Aufgabenblatt 4

Abgabe am 21. Mai 2020 bis um 12 Uhr, per heiBox

Aufgabe 1 (Die Vermessung der Welt)**.** Für jede unten genannte Funktion eruieren Sie, ob sie eine Abstandsfunktion ist oder nicht (laut der Definition 4.6 im Skript). Erklären Sie, warum die Eigenschaften erfüllt werden, oder berichten Sie, welche *nicht* erfüllt werden.

(i) *(2 Punkte)* Der *VRN-Abstand:* Eine Ebene $\mathbb{R}^2$ wird in sechseckige Waben gleicher Größe geteilt. Der Abstand zwischen zwei Punkten ist gleich der kleinstmöglichen Anzahl durchfahrener Waben, auf einem Pfad zwischen den Punkten. (Pfade dürfen nicht den Wabenrand entlang gehen; eine Wabe gilt als durchfahren, wenn mehr als ein Punkt des Pfades sich in der Wabe befindet.)

(ii) *(2 Punkte)* Der *Abstand der deutschen Bahn:* Auf der Menge der deutschen Adressen, beträgt die Abstandsfunktion die schnellste Fahrzeit von Tür zu Tür, mithilfe des öffentlichen Personennahverkehrs (mit Fußwegen ergänzt).

(iii) *(3 Punkte)* Der *SNCF-Abstand:* Auf einer Ebene $\mathbb{R}^2$, sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Die Abstandsfunktion ist dann:

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|, & x,y \text{ linear abhängig;} \\ \|x\| + \|y\|, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

(iv) *(3 Punkte)* Der *Lufthansa-Abstand:* Diese Funktion bezieht sich auf die Menge aller Flughäfen, und ist gleich dem billigsten Preis für einen möglichst direkten Flug.

Aufgabe 2 (Metrische Räume)**.** Sei X der metrische Raum, der als Menge $\mathbb{N}$ ist, und die Abstandsfunktion

$$d(i,j) = 1 + \frac{1}{i+j} \qquad (i \neq j) \tag{2}$$

trägt. (Dazu definieren wir $d(i,i) = 0$.)

(i) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist, und dass X mit dieser Metrik Cauchy-vollständig ist.

(ii) *(3 Punkte)* Betrachten Sie die abgeschlossenen Kugeln

$$K_i = \left\{ j \in X : d(j,i) \le 1 + \frac{1}{2i} \right\} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Man zeige, dass $K_i \supset K_j$ für alle $i < j$—und zeige weiter, dass trotzdem

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i = \emptyset. \tag{4}$$

Warum wird das Intervallschachtelungsprinzip nicht verletzt?

Nun sei $Y = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen. Wir statten sie mit folgender Abstandsfunktion aus: Für $x,y \in \mathbb{Z}$ ist $d(x,y) = 1/n$, mit n die ganze Zahl, sodass

$$n! \mid x-y, \quad (n+1)! \nmid x-y. \tag{5}$$

So beträgt z.B. der Abstand $d(7,37) = 1/3$, da 30 durch $3! = 6$ teilbar ist, jedoch nicht durch $4! = 24$. (Wie immer setzen wir $d(x,x) = 0$.)

(iii) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass d die Eigenschaften einer Abstandsfunktion erfüllt.

(iv) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass Y *nicht* Cauchy-vollständig ist. Hierzu betrachten Sie die Folge

$$a_m = 1! + 2! + \cdots + m! \in Y. \tag{6}$$

Aufgabe 3 (Offenheit und Abgeschlossenheit)**.** Für jede unten genannte Teilmenge, bestimmen Sie, ob sie *offen* ist, und auch ob sie *abgeschlossen* ist. Denken Sie dabei daran, dass eine Untermenge weder offen noch abgeschlossen, oder auch sowohl offen als auch abgeschlossen sein darf!

(i) $A = B_1(-1) \cup B_1(1) \subset \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

(ii) $B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. *(1 Punkt)*

(iii) $C = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

(iv) $D = \{x : x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$. *(2 Punkte)*

(v) $E = [-5, 2) \cup (1, 7] \subset \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

(vi) $F = \{3i + 1 : i \in \mathbb{Z}\} \subset Y$. *(2 Punkte)* Hier ist Y der in Aufgabe 2 definierte metrische Raum.

(vii) $G = (0, 1) \subset Z$. *(2 Punkte)* Z ist hier die Menge $\mathbb{R}$ mit der *diskreten* Metrik:

$$d(x, y) = 1 \quad \forall x \neq y; \quad d(x, x) = 0. \tag{7}$$

Aufgabe 4 (Schätze)**.** Sie bereisen eine menschenleere Insel und entdecken dort eine längst aufgegebene Siedlung. In einer brüchigen Steinmauer gekritzelt, finden Sie folgende Inschrift:

> Man gehe vom Marktplatz zum Steinbruch, und zähle dabei die Schritte. Drei Mal diese Anzahl gehe man quer nach rechts, und errichte einen Pfosten. Wieder vom Marktplatz beginnend, gehe man, die Schritte ebenfalls zählend, zum Mammutbaum, und gehe dann quer nach links, drei Mal so weit. Hier ist der zweite Pfosten. Man finde den Schrein zwischen den Pfosten, mitten inne.

Sie sehen den Steinbruch und den Mammutbaum, der Marktplatz aber ist nicht mehr zu erkennen. Beschreiben Sie, wie Sie trotzdem den Schrein erreichen können, und wo er sich befindet. (*Hinweis:* Die Darstellung der Ebene durch komplexe Zahlen empfiehlt sich.)