Aufgabenblatt 11

Abgabe am 9. Juli 2020 bis um 12 Uhr, per heiBox

Aufgabe 1 (Implizite Abhängigkeit)**.**

(i) *(2 Punkte)* Wir hatten im §7 den natürlichen Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definiert als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, aber bisher noch nicht seine analytischen Eigenschaften festgehalten. Zeigen Sie durch implizite Differentiation, dass $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$.

(ii) *(2 Punkte)* In Blatt 7, Aufgabe 2, wurde der Sinus hyperbolicus definiert als

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie, dass sinh eine globale Umkehrfunktion besitzt, genannt "Areasinus hyperbolicus", geschrieben $\sinh^{-1}$, und leiten Sie eine Formel für ihre Ableitung her. Benutzen Sie hierzu die Identität $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(iii) *(2 Punkte)* Der Tangens hyperbolicus ist definiert durch

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Diskutieren Sie Bild von tanh, Existenz einer Umkehrfunktion und berechnen Sie wieder deren Ableitung.

(iv) *(2 Punkte)* Wiederholen Sie (iii) für den Cotangens hyperbolicus

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

(v) *(2 Punkte)* Berechnen Sie zuletzt die Ableitung von $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$.

Aufgabe 2 (Matrix Reloaded)**.** In dieser Aufgabe betrachten wir folgende Abbildung:

$$q : \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}), \quad A \mapsto A^2. \tag{1}$$

Da $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ als metrische Räume, z.B. mithilfe des Isomorphismus

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

können wir uns q als Abbildung euklidischer Räume vorstellen.

(i) *(2 Punkte)* Begründen Sie, dass q überall total differenzierbar ist.

(ii) *(2 Punkte)* Berechnen Sie das totale Differential von q, in Abhängigkeit von $A \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$, zunächst in Matrixdarstellung ohne Koordinaten zu benutzen. (Vergleiche die Erklärungen zur Produktregel (9.3) im Skript.)

(iii) *(2 Punkte)* Stellen Sie $Dq(A)$ als Jacobi-Matrix in der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ dar.

(iv) *(2 Punkte)* Zeigen Sie folgenden Satz: $Dq(A)$ ist nicht invertierbar—das heißt, $\mathrm{Rang}(Dq(A)) < 4$—genau dann, wenn $\det(A) = 0$ oder $\mathrm{tr}(A) = 0$.

(v) *(2 Punkte)* Geben Sie, für die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ und } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

eine Basis des Kerns von $Dq(A)$, als Unterraum von $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$, an.

Aufgabe 3 (Zwei Kugeln, bitte)**.** Wir betrachten folgende krummlinige Koordinaten auf der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$:

$$K : \mathbb{R}^2_{(\xi,\chi)} \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} x(\xi,\chi) = \dfrac{\sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\chi}, \\ y(\xi,\chi) = \dfrac{\sin\chi}{\cosh\xi - \cos\chi}. \end{cases} \tag{4}$$

In dieser Aufgabe geht es um die Geometrie dieser Koordinaten, in der nächsten um die Analysis. Es empfiehlt sich aber, Information zwischen beiden umsichtig zu teilen.

(i) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Koordinatenlinie $\xi = \xi_0$ konstant (d.h. das Bild der Geraden $\{(\xi_0,\chi) \mid \chi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2_{(\xi,\chi)}$ unter K) ein Kreis mit Mittelpunkt auf der x-Achse ist. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises. **Tipp:** Eliminieren Sie χ aus der Beziehung zwischen (x,y) und (ξ,χ) mit Hilfe der Identität $\cos^2\chi + \sin^2\chi = 1$.

(ii) *(1 Punkt)* Die Koordinatenlinie $\chi = \chi_0$ konst. ist ein Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse.

(iii) *(3 Punkte)* Die Kreise aus (i) schneiden die Kreise aus (ii) in einem rechten Winkel.

(iv) *(3 Punkte)* Skizzieren Sie (ohne Hilfe eines intelligenten Agenten) die Koordinatenlinien für einige repräsentative Werte von ξ_0, χ_0.

Aufgabe 4 (Laplace'scher Dämon)**.** Wir fahren fort mit den krummlinigen Koordinaten aus der vorangegangenen Aufgabe.

(i) *(4 Punkte)* Überzeugen Sie sich davon, dass K surjektiv ist, aber nicht injektiv. Beschreiben Sie die Menge $V \subset \mathbb{R}^2$, auf der (ξ,χ) "gute Koordinaten" sind. (Für den Begriff der guten Koordinaten, siehe Skript S. 106.)

(ii) *(6 Punkte)* Schreiben Sie den zwei-dimensionalen Laplace-Operator auf die Koordinaten (ξ,χ) um. (Werten Sie hierfür die Formel (13.35) im Skript aus oder geniessen Sie zuerst Plenarübung 9.)