Aufgabenblatt 6 und Probeklausur

Abgabe **heute** bis um 11 Uhr MESZ, per heiBox
Arbeitszeit: 8.00–11.00 Uhr, 180 Minuten

Anweisungen: Sie bearbeiten dieses Übungsblatt im Format einer "stay-at-home" Klausur wie gewohnt, mit Papier und Stift, mit einem Tablet, oder in LaTeX, verbinden Ihre Ergebnisse zu einem **einzigen** pdf-Dokument, und laden diese Datei vor 11h in das hierfür vorgesehene heiBox-Verzeichnis über den Link:

https://heibox.uni-heidelberg.de/u/d/d82d3fdca2834952b643/

Befolgen Sie dabei insbesondere die folgenden Punkte:

1. Während der Bearbeitung ist jegliche Kommunikation mit Mitstudierenden sowie die Inanspruchnahme der Hilfe von anderen Personen **strengstens verboten**. Aufgedeckte Täuschungsversuche werden wie bei einer regulären Klausur mit dem Ergebnis "Null Punkte" geahndet. Bei begründetem Verdacht behalten wir uns eine mündliche Nachprüfung vor.

2. Die Benutzung des Skriptes und persönlicher Aufzeichnungen, sowie von Lehrbüchern und Online-Referenzen (Wikipedia oder dergleichen) ist **erlaubt**, nicht jedoch interaktive Foren o.ä. Ohne weitere Begründung zitiert werden dürfen nur Ergebnisse aus der Vorlesung, der Plenarübung oder den vorangegangenen Übungsblättern.

3. Bei der Erzeugung Ihres pdf-Dokuments achten Sie auf **Lesbarkeit**, Reihenfolge, und eine einheitliche Orientierung. Unlesbare Abgaben werden nicht korrigiert.

4. Als erste Seite fügen Sie ein **Deckblatt** mit der folgenden Information ein: Name, Vorname, Matrikelnummer, den Namen Ihres Tutors, eine Tabelle für die Bewertung, sowie eine **Selbständigkeitserklärung** mit dem folgenden Wortlaut: "Ich versichere, dass ich die gestellten Aufgaben selbstständig und ohne unerlaubte Hilfsmittel bearbeitet und die Lösungen eigenständig verfasst habe."

5. Ein **Muster** für dieses Deckblatt, das Sie gerne verwenden oder handschriftlich kopieren können, finden Sie auf der folgenden Seite.

6. **Unterschreiben** Sie die Selbständigkeitserklärung vor der Abgabe. (Bei der Bearbeitung mit LaTeX genügt eine gescannte Unterschrift, die aber fest mit dem pdf verbunden sein muss.)

7. Benennen Sie **bitte** vor dem Hochladen Ihre fertige pdf-Datei nach dem Schema:
   `IhrNachname_IhreMatrikelnummer_NachnameIhresTutors.pdf`
   Sie erleichtern uns dadurch die Zuordnung Ihres Ergebnisses.

Das Aufgabenblatt umfasst **4 Aufgaben**. Pro Aufgabe können maximal 10 Punkte erlangt werden. Die Aufgaben sind <u>nicht</u> nach Schwierigkeit geordnet! Wir wünschen viel Erfolg!

Deckblatt zur Probeklausur
Höhere Mathematik II, SS 2020

(bitte bearbeiten oder abkopieren und **unbedingt einfügen**)

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Name des Tutors/der Tutorin: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma \leq 40$
Punkte					

Selbständigkeitserklärung: Ich versichere, dass ich die gestellten Aufgaben selbstständig und ohne unerlaubte Hilfsmittel bearbeitet und die Lösungen eigenständig verfasst habe.

Ort, Datum, Unterschrift: ______________________________

Aufgabe 1 (Körper)**.** Wir definieren auf der Menge $\mathbb{B} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ der Paare rationaler Zahlen Addition durch $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ und Multiplikation durch $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$, und zeichnen aus $0_\mathbb{B} = (0,0)$ und $1_\mathbb{B} = (1,0)$.

(i) *(2 Punkte)* Begründen Sie (nicht alle Körperaxiome, sondern nur), dass für alle $a \in \mathbb{B}, a \neq 0_\mathbb{B}$, die Gleichung $a \cdot x = 1_\mathbb{B}$ eine Lösung $x \in \mathbb{B}$ besitzt.

(ii) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass sich $\mathbb{B}$ als Körper nicht anordnen lässt.

(iii) *(2 Punkte)* Es sei $d : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Zeigen Sie (nicht, dass d eine Abstandsfunktion ist, sonder nur), dass d der Dreiecksungleichung genügt.

(iv) *(3 Punkte)* Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
(a) $(\mathbb{B}, d)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
(b) $(\mathbb{B}, d)$ ist ein metrischer Raum, aber nicht vollständig.
(c) $(\mathbb{B}, d)$ ist kein metrischer Raum.
Antworten Sie mit (a), (b), oder (c). Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Aufgabe 2 (Normierte Vektorräume)**.**

(i) *(5 Punkte)* Sei (A, V, δ) ein affiner Raum über $\mathbb{R}$ (s. Def. 4.1 im Skript). Eine Teilmenge $K \subset A$ heisst *konvex*, falls $\forall x_0, x_1 \in K$, $\forall t \in [0,1]$ für den durch die Gleichung $\delta(x_t, x_0) = t \cdot \delta(x_1, x_0)$ eindeutig bestimmten Punkt $x_t \in A$ gilt, dass $x_t \in K$. Zeigen Sie: Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so gilt: $\forall y \in A$, $\forall R > 0$ sind die offenen Kugeln $B_R(y) := \{x \in A \mid \|\delta(x, y)\| < R\}$ konvex.

(ii) *(5 Punkte)* Sei auf $\mathbb{R}^2$ die Norm $\|\cdot\|$ definiert durch $\|(x, y)\| := 2|x| + \frac{1}{2}|y|$. Skizzieren Sie (bezüglich dieser Norm) die offene Kugel $B_1(0)$ (mit der üblichen Verabredung: x-Achse horizontal, y-Achse vertikal).

Aufgabe 3 (Folgen und Exponentialreihe)**.** Sei $\mathscr{A} = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, ausgerüstet mit der Operatornorm (bezüglich einer beliebigen Norm auf $\mathbb{R}^n$), $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$ die Einheitsmatrix, und $\exp : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ die Exponentialfunktion (s. Gl. (5.50) im Skript). In der Vorlesung wurde gezeigt (s. Lemma 5.23, 5.22):

(a) Ist $(x_n) \subset \mathscr{A}$ eine Folge mit $\lim x_n = x$, so gilt: $\lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{1} + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x)$

(b) Sind $x, y \in \mathscr{A}$ mit $xy = yx$, so gilt $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$

(i) *(3 Punkte)* Zeigen, dass für alle $x \in \mathscr{A}$: $\lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left(\frac{x}{n}\right) - \mathbf{1}\right) = x$

Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete Verallgemeinerung der Restabschätzung in Lemma 5.21 von $\mathbb{C}$ auf $\mathscr{A}$. (Die Verallgemeinerung selbst müssen Sie nicht zeigen.)

(ii) *(4 Punkte)* Zeigen Sie mit ähnlichen Mitteln, dass für alle $x, y \in \mathscr{A}$ (also auch wenn die Bedingung aus (b) nicht erfüllt ist):

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \exp\left(\frac{y}{n}\right) - \mathbf{1}\right) = x + y$$

(iii) *(3 Punkte)* Folgern Sie aus (ii) und (a) die folgende Verallgemeinerung von (b):

$$\lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \exp\left(\frac{y}{n}\right)\right)^n = \exp(x + y)$$

Aufgabe 4 (Reihen)**.**

(i) *(5 Punkte)* Entscheiden Sie (mit kurzer Begründung), ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{n^{1/2}}$$

absolut konvergiert, bedingt konvergiert, oder divergiert.

(ii) *(5 Punkte)* Geben Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihe an:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{\sum_{i=0}^{n} 2^i}.$$