Aufgabenblatt 9

Abgabe am 25. Juni 2020 bis um 12 Uhr, per heiBox

Aufgabe 1 (Funktionenfolgen)**.** Sei $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Folgen von reellen Funktionen auf X,
(a) ob f_n punktweise konvergiert, d.h., ob für alle $x \in X$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existiert für eine geeignete Funktion f;
(b) ob f_n gleichmässig konvergiert, d.h., ob $\lim_{n\to\infty}\bigl(\sup\{|f_n(x)-f(x)| \bigm| x \in X\}\bigr) = 0$.

(i) *(2 Punkte)* $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$;

(ii) *(2 Punkte)* $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$;

(iii) *(3 Punkte)* $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$;

(iv) *(3 Punkte)* $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$.

Aufgabe 2 (Ungenügende Schätzungen)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist auf ganz $\mathbb{R}$, und dass alle Ableitungen in $x = 0$ verschwinden: das heißt,

$$\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=0} = 0 \quad \forall n \geq 0. \tag{2}$$

Aufgabe 3 (Jacobi-Matrizen)**.** Berechnen Sie die Jacobi-Matrix folgender Abbildungen:

(i) *(5 Punkte)*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}; \tag{3}$$

(ii) *(5 Punkte)*

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{4}$$

Aufgabe 4 (Legendre-Transformationen)**.** In der klassischen Mechanik vermittelt bekanntlich Legendre zwischen Lagrange und Hamilton. Etwas weniger bekannt, und für die Thermodynamik relevant, ist der Zusammenhang zur Konvexität, ganz ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzung:

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall (konvexe Teilmenge) und $f : I \to \mathbb{R}$ eine *konvexe* Funktion, so definieren wir die *Legendre-Transformierte* von (I, f) als das Paar (I^*, f^*), das durch

$$I^* = \left\{ s \in \mathbb{R} : \sup_{x\in I}(xs - f(x)) < \infty \right\}, \qquad f^* : I^* \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \sup_{x\in I}(xs - f(x)) \tag{5}$$

definiert wird. Man beachte, dass I nicht notwendig offen ist und auch unbeschränkt sein darf; auch einzelne Punkte sind hier als Intervalle zugelassen. Zeigen Sie:

(i) *(2 Punkte)* I^* ist eine nicht-leere konvexe Teilmenge, und f^* ist wiederum eine konvexe Funktion darauf.

(ii) *(2 Punkte)* Für alle $x \in I$ und $s \in I^*$ gilt

$$f(x) + f^*(s) \geq xs. \tag{6}$$

(iii) *(2 Punkte)* Ist (J, g) ein weiteres solches Paar mit $J \subset I$ und $g \geq f|_J$, so folgt daraus, dass $J^* \supset I^*$ und $f^* \geq g^*|_{I^*}$.

(iv) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie die Legendre-Transformierten folgender drei Paare:

$$\begin{aligned} I = \mathbb{R}, \quad & f(x) = x^2/2; \\ J = [0, \infty), \quad & g(x) = x^a \text{ für } a > 1; \\ K = \mathbb{R}, \quad & h(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq 1; \\ \frac{1}{2}(1 + |x|), & |x| < 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

(v) *(1 Punkt)* Zeigen Sie, wenn $I^* = I$ und $f^* = f$, dass das Paar (I, f) gleich $(\mathbb{R}, x \mapsto x^2/2)$ ist. (*Hinweis:* Wenden Sie zunächst (ii) und dann (iii) an.)