Aufgabenblatt 8

Abgabe am 18. Juni 2020 bis um 12 Uhr, per heiBox

Aufgabe 1 (Stets treu?). Untersuchen Sie folgende reelle Funktionen auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, und Lipschitz-Stetigkeit:

(i) *(2 Punkte)* $f(x) = x^3$;

(ii) *(2 Punkte)* $f(x) = 1/(1+x^2)$;

(iii) *(3 Punkte)* $f(x) = x\sin(1/x)$ (mit $f(0) = 0$);

(iv) *(3 Punkte)* $f(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$.

Aufgabe 2 (Zwischenwertsatz). Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden ihrer Werte genau n Mal annimmt. (*Hinweis:* Untersuchen Sie die Werte von f in der Umgebung ihrer Extremstellen. Hier wird Differenzierbarkeit nicht vorausgesetzt!)

Aufgabe 3 (Irrationales Verhalten). Sei (X,d) ein metrischer Raum, und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion darauf. Die Menge

$$\mathrm{Stet}(f) = \{x \in X : f \text{ stetig in } x\}, \tag{1}$$

nennen wir logischerweise den *Stetigkeitsbereich* von f. In dieser (und auch der nächsten) Aufgabe betrachten wir $X = \mathbb{R}$. Schauen wir uns erst mal folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \in \mathbb{Q} \quad (p,q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1); \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{2}$$

(i) *(4 Punkte)* Beweisen Sie, dass $\mathrm{Stet}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (*Hinweis:* Um Gleichung 6.7 im Skript herum gibt's eine hilfreiche Skizze.)

(ii) *(3 Punkte)* Sei nun $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beliebige *abzählbare* Teilmenge. Beweisen Sie, dass es sogar eine *monoton wachsende* Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, mit Stetigkeitsbereich

$$\mathrm{Stet}(g) = \mathbb{R} \setminus A. \tag{3}$$

(Wir schlagen vor, dass Sie sich die Formel

$$g(x) = \sum_{n : a_n < x} 2^{-n} \tag{4}$$

anschauen.) Dies gilt also auch insbesondere für $A = \mathbb{Q}$.

(iii) *(3 Punkte)* Berechnen Sie den Stetigkeitsbereich von

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{5}$$

Aufgabe 4 (Rationalität ausgeschlossen). Hier wollen wir beweisen, dass es *keine* Funktion geben kann, deren Stetigkeitsbereich $\mathbb{Q}$ ist.

(i) *(4 Punkte)* Zeigen Sie erst mal für eine beliebige Funktion f, dass $\mathrm{Stet}(f)$ sich immer als Schnitt von einer Folge offener Teilmengen von X schreiben lässt. Das heißt,

$$\mathrm{Stet}(f) = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_k. \tag{6}$$

Am besten nehmen Sie

$$U_k = \{x \in X : \exists \delta, \text{ sodass } d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < 1/k\}. \tag{7}$$

(ii) *(4 Punkte)* Zwecks Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass auch $\mathbb{Q}$ von der obigen Form ist, also

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_k \tag{8}$$

mit $U_k \subset \mathbb{R}$ offen. Konstruieren Sie aus dieser Annahme eine Folge von Intervallen I_k, sodass:

- $I_k \subset U_k$;
- $I_{k+1} \subset I_k$ und $\mathrm{diam}(I_k) \to 0$;
- a_k liegt nicht in I_k.

(iii) *(2 Punkte)* Mithilfe dieser Intervallschachtelung zeigen Sie, dass wenn $\mathbb{Q} \subset \mathrm{Stet}(f)$, es immer *mindestens eine* irrationale Zahl gibt, die auch in $\mathrm{Stet}(f)$ liegt. (Überlegen Sie sich, warum dieser Beweis keinen Widerspruch mit der Aufgabe 3(iii) liefert.)