Aufgabenblatt 7

Abgabe am 11. Juni 2020 bis um 12 Uhr, per heiBox

Aufgabe 1 (Die hypergeometrische Reihe)**.** Sei $c \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren das *Pochhammer-Symbol* $(c)_k$ durch die Formel

$$(c)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (c+j). \tag{1}$$

Damit definieren wir die *hypergeometrische Reihe* (vgl. Beispiel 5.18 im Skript): für $a,b,c \in \mathbb{C}$ und $c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0} = \{0,-1,-2,-3,\ldots\}$, ist sie durch

$$F(a,b,c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \tag{2}$$

gegeben. Berechnen Sie den Konvergenzradius in Abhängigkeit von a, b, und c.

Aufgabe 2 (Inverse Potenzreihen)**.** Der *Sinus* und der *Cosinus hyperbolicus* werden, in Anlehnung an die gewohnten Sinus- und Cosinus-Funktionen, durch die Formeln

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{3}$$

definiert.

(i) *(2 Punkte)* Geben Sie Potenzreihen für $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ an.

(ii) *(2 Punkte)* Beweisen Sie, dass

$$g(x) = \frac{x^2}{\sinh(x)^2} \tag{4}$$

eine stetige Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus 0$.

(iii) *(3 Punkte)* Berechnen Sie den Grenzwert von $g(x)$ für $x \to 0$, und folgern Sie schließlich daraus, dass $g(x)$ eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ hat.

(iv) *(3 Punkte)* In der Tat lässt sich auch $g(x)$ als Potenzreihe darstellen:

$$g(x) = \sum_k a_k x^k. \tag{5}$$

Rechnen Sie die ersten 5 Werte von a_k aus. (*Hinweis:* Sie lösen dabei die Gleichung

$$\left(\sum_k a_k x^k\right) \cdot \frac{\sinh(x)^2}{x^2} = 1, \tag{6}$$

für die Koeffizienten a_k, der Reihe nach. Dass das möglich ist, wurde schon auf Blatt 1 bewiesen.)

Aufgabe 3 (Produkträume)**.** Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und $\|\cdot\|$ die Eins-Norm auf $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten folgende Funktion:

$$d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}_+, \qquad (x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto \|(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2))\|. \tag{7}$$

Man zeige:

(i) *(3 Punkte)* d ist eine Abstandsfunktion, und damit $(X \times Y, d)$ ein metrischer Raum.

(ii) *(4 Punkte)* Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und $x \in X$. Dann ist $f(x, \cdot) : Y \to \mathbb{R}$ stetig auf Y, und ebenfalls $f(\cdot, y)$ stetig auf X $\forall y \in Y$.

(iii) *(3 Punkte)* Eine Funktion, deren Einschränkungen $f(x, \cdot)$ und $f(\cdot, y)$ auf die getrennten Argumente überall stetig sind $\forall x, y$, muss jedoch *nicht* überall stetig sein auf $X \times Y$! Hierzu geben Sie ein Beispiel an. (*Hinweis:* Eine geeignete Funktion steht im Skript.)

Aufgabe 4 (Grenzenlos, Wertlos)**.** Betrachten Sie die folgenden Potenzreihen:

$$
\begin{aligned}
R(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots, \\
S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2^k} = x - x^2 + x^4 - x^8 + x^{16} - \cdots.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Offensichtlich ist $R(x)$ eine geometrische Reihe. In dieser Aufgabe soll x nur reelle Werte annehmen.

(i) *(1 Punkt)* Beweisen Sie, dass der Konvergenzradius beider Reihen 1 beträgt. So definieren sowohl $R(x)$ als auch $S(x)$ stetige Funktionen von x, wenn x innerhalb des Konvergenzkreises liegt—für reelle x also auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$.

(ii) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass die beiden Funktionalgleichungen

$$R(x) + xR(x) = 1, \qquad S(x) + S(x^2) = x, \tag{9}$$

gelten, und folgern Sie daraus, dass die Grenzwerte von $R(x)$ und $S(x)$ für $x \to 1$—*falls* sie existieren—jeweils 1/2 betragen müssen.

(iii) *(1 Punkte)* Zeigen Sie, dass $R(x)$ eine stetige Fortsetzung auf $+1$ hat, auf -1 jedoch nicht. Was passiert für $x \to -1$?

(iv) *(2 Punkte)* Beweisen Sie, dass $0 < S(x) < x$ $\forall x \in (0, 1)$.

(v) *(2 Punkte)* Folgern Sie aus obiger Gleichung (9), dass $S(x) > S(x^4)$ $\forall x \in (0, 1)$.

(vi) *(2 Punkte)* Hat $S(x)$ überhaupt einen Grenzwert für $x \to 1$? (*Hinweis:* Konstruieren Sie eine untere Schranke für $S(0.995)$, und bringen Sie diese in Verbindung mit (v) zum Einsatz.)