Aufgabenblatt 1

Abgabe am 30. April 2020 bis um 12 Uhr, per heiBox

Aufgabe 1 (Abbildungen und leere Menge)**.** In der Mengenlehre wird eine Abbildung F mit Definitionsbereich A und Wertebereich B definiert als Teilmenge $F \subset A \times B$ mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert sodass $(a,b) \in F$. In dieser Vorlesung schreiben wir solche Abbildungen wie üblich als $F : A \to B$ (und adeln den mengentheoretischen Begriff als "Graphen" der Abbildung).

Es sei $\mathrm{Abb}(A,B)$ die Menge aller Abbildungen von A nach B, und $\{*\}$ die Menge mit einem einzigen Element. Man zeige:

(i) Ist $A = \emptyset$, so ist $\mathrm{Abb}(A,B) = \{*\}$.

(ii) Ist $A \neq \emptyset$, und $B = \emptyset$, so ist $\mathrm{Abb}(A,B) = \emptyset$.

(iii) Ist $A = \{*\}$, so ist $\mathrm{Abb}(A,B) = B$.

(iv) Ist $B = \{*\}$, so ist $\mathrm{Abb}(A,B) = \{*\}$.

Aufgabe 2 (Reelle Zahlen)**.** In der Vorlesung wurde die Konstruktion der reellen Zahlen mittels Dedekindscher Schnitte skizziert. In dieser Aufgabe werden einige Zwischenschritte durchgeführt.

Teilaufgaben (i)–(iv) sollen in den Tutorien besprochen werden, die Teilaufgaben (v) und (vi) sind Hausaufgaben (nur für sie gibt es Punkte), Teilaufgabe (vii) ist fakultativ und Teilaufgabe (viii) wurde bereits in der Vorlesung vorgeführt.

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{Q}$ heisst **Dedekindscher Schnitt**, falls A nicht-trivial und nach oben ordnungsabgeschlossen ist und kein kleinstes Element enthält, also genau dann, wenn

$$A \neq \emptyset \text{ und } A \neq \mathbb{Q}; \tag{α}$$

$$\forall x > y : (y \in A \Rightarrow x \in A); \text{ und} \tag{β}$$

$$\forall x \in A : (\exists y \in A : y < x). \tag{γ}$$

Es sei $\mathfrak{D} \subset \mathscr{P}(\mathbb{Q})$ die Menge aller Dedekindschen Schnitte. Man zeige:

(i) Für jedes $r \in \mathbb{Q}$ ist $A_r := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\}$ ein Dedekindscher Schnitt.

(ii) Für je zwei $A, B \in \mathfrak{D}$ ist

$$A + B := \{z \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in A, y \in B : z = x + y\}$$

wieder ein Dedekindscher Schnitt. Das Tripel $(\mathfrak{D}, +, A_0)$ ist eine abelsche Gruppe. Man zeige insbesondere die Gültigkeit der Formel

$$-A = \{y \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in \mathbb{Q} \setminus A : x > -y\}$$

Wir erklären nun auf $\mathfrak{D}$ eine Relation '$<$' durch $A < B \Leftrightarrow B \subsetneq A$. Zu zeigen ist:

(iii) Diese definiert eine strenge Totalordnung auf $\mathfrak{D}$, d.h. $<$ ist transitiv (d.h. aus $A < B$ und $B < C$ folgt $A < C$) und trichotomisch (d.h. es gilt entweder $A < B$, $B < A$ oder $A = B$).

(iv) Die Anordnung ist verträglich mit der Addition, d.h. $\forall A,B,C$: $A < B \Rightarrow A + C < B + C$. Folgern Sie: $0 < A \Leftrightarrow -A < 0$.

(v) Für je zwei $A,B \in \mathfrak{D}$ mit $A \geq 0$ und $B \geq 0$ ist

$$A \cdot B := \{z \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in A, y \in B : z = x \cdot y\}$$

wieder ein Dedekindscher Schnitt. $(\mathfrak{D} \setminus A_0, \cdot, A_1)$ ist eine abelsche Gruppe. Geben Sie eine Formel für A^{-1} analog zu der für $-A$.

Wir erweitern nun die Multiplikation auf $\mathfrak{D}$, indem wir setzen:

Für $A \geq 0$ und $B < 0$: $A \cdot B := -(A \cdot (-B))$;
Für $A < 0$ und $B \geq 0$: $A \cdot B := -((-A) \cdot B)$;
Für $A < 0$ und $B < 0$: $A \cdot B := (-A) \cdot (-B)$.

(vi) Die Anordnung ist verträglich mit der Multiplikation, d.h.: aus $A > 0$ und $B > 0$ folgt $A \cdot B > 0$.

(vii) Es gilt das Distributivgesetz.

(viii) Für eine nichtleere Teilmenge $T \subset \mathfrak{D}$ gilt entweder $\bigcup_{A \in T} A = \mathbb{Q}$ oder

$$\inf(T) := \bigcup_{A \in T} A$$

ist wieder ein Dedekindscher Schnitt und eine größte untere Schranke von T. Daraus wird gefolgert, dass $(\mathfrak{D}, A_0, A_1, +, \cdot, <)$ ein vollständiger angeordneter Körper ist, mithin isomorph zu $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (Der Körper formaler Potenzreihen)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir definieren die Menge $\mathrm{PR}(\mathbb{K})$ von **formalen Potenzreihen** über $\mathbb{K}$, auf folgende Weise: Betrachten wir erst mal die Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ von Sequenzen $\{f_i\}$, wo $i \in \mathbb{Z}$ und $f_i \in \mathbb{K}$. (f stellt also, der Schreibweise entsprechend, eine beliebige Abbildung von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{K}$ dar.) **Der Träger** $\mathrm{supp}(f)$ (vgl. "support" im Englischen, nicht mit dem Supremum sup zu verwechseln!) ist dann die Teilmenge

$$\mathrm{supp}(f) = \{i \in \mathbb{Z} : f_i \neq 0\}. \tag{1}$$

Schließlich ist $\mathrm{PR}(\mathbb{K})$ die Untermenge von $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, bestehend aus den Sequenzen, deren Träger von unten beschränkt ist. Ist $\mathrm{supp}(f)$ nicht leer, so schreiben wir $\nu(f)$ für die größte untere Schranke des Trägers von f. Das heißt:

$$f_{\nu(f)} \neq 0, \text{ aber } f_i = 0 \ \forall i < \nu(f). \tag{2}$$

Ist $\mathrm{supp}(f) = \emptyset$, d.h. also $f = 0$, so setzen wir formal $\nu(f) = \infty$.

(i) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $+$, durch

$$(f + g)_i = f_i + g_i \tag{3}$$

definiert, $\mathrm{PR}(\mathbb{K})$ die Struktur einer abelschen Gruppe verleiht.

(ii) Definieren wir auch eine Multiplikation auf PR($\mathbb{K}$) durch die Formel

$$(fg)_i = \sum_{j+k=i} f_j g_k. \tag{4}$$

Erklären Sie, warum diese Formel immer sinnvoll ist: das heißt, dass die Summe wohldefiniert ist, und dass sich ein Element von PR($\mathbb{K}$) ergibt. Zeigen Sie dann, dass die Rechenregeln eines Körpers (Gleichung 1.2 im Skript) erfüllt werden.

(iii) Zeigen Sie, dass

$$\nu(f+g) \geq \min(\nu(f), \nu(g));$$
$$\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g).$$

wobei verabredungsgemäss $\infty + \nu := \infty$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$.

(iv) Zeigen Sie, dass multiplikative Inverse auch existieren (d.h., dass die Gleichungen 1.3 Lösungen besitzen, mit einer geeigneten Identifikation der 1), und somit, dass PR($\mathbb{K}$) ein Körper ist.

Bemerkung 3.1. Möglicherweise werden Sie die Schreibweise $f = \sum_i f_i X^i$ einleuchtend finden. Dabei ist es aber wichtig zu betonen, dass das Zeichen X keine Veränderliche im gewöhnten Sinne ist—dann hätten die Summen durch fehlende Konvergenz evtl. keinerlei Bedeutung!

Aufgabe 4 (Ein nicht-archimedischer Körper)**.** Betrachten wir wieder PR($\mathbb{K}$). Man zeige:

(i) Ist P eine Anordnung auf $\mathbb{K}$, so ist

$$\hat{P} = \{f \in \mathrm{PR}(\mathbb{K}) : f_{\nu(f)} \in P\} \tag{5}$$

eine Anordnung auf PR($\mathbb{K}$).

(ii) Die Anordnung $\hat{P}$ ist nicht archimedisch! (Hinweis: Beschreiben Sie zunächst die Einbettung $\mathbb{N} \subset \mathrm{PR}(\mathbb{K})$ und suchen Sie dann ein f mit $\nu(f) < \nu(1)$.)

(iii) Wir definieren nun einen (etwas außergewöhnlichen) Absolutbetrag auf PR($\mathbb{K}$): und zwar,

$$\forall f \in \mathrm{PR}(\mathbb{K}) : |f| = 2^{-\nu(f)}. \tag{6}$$

(mit $2^{-\infty} := 0$). Diese Funktion erfüllt alle Eigenschaften eines Absolutbetrags (siehe Lemma 1.8, Gleichung 1.12 im Skript), bis auf die Dreiecksungleichung. (Hier werden Ihnen die in der Aufgabe 3.iii bewiesenen Eigenschaften zu Nutzen kommen.)

(iv) In der Tat, erfüllt dieser Absolutbetrag die »verstärkte Dreiecksungleichung:«

$$|f+g| \leq \max(|f|, |g|), \quad \text{mit Gleichheit } \forall f, g : |f| \neq |g|. \tag{7}$$

So ist jedes Dreieck in dieser Welt gleichschenklig.