Aufgabenblatt 3

Abgabe am 14. Mai 2020 bis um 12 Uhr, per heiBox

Aufgabe 1 (Rekursiv definierte Folgen)**.**

(i) *(5 Punkte)* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge, die rekursiv durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}} \tag{1}$$

definiert wird. Zeigen Sie, dass diese Folge divergiert. (*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst mit Hilfe vollständiger Induktion die Gültigkeit der Abschätzungen: $4n \geq a_n \geq \sqrt{n}$ für alle n. Natürlich ist die Abschätzung von unten ausreichend, um die Divergenz zu bestätigen; ein eigenständiger Beweis dieser Abschätzung, falls Sie einen finden, reicht also für volle Punkte.)

(ii) *(5 Punkte)* Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge, die rekursiv durch

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{1+b_n} \tag{2}$$

definiert wird. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert und geben Sie den Grenzwert an. (*Hinweis:* "Raten" Sie unter der Annahme, dass die Folge konvergiert, zunächst den Grenzwert, b (2 Teilpunkte). *Zeigen* Sie dann mit Hilfe vollständiger Induktion die Gültigkeit der Abschätzung $|b_n - b| \leq b^{n+1}$ für alle n und *beweisen* Sie schliesslich die Behauptung.)

Aufgabe 2 (Partielle Mittel)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir ordnen dieser Folge ihre »Folge partieller Mittel« zu, auf folgende Weise: an n-ter Stelle dieser neuen Folge (s_n), beträgt ihr Wert

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{3}$$

So ist s_n gleich dem arithmetischen Mittel (siehe Blatt 2) der ersten n Glieder von (a_n).

(i) *(5 Punkte)* Beweisen Sie, dass

$$a_n \to a \quad \Rightarrow \quad s_n \to a. \tag{4}$$

Insbesondere folgt Konvergenz von (s_n) aus Konvergenz von (a_n).

(ii) *(5 Punkte)* Geben Sie ein Beispiel, in dem (s_n) konvergiert, (a_n) jedoch nicht. (Damit ist der Umkehrschluss widerlegt.)

Aufgabe 3 (Wachstum)**.** Sei x vorerst eine reelle Zahl, und (a_n) die Folge

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \tag{5}$$

wo die Schreibweise $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$, wie gewohnt, die Fakultät bedeutet. Lesen Sie im Skript den Beweis nach, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

(i) *(3 Punkte)* Sei x nun, der Einfachheit halber, eine positive ganze Zahl, und (b_n) die Folge der partiellen Summen von a, in Abhängigkeit von x:

$$b_n(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \tag{6}$$

Beweisen Sie, dass $b_n(1)$ konvergiert, und zeigen Sie dabei, dass der Grenzwert

$$\lim_n b_n(1) \leq 3. \tag{7}$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die Ungleichung $n! \geq 2^{n-1}$, und benutzen Sie die geometrische Summenformel $\sum_{l=0}^{n} q^l = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.)

(ii) *(3 Punkte)* Beweisen Sie, dass

$$b_n(k+1) \leq b_n(k) \cdot b_n(1), \tag{8}$$

und folgern Sie daraus, dass $b_n(k)$ für $k \in \mathbb{N}$ immer konvergiert, mit Grenzwert $\leq 3^k$. Sie dürfen das Ergebnis von Teil (i) dabei benutzen, auch ohne diesen Teil erfolgreich abgeschlossen zu haben.

(iii) *(4 Punkte)* Zeigen Sie aber nun, dass die Folge

$$c_n = \frac{x^{n^2}}{n!} \tag{9}$$

divergent ist, für alle $x > 1$. (Man entsinne sich der Ungleichung $n! \leq n^n$.)

Aufgabe 4 (Im Kreise)**.** Zu jeder reellen Zahl x bezeichne $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, und

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1) \subset \mathbb{R} \tag{10}$$

den "Nachkommateil" von x. Für festes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$a_n = \{n\alpha\} \tag{11}$$

definiert relle Folge. Man zeige:

(i) *(2 Punkte)* Falls $a_n \geq a_m$, so gilt $\{n\alpha\} - \{m\alpha\} = \{(n-m)\alpha\}$. Und wie ist das im Fall $a_n < a_m$? ;)

(ii) *(2 Punkte)* Ist $\alpha \in \mathbb{Q}$, so nimmt (a_n) nur endlich viele Werte an. Welche?

(iii) *(2 Punkte)* Ist hingegen $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so ist (a_n) als Abbildung $\mathbb{N} \to [0,1)$ injektiv.

(iv) *(2 Punkte)* Ist weiter $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so existieren zu jedem $N \in \mathbb{N}$ unendlich viele Folgenglieder mit $a_n < \frac{1}{N}$ oder $a_n > 1 - \frac{1}{N}$. *Hinweis:* In mindestens einem der N gleichen Teile von $[0,1]$ müssen unendlich viele Folgenglieder liegen (Warum?). Benutzen Sie anschliessend (i).

(v) *(0 Punkte)* 0 ist Häufungswert von (a_n), d.h. es existiert eine Teilfolge, welche eine Nullfolge ist.

(vi) *(2 Punkte)* Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist jedes Element von $[0,1]$ Häufungswert von (a_n).