, Stammfunktionen der folgenden Funktionen, mit den entsprechenden Methoden:

(i) *(2 Punkte)* Substitution:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}; \tag{10}$$

(ii) *(3 Punkte)* Substitution (und inverse trigonometrische Funktionen):

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}; \tag{11}$$

(iii) *(2 Punkte)* "Partialbruchzerlegung:"

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4x-5}. \tag{12}$$

Hier sollten Sie den Integrand in der Form

$$f(x) = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{x-s} \tag{13}$$

schreiben, wo die Konstante A, B, r, und s in $\mathbb{R}$ liegen.

(iv) *(3 Punkte)* partielle Integration und Substitution:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right). \tag{14}$$

Aufgabe 4 (Auf nach Basel)**.** Sei $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, analog zur ersten Aufgabe, die Umkehrfunction des (eingeschränkten) Sinus $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, auch *Arcsinus* genannt. In dieser Aufgabe werden wir das Integral

$$\int_0^1 dx\, \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{15}$$

mit zweierlei Methoden ausrechnen.

(i) *(2 Punkte)* Rechnen Sie mit impliziter Differentiation die Ableitung des Arcsinus aus.

(ii) *(2 Punkte)* Durch eine geeignete Substitution zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 dx\, \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{16}$$

(iii) *(1 Punkt)* Zeigen Sie (entweder mit dem binomischen Lehrsatz, oder durch Ableitung und vollständige Induktion), dass

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{17}$$

(Sollte diese Teilaufgabe Ihnen nicht gelingen, dürfen Sie (17) in den weiteren Teilaufgaben trotzdem einsetzen.)

(iv) *(2 Punkte)* Durch Integration von (17) beweisen Sie, dass

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{18}$$

(v) *(2 Punkte)* Setzen Sie (18) in (15) ein, und zeigen Sie so, dass

$$\int_0^1 dx\, \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \tag{19}$$

So haben Sie bewiesen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{20}$$

(vi) *(1 Punkt)* Schließlich folgern Sie aus (20), dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{21}$$

wie schon öfter in der Vorlesung erwähnt.