Aufgabenblatt 5

Abgabe am 28. Mai 2020 bis um 12 Uhr, per heiBox

Aufgabe 1 (Auf und Nieder). Sei $\sum a_i$ eine Reihe mit reellen Werten, die zwar konvergiert, jedoch *nicht* absolut konvergent ist. Von der Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ betrachten wir die *Teilfolge negativer Elemente*; a_i gehört dieser Teilfolge a^- an genau dann, wann $a_i < 0$. Ebenfalls definiert man die Teilfolge positiver Elemente a^+ durch die Bedingung $a_i > 0$. Man zeige:

(i) *(3 Punkte)* a^+ und a^- sind tatsächlich Teilfolgen von a (das heißt, dass es unendlich viele Werte der ursprünglichen Folge geben muss, die jede Bedingung erfüllen). Zudem sind $a^\pm$ Nullfolgen.

(ii) *(2 Punkte)* Die Reihen

$$\sum a_i^+, \quad \sum a_i^- \tag{1}$$

konvergieren *nicht*.

(iii) *(5 Punkte)* Sei x eine beliebige reelle Zahl oder $\pm\infty$. Es gibt eine Umordnung von $\sum a_i$, sodass die umgeordnete Reihe gegen x konvergiert. (*Hinweis:* Vielleicht hilft es Ihnen, an das Intervallschachtelungsprinzip zu denken. Es lässt sich hier zwar nicht direkt anwenden, doch hat die Grundidee des Beweises einen ähnlichen Geschmack.)

Aufgabe 2 (Lauter Reihen). Leiten Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen her:

(i) *(2 Punkte)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^n; \tag{2}$$

(ii) *(2 Punkte)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{n^2} z^n; \tag{3}$$

(iii) *(3 Punkte)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n) z^n; \tag{4}$$

(iv) *(3 Punkte)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}. \tag{5}$$

Aufgabe 3 (Per Partes). Sei $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebige Folgen, und

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{6}$$

die Folgen partieller Summen der entsprechenden Reihen $\sum a_i$ und $\sum b_i$. (Wir definieren verabredungsgemäß die leere Summe $A_0 = B_0 = 0$.)

(i) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass

$$A_n B_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i B_i + b_i A_{i-1}). \tag{7}$$

(ii) *(2 Punkte)* Mithilfe dieser Formel, beweisen Sie direkt, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3. \tag{8}$$

(iii) *(3 Punkte)* Zeigen Sie nun folgenden Satz: Ist $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine monotone, beschränkte Folge, und $\sum a_i$ eine *konvergente* Reihe, so ist

$$\sum a_i c_i \tag{9}$$

wieder eine konvergente Reihe. Auch hier kommt die obige Formel (7) zum Einsatz.

(iv) *(2 Punkte)* In Anwendung von diesem Satz, zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(-1-\frac{1}{n}\right)^n \tag{10}$$

konvergiert.

Aufgabe 4 (Die Willkür des Maßstabs)**.** Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch die darstellende Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

gegeben wird. Bestimmen Sie die Operatornorm $\|A\|$, bezüglich:

(i) *(3 Punkte)* der Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$,

$$\|\cdot\|_\infty : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \max(|x_1|, |x_2|); \tag{12}$$

(ii) *(3 Punkte)* der 2-Norm auf $\mathbb{R}^2$,

$$\|\cdot\|_2 : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}; \tag{13}$$

(iii) *(4 Punkte)* der 1-Norm auf $\mathbb{R}^2$,

$$\|\cdot\|_1 : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto |x_1| + |x_2|. \tag{14}$$