Aufgabenblatt 10

Abgabe am 2. Juli 2020 bis um 12 Uhr, per heiBox

Aufgabe 1 (Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen)**.** Sei $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. *(5 Punkte)* $(\partial_x h)(0,y) = -y$ und $\left(\partial_y h\right)(x,0) = x$.
2. *(5 Punkte)* $\left(\partial_y \partial_x h\right)(0,0) = -1$ und $\left(\partial_x \partial_y h\right)(0,0) = 1$.

Aufgabe 2 (Extremstellen)**.** Untersuchen Sie die Funktion

$$f : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y(x-1)e^{-(x^2+y^2)}$$

auf Extrema. **Tipp:** Berechnen Sie für jeden kritischen Punkt von f die Hesse-Matrix. Sind deren Eigenwerte beide positiv, so liegt ein Minimum vor, sind beide negativ, ein Maximum. Bei gemischten Vorzeichen liegt kein Extremum vor.

Aufgabe 3 (Stereographische Projektion)**.** Es seien $\mathbb{R}^2 \ni x$ und $\mathbb{R}^3 \ni y$ ausgerüstet mit den standard euklidischen inneren Produkten $\langle x_1, x_2\rangle := \sum_{i=1}^{2} x_1^i x_2^i$ bzw. $\langle y_1, y_2\rangle := \sum_{j=1}^{3} y_1^j y_2^j$, $\|\cdot\|$ die zugehörigen Normen und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die differenzierbare Abbildung

$$F(x) := \left(\frac{2x^1}{\|x\|^2+1}, \frac{2x^2}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\right)^T$$

(i) *(2 Punkte)* Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $B(x)$ von F und zeigen Sie, dass sie überall Rang 2 hat. **Tipp:** Es genügt zu zeigen, dass $\det B(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^2$.

(ii) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass für alle $x, v \in \mathbb{R}^2$

$$\langle DF(x)(v), F(x)\rangle = 0$$

Interpretieren Sie dieses Resultat geometrisch und beschreiben Sie das Bild $S := F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ von $\mathbb{R}^2$ unter F. **Tipp:** $\{\langle y,y\rangle = 1\}$

(iii) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass F injektiv ist und geben Sie eine Formel für die Umkehrabbildung $F^{-1} : S \to \mathbb{R}^2$.

(iv) *(3 Punkte)* Für $x \in \mathbb{R}^2$ sei $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$g(v_1, v_2) := \langle DF(x)(v_1), DF(x)(v_2)\rangle$$

Begründen Sie, dass g eine positiv definite symmetrische Bilinearform ist, und berechnen Sie ihre Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

Tipp: Verfolgen Sie solange die Faktoren 2, bis sich das Endergebnis einigermassen vereinfacht.

Aufgabe 4 (Dimensionen)**.** In der Vorlesung wurde erklärt, wie ein euklidisches inneres Produkt q auf $\mathbb{R}^3$ lineare Algebra und Differentialrechnung bereichert. Nun ist für jedes $\lambda > 0$ $q_\lambda := \lambda^2 q$ ebenfalls ein euklidisches inneres Produkt (explizit also $q_\lambda(v,w) := \lambda^2 q(v,w)$) und wir können diese Konstruktionen in Abhängigkeit von λ wiederholen. Wir sagen, ein derart konstruiertes *Objekt $\mathcal{O}_\lambda$ habe Dimension $d \in \mathbb{Q}$*, falls $\mathcal{O}_\lambda = \lambda^d \mathcal{O}_1$ für alle λ. Beispiel: q selbst hat Dimension 2, die zugehörige Norm $\|\cdot\|$ hat Dimension 1, etc. (Physikalisch entspricht λ also einer Änderung des Längenmassstabs.) Bestimmen Sie (mit Begründung!) die Dimensionen der folgenden in der Vorlesung definierten Objekte:

(i) *(2 Punkte)* $\det(q)$ (als reelle Zahl)

(ii) *(2 Punkte)* D (das Differential)

(iii) *(2 Punkte)* grad (als Abbildung von skalaren Funktionen auf Vektorfelder)

(iv) *(2 Punkte)* div (als Abbildung von Vektorfeldern auf skalare Funktionen)

(v) *(2 Punkte)* rot (als Abbildung von Vektorfeldern auf Vektorfelder)

Tipp: Der Knackpunkt bei (v) ist die Dimension des Kreuzprodukts. Sie können auch verwenden, dass $\mathrm{grad} = \nabla$, $\mathrm{div} = \nabla\cdot$ und $\mathrm{rot} = \nabla\times$.