

Analysis 1

Wintersemester 2026

Dr. Hendrik Kasten

13. Oktober 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	3
1.1	Aussagen	4
1.2	Mengen	8
1.3	Relationen	13
1.4	Beweisen	17
1.5	Abbildungen	27
1.6	Übungsaufgaben	35
2	Zahlbereiche	39
2.1	Die Körperaxiome	40
2.2	Die Anordnungsaxiome	47
2.3	Das Vollständigkeitsaxiom	54
2.4	Mächtigkeit und Abzählbarkeit	69
2.5	Die komplexen Zahlen	75
2.6	Übungsaufgaben	78
3	Folgen und Reihen	79
3.1	Grenzwerte von Folgen	80
3.2	Häufungspunkte	91
3.3	Limes inferior und Limes superior	95
3.4	Cauchy-Folgen	98
3.5	Konvergenz von Reihen	101
3.6	Absolute Konvergenz	105
3.7	Die g -adischen Darstellungen der reellen Zahlen	111
3.8	Übungsaufgaben	117
4	Stetige Funktionen und die Topologie des $\mathbb{R}^d$	120
4.1	Die euklidische Norm	120
4.2	Stetigkeit	124
4.3	Offene und abgeschlossene Mengen	129
4.4	Kompaktheit	136
4.5	Zusammenhang	139
4.6	Übungsaufgaben	146

5	Differentialrechnung	149
5.1	Differenzierbarkeit	150
5.2	Differentiationsregeln	155
5.3	Der Mittelwertsatz	160
5.4	Geometrische Einführung der trigonometrischen Funktionen	167
5.5	Taylor-Entwicklung	172
5.6	Übungsaufgaben	175

Grundlagen

Das Thema der Vorlesung ist die Analysis von Funktionen in einer reellen Variablen, die Sie in einer anschaulich motivierten und nicht stringent durchbewiesenen Variante natürlich bereits aus der Schule kennen. Diese Theorie soll bei uns nun schrittweise und beweisorientiert aufgebaut werden, *was Ihnen die Chance gibt, den systematischen Aufbau einer mathematischen Theorie in einem vertrauten und überschaubaren Fall mitzuverfolgen*. Entsprechend geben wir für alle verwendeten Objekte formale **Definitionen**, wobei wir den jeweils definierten Begriff durch Fettdruck hervorheben, und folgern daraus **Sätze** (Aussagen, die wichtig sind und/oder einen längeren Beweis erfordern) und **Propositionen** (weitere Aussagen), fast immer mit Beweisen. Wenn eine Aussage hauptsächlich bewiesen wird, um eine andere Aussage zu zeigen, nennen wir das ein **Lemma**.

Wichtig beim Lernen von Mathematik sind **Beispiele** und zum Abgrenzen auch **Gegenbeispiele**, die, genau wie die ausdauernde Beweistätigkeit im Umfeld der jeweiligen Begriffe, dabei helfen, ein *konzeptuelles Verständnis* für diese aufzubauen. Als Übung können Sie sich selbst zu jedem neuen Konzept passende Beispiele und Gegenbeispiele überlegen.

In diesem ersten Kapitel verschaffen wir uns zunächst einen Überblick über die mathematische Fachsprache, Methoden und wichtige Grundkonzepte. Da wir aktuell noch nicht genug mathematische Objekte eingeführt haben, um schöne Beispiele angeben zu können, greifen wir in diesem Kapitel verschiedentlich auf unser Vorwissen aus der Schule zurück. Ab Kapitel 2 werden wir als wahre Aussagen kein solches Vorwissen mehr akzeptieren, sondern nur noch diejenigen Aussagen, die wir im Laufe der Vorlesung als Axiome eingeführt oder als Sätze bewiesen haben. Auf diese Weise bauen wir die aus der Schule bereits bekannten Inhalte der Analysis axiomatisch fundiert neu auf. *Die in der Schule erworbenen Vorkenntnisse und Anschauungen bleiben aber wertvoll!* In dieser Vorlesung und dem zugehörigen Übungsbetrieb werden wir oft auf diese zurückgreifen und sie mit dem Vorlesungsstoff in Beziehung setzen.

1.1 Aussagen

Definition 1.1. Eine (mathematische) **Aussage** ist ein sprachliches Konstrukt, dem wir eindeutig einen Wahrheitswert (wahr / falsch) zuordnen können.

Beispiel 1.2. (a) „2 ist eine ungerade Zahl.“ ist eine Aussage (und zwar eine falsche).

(b) „Blau ist eine schöne Farbe.“ ist keine Aussage.

(c) „Der Kuckuck und der Esel“ ist keine Aussage.

Wir können Aussagen A und B **verknüpfen**. Im Folgenden betrachten wir die wichtigsten dieser Verknüpfungen anhand von Wahrheitstafeln, in denen wir „wahr“ mit w und „falsch“ mit f notieren. Es gilt:

A	B	A und B	A und/oder B	entweder A oder B
w	w	w	w	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

A	nicht A
w	f
f	w

Bemerkung 1.3. (a) Mit „oder“ ist in der Mathematik stets „und / oder“ gemeint. Meint man „entweder . . . oder“, so muss man das auch ausdrücklich so schreiben.

(b) Es gelten die Notationen „ $\wedge$ “ für „und“, „ $\vee$ “ für „oder“ und „ $\neg$ “ für „nicht“.

Beispiel 1.4. Die Aussage $A \vee (\neg A)$ ist immer wahr, unabhängig vom Wahrheitswert von A . Dieser Umstand ist für das mathematische Argumentieren von großer Bedeutung und als **tertium non datur** oder **Satz vom ausgeschlossenen Dritten** bekannt.

Wir untersuchen nun, wie sich Aussagen gegenseitig bedingen: Mit $A \implies B$ bezeichnen wir eine neue Aussage. Diese bedeutet „ A **impliziert** B “ und kann als „falls A gilt, so gilt auch B “ gelesen werden. Formal definieren wir:

Definition 1.5. Seien A und B Aussagen. Dann ist die Aussage $A \implies B$ durch $(\neg A) \vee B$ gegeben. Gilt $A \implies B$, so sagen wir auch: A ist eine **hinreichende** Bedingung für B bzw. B ist eine **notwendige** Bedingung für A .

Schließlich schreiben wir abkürzend $A \iff B$ für $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$ und sagen „ A ist **äquivalent** zu B “, was als „ A gilt genau dann, wenn B gilt“ gelesen werden kann.

In Form von Wahrheitstafeln lassen sich Implikationen und Äquivalenzen wie folgt ausdrücken:

A	B	$A \implies B$	A	B	$A \iff B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	w	f	f	w

⚠ Während man die ersten beiden Zeilen der linken Tafel vermutlich so erwarten wird, wirken die letzten beiden Zeilen unintuitiv: Wenn A falsch ist, dann ist die Implikation $A \implies B$ immer richtig – unabhängig davon, ob B wahr oder falsch ist. Aus einer falschen Aussage lässt sich somit stets *alles* folgern! Das bedeutet andersherum natürlich auch: Ist A falsch und $A \implies B$ wahr, dann *können wir nicht sagen*, ob B wahr oder falsch ist.

Dieser Begriff der Implikation wirkt anders, als Sie ihn aus der Schule kennen. Das liegt natürlich daran, dass man in Situationen, in denen man normalerweise von Implikationen spricht, den Wahrheitsgehalt der zu folgernden Aussage zunächst nicht kennt und die obige Wahrheitstafel somit nicht direkt zum Einsatz kommt. Es gilt dann, einen **Beweis** für die Aussage zu finden. In Abschnitt 1.4 werden wir verschiedene Strategien zum Führen (und Finden!) eines Beweises kennenlernen.

Mitmachaufgabe 1.6. Betrachten Sie die folgende Behauptung und den anschließenden Beweis, bei dem das Zeichen $\square$ anzeigt, dass der Beweis vollständig ist:

Behauptung. Falls $1 + 2 = 4$ gilt, so auch $2 = 4$.

Beweis. Es gelte $1 + 2 = 4$. Durch Multiplikation mit 2 folgt daraus $2 + 4 = 8$. Subtrahieren wir nun 4 von beiden Seiten, so erhalten wir $2 = 4$, wie behauptet. $\square$

Entscheiden Sie:

- (a) Ist die Behauptung wahr?
- (b) Ist der angegebene Beweis korrekt?

Lösung.

□

Beispiel 1.7. (a) *Die Aussage*

$$(A \implies B) \iff ((\neg B) \implies (\neg A))$$

heißt **Kontraposition** und ist unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B immer wahr, denn: Um das einzusehen, stellen wir die folgende zusätzliche Wahrheitstafel auf:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg B) \implies (\neg A)$
w	w	f	f	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	w
f	f	w	w	w

Ein Vergleich mit $A \implies B$ zeigt nun, dass $(\neg B) \implies (\neg A)$ dieselben Wahrheitswerte hat, so dass die beiden Aussagen äquivalent sind. #

Das Konzept der Kontraposition werden wir uns in Abschnitt 1.4 zunutze machen, um die Methode des indirekten Beweises einzuführen.

⚠ Die Kontraposition $(\neg B) \implies (\neg A)$ einer Implikation $A \implies B$ ist nicht dasselbe wie deren Umkehrung $B \implies A$! Umgangssprachlich wird das oft verwechselt.

(b) *Die Aussage*

$$(A \implies B) \iff \neg(A \wedge (\neg B))$$

heißt **Prinzip des Widerspruchsbeweises** und lässt sich analog beweisen. Das Konzept des Widerspruchs werden wir uns in Abschnitt 1.4 zunutze machen, um die Methode des Widerspruchsbeweises einzuführen.

Durch **Prädikate** können wir auch ganze Familien von Aussagen gleichzeitig beschreiben. Dabei wird ein sprachliches Konstrukt mit Platzhaltern (oder **Variablen**) erstellt. Werden konkrete Werte für die Platzhalter eingesetzt, so ergibt sich daraus eine Aussage.

Beispiel 1.8. Schreiben wir $\text{Prim}(n)$ für „ n ist eine Primzahl.“. Dann ist etwa $\text{Prim}(3)$ eine wahre Aussage und $\text{Prim}(4)$ eine falsche Aussage.

Als weitere Bausteine für die Aussagenlogik benötigen wir **Quantoren**. Die wichtigsten sind:

- der **Allquantor** $\forall$, gesprochen: „für alle“,
- der **Existenzquantor** $\exists$, gesprochen: „es gibt“.

Außerdem benutzen wir

- $\exists!$, gesprochen: „es gibt genau ein“.

Aus einem Prädikat $P(\cdot)$ und einem Quantor lassen sich Aussagen machen:

- $\forall x: P(x)$ bedeutet „für alle x gilt $P(x)$ “,
- $\exists x: P(x)$ bedeutet „es gibt ein x , für das $P(x)$ gilt“,
- $\exists! x: P(x)$ bedeutet „es gibt genau ein x , für das $P(x)$ gilt“.

⚠ Letzteres sind eigentlich zwei Aussagen:

- (i) $\exists x: P(x)$,
- (ii) $\forall x, y: ((P(x) \wedge P(y)) \implies x = y)$.

Um auf diese Weise Mathematik betreiben zu können, müssen wir genauer angeben, welche Werte die Variablen annehmen dürfen. Dazu benötigen wir Grundlagen aus der Mengentheorie, die wir uns in Abschnitt 1.2 beschaffen werden. Entsprechend unfundiert, aber anschaulich führen wir dennoch bereits hier einige Überlegungen durch:

Bemerkung 1.9. Quantoren müssen in Aussagen angegeben bzw. aufgeschrieben werden, wobei dies auch in Worten geschehen kann, wenn es präzise gemacht wird. Die Reihenfolge der Quantoren ist dabei essentiell! Das sehen wir durch das folgende Beispiel: Für alle Töpfe t und alle Deckel d können wir das Prädikat

$$\text{Passt}(t, d) \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Deckel } d \text{ passt auf Topf } t$$

definieren. Für dieses bedeuten in dieser Notation:

- (i) $\forall t, \exists d: \text{Passt}(t, d)$, dass es zu jedem Topf einen passenden Deckel gibt,
- (ii) $\exists d, \forall t: \text{Passt}(t, d)$, dass es einen Deckel gibt, der auf alle Töpfe passt.

Diese Aussagen sind aber im Allgemeinen offensichtlich unterschiedlich.

Tipp: Zu Beginn ist es hilfreich, die logische Aussage von links nach rechts zu verbalisieren, um sich deren Sinngehalt zu erschließen. Aussage (i) lautet dann zunächst etwas umständlich: Für alle Töpfe t existiert ein Deckel d , so dass d auf t passt.

Oft ist es notwendig, Aussagen zu negieren. Wir erkunden, wie das funktioniert:

Mitmachaufgabe 1.10. Für alle Wege w können wir das Prädikat

$$\text{Rom}(w) \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Weg } w \text{ führt nach Rom}$$

definieren. Wir betrachten nun die Aussage

$$\text{Alle Wege führen nach Rom.} \quad \text{bzw.} \quad \forall w \text{ Weg: } \text{Rom}(w).$$

Wie lautet deren logische Negation?

Lösung.

□

Die folgenden Negationsregeln für Aussagen lassen sich leicht herleiten (Übung!):

Bemerkung 1.11. Sei $P(\cdot)$ ein Prädikat. Dann gilt:

- (a) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B),$
- (b) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B),$
- (c) $\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B),$
- (d) $\neg(\forall x: P(x)) \iff (\exists x: \neg P(x)),$
- (e) $\neg(\exists x: P(x)) \iff (\forall x: \neg P(x)).$

Mitmachaufgabe 1.12. Machen Sie aus dem bekannten Liedtitel

Everybody needs somebody sometimes

eine formale Aussage und negieren Sie diese.

Lösung.

□

1.2 Mengen

Definition 1.13 (Cantor (1895)). Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte heißen **Elemente** der Menge. Dabei bedeutet

- **wohlbestimmt**, dass von jedem Objekt feststeht, ob es in der Menge enthalten ist oder nicht,
- **wohlunterschieden**, dass jedes Element höchstens einmal in der Menge vorkommt.

Ist ein x ein Element bzw. kein Element einer gegebenen Menge X , so schreiben wir $x \in X$ bzw. $x \notin X$. Eine Menge ohne Elemente heißt **leere Menge** und wird $\emptyset$ geschrieben.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, geboren am 3. März 1845 in Sankt Petersburg und gestorben am 6. Januar 1918 in Halle an der Saale, war ein deutscher Mathematiker. Cantor lieferte wichtige Beiträge zur modernen Mathematik. Insbesondere ist er der Begründer der Mengenlehre und er veränderte den Begriff der Unendlichkeit. Der revolutionäre Gehalt seines Werks wurde erst nach seinem Tod richtig erkannt. Das Foto zur Rechten zeigt ihn im Jahr 1870, im Alter von 25 Jahren.

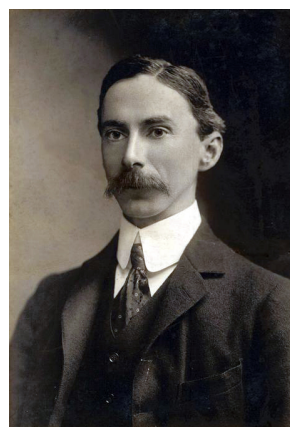


Mitmachaufgabe 1.14. In einer kleinen mittelalterlichen Stadt rasiert der Barbier nach Zunftgesetz genau die Männer, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert sich der Barbier selbst?

Lösung.

□

Bertrand Arthur William Russell, 3. Earl Russell, geboren am 18. Mai 1872 bei Trellech (Wales) und gestorben am 2. Februar 1970 in Penrhyndeudraeth (Wales) war ein britischer Philosoph, Mathematiker, Religionskritiker und Logiker und erhielt 1950 den Nobelpreis für Literatur. Zusammen mit Alfred North Whitehead veröffentlichte Russell die Principia Mathematica, eines der bedeutendsten Werke des 20. Jahrhunderts über die Grundlagen der Mathematik. Das Foto zur Rechten zeigt ihn im Jahr 1907, im Alter von 35 Jahren.



Definition 1.15. Seien X, Y zwei Mengen. Dann heißt Y eine **Teilmenge** von X bzw. alternativ X eine **Obermenge** von Y , falls jedes Element von Y auch ein Element von X ist. Ist dies der Fall, so schreiben wir $Y \subseteq X$. Formal schreiben wir

$$\begin{aligned} Y \subseteq X & :\iff (y \in Y \implies y \in X), \\ & \iff \forall y \in Y: y \in X. \end{aligned}$$

wobei $:\iff$ bedeutet, dass die linke Aussage per Definition äquivalent zur rechten Aussage ist. Gilt für zwei Mengen X, Y sowohl $Y \subseteq X$ als auch $X \subseteq Y$, so sagen wir, X und Y seien **gleich** und schreiben $X = Y$.

Beispiel 1.16. Sei $X = \{1, 2, 3\}$. Dann gilt $2 \in X$ und $\{2\} \subseteq X$. Der Unterschied ist also, dass 2 ein Element von X ist, während $\{2\}$ eine Teilmenge von X ist.

Proposition 1.17. Sei X eine beliebige Menge. Dann gilt $\emptyset \subseteq X$.

Beweis. Da in $\emptyset$ keine Elemente enthalten sind, gilt offensichtlich $\forall y \in \emptyset: y \in X$. □

In der Situation von Proposition 1.17 gilt im Allgemeinen nicht $\emptyset \in X$, denn es gilt etwa

$$\emptyset \notin X = \{1, 2, 3\}.$$

▲ Um zu zeigen, dass eine allgemeine Aussage nicht gilt, reicht es aus, ein einziges Gegenbeispiel anzugeben. Der Nachweis der Gültigkeit einer Aussage mittels einzelner Beispiele ist in der Regel nicht möglich.

Definition 1.18. Sei X eine Menge. Dann heißt die Menge aller Teilmengen von X die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ von X . In Prädikatenschreibweise formulieren wir:

$$\forall Y: (Y \in \mathcal{P}(X) :\iff Y \subseteq X).$$

Beispiel 1.19. Für die Menge $X = \{1, 2, 3\}$ aus Beispiel 1.16 gilt

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}.$$

Definition 1.20. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge X heißt ihre **Mächtigkeit** und wird $|X|$ geschrieben. Wie man unendliche Mengen miteinander vergleicht, werden wir in Abschnitt 2.4 genauer studieren.

Beispiel 1.21. Ist X eine endliche Menge mit $|X| = n \in \mathbb{N}$, so gilt $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$, da es für jedes der n Elemente von X die zwei Möglichkeiten gibt, enthalten bzw. nicht enthalten zu sein.

Wir überlegen uns nun, welche Möglichkeiten es gibt, Mengen zu beschreiben:

- (a) Die erste Möglichkeit ist am natürlichsten. Wir haben sie bereits in Beispiel 1.16 benutzt. Das ist die Darstellung einer Menge durch Aufzählung:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\} & \text{Menge der } \textit{natürlichen Zahlen}, \\ \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} & \text{Menge der } \textit{ganzen Zahlen}. \end{array}$$

Hierbei bedeutet „:=“, dass die linke Seite per Definition gleich der rechten Seite ist, die Elemente werden jeweils durch *Mengenklammern* $\{\dots\}$ gefasst und „ $\pm$ “ lässt beide Vorzeichen zu.

- (b) Weiter gibt es die Darstellung durch Beschreibung der Elemente einer Menge anhand von Elementen einer bereits bekannten anderen Menge:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Menge der } \textit{rationalen Zahlen}.$$

- (c) Schließlich lässt sich eine Menge als Teilmenge einer bereits bekannten Menge durch Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft in Form eines Prädikats beschreiben:

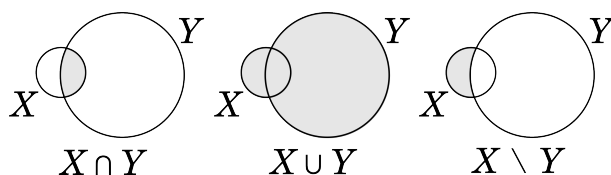
$$\begin{aligned} \mathbb{P} &:= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist eine Primzahl}\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : \text{Prim}(n)\} \end{aligned} \quad \text{Menge der } \textit{Primzahlen}.$$

Nach der Einführung eines neuen Begriffs interessiert uns immer, ob es Methoden gibt, um aus bekannten Beispielen für diesen Begriff weitere Beispiele zu gewinnen. Im Falle der Mengen gibt es hier zahlreiche Möglichkeiten:

Definition 1.22. Seien X und Y Mengen. Dann nennen wir

- (a) $X \cup Y := \{x : x \in X \text{ oder } x \in Y\}$ die **Vereinigung** von X und Y .
 (b) $X \cap Y := \{x : x \in X \text{ und } x \in Y\}$ den **(Durch-)Schnitt** von X und Y . Gilt $X \cap Y = \emptyset$, so heißen X und Y **disjunkt**.
 (c) $X \setminus Y := \{x : x \in X \text{ und } x \notin Y\}$ die **Differenz(-menge)** von X und Y bzw. das **(relative) Komplement** von Y in X . Gilt speziell $Y \subseteq X$, so schreiben wir auch $Y^C := X \setminus Y$ und nennen Y^C das **Komplement** von Y in X .

Diese Begriffe lassen sich auch schön mittels *Mengendiagrammen* darstellen:



Lemma 1.23. Seien X, Y, Z Mengen. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

- (a) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ (Assoziativgesetz für $\cup$)
- (b) $X \cup Y = Y \cup X$ (Kommutativgesetz für $\cup$)
- (c) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ (Assoziativgesetz für $\cap$)
- (d) $X \cap Y = Y \cap X$ (Kommutativgesetz für $\cap$)
- (e) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$
 $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (Distributivgesetze für $\cup$ und $\cap$)
- (f) $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c,$
 $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ (De Morgan'sche Regeln)

Wir beweisen Lemma 1.23 in Übungsaufgabe 1.2.

Augustus De Morgan, geboren am 27. Juni 1806 in Madurai und gestorben am 18. März 1871 in London, war ein englischer Mathematiker. Er war Mitbegründer und erster Präsident der London Mathematical Society. Am bekanntesten wurde er durch zwei nach ihm benannte Regeln, die De Morgan'schen Gesetze. De Morgan gilt heute gemeinsam mit George Boole als Begründer der formalen Logik. Das Bild zur Rechten zeigt ihn 1860, im Alter von 54 Jahren.



Auch für mehr als zwei Mengen können wir den Durchschnitt und die Vereinigung definieren:

Definition 1.24. Sei I eine nichtleere Menge und X_i für jedes $i \in I$ eine Menge. Da wir hier die Menge I nutzen, um die Mengen X_i zu indizieren, nennen wir I in diesem Kontext auch eine **Indexmenge**. Wir nennen nun:

- (a) $\bigcup_{i \in I} X_i := \{x : \exists i \in I : x \in X_i\}$ die **Vereinigung** der Mengen X_i ,
- (b) $\bigcap_{i \in I} X_i := \{x : \forall i \in I : x \in X_i\}$ den **Durchschnitt** der Mengen X_i .

Manchmal ist es von Interesse, Elemente aus verschiedenen Mengen gleichzeitig zu betrachten. Hier hilft ein wenig Buchhaltung:

Definition 1.25. Seien $X_1, \dots, X_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ endlich viele Mengen. Dann definieren wir:

- (a) Ein **(geordnetes) n -Tupel** ist eine Liste $(x_1, \dots, x_n)$ mit Einträgen $x_i \in X_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, wobei es hier auf die Reihenfolge der Einträge ankommt.
- (b) Das **kartesische Produkt**

$$X_1 \times \dots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) : \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i \in X_i\}$$

ist die Menge aller geordneten n -Tupel, wobei genau dann $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$ gilt, wenn bereits für alle $i \in I$ die Identität $x_i = x'_i$ gilt. Ist speziell $X_1 = \dots = X_n =: X$, so schreiben wir auch einfacher X^n für $X_1 \times \dots \times X_n$.

Beispiel 1.26. Die Karten eines (französischen) Skatblatts können wir beschreiben als Elemente $F \times W$ mit

$$F := \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\} \quad \text{und} \quad W := \{7, 8, 9, B, D, K, 10, A\}.$$

1.3 Relationen

Definition 1.27. Sei X eine Menge. Eine (**zweistellige**) **Relation** auf X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. Für $(x, y) \in R$ schreiben wir dann auch xRy .

Beispiel 1.28. Sei $X = \{1, 2, 3\}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $\{(1, 3), (2, 1)\}$ ist eine Relation.
 (b) $R := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ ist eine Relation. Diese könnte man auch durch

$$xRy \iff x \leq y$$

beschreiben. Tatsächlich sind für bestimmte Standardrelationen bestimmte Schreibweisen, wie etwa $\leq$, üblich und die Notation R für eine Relation wird uns später nicht mehr oft begegnen.

Definition 1.29. Sei R eine Relation auf einer nichtleeren Menge X . Dann nennen wir R

reflexiv,	falls für alle $x \in X$ gilt: xRx ,
symmetrisch,	falls für alle $x, y \in X$ gilt: $xRy \implies yRx$,
antisymmetrisch,	falls für alle $x, y \in X$ gilt: $xRy \wedge yRx \implies x = y$,
transitiv,	falls für alle $x, y, z \in X$ gilt: $xRy \wedge yRz \implies xRz$,
total,	falls für alle $x, y \in X$ gilt: $xRy \vee yRx$.

Definition 1.30. Eine Relation heißt eine ...

- ... **Totalordnung**, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und total ist.
- ... **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiel 1.31. (a) Die Relation aus Beispiel 1.28 (a) ist antisymmetrisch, aber nicht reflexiv, symmetrisch, transitiv oder total.

(b) Die Relation R aus Beispiel 1.28 (b) ist eine Totalordnung.

(c) Sei X eine Menge. Dann ist $\subseteq$ eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf $\mathcal{P}(X)$, denn:

- $\forall A \in \mathcal{P}(X): A \subseteq A$, so dass Reflexivität gilt.
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(X): A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$, so dass Antisymmetrie gilt.
- $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X): A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$, so dass auch Transitivität gilt.

#

Hat X mindestens zwei Elemente x, y , so ist $\subseteq$ nicht total, denn es gilt weder $\{x\} \subseteq \{y\}$ noch $\{y\} \subseteq \{x\}$.

Mitmachaufgabe 1.32. Wir definieren auf der Menge M aller Menschen zwei Relationen durch

$x \sim y \iff x \text{ und } y \text{ haben dasselbe Geburtsjahr,}$

$x \approx y \iff \text{die Geburtstage von } x \text{ und } y \text{ unterscheiden sich um weniger als ein Jahr.}$

Untersuchen Sie die Relationen $\sim$ und $\approx$ darauf, ob sie Äquivalenzrelationen sind!

Lösung.

□

Definition 1.33. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X und $x \in X$. Wir nennen

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x und jedes Element $y \in [x]$ einen **Vertreter** von $[x]$. Die Menge aller Äquivalenzklassen $X/\sim := \{[x] : x \in X\}$ heißt **Quotientenmenge** bzw. **Faktormenge** von $\sim$.

Lemma 1.34. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X und seien $x, y \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $x \sim y$.
- (ii) $[x] = [y]$.
- (iii) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Beweis. Gelte zunächst Aussage (i), also $x \sim y$ und aufgrund der Symmetrie von $\sim$ genauso $y \sim x$. Aufgrund der Transitivität von $\sim$ erhalten wir so

$$\begin{aligned} [x] &= \{z \in X : z \sim x\} \stackrel{x \sim y}{\subseteq} \{z \in X : z \sim y\} = [y], \\ [y] &= \{z \in X : z \sim y\} \stackrel{y \sim x}{\subseteq} \{z \in X : z \sim x\} = [x]. \end{aligned}$$

Zusammen ist das Aussage (ii).

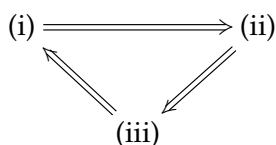
Gelte nun Aussage (ii), also $[x] = [y]$. Dann gilt

$$[x] \cap [y] = [x] \neq \emptyset,$$

da die Äquivalenzklasse $[x]$ auf jeden Fall das Element x enthält. Das ist Aussage (iii).

Gelte schließlich Aussage (iii), also $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $z \in X$ mit $z \in [x] \cap [y]$. Für dieses gilt $z \sim x$ und $z \sim y$. Aufgrund der Symmetrie und der Transitivität von $\sim$ folgt hieraus $x \sim y$ und also Aussage (i).

Offensichtlich lassen sich aus den bewiesenen drei Implikationen sämtliche behaupteten Äquivalenzen herleiten, so dass wir uns auf geschickte Weise Arbeit gespart haben. Dieses Vorgehen nennt sich ein **Ringschluss** und ist eine beliebte Beweistechnik.

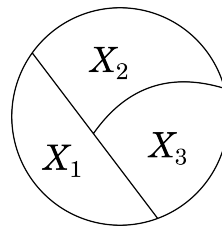


□

Definition 1.35. Eine **Partition** auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{P}$ nichtleerer Teilmengen von X , welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = X$,
- (ii) Für alle $P, Q \in \mathcal{P}$ gilt $P = Q$ oder $P \cap Q = \emptyset$.

Eine Partition $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, X_3\}$ lässt sich wie folgt graphisch veranschaulichen:



Beispiel 1.36. Eine mögliche Partition der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist durch die Teilmengen der geraden bzw. ungeraden natürlichen Zahlen gegeben.

Wir können nun den ersten substantiellen Satz der Vorlesung zeigen:

Satz 1.37. Sei X eine Menge. Dann bilden die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf X eine Partition von X . Umgekehrt definiert jede Partition von X eine Äquivalenzrelation auf X .

Beweis. Sei zunächst $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X . Nach Konstruktion sind dann die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ allesamt nichtleer. Trivialerweise gilt zudem

$$\bigcup_{[x] \in X/\sim} [x] = \bigcup_{x \in X} [x] = X$$

und also Eigenschaft (i) einer Partition. Da nach Lemma 1.34 je zwei voneinander verschiedene Äquivalenzklassen disjunkt sind, gilt auch Eigenschaft (ii), so dass wir insgesamt gezeigt haben, dass jede Äquivalenzrelation eine Partition definiert.

Sei nun umgekehrt $\mathcal{P}$ eine Partition von X . Wir definieren dann eine Relation $\sim$ durch

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists P \in \mathcal{P} : x, y \in P.$$

Diese ist bereits eine Äquivalenzrelation,

denn:

- Nach Eigenschaft (i) einer Partition gibt es für alle $x \in X$ ein $P \in \mathcal{P}$ mit $x \in P$. Es folgt $x \sim x$ und also die Reflexivität von $\sim$.
- Seien $x, y \in X$ mit $x \sim y$. Dann gibt es ein $P \in \mathcal{P}$ mit $x, y \in P$ und also auch mit $y, x \in P$. Es folgt $y \sim x$ und also die Symmetrie von $\sim$.
- Seien $x, y, z \in X$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gibt es Mengen $P, Q \in \mathcal{P}$ mit $x, y \in P$ und $y, z \in Q$. Nach Eigenschaft (ii) einer Partition und aufgrund von $y \in P \cap Q$ ist in dieser Situation bereits $P = Q$ und wir haben $x, z \in P$. Es folgt $x \sim z$ und somit auch die Transitivität von $\sim$.

#

□

Wir haben für diesen Satz auf verschiedene Weisen argumentiert. Damit ist das der richtige Moment, um kurz innezuhalten und uns zu fragen, welche gängigen Beweismethoden es gibt und wie man beim Beweis einer komplizierteren Behauptung überhaupt vorgeht. Das werden wir im folgenden Abschnitt 1.4 tun und schließen vorher diesen Abschnitt noch mit einem Beispiel zum Vorherigen ab:

Beispiel 1.38. Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ ist durch

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad n \text{ teilt } a - b$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen definiert,

denn: Reflexivität und Symmetrie ergeben sich unmittelbar aus der Definition. Zum Beweis der Transitivität betrachten wir $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann gibt es $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $a - b = kn$ und $b - c = \ell n$. Es folgt $a - c = (a - b) + (b - c) = kn + \ell n = (k + \ell) \cdot n$ und somit auch $a \sim c$. #

Die – nach Satz 1.37 paarweise disjunkten – Äquivalenzklassen von $\mathbb{Z}$ bezüglich $\sim$ heißen **Restklassen** und wir schreiben auch $a \equiv b \pmod{n}$ für $a \sim b$.

1.4 Beweisen

Wie schon nach Definition 1.5 angemerkt, ist der Aufbau eines mathematischen Satzes im Grundsatz immer derselbe, nämlich eine Implikation vom Typ $A \implies B$ für zwei Aussagen A (hier: die Voraussetzungen) und B (hier: die Behauptung). Um einen Satz zu beweisen, müssen wir zeigen, dass diese Implikation wahr ist. Dies über Wahrheitstafeln zu machen, ist umständlich, ließe sich aber theoretisch umsetzen. In der Praxis geht man zumeist anders vor. In den folgenden Unterabschnitten führen wir die gängigsten Beweismethoden ein und geben Beispiele für diese an. Hilfe beim Formulieren von Beweisen liefert etwa das kurzweilige Buch *Das ist o. B. d. A. trivial* von Beutelspacher.

Elementare Beweismethoden

Als **direkten Beweis** bezeichnen wir es, wenn eine Folge von Implikationen gezeigt wird. Um die Implikation $A \implies B$ zu zeigen, finden wir also Aussagen $A_1, A_2, \dots, A_n$ und zeigen die Implikationen

$$A \implies A_1, A_1 \implies A_2, \dots, A_n \implies B.$$

Für einen **indirekten Beweis** nutzen wir die Kontraposition aus Beispiel 1.7 (a): Statt der Implikation $A \implies B$ zeigen wir die äquivalente Aussage $(\neg B) \implies (\neg A)$, indem wir diese wie beim direkten Beweis in Teilimplikationen zerlegen.

Für einen **Widerspruchsbeweis** nutzen wir den Widerspruch aus Beispiel 1.7 (b): Statt der Implikation $A \implies B$ zeigen wir die äquivalente Aussage $\neg(A \wedge (\neg B))$, indem wir annehmen, dass A und $\neg B$ beide wahr sind, und hieraus mit als wahr bekannten Implikationen eine bekanntlich falsche Aussage herleiten.

Oft bestehen Beweise aus mehreren Schritten, in denen verschiedene Beweisverfahren kombiniert werden:

- Um beispielsweise die Äquivalenz $A \iff B$ zu beweisen, können wir die Implikationen $A \implies B$ und $B \implies A$ getrennt voneinander – und auch mit verschiedenen Methoden – beweisen.
- Ist eine Aussage mit Prädikaten formuliert, beispielsweise $\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \iff Q(n)$, so kann es sich anbieten, eine **Fallunterscheidung** zu machen, also beispielsweise die Aussage zunächst für alle geraden und dann für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. *Wichtig dabei ist, dass alle Fälle abgedeckt sind!*

Beweise gut leserlich aufzuschreiben ist in gewissem Umfang eine Kunst. Als solche ist es aber auch eine *Fähigkeit, die Sie durch Üben ausbilden können*. Der erste Schritt dazu ist, Beweise zu lesen und nachzuvollziehen. Seien Sie dabei kritisch und überlegen Sie, was Sie anders machen würden. Adaptieren Sie dann Beweise bekannter Aussagen für neue Situationen. Und wenn Sie dann eigene Beweise schreiben, seien Sie genauso kritisch wie bei fremden: Ist die Aussagenlogik unmissverständlich wiedergegeben, ist die Anzahl der Zwischenschritte angemessen, ist die Notation klar? ...

Wir beweisen die folgende Aussage auf jede der drei diskutierten Weisen:

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $n + 1$ gerade, so ist n ungerade.

Diese Aussage ist natürlich sehr einfach, eignet sich aber gerade dadurch sehr gut, um die Beweisstrategien zu verdeutlichen. Wenn Sie letztere selbst ausprobieren, werden Sie sehen, dass sich für die meisten Aussagen manche der Strategien sehr künstlich anfühlen, während andere sehr einleuchtend sind. Dieses simple Beispiel soll klarmachen, dass es trotzdem nicht die eine „richtige“ Strategie gibt.

Für die Beweise nutzen wir nun, dass eine Zahl $n \in \mathbb{N}$...

- (i) ... genau dann **gerade** ist, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$ gibt und n bei Division durch 2 also den Rest 0 hat.
- (ii) ... genau dann **ungerade** ist, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k - 1$ gibt und n bei Division durch 2 also den Rest -1 hat.

Man kann leicht zeigen (*Übung!*), dass „Lässt bei Division durch 2 denselben Rest“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist, deren Äquivalenzklassen gerade durch die Mengen der geraden bzw. ungeraden natürlichen Zahlen gegeben sind. Nach Lemma 1.34 ist daher eine natürliche Zahl stets *entweder* gerade *oder* ungerade.

Direkter Beweis: Sei $n + 1 \in \mathbb{N}$ gerade. Nach (i) gibt es dann ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n + 1 = 2k$. Hieraus folgt unmittelbar $n = 2k - 1$. Aufgrund von $k \in \mathbb{N}$ und (ii) ist schließlich n ungerade. $\square$

Indirekter Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ nicht ungerade und also gerade. Nach (i) gibt es dann ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Hieraus folgt unmittelbar $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$. Aufgrund von $k + 1 \in \mathbb{N}$ und (ii) ist schließlich $n + 1$ ungerade und also nicht gerade. Wir haben gezeigt:

$$n \text{ nicht ungerade} \implies n + 1 \text{ nicht gerade.}$$

Es gilt daher auch die Kontraposition

$$n + 1 \text{ gerade} \implies n \text{ ungerade.}$$

□

Widerspruchsbeweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen nun an, $n + 1$ wäre gerade und n nicht ungerade, also gerade. Nach (i) und (ii) gäbe es dann $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $n + 1 = 2k$ und $n = 2\ell$. Hieraus folgte unmittelbar

$$2k = n + 1 = 2\ell + 1,$$

also

$$2 \cdot (k - \ell) = 1,$$

was $k - \ell = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ implizierte. Die Aussage, es gäbe natürliche Zahlen k, ℓ wie oben beschrieben, ist daher falsch. Also kann, wenn $n + 1$ gerade ist, nicht auch n gerade sein, also muss n ungerade sein. □

Vollständige Induktion

Wie in Abschnitt 1.2 schon sichtbar wurde, ist in dieser Vorlesung stets

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} && \text{die Menge der } \textit{natürlichen Zahlen}, \\ \mathbb{N}_0 &:= \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

⚠ Das wird in der Literatur uneinheitlich gehandhabt! Oft wird auch 0 als Element der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ geführt.

In den natürlichen Zahlen gilt das folgende Prinzip:

Prinzip der vollständigen Induktion. Sei $P(\cdot)$ ein Prädikat derart, dass $P(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage ist. Gelten dann die beiden Voraussetzungen

(IA) *Induktionsanfang:* $P(1)$,

(IS) *Induktionsschritt:* $\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \implies P(n + 1)$,

so gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die vollständige Induktion ist also eine Methode, um simultan Aussagen über alle natürlichen Zahlen zu treffen. Die Idee dahinter ist eine Art „Domino-Effekt“:

$$\begin{aligned} \left(P(1) \text{ und } (P(1) \implies P(2)) \right) &\implies P(2), \\ \left(P(2) \text{ und } (P(2) \implies P(3)) \right) &\implies P(3) \quad \dots \end{aligned}$$

⚠ Wir werden später auch Varianten der vollständigen Induktion verwenden. Beispielsweise kann der Induktionsanfang auch bei einer beliebigen ganzen Zahl n_0 liegen, ohne dass sich am Vorgehen etwas Wesentliches ändert.

Proposition 1.39. *Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element, die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind also wohlgeordnet.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion. Wir definieren das Prädikat

$$P(n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Jede Teilmenge } M \subseteq \mathbb{N}, \text{ die ein Element } \leq n \text{ enthält,} \\ \text{besitzt ein kleinstes Element.}$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage klar, denn enthält eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 1, so ist diese als kleinste natürliche Zahl bereits das Minimum von M .

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Aussage $P(n)$ gilt. Sei weiter $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge, in der eine natürliche Zahl $\leq n + 1$ enthalten ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: Im ersten Fall enthält M eine natürliche Zahl $\leq n$ und besitzt so nach $P(n)$ ein kleinstes Element. Im zweiten Fall enthält M keine der natürlichen Zahlen $1, \dots, n$, so dass $n + 1$ das kleinste Element von M ist. Da in beiden Fällen ein kleinstes Element von M existiert, haben wir so $P(n + 1)$ gezeigt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt also $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Mitmachaufgabe 1.40. *Betrachten Sie die folgende Behauptung und den anschließenden Beweis:*

Behauptung. *Alle Menschen sind gleich groß.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion. Dafür definieren wir auf der Menge M der Menschen das Prädikat

$$P(n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{in allen } n\text{-elementigen Teilmengen von } M \\ \text{sind alle Menschen gleich groß.}$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage klar.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Aussage $P(n)$ gilt. Sei nun $\{m_1, \dots, m_{n+1}\} \subseteq M$ eine Menge aus $n + 1$ Menschen. Mit $P(n)$ wissen wir, dass dann sowohl in $\{m_1, \dots, m_n\}$ als auch in $\{m_2, \dots, m_{n+1}\}$ alle Menschen gleich groß sind. Es folgt, dass auch in $\{m_1, \dots, m_{n+1}\}$ alle Menschen gleich groß sind und also $P(n + 1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt also $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Da die bewiesene Aussage offensichtlich falsch ist, muss der Beweis fehlerhaft sein. Wo ist das Problem?

Lösung.

□

Um mathematisch interessante Beispiele für den Einsatz der vollständigen Induktion elegant formulieren zu können, führen wir nun für die *Summe* und das *Produkt* endlich vieler reeller Zahlen $a_{n_1}, a_{n_1+1}, \dots, a_{n_2}$ zwei Schreibweisen ein:

Im Fall $n_1 > n_2$ bezeichnen wir die Summe bzw. das Produkt als *leer* und setzen

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k =: 0 \quad \text{bzw.} \quad \prod_{k=n_1}^{n_2} a_k =: 1.$$

Für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \leq n_2$ setzen wir *rekursiv*

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k := \sum_{k=n_1}^{n_2-1} a_k + a_{n_2} \quad \text{für die Summe,} \quad (1.1)$$

$$\prod_{k=n_1}^{n_2} a_k := \prod_{k=n_1}^{n_2-1} a_k \cdot a_{n_2} \quad \text{für das Produkt.} \quad (1.2)$$

Als Beispiele für Beweise mittels vollständiger Induktion zeigen wir nun zu Summen und Produkten jeweils ein Resultat:

Proposition 1.41. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt die *Gauß'sche Summenformel*

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Johann Carl Friedrich Gauß, geboren am 30. April 1777 in Braunschweig und gestorben am 23. Februar 1855 in Göttingen, war ein deutscher Mathematiker, Statistiker, Astronom, Geodät, Elektrotechniker und Physiker. Wegen seiner überragenden wissenschaftlichen Leistungen galt er bereits zu seinen Lebzeiten als *Princeps mathematicorum* (Fürst der Mathematiker). Das Gemälde zur Rechten zeigt ihn im Jahr 1803, im Alter von 26 Jahren.



Beweis. Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$P(n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

und führen einen Induktionsbeweis.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

und also $P(1)$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $P(n)$ gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &\stackrel{(1.1)}{=} \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ &\stackrel{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n+1) + \frac{2}{2} \cdot (n+1) \\ &= \frac{n+2}{2} \cdot (n+1) \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

und somit $P(n+1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt also $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 1.42. Diese Formel war bereits in der vorgriechischen Mathematik bekannt. Ihren heute verbreiteten Namen erhielt sie von einer anekdotischen Erzählung über den neunjährigen Gauß, der sie 1786 für $n = 100$ von seinem Lehrer Büttner gestellt bekommen haben soll. In Gauß zum Gedächtnis schreibt sein Biograph Sartorius:

Das Herkommen [gemeint ist: die Konvention] brachte es nämlich mit sich, dass der Schüler, welcher zuerst sein Rechenexempel beendet hatte, die Tafel in die Mitte eines großen Tisches legte; über diese legte der zweite seine Tafel u.s.w. Der junge Gauss war kaum in die Rechenklasse eingetreten, als Büttner die Summation einer arithmetischen Reihe aufgab. Die Aufgabe war indess kaum ausgesprochen als Gauss die Tafel mit den im niedern Braunschweiger Dialekt gesprochenen Worten auf den Tisch wirft: „Ligget se’.“ (Da liegt sie.) Während die anderen Schüler weiter rechnen, multipliciren und addiren, geht Büttner sich seiner Würde bewusst auf und ab, indem er nur ab und zu einen mitleidigen und sarcastischen Blick auf den kleinsten Schüler wirft, der längst seine Aufgabe erledigt hatte. [...] Am Ende der Stunde wurden darauf die Rechentafeln umgekehrt; die von Gauss mit einer einzigen Zahl lag oben und als Büttner das Exempel prüfte, wurde das seinige zum Staunen aller Anwesenden als richtig befunden ...

Anders als wir ging Gauß nicht induktiv vor, sondern addierte

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & 2 & \dots & 100 \\
 + & 100 & 99 & \dots & 1 \\
 \hline
 & 101 & 101 & \dots & 101
 \end{array}$$

und erhielt so

$$100 \cdot 101 = 2 \cdot \sum_{k=1}^{100} k.$$

Proposition 1.43. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$n! := \prod_{k=1}^n k$$

die Anzahl der Anordnungen der Menge $\{1, \dots, n\}$. Wir nennen dabei $n!$ die **Fakultät** von n .

Beweis. Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\begin{aligned}
 P(n) &: \iff n! \text{ ist die Anzahl der Anordnungen der Menge } \{1, 2, \dots, n\} \\
 &: \iff n! \text{ ist die Anzahl der geordneten } n\text{-Tupel, in denen jedes Element} \\
 &\quad \text{der Menge } \{1, 2, \dots, n\} \text{ genau einmal vorkommt}
 \end{aligned}$$

und führen einen Induktionsbeweis.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$\text{Anzahl der Anordnungen der Menge } \emptyset = 1 = 0!$$

und also $P(1)$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir nehmen an, dass $P(n)$ gilt. Wir verteilen nun die Elemente der Menge $\{1, 2, \dots, n+1\}$ auf $n+1$ Plätze. Für den ersten Platz haben wir dabei $n+1$ Möglichkeiten. Für die übrigen n Plätze gibt es aufgrund von $P(n)$ genau $n!$ Möglichkeiten der Anordnung. Es folgt

$$\text{Anzahl der Anordnungen der Menge } \{1, 2, \dots, n+1\} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

und somit $P(n+1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt also $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

Beispiel 1.44. Für kleine n gilt:

$$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, \dots, 10! = 3628800, \dots$$

Die Mengen der möglichen Anordnungen der nach Proposition 1.43 dazu passenden Mengen

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots$$

sind

$$\{(1)\}, \{(1, 2), (2, 1)\}, \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\},$$

wobei wir die Anordnungen der 10-elementigen Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ aus offensichtlichen Gründen nicht mehr mit aufführen.

Exkurs: Problemlösen

Dieser Abschnitt wird in der Vorlesung nicht behandelt und ist nicht prüfungsrelevant.

Wir haben nun Möglichkeiten zum Führen von Beweisen diskutiert. Dies zeigt uns zentrale Werkzeuge und Handlungsoptionen auf, nimmt uns jedoch für eine gegebene Problemstellung das Auffinden eines Beweises nicht ab! Eine zentrale Kompetenz von Mathematikern ist daher die Fähigkeit, mathematische Probleme zu lösen. Das Thema ist natürlich ein weites Feld. Einen schönen Einstieg im Sinne einer Checkliste liefert das von Pólya verfasste Standardwerk *How to solve it* aus dem Jahr 1945.

George Pólya, geboren am 13. Dezember 1887 in Budapest und gestorben am 7. September 1985 in Palo Alto, war ein Mathematiker ungarischer Herkunft. Seine Arbeitsgebiete waren insbesondere Wahrscheinlichkeitstheorie, Analysis, Kombinatorik und Zahlentheorie. Da er relativ spät zur Mathematik kam, interessierte ihn nach eigenen Worten vor allem die Frage, wie mathematische Resultate und Lehrsätze entdeckt werden; in der zweiten Hälfte seines Schaffens konzentrierte er sich insbesondere auf die Vermittlung und Charakterisierung von Problemlösestrategien.



A. Verstehen des Problems

Lesen Sie das Problem genau durch:

- Was ist *gegeben*?
- Was ist *gesucht*?
- Verstehen Sie alle Wörter?

- Können Sie das Problem mit eigenen Worten *umformulieren*?
- Was sind die *Voraussetzungen*?
- *Schnellcheck*: Sind ausreichend Informationen gegeben? Sind irrelevante Informationen gegeben?

B. Untersuchen des Problems

Allgemeine Strategien und Fragestellungen:

- Versuchen Sie, ein Gefühl für das Problem zu bekommen und sich damit vertraut zu machen: Betrachten Sie *Beispiele*! Ist die Aussage plausibel oder steht sie vielleicht gar in Widerspruch zu anderen bekannten Resultaten?
- Haben Sie bereits ein *ähnliches Problem* gesehen?
- Können Sie zunächst ein *einfacheres Problem* betrachten?
- Greifen Sie das Problem von beiden Seiten an! *Vorwärtsarbeiten*: Was können Sie mit den Voraussetzungen anfangen? *Rückwärtsarbeiten*: Wie können Sie das Ziel erreichen?
- Führen Sie geeignete *Notation* ein
- Formulieren Sie *Vermutungen*
- Können Sie ein *Muster* entdecken?
- Was ist *wesentlich*, worauf kommt es an?
- Können Sie sinnvolle *Zwischenziele* formulieren? Iterieren Sie gegebenenfalls Ihr Vorgehen!

Spezielle Strategien – Auswahl einer passenden Beweistechnik wie in Abschnitt 1.4:

- direkter Beweis
- indirekter Beweis
- Widerspruchsbeweis
- Beweis über vollständige Induktion

Führt eine dieser Methoden nicht zum Ziel, so probieren Sie eine andere!

Metastrategie für Übungsaufgaben – Vorlesungsstoff nachbereiten:

- Lesen Sie *Definitionen und Sätze* nach
- Sehen Sie *Beweise aus der Vorlesung* an und analysieren Sie deren *Strategien*
- Merken Sie sich *Tricks* aus der Vorlesung

- Stellen Sie einen *Bezug* des Problems zum aktuellen Stoff her
- Schließen Sie für das gegebene Problem *irrelevanten Stoff* aus: Was kann es nicht sein?

Was, wenn Sie nicht weiter wissen?

- Bleiben Sie *flexibel*: Wenn eine Strategie nicht weiterhilft, versuchen Sie eine andere
- Bleiben Sie *hartnäckig*: Es ist normal, dass sich ein mathematisches Problem nicht auf Anhieb lösen lässt! *Geben Sie nicht auf*, bis sämtliche Möglichkeiten erschöpft sind
- Haben Sie aufgrund eigener Erschöpfung aufgegeben: Nehmen Sie in später, in ausgeruhtem Zustand einen neuen Anlauf

C. Geordnetes Aufschreiben der Lösung**Achten Sie auf Folgendes:**

- Argumentieren Sie *schlüssig*
- Achten Sie auf *korrekte Logik*, fragen Sie sich insbesondere: Zeigen die Folgepfeile stets in die richtige Richtung? Werden Quantoren korrekt verwendet? Dies gilt ebenso, wenn Aussagen in deutscher Sprache und also nicht formelhaft verfasst sind.
- Präsentieren Sie Ihre Argumente in einer sinnvollen *Anordnung*
- Benutzen Sie *Fachbegriffe*
- Schreiben Sie *verständlich*
- Schreiben Sie *leserlich*
- Finden Sie eine *Balance* zwischen Textlänge und Verständlichkeit: Erläutern Sie schwierige Stellen angemessen und schreiben Sie keine Romane über Trivialitäten

D. Rückschau auf das Problem**Nach Lösung des Problems können Sie sich weitere Fragen stellen:**

- Was haben Sie *gelernt*?
- Ist die Lösung *sinnvoll*?
- Gibt es andere, *bessere Lösungswege*?
- Was war der schwierigste Teil? Was war „des Pudels Kern“?
- Wurden alle Voraussetzungen verwendet? *Wofür waren sie wichtig*?

1.5 Abbildungen

In diesem Abschnitt führen wir mit den Abbildungen einen zentralen Begriff der Analysis ein:

Definition 1.45. Eine **Abbildung** f von einer Menge X in eine Menge Y ist ein Tripel

$$f = (G_f, X, Y),$$

wobei G_f eine Teilmenge von $X \times Y$ von der Gestalt ist, dass es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in G_f$ gibt. Wir nennen dann G_f den **Graphen**, X die **Definitionsmenge** und Y die **Zielfmenge** von f . Wir schreiben $f(x) := y$ und beschreiben die Abbildung als

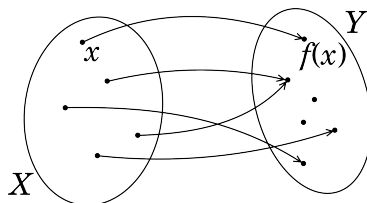
$$f: \begin{cases} X & \rightarrow Y, \\ x & \mapsto f(x). \end{cases}$$

Wir nennen zwei Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ **gleich**, falls

$$\forall x \in X: f(x) = g(x)$$

gilt, und schreiben dann $f = g$.

Anschaulich ist eine Abbildung eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet:



Der Begriff der Abbildung ist sehr allgemein. Für die Mengen $X = \{1, 2, 3\}$ und $Y = \{A, B, C, D\}$ ist etwa durch die Vorschrift

$$f(1) := A, f(2) := C, f(3) := A$$

eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ definiert. Die Vorschriften

$$\begin{aligned} g(1) &:= A, g(2) := B, \\ h(1) &:= A, h(2) := C, h(3) := B, h(3) := A \end{aligned}$$

liefern jedoch keine Abbildungen, da sie die Bedingung verletzen, dass jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet werden muss. Im Falle der ersten Vorschrift lässt sich das durch Anpassen der Definitionsmenge auf $\{1, 2\}$ korrigieren.

⚠ Hier sieht man, dass es notwendig ist, zur Definition einer Abbildung nicht nur ihren Graphen sondern auch Definitions- und Zielfmenge anzugeben.

Definition 1.46. Seien X, Y Mengen und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A \subseteq X$. Dann heißt

$$f|_A: \begin{cases} A & \rightarrow Y, \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$$

die *Einschränkung* von f auf A .

Beispiel 1.47. (a) Ein besonders einfaches Beispiel einer Abbildung ist die **Identität** auf einer gegebenen Menge X . Diese notieren wir als

$$\text{id}_X: \begin{cases} X & \rightarrow X, \\ x & \mapsto x. \end{cases}$$

- (b) Im für unsere Vorlesung wichtigen Fall, dass die Zielmenge Y einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine Menge von Zahlen ist, nennen wir diese Abbildung auch eine **Funktion**. Erstaunlicherweise ist dabei der Begriff der Zahl nicht mathematisch definiert, sondern lediglich ein gemeinsprachlicher Oberbegriff für verschiedene mathematische Konzepte. In der Mathematik sprechen wir, wenn wir uns mit Zahlen befassen, stets über bestimmte wohldefinierte Zahlbereiche, deren Elemente zusammenfassend alle als Zahlen bezeichnet werden. Im folgenden Kapitel 2 werden wir uns mit dieser Frage auseinandersetzen und neben den aus der Schule schon lange bekannten natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen auch die komplexen Zahlen sorgfältig einführen. Im weiteren Verlauf Ihres Studiums können Sie darüber hinaus aber noch mehr Zahlbereiche kennenlernen!
- (c) Eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow Y$, deren Definitionsmenge die Menge $\mathbb{N}$ natürlichen Zahlen ist, heißt auch eine **Folge**. Hier ist dann üblicherweise die Notation eine andere: Im Kontext von Folgen schreiben wir zumeist a_n statt $a(n)$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ statt $a: \mathbb{N} \rightarrow Y$. Folgen werden wir in Kapitel 3 intensiv studieren.

Mitmachaufgabe 1.48. Zur Veranschaulichung von Funktionen und ihren Graphen erinnern wir uns in dieser Aufgabe an die in der Schule thematisierten Zusammenhänge zwischen „algebraischen Operationen“ an einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und „geometrischen Operationen“ am zugehörigen Funktionsgraphen $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$. Beschreiben Sie dafür ausgehend von den jeweils in Abhängigkeit von einem $a \in \mathbb{R}$ angegebenen Änderungen an der Funktion f , wie sich die Graphen der nachfolgenden Funktionen geometrisch aus dem Graphen von f ergeben:

- (a) $f + a$,
- (b) $a \cdot f$,
- (c) $x \mapsto f(x + a)$,
- (d) $x \mapsto f(a \cdot x)$.

Lösung.

□

Definition 1.49. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X, Y . Dann setzen wir:

- Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ heißt $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ das **Bild** von A unter f . Im Spezialfall $A = X$ sagen wir auch, dass $f(X)$ das **Bild** von f ist.
- Für jede Teilmenge $B \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ das **Urbild** von B unter f .

Lemma 1.50. Seien $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X, Y und $A, \tilde{A} \subseteq X$ sowie $B, \tilde{B} \subseteq Y$ Teilmengen. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $f^{-1}(B \cup \tilde{B}) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(\tilde{B})$.
- (b) $f^{-1}(B \cap \tilde{B}) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(\tilde{B})$.
- (c) $f^{-1}(B^C) = (f^{-1}(B))^C$
- (d) $f(A \cup \tilde{A}) = f(A) \cup f(\tilde{A})$.

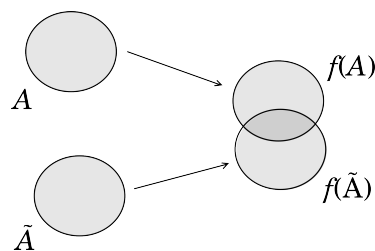
⚠ Im Gegensatz zum Urbild ist das Bild im Allgemeinen nicht mit Durchschnitten und Komplementen verträglich (Übung!).

- (e) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ und $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

⚠ Die umgekehrten Inklusionen sind im Allgemeinen falsch (Übung!).

Beweis. Die verschiedenen Behauptungen lassen sich ganz ähnlich zeigen und wir führen exemplarisch nur den Beweis von Behauptung (d) vor. Die restlichen Aussagen verbleiben als eine Übung. Wir müssen nun zeigen:

$$\forall y \in Y: y \in f(A \cup \tilde{A}) \iff y \in f(A) \cup f(\tilde{A}).$$



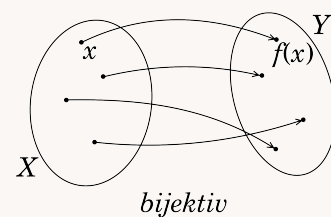
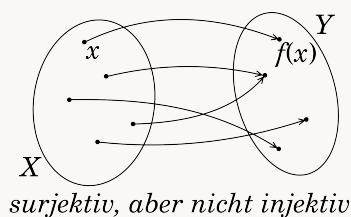
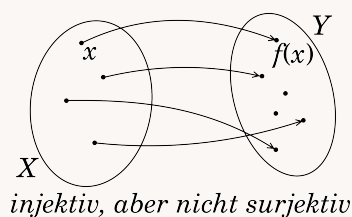
Für ein beliebiges $y \in Y$ gilt aber:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup \tilde{A}) &\iff \exists x \in A \cup \tilde{A}: f(x) = y \\ &\iff (\exists x \in A: f(x) = y) \text{ oder } (\exists x \in \tilde{A}: f(x) = y) \\ &\iff y \in f(A) \text{ oder } y \in f(\tilde{A}) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(\tilde{A}). \end{aligned}$$

□

Definition 1.51. Für eine beliebige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei Mengen X, Y setzen wir:

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv} &:\iff \left(\forall x, \tilde{x} \in X: x \neq \tilde{x} \implies f(x) \neq f(\tilde{x}) \right) \\ &\stackrel{1.7(a)}{\iff} \left(\forall x, \tilde{x} \in X: f(x) = f(\tilde{x}) \implies x = \tilde{x} \right), \\ f \text{ ist surjektiv} &:\iff \forall y \in Y, \exists x \in X: f(x) = y, \\ f \text{ ist bijektiv} &:\iff f \text{ ist injektiv und surjektiv.} \end{aligned}$$



Beispiel 1.52. Die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

ist weder injektiv noch surjektiv. Sie wird jedoch injektiv, wenn wir Ihre Definitionsmenge auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ einschränken, und surjektiv, wenn wir ihre Zielmenge auf ihr Bild $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ einschränken.

Bemerkung 1.53. Der Begriff der Bijektivität ist für unendliche Mengen manchmal etwas unintuitiv. So ist offensichtlich die Abbildung

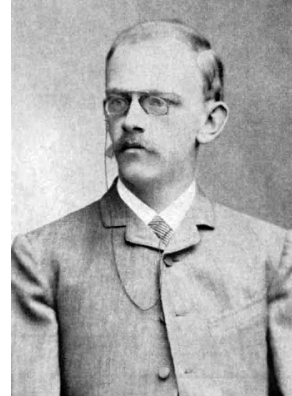
$$f: \begin{cases} \mathbb{N}_0 & \rightarrow \mathbb{N}, \\ n & \mapsto n + 1 \end{cases}$$

zwischen der Menge $\mathbb{N}_0$ und ihrer Teilmenge $\mathbb{N}$ injektiv und surjektiv, also bijektiv. Um diese verblüffende Tatsache zu veranschaulichen, hat Hilbert 1924 das folgende Gedankenspiel entworfen:

In einem Hotel mit endlich vielen Zimmern können keine Gäste mehr aufgenommen werden, sobald alle Zimmer belegt sind. **Hilberts Hotel** hat nun unendlich viele Zimmer, die mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind. Man könnte nun annehmen, dass das gleiche Problem auch hier auftreten würde, nämlich dann, wenn alle Zimmer durch (unendlich viele) Gäste belegt sind. Es gibt jedoch einen Weg, Platz für einen weiteren Gast zu schaffen, obwohl alle Zimmer belegt sind: Der Gast von Zimmer 1 geht in Zimmer 2, der Gast von Zimmer 2 geht in Zimmer 3 usw. Damit wird Zimmer 1 frei für den neuen Gast (der bei uns die Nummer 0 hat). Da die Anzahl der Zimmer unendlich ist, gibt es keinen „letzten“ Gast, der nicht in ein weiteres Zimmer umziehen könnte.

Tatsächlich kann man auf ähnliche Weise leicht auch Platz für unendlich viele neue Gäste schaffen, wenn sich diese wiederum mit den natürlichen Zahlen durchnummerieren lassen (Übung!). Diese Überlegungen führen in Verallgemeinerung der Elementanzahl auf nicht notwendigerweise endliche Mengen zu dem Begriff der **Gleichmächtigkeit** von Mengen, die gerade darüber definiert ist, dass die betreffenden Mengen in Bijektion zueinander stehen. Wir werden dieses Konzept in Abschnitt 2.4 weiter studieren.

David Hilbert, geboren am 23. Januar 1862 in Königsberg und gestorben am 14. Februar 1943 in Göttingen, war ein deutscher Mathematiker, Physiker und Philosoph. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit. Mit seinen Vorschlägen begründete er die bis heute bedeutsame formalistische Auffassung von den Grundlagen der Mathematik und veranlasste eine kritische Analyse der Begriffsdefinitionen der Mathematik und des mathematischen Beweises. Das Foto zur Rechten zeigt ihn 1886, im Alter von 24 Jahren.



Definition 1.54. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine bijektive Abbildung zwischen zwei Mengen X, Y . Dann heißt die Abbildung $f^{-1}: Y \rightarrow X$, die als Teilmenge

$$\{(y, x) : (x, y) \in f\} \subseteq Y \times X$$

definiert ist, die **Umkehrabbildung** oder auch **Inverse** von f . Durch diese Festsetzung wird $f^{-1}(y)$ das eindeutige Element $x \in X$ mit $f(x) = y$.

⚠ Die Umkehrabbildung und das Urbild werden mit denselben Symbolen bezeichnet, sind aber nicht dasselbe. Die Umkehrabbildung bildet Elemente auf Elemente ab, während das Urbild einer Menge wieder eine Menge ist. Eine Umkehrabbildung existiert nur für bijektive Abbildungen, während Urbilder von Teilmengen der Zielmenge immer existieren.

Definition 1.55. Die **Hintereinanderausführung** bzw. **Komposition** zweier Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ von Mengen ist die Abbildung

$$g \circ f: \begin{cases} X & \rightarrow Z, \\ x & \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)), \end{cases}$$

die als „g nach f“ oder „g komponiert f“ ausgesprochen wird.

Proposition 1.56. Seien X, Y, Z, W Mengen und $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sowie $h: Z \rightarrow W$ Abbildungen. Dann gelten für die Hintereinanderausführung die folgenden Aussagen:

- (a) Es gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f =: h \circ g \circ f$.
- (b) Sind f und g beide injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, so trifft dies auch auf $g \circ f$ zu.
- (c) Sind f und g beide bijektiv, so gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Beweis. Zum Beweis von Behauptung (a) sehen wir lediglich ein, dass $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ jeweils eine Funktion $X \rightarrow W$ definieren, die beide dieselben Werte annehmen.

Nun zeigen wir Behauptung (b). Sind f und g beide injektiv, so folgt für alle $x, \tilde{x} \in X$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(\tilde{x}) &\implies g(f(x)) = g(f(\tilde{x})) \\ &\xrightarrow{g \text{ inj.}} f(x) = f(\tilde{x}) \\ &\xrightarrow{f \text{ inj.}} x = \tilde{x} \end{aligned}$$

und also die Injektivität von $g \circ f$. Sind f und g beide surjektiv, so folgt

$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) \xrightarrow{f \text{ surj.}} g(Y) \xrightarrow{g \text{ surj.}} Z$$

und also die Surjektivität von $g \circ f$. Die Behauptung über die Bijektivität ergibt sich unmittelbar hieraus, da eine Abbildung genau dann bijektiv ist, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Behauptung (c) folgt schließlich wie Aussage (a). □

Proposition 1.57. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei nichtleeren Mengen X, Y . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Genau dann ist f injektiv, wenn es eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ gibt.
- (b) Genau dann ist f surjektiv, wenn es eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $f \circ g = \text{id}_Y$ gibt.
- (c) Genau dann ist f bijektiv, wenn es eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$ gibt. Diese Abbildung ist dann eindeutig und durch f^{-1} gegeben.

Beweis. Zum Beweis von Behauptung (a) nehmen wir zunächst an, f sei injektiv. Wir konstruieren dann eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ durch die Zuordnung

$$y \mapsto \begin{cases} x & \text{falls ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y \text{ existiert,} \\ x_0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $x_0 \in X$ beliebig gewählt ist. Da es aufgrund der Injektivität für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, ist g wohldefiniert. Nach Konstruktion von g gilt dann $g \circ f = \text{id}_X$. Sei nun umgekehrt $g: Y \rightarrow X$ eine Funktion mit $g \circ f = \text{id}_X$ und seien $x, \tilde{x} \in X$ mit $f(x) = f(\tilde{x})$. Dann gilt

$$\tilde{x} = \text{id}_X(\tilde{x}) = (g \circ f)(\tilde{x}) = g(f(\tilde{x})) = g(f(x)) = \dots = x.$$

Hieraus folgt die Injektivität von f und insgesamt Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) nehmen wir zunächst an, f sei surjektiv. Wir konstruieren dann eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$, indem wir jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ zuordnen.¹ Aufgrund der Surjektivität von f ist dies möglich. Nach Konstruktion gilt dann $f \circ g = \text{id}_Y$. Sei nun umgekehrt $g: Y \rightarrow X$ eine Funktion mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und sei $y \in Y$ beliebig. Dann gilt

$$f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \text{id}_Y(y) = y$$

¹Das geht aufgrund des *Auswahlaxioms* der Mengenlehre, das wir an dieser Stelle als gegeben annehmen.

und also $y \in f(X)$. Hieraus folgt die Surjektivität von f und insgesamt Behauptung (b).

Wir beweisen nun Behauptung (c). Dass f bijektiv ist, wenn es eine Funktion g wie in der Behauptung gibt, folgt unmittelbar aus (a) und (b). Ist umgekehrt f bijektiv, so ist die Umkehrabbildung f^{-1} nach Definition 1.54 eine Funktion mit $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$. Für jede weitere Funktion $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$ gilt des Weiteren

$$g = g \circ (f \circ f^{-1}) \stackrel{1.56(a)}{=} (g \circ f) \circ f^{-1} = f^{-1}$$

und also $g = f^{-1}$. Das zeigt den Rest der Behauptung. $\square$

Beispiel 1.58. Mitmachaufgabe 1.48 lässt sich noch einmal besser verstehen, wenn wir die dort in (a)–(d) gegebenen Funktionen als Hintereinanderausführungen von Abbildungen deuten. Hierfür betrachten wir für ein $a \in \mathbb{R}$

- die **Translation** $t_a: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto x + a, \end{cases}$
- die **zentrische Streckung** $s_a: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto a \cdot x. \end{cases}$

Für $f: X \rightarrow Y$ mit $X = Y = \mathbb{R}$ ist dann:

- Hier betrachten wir $t_a \circ f$. Es wird in Y um a verschoben.
- Hier betrachten wir $s_a \circ f$. Es wird in Y um den Faktor a gestreckt.
- Hier betrachten wir $f \circ t_a$. Es wird in X um $-a$ verschoben. Das Vorzeichen entsteht, weil wir bei Einsetzen von $t_a^{-1}(x) = x - a$ in $f \circ t_a$ die Werte der ursprünglichen Funktion f in x erhalten.
- Hier betrachten wir $f \circ s_a$ für $a \neq 0$. Es wird in X um den Faktor $\frac{1}{a}$ gestreckt. Die Inversion entsteht, weil wir bei Einsetzen von $s_a^{-1}(x) = \frac{x}{a}$ in $f \circ s_a$ die Werte der ursprünglichen Funktion f in x erhalten.

Mitmachaufgabe 1.59. In Analogie zu Mitmachaufgabe 1.48 lässt sich im Spezialfall einer bijektiven Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auch der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} geometrisch in Zusammenhang mit dem Graphen von f bringen. Beschreiben Sie diesen Zusammenhang.

Lösung.



1.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. Es ist Mittwoch und morgen ist die Abgabe für den ersten Übungszettel der Analysis 1. Viele Zettelgruppen sitzen noch im Help-Desk und arbeiten gemeinsam. Zu Beginn des Studiums stehen viele Studierende vor der Herausforderung, ein tragfähiges konzeptuelles Verständnis mathematischer Inhalte zu entwickeln, etablierte Verfahren und Beweismethoden korrekt einzusetzen sowie mathematische Argumentationen präzise und logisch stringent zu führen. *Versetzen Sie sich in die Rolle der Coaches und helfen Sie den verschiedenen Gruppen die typischen Fehler, die sich in den Abgaben eingeschlichen haben, zu finden. Dafür ...*

- ... lösen Sie dazu zunächst selbst die Aufgabe, um einen Überblick zu bekommen.
- ... analysieren Sie dann die Lösungen der Studierenden auf mögliche Fehler.
- ... formulieren Sie jeweils eine kurze Rückmeldung an die Gruppe, in der Sie den zugrunde liegenden Denkfehler nachvollziehbar erklären und der Gruppe einen Hinweis für ihr weiteres Vorgehen geben, *ohne ihnen die Lösung zu verraten*.

(a) Seien A, B Aussagen. Beweisen oder widerlegen Sie, dass dann gilt:

$$(A \implies B) \implies (B \implies A).$$

Namen: Abel & Babai

Übungsblatt 1

1	2	3	4	Σ

a) Beweis:

Es gilt $A \implies B$

Gehe nun B . Dann muss bereits A ~~gelingen~~ ^{gegolten haben}, da B ja aus A entsteht.

Also $B \implies A$

Damit ist die Aussage wahr $\square$

$A \implies B$
↓

(b) Im Folgenden seien L, B die folgenden Aussagen:

L : Das T-Shirt ist lila.

B : Die Hose ist blau.

Wie lautet die Negation von $L \vee B$?

ZETTEL 1

Aufgabe 1 b)

Übersetzung:

$L \vee B$: Das Tshirt ist lila oder die Hose ist blau:

Dann: lautet die Negation von $L \vee B$:

"Das Tshirt ist nicht lila oder die Hose ist nicht blau"

Je nach dem welche Aussage vorher richtig war $\rightarrow$ jetzt ist es genau andersrum

Wahrheitstabelle:

				oder	oder
w	f	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w

(c) Prüfen Sie die beiden Aussagen auf Korrektheit:

- (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n$ ungerade.
- (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n + 1$ ungerade.

Übungsblatt 1 Abgabe von: Max S., Max Z., Laura Punkte:

1	2	3	4	Σ

(c) (i) Falsch: denn für $2 \in \mathbb{N}$ gilt $2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$ ist gerade. #

(ii) Wahr: Prüfe: f. $n = 1$: $1^2 + 1 + 1 = 3 \rightarrow$ ungerade

$n = 2$: $2^2 + 2 + 1 = 7 \rightarrow$ ungerade

$n = 3$: $3^2 + 3 + 1 = 13 \rightarrow$ ungerade

$\vdots$

usw.

$\Rightarrow$ es lässt sich kein Gegenbsp. finden #

NR:

$n = 4$: 21

$n = 17$: 307

$n = 25$: 651

$n = 100$: 10101

$n = 2026$: 4106703

Aufgabe 1.2. Zeigen Sie die Rechenregeln für Mengen aus Lemma 1.23.

Aufgabe 1.3. Sie sitzen wieder im Help-Desk und bekommen die Diskussionen einer anderen Zettelgruppe mit. Setzen Sie sich mit den Überlegungen der anderen Studierenden auseinander und unterstützen Sie diese bei der Klärung ihrer Fragen.

Justus: Ich verstehe gar nicht, warum wir jetzt plötzlich von Abbildungen reden. In der Schule waren das doch einfach Funktionen.

Bob: Sind Funktionen nicht einfach Abbildungen???

Justus: Dann könnte man doch auch direkt immer „Funktion“ sagen.

Jonas: Bei Abbildungen geht es jetzt eher um die Zuordnung und man muss prüfen, ob alle Elemente einer Menge getroffen werden.

(a) *Zuerst reflektieren Sie den Zusammenhang von Funktionen und Abbildungen und setzen sich mit den Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv auseinander. Dafür . . .*

- . . . erläutern Sie in eigenen Worten, inwiefern Abbildungen und Funktionen zusammenhängen. Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung an, welche keine Funktion ist und die in der Schule bereits vorkommt.
- . . . untersuchen Sie die Zuordnung $\{\text{Studierende}\} \rightarrow \{\text{Namensschilder}\}$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Beschreiben Sie vier Szenarien, in denen die Zuordnung jeweils injektiv, surjektiv, bijektiv bzw. weder injektiv noch surjektiv ist. Ist die Zuordnung immer eine Abbildung?

Justus: Okay, ich glaube, Abbildungen hab ich jetzt besser verstanden, aber zum Beispiel Injektivität kann ich mir immer noch nicht vorstellen.

Bob: Da habe ich eine gute Anschauung: Bei einer injektiven Funktion darf jede waagerechte Gerade den Graphen höchstens einmal schneiden. Der Graph muss also dauerhaft ansteigen bzw. abfallen und die injektiven Funktionen sind gerade die streng monotonen Funktionen!

(b) *Nun reflektieren Sie Anschauungen zur Injektivität. Dafür . . .*

- . . . erläutern Sie, wie Bobs Vorstellung „injektive Funktionen sind streng monoton“ entstehen kann und arbeiten Sie den logischen Zusammenhang zwischen *injektiv* und *streng monoton* heraus.
- . . . beurteilen Sie, in welchen Situationen die Vorstellung hilfreich sein kann und wo ihre Grenzen liegen.
- . . . entwickeln Sie eine eigene Anschauung oder ein Beispiel zur Veranschaulichung von Injektivität und erläutern Sie die Stärken und Grenzen davon.

Bob: Na gut, das passt dann nicht immer perfekt, aber trotzdem hilft es mir eine Idee zu bekommen. Die kann ich dann ja im zweiten Schritt formal überprüfen.

Justus: Das stimmt! Und zum Beispiel bei der e -Funktion aus der Schule hilft dein Ansatz ja super. Sie steigt streng monoton und man sieht, dass kein Wert doppelt getroffen wird. Ich kenne aus der Schule sogar ihre Umkehrfunktion, den natürlichen Logarithmus. Also muss sie sogar bijektiv sein!

- (c) Zuletzt untersuchen Sie die Bedeutung von Definitions-, Ziel- und Bildmenge für Abbildungen und ihre Umkehrabbildungen. Dafür ...

- ... überprüfen Sie die Injektivität und Surjektivität der Abbildung

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto e^x \end{cases}$$

und untersuchen Sie unter Rückgriff auf Ihr Wissen über die e -Funktion aus der Schule, auf welchen (typischen) Fehler Justus hier reingefallen ist.

- ...erläutern Sie, welche Rolle Definitions-, Ziel- und Bildmenge für die Bijektivität einer Abbildung spielen.

Zahlbereiche

Ziel dieses Kapitels ist es, die für die Analysis zentralen Zahlbereiche $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ der reellen und komplexen Zahlen einzuführen. Bevor wir dies jedoch tun, sprechen wir nun anhand der bereits in Abschnitt 1.2 eingeführten Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen ein wenig über die Geschichte des Zahlbegriffs:

- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ sind seit vorhistorischer Zeit bekannt und werden seit jeher dazu benutzt, Anzahlen als gleichartig betrachteter Objekte (etwa: Äpfel, Birnen, ...) zu beschreiben. In den natürlichen Zahlen können wir auf bekannte Weise addieren und multiplizieren. Die natürlichen Zahlen sind dabei unter Inversenbildung bezüglich beider Verknüpfungen nicht abgeschlossen, es gibt also in $\mathbb{N}$ keine Lösungen für Gleichungen der Form $x + 5 = 0$ oder $2x = 1$.
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Verwendung von *Stellenwertsystemen* machte die Einführung eines Symbols notwendig, das anzeigt, dass etwas *nicht* da ist. Dieses Symbol ist die Null – in Zeichen: 0. Zuerst erschien sie ca. 300 v. Chr. in Indien. Mit dem Einzug des Stellenwertsystems kam auch die Null im 12. Jahrhundert nach Europa.
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-a : a \in \mathbb{N}\}$. Im Zuge der Buchführung bei der Steuererhebung kam im China des 2. Jahrhunderts v. Chr. der Wunsch auf, nicht nur Guthaben, sondern auch Ausstände notieren zu können. Mittel der Wahl war damals – und mancherorts auch noch heute – Guthaben in schwarz und Schulden in rot zu notieren. Nach Europa kamen die negativen Zahlen erst im 15. Jahrhundert, als in Florenz das moderne Bankwesen entstand. Die Addition und die Multiplikation der natürlichen Zahlen lassen sich natürlich auf die Menge der ganzen Zahlen fortsetzen. Diese enthält dann – wichtig für die Buchführung – zu jedem ihrer Elemente das Negative und somit das additive Inverse. Unter multiplikativer Inversenbildung ist jedoch auch die Menge der ganzen Zahlen nicht abgeschlossen, so dass sich auch in $\mathbb{Z}$ Gleichungen der Form $2x = 1$ nicht lösen lassen.
- Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ wird algebraisch realisiert als

Quotient

$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) / \sim$ mit der Äquivalenzrelation $(p, q) \sim (r, s) :\iff ps = qr$,

wobei $\frac{p}{q}$ die Äquivalenzklasse von (p, q) bezeichnet. Während diese Beschreibung der rationalen Zahlen natürlich vergleichsweise rezent ist, lassen sich die ersten Beispiele für Bruchrechnung bereits ca. 1000 v. Chr. in Ägypten nachweisen. Als Verhältnisse von Längen waren sie in der antiken Mathematik und ihren Anwendungen – etwa in der Architektur – weit verbreitet, auch wenn ihnen damals noch nicht der Status von Zahlen aus eigenem Recht zugestanden wurde. Die Addition und die Multiplikation der natürlichen Zahlen lassen sich kanonisch auch auf die rationalen Zahlen fortsetzen, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &:= (ad + bc, bd) & \text{bzw.} & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac, bd) & \text{bzw.} & \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

Diese Verknüpfungen sind *wohldefiniert*, das heißt, wir erhalten dasselbe Ergebnis, wenn wir verschiedene Vertreter einer Äquivalenzklasse nutzen, vgl. Lemma 1.34. Außerdem ist die Menge der rationalen Zahlen unter Inversenbildungen bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen.

Im folgenden Abschnitt halten wir nun eine Liste der wichtigsten Rechenregeln der rationalen Zahlen – wie etwa die Existenz von Inversen – in einer algebraischen Struktur fest, um mit diesen als Anforderung auf die Suche nach weiteren Zahlbereichen gehen zu können.

2.1 Die Körperaxiome

Definition 2.1. Ein **Körper** ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei Abbildungen $+, \cdot: K \times K \rightarrow K$, die wir als

$$\begin{aligned} (a, b) &\mapsto a + b & \text{(Addition)} \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b = ab & \text{(Multiplikation)} \end{aligned}$$

schreiben. Diese müssen die folgenden Axiome (K_1) – (K_3) erfüllen:

(K_1) Für die Addition $+$ gelten:

$$\begin{aligned} (K_{1,1}) \quad \textbf{Assoziativität:} & \quad \forall a, b, c \in K: & a + (b + c) &= (a + b) + c, \\ (K_{1,2}) \quad \textbf{neutrales Element:} & \quad \exists 0 \in K, \forall a \in K: & a + 0 &= 0 + a = a, \\ (K_{1,3}) \quad \textbf{inverses Element:} & \quad \forall a \in K, \exists b \in K: & a + b &= 0, \\ (K_{1,4}) \quad \textbf{Kommutativität:} & \quad \forall a, b \in K: & a + b &= b + a. \end{aligned}$$

(K_2) Für die Multiplikation $\cdot$ gelten:

$$\begin{aligned} (K_{2,1}) \quad \textbf{Assoziativität:} & \quad \forall a, b, c \in K: & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c, \\ (K_{2,2}) \quad \textbf{neutrales Element:} & \quad \exists 1 \in K^\times := K \setminus \{0\}, \forall a \in K: & a \cdot 1 &= 1 \cdot a = a, \\ (K_{2,3}) \quad \textbf{inverses Element:} & \quad \forall a \in K^\times, \exists b \in K: & a \cdot b &= 1, \\ (K_{2,4}) \quad \textbf{Kommutativität:} & \quad \forall a, b \in K: & a \cdot b &= b \cdot a. \end{aligned}$$

$$(K_3) \quad \textbf{Distributivität:} \quad \forall a, b, c \in K: \quad a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

- Beispiel 2.2.** (a) Die Menge $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein Körper.
- (b) Die Menge $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist kein Körper, da etwa die Zahl $2 \in \mathbb{Z}$ kein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}$ besitzt.
- (c) Die Menge $\{0, 1\}$ wird mit den Verknüpfungen

$+$	0	1	$\cdot$	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

zu einem Körper, den wir $\mathbb{F}_2$ nennen.

Lemma 2.3. Sei K ein Körper. Dann sind die neutralen Elemente $0, 1$ in K durch die Axiome bereits eindeutig bestimmt. Weiter sind zu einem gegebenen $a \in K$ das Inverse unter der Addition und das Inverse unter der Multiplikation jeweils eindeutig bestimmt. Wir schreiben $-a$ für das additive Inverse und a^{-1} für das multiplikative Inverse.

Beweis. Für je zwei additiv neutrale Elemente $0, \tilde{0}$ in K gilt

$$0 \stackrel{(K_{1,2})}{=} \text{für } \tilde{0} \quad 0 + \tilde{0} \stackrel{(K_{1,2})}{=} \text{für } 0 \quad \tilde{0}.$$

Das neutrale Element 0 in K ist also eindeutig. Sei weiter $a \in K$ gegeben und seien b und $\tilde{b}$ zwei zu a additiv inverse Elemente in K . Dann gilt

$$b \stackrel{(K_{1,2})}{=} b + 0 \stackrel{(K_{1,3})}{=} \text{für } \tilde{b} \quad b + (a + \tilde{b}) \stackrel{(K_{1,1})}{=} (b + a) + \tilde{b} \stackrel{(K_{1,3})}{=} \text{für } b \quad 0 + \tilde{b} \stackrel{(K_{1,2})}{=} \tilde{b}.$$

Zu einem gegebenen Element $a \in K$ ist also das additiv inverse Element in K eindeutig.

Das zeigt die ersten beiden Behauptungen des Lemmas. Die anderen beiden Behauptungen zeigt man analog. $\square$

Statt $a + (-b)$ schreiben wir $a - b$ und statt ab^{-1} manchmal $\frac{a}{b}$. Aus den Körperaxiomen folgen wieder die Bruchrechenregeln, die wir in der Kapiteleinleitung für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ festgehalten hatten. Überhaupt gelten in Körpern viele der vertrauten Rechenregeln:

Lemma 2.4. Seien a, b, c Elemente eines Körpers K . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Die Gleichung $a + x = b$ hat genau eine Lösung in K . Diese Lösung ist $x = b - a$.
- (b) Ist $a \in K^\times$, dann hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung in K . Diese Lösung ist $x = a^{-1}b$.
- (c) Es gilt $-(-a) = a$.
- (d) Ist $a \in K^\times$, so gilt $(a^{-1})^{-1} = a$.
- (e) Es gilt $-(a + b) = -b - a = -a + (-b)$.
- (f) Sind $a, b \in K^\times$, so gilt $ab \in K^\times$ und $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
- (g) Es gilt die umgekehrte Distributivität $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

- (h) Es gilt $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
 (i) Es gilt $(-1) \cdot a = -a$ und insbesondere $(-1) \cdot (-1) = 1$.
 (j) Es gilt die **Nullteilerfreiheit** $ab = 0 \implies (a = 0 \vee b = 0)$.

Beweis. (a) Es gilt

$$a + (b - a) \stackrel{(K_{1,4})}{=} a + ((-a) + b) \stackrel{(K_{1,1})}{=} (a + (-a)) + b \stackrel{(K_{1,3})}{=} 0 + b \stackrel{(K_{1,2})}{=} b,$$

so dass $b - a$ tatsächlich eine Lösung ist. Sei nun x eine beliebige Lösung von $a + x = b$. Dann gilt

$$x \stackrel{(K_{1,2})}{=} 0 + x \stackrel{(K_{1,3})}{=} ((-a) + a) + x \stackrel{(K_{1,1})}{=} -a + (a + x) \stackrel{x \text{ Lösung}}{=} -a + b \stackrel{(K_{1,4})}{=} b - a,$$

so dass diese Lösung bereits gleich $b - a$ ist.

(b) Das geht genau wie der Beweis von (a).

(c) Nach $(K_{1,3})$ gilt

$$a + (-a) = (-a) + a = 0,$$

so dass a das additive Inverse von $-a$ in K ist. Das ist gerade die Behauptung.

(d) Das geht genau wie der Beweis von (c).

(e) Es gilt

$$(a + b) + (-b - a) \stackrel{(K_{1,1})}{=} a + (b + (-b)) - a \stackrel{(K_{1,3})}{=} a + 0 - a \stackrel{(K_{1,2})}{=} a - a \stackrel{(K_{1,3})}{=} 0,$$

so dass wir die erste Gleichheit gezeigt haben. Die zweite Gleichheit folgt mit $(K_{1,4})$.

(f) Das geht genau wie der Beweis von (e).

(g) Das folgt mit $(K_{1,4})$ und $(K_{2,4})$ aus (K_3) .

(h) Es gilt

$$(0 \cdot a) + a \stackrel{(K_{2,2})}{=} (0 \cdot a) + (1 \cdot a) \stackrel{(g)}{=} (0 + 1) \cdot a \stackrel{(K_{1,2})}{=} 1 \cdot a \stackrel{(K_{2,2})}{=} a.$$

Durch Abziehen von a auf beiden Seiten und Anwenden von $(K_{1,3})$ folgt die Behauptung.

(i) Das geht genau wie der Beweis von (h).

(j) Gelte $ab = 0$ und sei weiter $a \neq 0$. Dann gilt

$$0 \stackrel{(h)}{=} a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) \stackrel{(K_{2,1})}{=} (a^{-1} \cdot a) \cdot b \stackrel{(K_{2,3})}{=} 1 \cdot b \stackrel{(K_{2,2})}{=} b$$

und die Behauptung folgt.

□

Mitmachaufgabe 2.5. In Definition 2.1 haben wir in einem Körper, genau wie in der Schule im Spezialfall $K = \mathbb{Q}$, das inverse Element nur für Elemente $a \in K^\times = K \setminus \{0\}$ eingeführt. Warum eigentlich? Welche zu vermeidenden Konsequenzen hat also die Existenz eines inversen Elements 0^{-1} in einem Körper K ?

Lösung.

□

Wenn wir mit vielen Elementen eines Körpers arbeiten, etwa $a_1, \dots, a_n \in K$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann erklären wir die **Summe** $\sum_{k=1}^n a_k$ und das **Produkt** $\prod_{k=1}^n a_k$ wie in (1.1) bzw. (1.2) für natürliche Zahlen rekursiv, wobei es in Verallgemeinerung der Assoziativgesetze nicht auf die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren ankommt. Außerdem nutzen wir für ein $a \in K$ und ein $n \in \mathbb{N}$ die übliche Notation

$$n \cdot a := \underbrace{a + \dots + a}_{n \text{ Mal}} = \sum_{k=1}^n a,$$

$$a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Mal}} = \prod_{k=1}^n a.$$

Das ist für den Moment nur eine Notation und es ist unerheblich, ob $\mathbb{N}$ in K enthalten ist! Wir können beide Schreibweisen auf Null und die negativen Zahlen fortsetzen, indem wir

$$0 \cdot a = 0 \quad \text{und} \quad (-n) \cdot a := n \cdot (-a),$$

$$a^0 := 1 \quad \text{und, falls } a \neq 0, \quad a^{-n} := (a^{-1})^n$$

setzen. Hieraus ergeben sich für $a, b \in K^\times$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ leicht die Potenzrechenregeln

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

Schließlich lässt sich auch das Distributivgesetz auf viele Elemente erweitern: Sind für $n, m \in \mathbb{N}$ Elemente $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_m$ von K gegeben, so gilt

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{\ell=1}^m b_\ell = (a_1 + \dots + a_n) \cdot (b_1 + \dots + b_m) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m a_k b_\ell = \sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^n a_k b_\ell,$$

wobei die Summationsreihenfolge wieder beliebig ist.

Um diese Notationen zu beüben, zeigen wir abschließend für diesen Abschnitt in diesem Kontext zwei Sätze, die im weiteren Verlauf der Vorlesung noch eine wichtige Rolle spielen werden. Der erste lautet:

Satz 2.6 (geometrische Summenformel). Seien $a \neq 1$ ein Element in einem Körper K und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Beweis. Dieser Satz lässt sich leicht induktiv beweisen (Übung!). Das führen wir hier jedoch nicht durch und nutzen stattdessen die Gelegenheit, eine neue Beweistechnik zu studieren: Betrachten wir $1 - a$ als ein Element von K , so folgt mit dem erweiterten Distributivgesetz

$$\begin{aligned} (1 - a) \cdot \sum_{k=0}^n a^k &= (1 - a) \cdot 1 + (1 - a) \cdot a + \dots + (1 - a) \cdot a^n \\ &\stackrel{(K_3)}{=} (1 - a) + (a - a^2) + \dots + (a^n - a^{n+1}) \\ &\stackrel{(K_{1,1})}{=} 1 + ((-a) + a) + ((-a^2) + a^2) + \dots + ((-a^n) + a^n) - a^{n+1} \\ &\stackrel{(K_{1,3})}{=} 1 - a^{n+1} \end{aligned}$$

und nach Division mit $1 - a$ somit die Behauptung. Eine solche Summe, in der sich aufeinanderfolgende Summanden paarweise auslöschen, nennt man eine **Teleskopsumme**: Ein einfacher Rechenausdruck wird durch Addition von **komplizierten Nullen** in eine Summe „auseinandergezogen“. $\square$

Um den zweiten Satz geschickter formulieren zu können, führen wir zunächst noch eine neue Schreibweise ein:

Definition 2.7. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & \text{für } n \geq k, \\ 0 & \text{für } n < k, \end{cases}$$

nennen dies einen **Binomialkoeffizienten** und lesen „ n über k “.

Offensichtlich haben wir dann

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \quad \text{für alle } 0 \leq k \leq n,$$

und insbesondere

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1,$$

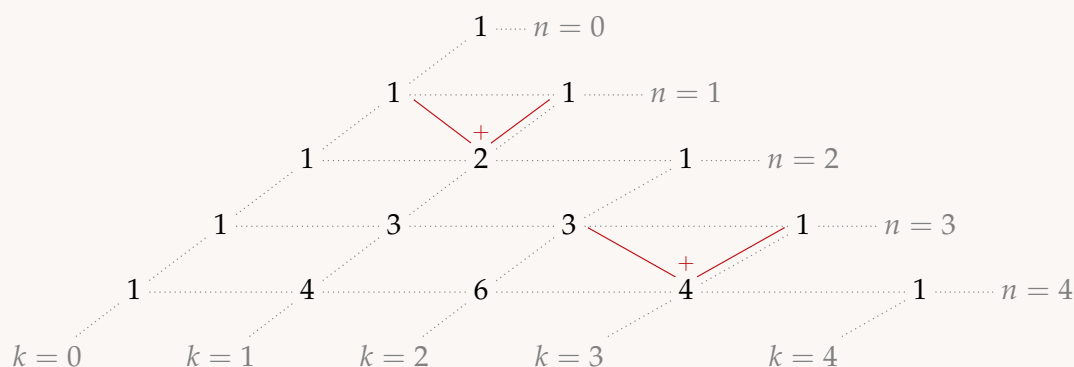
$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n \quad (\text{für } n \geq 1).$$

Es gilt nun die folgende Rechenregel:

Lemma 2.8. Für $0 < k < n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dieser Sachverhalt lässt sich auch schön mit dem **Pascal'schen Dreieck** darstellen, in dem jeder Eintrag die Summe der beiden diagonal über ihm gelegenen Einträge ist:



Blaise Pascal, geboren am 19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand und gestorben am 19. August 1662 in Paris, war ein französischer Mathematiker, Physiker, Literat, Erfinder und christlicher Philosoph. Die Beschäftigung mit dem Glücksspiel – einem typisch adeligen Zeitvertreib – brachte ihn 1653 dazu, sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuzuwenden. In seiner Abhandlung *Traité du triangle arithmétique* über das Pascal'sche Dreieck und die Binomialkoeffizienten formulierte er auch erstmals das Beweisprinzip der vollständigen Induktion explizit. Das Bild rechts entstand 1691 posthum.



Beweis. Es gilt

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

□

Der namensgebende Satz, in dem die Binomialkoeffizienten eine Rolle spielen, ist die folgende Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten ersten binomischen Formel:

Satz 2.9 (Binomischer Lehrsatz). Für Elemente a, b eines Körpers K und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis. Wir zeigen den Satz per Induktion über n .

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$(a + b)^0 = 1 = \binom{0}{0} \cdot a^0 b^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$$

und also die Behauptung in diesem Fall.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für n gilt. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
(a + b)^{n+1} &= (a + b) \cdot (a + b)^n \\
&= (a + b) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}
\end{aligned}$$

Führen wir nun in der zweiten Summe eine **Indexverschiebung** durch, indem wir k durch $k - 1$ ersetzen und den Laufbereich von k entsprechend anpassen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
(a + b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \\
&= \binom{n}{0} \cdot a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^{n+1} \\
&\stackrel{2.8}{=} \binom{n+1}{0} \cdot a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} \cdot b^{n+1}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k,$$

so dass die Behauptung auch für $n + 1$ gilt. $\square$

2.2 Die Anordnungsaxiome

Eine wichtige und in der Schule als natürlich wahrgenommene Eigenschaft der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ haben wir nicht in die Definition eines Körpers aufgenommen: Die Elemente von $\mathbb{Q}$ lassen sich der Größe nach anordnen. Tatsächlich gilt dies nicht in allen Körpern. Um die Anordenbarkeit der Elemente eines Körpers erzwingen zu können, benötigen wir also einen neuen Satz an Axiomen:

Definition 2.10. Ein **angeordneter Körper** (K, P) bzw. $(K, >)$ ist ein Körper K zusammen mit eine Teilmenge $P \subseteq K$, welche die **Anordnungsaxiome** (A_1) und (A_2) erfüllt. Für $a \in P$ schreiben wir dabei auch $a > 0$ und sagen, a sei **positiv**.

(A_1) Für jedes $a \in K$ gilt genau eine der Aussagen

- (i) $a \in P$ bzw. $a > 0$,
- (ii) $a = 0$,
- (iii) $-a \in P$ bzw. $-a > 0$.

(A_2) $a, b \in P \implies a + b, ab \in P$ bzw. $a, b > 0 \implies a + b, ab > 0$.

Beispiel 2.11. (a) $(\mathbb{Q}, \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}\})$ ist offensichtlich ein angeordneter Körper und die so auf $\mathbb{Q}$ definierte Anordnung $>$ stimmt mit der bekannten Anordnung aus der Schule überein.

(b) Der Körper $\mathbb{F}_2$ aus Beispiel 2.2 (c) kann nicht angeordnet werden,

denn: Aufgrund der Beziehung $1 + 1 = 0$ ist in $\mathbb{F}_2$ das Element 1 additiv zu sich selbst invers, es gilt also $-1 = 1$. Nehmen wir nun an, es gäbe eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{F}_2$, die die Anordnungsaxiome (A_1) und (A_2) erfüllt. Dann gälte

$$\begin{aligned} 1 \neq 0 & \xrightarrow{(A_1)} \text{entweder } 1 > 0 \text{ oder } -1 > 0 \\ & \xrightarrow{-1=1} 1 > 0 \\ & \xrightarrow{(A_2)} 0 = 1 + 1 > 0, \end{aligned}$$

was via (A_1) im Widerspruch zu $0 = 0$ stünde und somit nicht sein kann. $\#$

Seien $(K, >)$ ein angeordneter Körper und $a, b \in K$. Dann definieren wir:

- Gilt $-a > 0$, so heißt a **negativ** und wir schreiben $a < 0$.
- $K^+ := \{a \in K : a > 0\}$ und $K^- := \{a \in K : a < 0\}$

- $a > b \iff a - b > 0,$
- $a < b \iff b > a,$
- $a \geq b \iff a > b \text{ oder } a = b,$
- $a \leq b \iff a < b \text{ oder } a = b.$

In einem Körper mit gegebener Anordnung gelten nun eine Reihe weiterer Rechenregeln:

Lemma 2.12. Seien $(K, >)$ ein angeordneter Körper und $a, b, c, d \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Es gilt $a > b, b > c \implies a > c$. Das ist die Transitivität der Anordnung.
- (b) Es gilt genau eine der Aussagen $a > b, a = b, a < b$.
- (c) Es gilt $a \neq 0 \implies (-a)^2 = a^2 > 0$. Insbesondere gilt $1 > 0$.
- (d) Es gilt $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$.
- (e) Es gilt $a > b > 0 \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
- (f) Es gilt $a > b \implies a + c > b + c$.
- (g) Es gilt $a > b \implies \begin{cases} ac > bc & \text{für } c > 0, \\ ac < bc & \text{für } c < 0. \end{cases}$
- (h) Es gilt $a > b, c > d \implies a + c > b + d$.
- (i) Es gilt $a > b > 0, c > d > 0 \implies ac > bd > 0$.

Beweis. (a) Es gilt

$$a > b, b > c \implies a - b > 0, b - c > 0 \xrightarrow{(A_2)} a - c = (b - c) + (a - b) > 0 \implies a > c.$$

und somit die Behauptung.

(b) Nach (A_1) gilt für $a - b$ genau eine der Aussagen $a - b > 0, a - b = 0$ oder $a - b < 0$. Die Behauptung folgt sofort daraus.

(c) Es gilt

$$(-a)^2 = ((-1)a)^2 = (-1)^2 \cdot a^2 \stackrel{2.4(i)}{=} a^2$$

und somit die erste Teilbehauptung. Für die zweite Teilbehauptung unterscheiden wir zwei Fälle: Ist $a > 0$, so folgt mit (A_2) unmittelbar $a^2 > 0$. Ist $a < 0$, so gilt $-a > 0$ und mit (A_2) folgt $(-a)^2 > 0$, was nach der ersten Teilbehauptung gleichbedeutend mit $a^2 > 0$ ist.

(d) Sei $a > 0$. Wäre dann $\frac{1}{a} = 0$, so gälte

$$1 = a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot 0 = 0,$$

was nicht sein kann. Wäre andererseits $\frac{1}{a} < 0$, so gälte $-\frac{1}{a} > 0$ und also

$$-1 = a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \stackrel{(A_2)}{>} 0.$$

Hieraus folgte einerseits unmittelbar $1 < 0$, was nach (c) und (A_1) nicht sein kann. Nach (A_1) muss also die Behauptung $\frac{1}{a} > 0$ wahr sein.

(e) Zunächst gilt

$$a > b > 0 \implies ab \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = a - b > 0.$$

Mit (A_2) folgt aus der Voraussetzung $a > b > 0$ aber auch $ab > 0$ und mit (d) somit $\frac{1}{ab} > 0$. Wieder mit (A_2) erhalten wir daher

$$a > b > 0 \implies \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{ab} \cdot ab \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) > 0$$

und also die Behauptung.

(f) Es gilt

$$a > b \implies (a + c) - (b + c) = a - b > 0 \implies a + c > b + c$$

und somit die Behauptung.

(g) Das geht wie der Beweis von (f), wobei wir eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von c machen müssen.

(h) Es gelten

$$a > b \xRightarrow{(f)} a + c > b + c,$$

$$c > d \xRightarrow{(f)} b + c > b + d$$

und zusammen mit (a) die Behauptung.

(i) Das geht genau wie der Beweis von (h).

□

Wir können diese Regeln benutzen, um ein fundamentales und im Verlauf der Vorlesung mehrfach verwendetes Resultat der Analysis zu zeigen:

Korollar 2.13. Sei $(K, >)$ ein angeordneter Körper. Dann gilt für jedes $x \in K$ mit $x \geq -1$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die **Bernoulli'sche Ungleichung**

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Beweis. Die Bernoulli'sche Ungleichung lässt sich mit vollständiger Induktion beweisen.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$(1 + x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot x$$

für alle $x \in K$ mit $x \geq -1$

und so die Aussage in diesem Fall.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Wir nehmen an, es gelte

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x \quad \text{für alle } x \in K \text{ mit } x \geq -1.$$

Mit $1+x \geq 0$ folgt dann

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\ &\geq (1+n \cdot x) \cdot (1+x) \\ &= 1+x+n \cdot x+n \cdot x^2 \\ &\stackrel{2.12(c)}{\geq} 1+x+n \cdot x \\ &= 1+(n+1) \cdot x \end{aligned} \quad \text{für alle } x \in K \text{ mit } x \geq -1.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

Jakob I Bernoulli, geboren am 6. Januar 1655 in Basel und gestorben am 16. August 1705 ebenda, war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Die Bezeichnung „Jakob I“ dient zur Unterscheidung von seinem Großneffen Jakob II Bernoulli (1759–1789). Jakob Bernoulli hat wesentlich zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie sowie zur Variationsrechnung und zur Untersuchung von Potenzreihen beigetragen. Zudem hat er zusammen mit seinem jüngeren Bruder Johann I Bernoulli die Infinitesimalrechnung von Leibniz bearbeitet und verbreitet. Das Gemälde zur Rechten zeigt ihn 1689 im Alter von 34 Jahren.



Weiter liefern die Regeln aus 2.12 einen Ansatzpunkt dafür, wie wir leicht nachweisen können, dass ein Körper nicht angeordnet ist:

Korollar 2.14. Sei K ein Körper. Hat die Gleichung $x^2 = -1$ in K eine Lösung, so kann K nicht angeordnet werden.

Beweis. Erfüllte K die Anordnungsaxiome (A_1) und (A_2) , so gälte Lemma 2.12 (c). Für alle $a \in K \setminus \{0\}$ müsste dann $a^2 > 0$ gelten. Daher und wegen $0^2 = 0$ folgt das Korollar, wenn wir $-1 < 0$ zeigen können. Das ist aber synonym zu $1^2 = 1 > 0$ und folgt somit wieder aus Lemma 2.12 (c). □

Hiermit werden wir in Abschnitt 2.5 erkennen, dass sich die komplexen Zahlen nicht anordnen lassen. Auch endliche Körper lassen sich nicht anordnen, wie der folgende Satz besagt:

Satz 2.15. Ein angeordneter Körper K hat stets unendlich viele Elemente. Genauer ist die Abbildung

$$\iota: \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow K \\ n & \mapsto n \cdot 1 \end{cases}$$

injektiv.

Beweis. Induktiv können wir zeigen, dass die Abbildung ι **additiv** ist, dass also

$$\iota(m + n) = \iota(m) + \iota(n) \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

gilt; das geht mit der Assoziativität $(K_{1,1})$ in K und der rekursiven Definition der n -fachen Summe.

▲ Ein einfaches Anwenden von Lemma 2.4 (g) ist hier nicht möglich, da wir nicht von $\mathbb{N} \subseteq K$ ausgehen können.

Induktiv folgt auch, dass ι positiv ist, denn wir haben

$$\iota(1) = 1 \cdot 1 = 1 \stackrel{2.12(c)}{>} 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \iota(n) &= \iota((n-1) + 1) \stackrel{(2.1)}{=} \iota(n-1) + \iota(1) = \iota(n-1) + 1 \\ &\stackrel{(2.2), 2.12(f)}{>} \iota(n-1) \end{aligned} \quad \text{für alle } n > 1, \quad (2.3)$$

wobei (2.2) den Induktionsanfang für $n = 1$ liefert und (2.3) den Induktionsschritt von $n - 1$ auf n unter der Annahme, dass bereits $\iota(n - 1) > 0$ gilt.

Seien nun $m \neq n \in \mathbb{N}$ zwei verschiedene natürliche Zahlen, wobei ohne Einschränkung $m > n$ gelte. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m = n + k$. Nach unseren Vorüberlegungen gilt für dieses $\iota(k) > 0$ und somit

$$\iota(m) = \iota(n + k) \stackrel{(2.1)}{=} \iota(n) + \iota(k) \stackrel{2.12(f)}{>} \iota(n). \quad (2.4)$$

Nach (A_1) sind $\iota(m)$ und $\iota(n)$ also verschieden, was die Injektivität von ι zeigt. $\square$

Wir haben im Beweis noch mehr gezeigt als behauptet wurde, indem wir in (2.1) bzw. (2.4) eingesehen haben, dass die Abbildung ι die Addition und die Anordnung respektiert.

Bemerkung 2.16. Die Abbildung $\iota: \mathbb{N} \rightarrow K$ aus Satz 2.15 lässt sich

zunächst über $\iota(0) := 0$ und $-n \mapsto -\iota(n)$ auf $\mathbb{Z}$
und dann über $\frac{p}{q} \mapsto \frac{\iota(p)}{\iota(q)}$ auf $\mathbb{Q}$

fortsetzen. Es ist eine Übung zu zeigen, dass diese Fortsetzung bezüglich Kürzen von Brüchen wohldefiniert und injektiv ist, die Anordnung respektiert und die Rechenregeln

$$\begin{aligned}\iota(0) &= 0 \quad \text{und} \quad \iota(1) = 1, & (\text{Erhalt neutraler Elemente}) \\ \iota(a + b) &= \iota(a) + \iota(b) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Q}, & (\text{Additivität}) \\ \iota(a \cdot b) &= \iota(a) \cdot \iota(b) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Q} & (\text{Multiplikativität})\end{aligned}$$

erfüllt. Allgemein nennen wir eine additive und multiplikative Abbildung zwischen zwei Körpern, die die neutralen Elemente erhält, einen **Homomorphismus** von Körpern und einen **Isomorphismus**, falls sie zusätzlich bijektiv ist. In unserer konkreten Situation können wir in dieser Sprache festhalten, dass es zu jedem angeordneten Körper K einen anordnungserhaltenden, injektiven Körperhomomorphismus von $\mathbb{Q}$ nach K gibt.

Ist ein Körper angeordnet, so lassen sich in diesem auf natürliche Weise Abstände zwischen Elementen messen. Das untersuchen wir nun:

Definition 2.17. Das **Maximum** bzw. das **Minimum** zweier Elemente a, b eines angeordneten Körpers $(K, >)$ ist gegeben durch

$$\max\{a, b\} := \begin{cases} a & \text{für } a \geq b, \\ b & \text{für } a < b \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \min\{a, b\} := \begin{cases} b & \text{für } a \geq b, \\ a & \text{für } a < b. \end{cases}$$

Definition 2.18. Sei $(K, >)$ ein angeordneter Körper. Dann ist der **Absolutbetrag** eines Elements $a \in K$ das durch

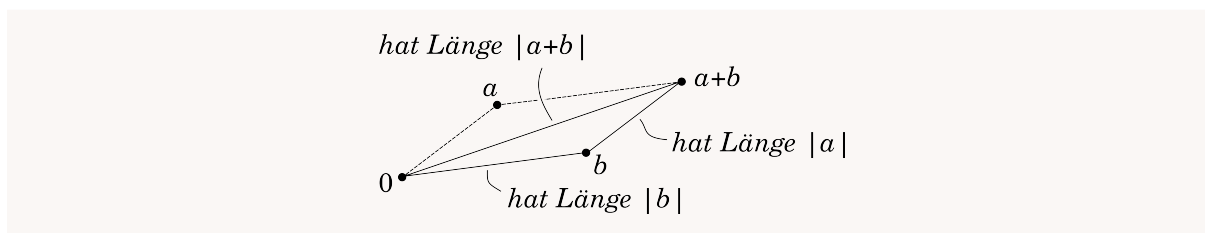
$$|a| := \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

gegebene Element von K .

Der Absolutbetrag erfüllt die folgenden Eigenschaften:

Proposition 2.19. Seien a, b Elemente eines angeordneten Körpers $(K, >)$. Dann gelten für den Absolutbetrag die folgenden Aussagen:

- (a) Es gilt die **positive Definitheit** und also $|a| \geq 0$ sowie $|a| = 0 \iff a = 0$.
- (b) Es gilt die **Multiplikativität** $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- (c) Es gilt die **Dreiecksungleichung** $|a + b| \leq |a| + |b|$.



Beweis. (a) Im Fall $a \geq 0$ ist $|a| = a \geq 0$, im Fall $a < 0$ ist $|a| = -a > 0$. Es gilt daher stets $|a| \geq 0$. Aus der Definition wissen wir weiter $|0| = 0$. Ist umgekehrt $|a| = 0$ für ein $a \in K$, so folgt $a = 0$ oder $-a = 0$ und also in jedem Fall $a = 0$.

(b) Im Fall $a, b \geq 0$ ist nichts zu zeigen. Ansonsten schreiben wir $a = \pm \tilde{a}$ und $b = \pm \tilde{b}$ mit $\tilde{a}, \tilde{b} \geq 0$. Nach (A_2) ist dann auch $\tilde{a} \cdot \tilde{b} \geq 0$ und es gilt

$$|a \cdot b| = |\pm(\tilde{a} \cdot \tilde{b})| = |\tilde{a} \cdot \tilde{b}| = |\tilde{a}| \cdot |\tilde{b}| = |a| \cdot |b|.$$

(c) Aus $\pm a \leq |a|$ und $\pm b \leq |b|$ folgt mit Lemma 2.12 (f) und (h) bereits

$$a + b \leq |a| + |b| \quad \text{und} \quad -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|.$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. □

Korollar 2.20. Seien a, b Elemente eines angeordneten Körpers $(K, >)$. Dann gilt die **umgekehrte Dreiecksungleichung**

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Beweis. Es gilt

$$|a| = |(a - b) + b| \stackrel{2.19(c)}{\leq} |a - b| + |b|$$

und also

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Die Behauptung folgt, da wir analog

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$$

zeigen können. □

2.3 Das Vollständigkeitsaxiom

In der 6. Klasse werden die rationalen Zahlen eingeführt und sogleich mit der „Zahlengeraden“ veranschaulicht. Man lernt dabei anschaulich, dass man jeden Punkt dieser Geraden beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren kann, indem man etwa sukzessive eine Dezimalbruchentwicklung durchführt. In der 8. Klasse lernt man dann, dass die rationalen Zahlen aber trotzdem nicht die gesamte Zahlengerade ausmachen, und füllt diese mit *irrationalen* Zahlen auf. Wir zeigen zunächst die folgende Proposition:

Proposition 2.21. *Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2 > 0$. Dann könnten wir ohne Einschränkung $x > 0$ annehmen und es gäbe auch natürliche Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{p}{q}$, wobei wir ohne Einschränkung annehmen dürfen, dass p und q teilerfremd wären. Dann gälte

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \implies p^2 = 2 \cdot q^2 \implies p^2 \text{ gerade} \implies p \text{ gerade},$$

wobei der letzte Schritt gilt, weil die Ungeradheit von p via $p = 2k + 1$ und $p^2 = (2k + 1)^2 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1$ auch die Ungeradheit von p^2 implizierte. Schrieben wir nun $p = 2 \cdot \tilde{p}$ für ein $\tilde{p} \in \mathbb{N}$, so erhielten wir analog

$$4 \cdot \tilde{p}^2 = 2 \cdot q^2 \implies 2 \cdot \tilde{p}^2 = q^2 \implies q^2 \text{ gerade} \implies q \text{ gerade}.$$

Hieraus folgte, dass p und q beide gerade wären und also im Widerspruch zu unserer Annahme nicht teilerfremd. Ein x mit $x^2 = 2$ kann es in $\mathbb{Q}$ also nicht geben. $\square$

Mitmachaufgabe 2.22. *Für welche anderen Zahlen als 2 lässt sich dieser Beweis komplett analog durchziehen?*

Lösung.

$\square$

Man kann die Aussage von Proposition 2.21 so verstehen, dass dem Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ein Element fehlt und er also *unvollständig* ist – immerhin bedingt sie, dass es in $\mathbb{Q}$ keine Zahl gibt, die die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat beschreibt. Dieser Sachverhalt störte insbesondere die Pythagoreer im 6. Jahrhundert v. Chr. sehr, die gemäß ihrem Leitsatz *Alles ist Zahl* die Welt durch Verhältnisse (ganzer) Zahlen erklären wollten. Passend zu den Überlegungen zu Beginn des Kapitels, wo wir beim Aufbau des Zahlensystems die Lösbarkeit linearer Gleichungen gefordert und in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ auch erhalten haben, können wir dies auch algebraisch formulieren. Wir erhalten dann, dass die quadratische Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung hat und wir gerne eine solche in unserem Zahlbereich hätten, um mehr Rechnungen durchführen zu können. Diese Überlegungen werden wir bei der Konstruktion der komplexen Zahlen noch weiterverfolgen. Momentan hilft uns die Idee der „Lücke“ in der

Menge aller geometrischen Längen weiter, die wir im Folgenden nun erst verstehen und dann schließen werden. Dafür verschaffen wir uns zunächst die passenden Werkzeuge:

Seien $(K, >)$ ein angeordneter Körper und $a \leq b$ Elemente in K . Dann heißen

$$\begin{array}{ll} [a, b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\} & \text{ein abgeschlossenes Intervall,} \\ (a, b) := \{x \in K : a < x < b\} & \text{ein offenes Intervall,} \\ \left. \begin{array}{l} (a, b] := \{x \in K : a < x \leq b\} \\ [a, b) := \{x \in K : a \leq x < b\} \end{array} \right\} & \text{halboffene Intervalle.} \end{array}$$

Außerdem definieren wir

$$\begin{array}{l} [a, \infty) := \{x \in K : a \leq x\}, \\ (-\infty, b] := \{x \in K : x \leq b\} \end{array}$$

sowie analog (a, ∞) , $(-\infty, b)$ und $(-\infty, \infty)$.

Bemerkung 2.23. Der Durchschnitt von zwei Intervallen (gleich welcher Art) ist nach Konstruktion stets wieder ein Intervall.

Definition 2.24. Sei X eine Teilmenge eines angeordneten Körpers $(K, >)$. Dann sagen wir

$$\begin{array}{ll} X \text{ ist von unten beschränkt} & :\Longleftrightarrow \exists a \in K, \forall x \in X: a \leq x \Longleftrightarrow \exists a \in K: X \subseteq [a, \infty), \\ X \text{ ist von oben beschränkt} & :\Longleftrightarrow \exists b \in K, \forall x \in X: x \leq b \Longleftrightarrow \exists b \in K: X \subseteq (-\infty, b]. \end{array}$$

Falls existent, heißen dabei a eine **untere Schranke** und b eine **obere Schranke** von X . Ist X von oben und von unten beschränkt, so sagen wir einfacher auch, X sei **beschränkt**.

Bemerkung 2.25. Ist a bzw. b eine untere bzw. obere Schranke einer Teilmenge X eines angeordneten Körpers $(K, >)$, so offensichtlich auch jedes $\tilde{a}$ bzw. $\tilde{b}$ mit $\tilde{a} < a$ bzw. $b < \tilde{b}$.

Lemma 2.26. Für eine Teilmenge X eines angeordneten Körpers $(K, >)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) X ist beschränkt.
- (ii) $\exists R \in K, \forall x \in X: |x| \leq R$.

Beweis. Gelte zunächst Aussage (i). Dann gibt es $a, b \in K$ mit $a \leq x \leq b$ für alle $x \in X$. Setzen wir nun $R := \max\{|a|, |b|\} \geq 0$, so gilt für alle $x \in X$ die Abschätzung

$$-R = -\max\{|a|, |b|\} \leq -|a| \leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq \max\{|a|, |b|\} = R.$$

Hieraus folgt

$$|x| \leq R$$

und somit Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii). Dann ist offensichtlich $-R$ eine untere Schranke und R eine obere Schranke von X und es folgt Aussage (i). $\square$

Definition 2.27. Eine Teilmenge X eines angeordneten Körpers $(K, >)$ besitzt ein **Minimum** bzw. **Maximum**, falls es eine untere bzw. obere Schranke von X gibt, die bereits in X liegt. Diese bezeichnen wir dann mit $\min X$ bzw. $\max X$.

Bemerkung 2.28. Das Minimum bzw. Maximum einer gegebenen Teilmenge X eines angeordneten Körpers $(K, >)$ ist dahingehend wohldefiniert, dass es eindeutig bestimmt ist, denn: Nehmen wir an, $b_1, b_2 \in X$ seien zwei obere Schranken von X . Dann gilt

$$b_1 \stackrel{b_2 \text{ ob. Schr. von } X}{\leq} b_2 \stackrel{b_1 \text{ ob. Schr. von } X}{\leq} b_1$$

und also $b_1 = b_2$. Genauso argumentiert man für das Minimum. $\#$

Definition 2.29. Sei X eine Teilmenge eines angeordneten Körpers $(K, >)$. Dann nennen wir ein Element a bzw. $b \in K$ ein **Infimum** bzw. **Supremum** von X , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- a bzw. b ist eine untere bzw. obere Schranke von X .
- Ist x eine untere bzw. obere Schranke von X , so folgt $x \leq a$ bzw. $x \geq b$.

Bemerkung 2.30. Besitzt eine Teilmenge X eines angeordneten Körpers $(K, >)$ ein Infimum bzw. ein Supremum, so ist dieses eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen dieses dann mit $\inf X$ bzw. $\sup X$.

Beweis. Da ein Infimum stets eine untere Schranke ist und ein Supremum stets eine obere Schranke, geht dieser Beweis genau wie der von Bemerkung 2.28. $\square$

Lemma 2.31. Sei X eine Teilmenge eines angeordneten Körpers $(K, >)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) a bzw. b ist Infimum bzw. Supremum von X .
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X: x < a + \varepsilon$ bzw. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X: x > b - \varepsilon$.

Beweis. Dieser Beweis verbleibt zur Übung! $\square$

Falls sie existieren, sind $\inf X$ die größte untere Schranke und $\sup X$ die kleinste obere Schranke von X in K . Offensichtlich gilt zudem:

Bemerkung 2.32. Sei X eine Teilmenge eines angeordneten Körpers $(K, >)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Besitzt X ein Minimum bzw. Maximum, so auch ein Infimum bzw. Supremum und es gilt

$$\max X = \sup X \quad \text{bzw.} \quad \min X = \inf X.$$

(b) Setzen wir $-X := \{-x : x \in X\}$, so hat X genau dann ein Infimum, wenn $-X$ ein Supremum besitzt. Ist dem der Fall, so gilt

$$\inf X = -\sup(-X).$$

Mit diesen Vokabeln können wir jetzt die „Lücke“ besser verstehen, die wir mit Proposition 2.21 in den rationalen Zahlen gefunden haben:

Proposition 2.33. Die Teilmenge

$$X := \{a \in \mathbb{Q}^+ : a^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$$

ist nichtleer, beschränkt und besitzt kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Beweis. Klar, dass X nichtleer und beschränkt ist. Dass X kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt, zeigen wir per Widerspruchsbeweis und nehmen dafür an, es gäbe ein $b \in \mathbb{Q}$ mit $b = \sup X$. Wir unterscheiden nun drei Fälle und leiten den Widerspruch in diesen separat her:

Fall 1: $b^2 < 2$. Aufgrund von $1^2 = 1 < 2$ wäre dann offensichtlich $b = \sup X \geq 1$. Für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \varepsilon < 1$ gälte weiter

$$\begin{aligned} (b + \varepsilon)^2 &= b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &= b^2 + \varepsilon \cdot (2b + \varepsilon) \\ &< b^2 + \varepsilon \cdot (2b + 1). \end{aligned}$$

Wählten wir dann etwa $\varepsilon := \min\{\frac{1}{2}, \frac{2-b^2}{2(2b+1)}\}$, so erhielten wir

$$(b + \varepsilon)^2 < b^2 + 2 - b^2 = 2,$$

was im Widerspruch zu $b = \sup X$ steht und also nicht sein kann.

Fall 2: $b^2 = 2$. Das ist unmöglich nach Proposition 2.21.

Fall 3: $b^2 > 2$. In diesem Fall gälte

$$0 = \frac{b}{b^2} - \frac{1}{b} < \frac{b}{2} - \frac{1}{b} < \frac{b}{2} < b,$$

so dass $\varepsilon := \frac{b}{2} - \frac{1}{b} \in \mathbb{Q}$ die Abschätzung $0 < \varepsilon < b$ erfüllte. Aufgrund von $b = \sup X$ gäbe es nach Lemma 2.31 daher ein $x \in X$ mit $x > b - \varepsilon$. Für dieses gälte nun

$$x^2 > (b - \varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$\begin{aligned}
&= b^2 + \varepsilon^2 - 2b \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{b} \right) \\
&= b^2 + \varepsilon^2 - b^2 + 2 \\
&> 2,
\end{aligned}$$

was im Widerspruch zu $x \in X$ steht und also nicht sein kann.

Da unsere Annahme, es gäbe ein $b \in \mathbb{Q}$ mit $b = \sup X$, in allen drei Fällen zum Widerspruch führt und diese Fälle aufgrund von (A_1) eine vollständige Fallunterscheidung darstellen, kann sie nicht wahr sein und wir haben die Proposition bewiesen. $\square$

Passend hierzu definieren wir nun:

Definition 2.34. Ein angeordneter Körper $(K, >)$ heißt **vollständig**, falls er das **Vollständigkeitsaxiom** (V) erfüllt:

(V) Jede von oben beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq X \subseteq K$ besitzt ein Supremum in K .

Bemerkung 2.35. Im Sinne von Bemerkung 2.32 (b) könnten wir statt (V) gleichwertig (V') Jede nach unten beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq X \subseteq K$ besitzt ein Infimum in K . fordern.

⚠ A priori ist nicht klar, ob es einen solchen vollständigen angeordneten Körper überhaupt gibt. Unsere Hoffnung ist, dass die aus der Schule bekannten reellen Zahlen diese Eigenschaft aufweisen. Tatsächlich gilt der folgende Satz:

Satz 2.36. Es gibt eine Menge, die die Axiome eines vollständigen angeordneten Körpers erfüllt. Diese Menge ist bis auf Isomorphie eindeutig. Wir bezeichnen sie mit $\mathbb{R}$ und sprechen von der Menge der **reellen Zahlen**.

Exkurs: Ein Beweis von Satz 2.36

Dieser Abschnitt wird in der Vorlesung nicht behandelt und ist nicht prüfungsrelevant.

Ausgehend vom angeordneten Körper $(\mathbb{Q}, >)$ bereiten wir nun den Beweis des Satzes vor.

Definition 2.37. Ein **Dedekind-Schnitt** ist eine Teilmenge $\emptyset \neq S \subsetneq \mathbb{Q}$, die kein Minimum besitzt sowie die Eigenschaft

$$\forall x \in S, \forall y \in \mathbb{Q}: y > x \implies y \in S$$

erfüllt und also bezüglich $>$ nach oben abgeschlossen ist.

Julius Wilhelm Richard Dedekind, geboren am 6. Oktober 1831 in Braunschweig und gestorben am 12. Februar 1916 ebenda, war ein deutscher Mathematiker. Dedekind gab 1888 in der Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen?* die erste exakte Einführung der natürlichen Zahlen durch Axiome. In seiner Schrift *Stetigkeit und Irrationalzahlen* von 1872 gab er die erste exakte Definition der reellen Zahlen mit Hilfe der Dedekind'schen Schnitte. Das Foto zur Rechten zeigt ihn 1870, im Alter von 39 Jahren.



Beispiel 2.38. (a) *Wir schreiben*

$$(a, b)_{\mathbb{Q}} := \{r \in \mathbb{Q} : a < r < b\}.$$

Für beliebige $a < b \in \mathbb{Q}$ ist dann $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ kein Dedekind-Schnitt,

denn: Offensichtlich ist dann $b + 1$ eine rationale Zahl, die nicht in $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ enthalten ist. Für jedes $x \in (a, b)_{\mathbb{Q}}$ gilt aber $x < b + 1$, so dass $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ nicht nach oben abgeschlossen ist. #

Andererseits ist

$$S_a := (a, \infty)_{\mathbb{Q}}$$

für ein beliebiges $a \in \mathbb{Q}$ ein Dedekind-Schnitt.

(b) *Die Menge*

$$\{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 > 2\}$$

ist nach Proposition 2.33 (und insbesondere Fall 3 ihres Beweises) ein Dedekind-Schnitt und repräsentiert später die reelle Zahl $\sqrt{2}$.

Sei nun $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ die Menge aller Dedekind-Schnitte. Nach Beispiel 2.38 (a) ist dann die Abbildung

$$\iota: \begin{cases} \mathbb{Q} & \rightarrow \mathcal{R}, \\ a & \mapsto S_a \end{cases}$$

injektiv und wir können $\mathbb{Q}$ über ι als Teilmenge von $\mathcal{R}$ auffassen. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, Satz 2.36 nachzuweisen, indem wir zeigen, dass $\mathcal{R}$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte vollständige angeordnete Körper ist und somit mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ identifiziert werden kann. Ein erster Schritt hierfür ist:

Proposition 2.39. Für je zwei Dedekind-Schnitte $S, T \in \mathcal{R}$ gilt

$$S + T := \{s + t : s \in S, t \in T\} \in \mathcal{R}.$$

Die Menge $\mathcal{R}$ zusammen mit der so definierten Verknüpfung $+$ trägt die Struktur einer **abelschen Gruppe** und erfüllt also die Axiome $(K_{1,1}) - (K_{1,4})$. Hierbei ist S_0 das neutrale Element und es gilt

$$S_a + S_b = S_{a+b} \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Q},$$

so dass die Verknüpfung $+$ auf $\mathcal{R}$ sich zur üblichen Addition auf $\mathbb{Q}$ einschränkt.

Beweis. Seien $S, T \in \mathcal{R}$ gegeben. Im Spezialfall $S = S_a$ und $T = S_b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ist dann unmittelbar nach Definition $S_a + S_b = S_{a+b}$, so dass die Addition eingeschränkt auf $\mathbb{Q}$ mit der Standardaddition übereinstimmt. Wir zeigen nun, dass für beliebig gewählte $S, T \in \mathcal{R}$ die Summe $S + T$ in $\mathcal{R}$ liegt und die Addition auf $\mathcal{R}$ somit wohldefiniert ist:

- Es ist $\emptyset \neq S + T \subsetneq \mathbb{Q}$,

denn: Offensichtlich ist $S + T \neq \emptyset$. Nach Voraussetzung gibt es aber auch ein $x \in \mathbb{Q} \setminus S$ und ein $y \in \mathbb{Q} \setminus T$ mit

$$\begin{aligned} \forall s \in S: x < s, \\ \forall t \in T: y < t. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$\forall s \in S, \forall t \in T: s + t < x + y,$$

so dass $x + y$ nicht in $S + T$ liegen kann. #

- Die Menge $S + T$ hat kein Minimum,

denn: Sei $s + t \in S + T$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $\tilde{s} \in S$ mit $\tilde{s} < s$ und ein $\tilde{t} \in T$ mit $\tilde{t} < t$. Es folgt $S + T \ni \tilde{s} + \tilde{t} < s + t$, so dass $s + t$ kein Minimum von $S + T$ sein kann. #

- Die Menge $S + T$ ist in $\mathbb{Q}$ bezüglich $>$ nach oben abgeschlossen,

denn: Seien $s + t \in S + T$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $y > s + t$. Dann gilt $y - t > s$ und somit $y - t \in S$. Nach Konstruktion gilt folglich $y = (y - t) + t \in S + T$. #

Es gilt nun zu zeigen, dass $\mathcal{R}$ mit der Verknüpfung $+$ eine Gruppe bildet. Die Assoziativität und die Kommutativität in $\mathbb{Q}$ implizieren dabei bereits direkt die entsprechenden Eigenschaften $(K_{1,1})$ und $(K_{1,4})$ in $\mathcal{R}$:

$$S + (T + U) = (S + T) + U \quad \text{für alle } S, T, U \in \mathcal{R},$$

$$S + T = T + S$$

für alle $S, T \in \mathcal{R}$.

Weiter ist S_0 neutrales Element von $(\mathcal{R}, +)$, so dass $\mathcal{R}$ insbesondere Axiom $(K_{1,2})$ erfüllt,

denn: Es gilt zu zeigen, dass für ein beliebiges $S \in \mathcal{R}$ bereits $S + S_0 = S$ ist. Seien dafür zunächst $s \in S$ und $t \in S_0$ gegeben. Dann ist $s + t > s + 0 = s$, und weil S ein Dedekind-Schnitt ist, gilt $s + t \in S$. Das zeigt die erste Implikation $S + S_0 \subseteq S$. Sei nun umgekehrt $s \in S$ gegeben. Dann ist s kein Minimum von S , so dass es ein $\tilde{s} \in S$ mit $\tilde{s} < s$ gibt. Dann ist $s - \tilde{s} \in S_0$ und $s = \tilde{s} + (s - \tilde{s}) \in S + S_0$. Das zeigt die zweite Implikation $S + S_0 \supseteq S$. #

Es verbleibt Axiom $(K_{1,3})$ zu zeigen und dafür zu jedem $S \in \mathcal{R}$ ein additiv inverses Element zu konstruieren. Für ein beliebiges $S \in \mathcal{R}$ setzen wir dafür

$$S_- := \{y \in \mathbb{Q} : y + s > 0 \text{ für alle } s \in S\},$$

$$-S := \begin{cases} S_- & \text{falls } S_- \text{ kein Minimum besitzt,} \\ S_- \setminus \{\min S_-\} & \text{falls } S_- \text{ ein Minimum besitzt.} \end{cases}$$

Dann ist die so definierte Menge $-S$ ein Element von $\mathcal{R}$,

denn: Nach Konstruktion hat $-S$ kein Minimum. Weiter gilt offensichtlich $\emptyset \neq -S \subsetneq \mathbb{Q}$. Seien nun $y \in -S$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > y$. Dann gilt $y \in S_-$ und also $r > y > -s$ für alle $s \in S$. Das impliziert wiederum $r \in S_-$. Da r aufgrund von $r > y$ mit $y \in S_-$ kein Minimum von S_- ist, erhalten wir so $r \in -S$. Insgesamt haben wir so $-S \in \mathcal{R}$ gezeigt. #

Hierbei gilt

$$S_- \text{ hat ein Minimum} \iff \exists r \in \mathbb{Q} : S = S_r, \quad (2.5)$$

denn: Sei zunächst $S = S_r$ mit einem $r \in \mathbb{Q}$. Dann ist $S_- = [-r, \infty)_{\mathbb{Q}}$, so dass S_- ein Minimum besitzt und $-S = S_{-r}$ gilt. Hat nun umgekehrt S_- ein Minimum $m \in S_-$, so folgt wie gerade

$$S_- = \{y \in \mathbb{Q} : y \geq m\} = [m, \infty)_{\mathbb{Q}}.$$

Hieraus folgt offenbar $S = S_{-m}$. #

Es folgt nun, wie erhofft,

$$S + (-S) = S_0,$$

denn: Zunächst gilt offensichtlich

$$S + (-S) \subseteq S + S_- = \{s + y : s \in S, y \in S_-\} \subseteq S_0,$$

denn nach Definition von S_- gilt hier stets $s + y > 0$. Das zeigt die Inklusion $S + (-S) \subseteq S_0$. Für die umgekehrte Inklusion unterscheiden wir nun zwei Fälle:

Fall 1: S_- besitzt ein Minimum. Nach (2.5) und seinem Beweis gibt es dann ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $S = S_r$ und $-S = S_{-r}$. Für dieses und ein beliebiges $\varepsilon \in S_0 = \mathbb{Q}^+$ gilt nun $r + \frac{\varepsilon}{2} \in S$ und $-r + \frac{\varepsilon}{2} \in -S$. Das bedingt

$$\varepsilon = \left(r + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(-r + \frac{\varepsilon}{2}\right) \in S + (-S)$$

und somit die Behauptung in diesem Fall.

Fall 2: S_- besitzt kein Minimum. Dann gilt

$$-S = S_- = \{y \in \mathbb{Q} : y > -s \text{ für alle } s \in S\} = \{-y \in \mathbb{Q} : y \notin S\}.$$

Seien nun $\varepsilon \in S_0 = \mathbb{Q}^+$ und $y \in \mathbb{Q} \setminus S$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y + n \cdot \varepsilon \in S$: Für ein fest gewähltes $s \in S$ können wir irgendein $n \geq \frac{s-y}{\varepsilon}$ wählen, wie es nach dem in $\mathbb{Q}$ gültigen Archimedischen Prinzip 2.44 existiert. Für dieses gilt $y + n \cdot \varepsilon \geq s$ und somit tatsächlich $y + n \cdot \varepsilon \in S$. Sei nun speziell n_0 das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft. Dann gilt insbesondere

$$y + (n_0 - 1) \cdot \varepsilon \notin S,$$

also

$$-(y + (n_0 - 1) \cdot \varepsilon) = -y - n_0 \cdot \varepsilon + \varepsilon \in -S$$

und schließlich

$$\varepsilon = (y + n_0 \cdot \varepsilon) + (-y - n_0 \cdot \varepsilon + \varepsilon) \in S + (-S)$$

Das zeigt die Behauptung auch in diesem Fall. #

□

Als nächstes setzen wir

$$S \leq T \quad :\Longleftrightarrow \quad S \supseteq T \quad \text{für alle } S, T \in \mathcal{R}.$$

Dadurch ist eine Totalordnung auf $\mathcal{R}$ definiert,

denn: Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität sind klar. Für die Totalität müssen wir zeigen, dass für alle $S, T \in \mathcal{R}$ stets $S \leq T$ oder $T \leq S$ gilt. Wäre dem nicht so, gälte $S \not\supseteq T$ und $T \not\supseteq S$, das heißt, es gäbe ein $t \in T$ mit $t \notin S$ und ein $s \in S$ mit $s \notin T$. Wir hätten dann

$$\begin{aligned} s \leq t & \xrightarrow{S \text{ Dedekind-Schnitt}} t \in S, \\ t \leq s & \xrightarrow{T \text{ Dedekind-Schnitt}} s \in T, \end{aligned}$$

was beides nach Konstruktion nicht sein kann. Somit haben wir auch die Totalität gezeigt.

#

Wir definieren nun eine Multiplikation auf

$$\mathcal{R}^+ := \{S \in \mathcal{R} : S \geq S_0\} = \{S \in \mathcal{R} : S \subseteq \mathbb{Q}^+\}$$

durch

$$ST := S \cdot T := \{st : s \in S, t \in T\}.$$

Analog zum ersten Teil des Beweises von Proposition 2.39 zeigen wir nun, dass diese Multiplikation dahingehend wohldefiniert ist, dass für beliebig gewählte $S, T \in \mathcal{R}^+$ das Produkt ST in $\mathcal{R}^+$ liegt:

- Offensichtlich gilt $\emptyset \neq ST \subsetneq \mathbb{Q}$.

- Die Menge ST hat kein Minimum,

denn: Sei $st \in ST$ mit einem $s \in S$ und einem $t \in T$. Da die Dedekind-Schnitte S und T beide kein Minimum besitzen, finden wir Elemente $\tilde{s} \in S$ und $\tilde{t} \in T$ mit $\tilde{s} < s$ und $\tilde{t} < t$. Es folgt $ST \ni \tilde{s}\tilde{t} < st$, so dass st kein Minimum von ST sein kann. #

- Die Menge ST ist in $\mathbb{Q}$ bezüglich $>$ nach oben abgeschlossen,

denn: Nun seien $x \in ST$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $y > x$. Wegen $S, T \geq S_0$ gibt es dann ein $s \in S$ und ein $t \in T$ mit $x = st$ und $s, t > 0$. Es folgt $st < y$, also $s < \frac{y}{t}$ und, weil S ein Dedekind-Schnitt ist, auch $\frac{y}{t} \in S$. Hieraus ergibt sich bereits $y = \frac{y}{t} \cdot t \in ST$. #

Ebenso analog zum Vorgehen bei der Addition zeigt man, dass in $(\mathcal{R}^+, \cdot)$ die Assoziativität ($K_{2,1}$), die Existenz eines neutralen Elements ($K_{2,2}$) und die Kommutativität ($K_{2,4}$) erfüllt sind, wobei das neutrale Element hierbei durch S_1 gegeben ist. Diese Aussagen bleiben wahr, wenn wir die Multiplikation durch

$$ST := \begin{cases} S \cdot T & \text{für } S, T \geq S_0, \\ -(S \cdot (-T)) & \text{für } S, -T \geq S_0, \\ -((-S) \cdot T) & \text{für } -S, T \geq S_0, \\ (-S) \cdot (-T) & \text{für } -S, -T \geq S_0 \end{cases}$$

auf ganz $\mathcal{R}$ fortsetzen. Wir müssen nun noch Axiom ($K_{2,3}$) zeigen und dafür zu jedem $S \in \mathcal{R} \setminus \{S_0\}$ ein multiplikativ inverses Element konstruieren. Für ein beliebiges $S > S_0$ setzen wir zunächst

$$S_{\div} := \{y \in \mathbb{Q} : y \cdot s > 1 \text{ für alle } s \in S\},$$

$$S^{-1} := \begin{cases} S_{\div} & \text{falls } S_{\div} \text{ kein Minimum besitzt,} \\ S_{\div} \setminus \{\min S_{\div}\} & \text{falls } S_{\div} \text{ ein Minimum besitzt.} \end{cases}$$

Wiederum analog zum Vorgehen bei der Addition zeigt man

$$S \cdot S^{-1} = S_1$$

und setzt das Invertieren durch

$$S^{-1} := -(-S)^{-1}$$

auf $S \in \mathcal{R}$ mit $S < S_0$ fort. Der Beweis des folgenden Satzes mit dem Nachweis der Axiome (K_3) , (A_1) und (A_2) ist nun nicht mehr schwer und verbleibt als *Übung*:

Satz 2.40. Die Menge $\mathcal{R}$ zusammen mit den oben eingeführten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ trägt die Struktur eines angeordneten Körpers, wobei die zugehörige Anordnung $>$ durch die oben studierte Totalordnung $\geq$ induziert ist.

Tatsächlich ist der Körper $\mathcal{R}$ auch vollständig:

Satz 2.41. $\mathcal{R}$ ist ein vollständiger angeordneter Körper.

Beweis. Nach Satz 2.40 reicht es zum Beweis des Satzes zu zeigen, dass jede von unten beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{R}$ ein Infimum in $\mathcal{R}$ besitzt und also das in Bemerkung 2.35 eingeführte alternative Vollständigkeitsaxiom (V') erfüllt. Konkret zeigen wir

$$\inf X = S := \bigcup_{T \in X} T = \{r \in \mathbb{Q} : \exists T \in X : r \in T\} \in \mathcal{R}.$$

Wir beginnen, indem wir $S \in \mathcal{R}$ überprüfen. Zunächst gilt $\emptyset \neq S \subsetneq \mathbb{Q}$,

denn: Da X von unten beschränkt ist, gibt es ein $U \in \mathcal{R}$ mit $U \leq T$ für alle $T \in X$. Dieses erfüllt dann $U \supseteq T$ für alle $T \in X$ und also auch $U \supseteq S$. Hieraus folgt $S \subsetneq \mathbb{Q}$. Da $S \neq \emptyset$ trivialerweise erfüllt ist, folgt die Behauptung. #

Weiter besitzt S kein Minimum,

denn: Hätte S ein Minimum $\min S$, läge dieses in S und also auch in einem $T \in X$. Als Dedekind-Schnitt hätte dieses T wiederum kein Minimum, so dass es ein $t \in T \subseteq S$ mit $t < \min S$ gäbe. Das kann nicht sein. #

Schließlich gilt

$$\forall s \in S, \forall y \in \mathbb{Q} : y > s \implies y \in S,$$

denn: Seien also $s \in S$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $y > s$. Dann gibt es ein $T \in X$ mit $s \in T$. Da T ein Dedekind-Schnitt ist, gilt dann $y \in T$ und somit auch $y \in S$. #

Es gilt also tatsächlich $S \in \mathcal{R}$.

Nach Konstruktion gilt aber auch $S \subseteq T$ für alle $T \in X$, so dass S eine untere Schranke von X ist. Es bleibt zu zeigen, dass S die größte untere Schranke und also das Infimum von X ist. Das geht aber schnell: Sei also U eine untere Schranke von X . Schon beim Nachweis von $S \subsetneq \mathbb{Q}$ haben wir eingesehen, dass dann $U \supseteq S$ und also $S \geq U$ gilt. $\square$

▲ Um den Beweis von Satz 2.36 abzuschließen, müssen wir noch zeigen, dass $\mathcal{R}$ bis auf Isomorphie der einzige vollständige angeordnete Körper ist und uns somit den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ liefert. Das führen wir nun durch:

Beweis von Satz 2.36. Seien K und L zwei vollständige angeordnete Körper. In der Sprache von Bemerkung 2.16 gilt es dann zu zeigen, dass es einen anordnungserhaltenden Körperisomorphismus zwischen K und L gibt, wobei wir nach Satz 2.41 ohne Einschränkung von $L = \mathcal{R}$ ausgehen können.

Nach Bemerkung 2.16 ist durch

$$\iota: \begin{cases} \mathbb{Q} & \rightarrow K, \\ \frac{p}{q} & \mapsto \frac{p \cdot 1}{q \cdot 1} \end{cases}$$

ein anordnungserhaltender injektiver Körperhomomorphismus gegeben. Für ein beliebiges $a \in K$ definieren wir nun

$$S_a := \{x \in \mathbb{Q} : \iota(x) > a\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Wir zeigen nun $S_a \in \mathcal{R}$. Zunächst gilt $\emptyset \neq S_a \subsetneq \mathbb{Q}$,

denn: Da K nach Voraussetzung ein vollständiger angeordneter Körper ist, gilt dort auch das Archimedische Prinzip 2.43 und zwar in der Form, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\iota(n) > a$ gibt. Hieraus folgt $S_a \neq \emptyset$. Analog gibt es aber auch ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\iota(m) > -a$, also mit $\iota(-m) = -\iota(m) < a$, so dass S_a nicht ganz $\mathbb{Q}$ sein kann. #

Weiter hat S_a kein Minimum,

denn: Sei $x \in S_a$, gelte also $\iota(x) > a$. Dann ist $\varepsilon := \iota(x) - a > 0$ und nach Korollar 2.45 (b) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < \iota\left(\frac{1}{n}\right) < \varepsilon = \iota(x) - a.$$

Es folgt

$$a < \iota(x) - \iota\left(\frac{1}{n}\right) = \iota\left(x - \frac{1}{n}\right),$$

damit $x - \frac{1}{n} \in S_a$ und also die Behauptung. #

Schließlich gilt

$$\forall x \in S_a, \forall y \in \mathbb{Q}: y > x \implies y \in S_a,$$

denn: Seien $x \in S_a$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $y > x$. Dann gilt $\iota(y) > \iota(x) > a$, so dass auch y in S_a liegt. #

Es gilt also tatsächlich $S_a \in \mathcal{R}$ und wir erhalten eine Abbildung

$$\eta: \begin{cases} K & \rightarrow \mathcal{R}, \\ a & \mapsto S_a. \end{cases}$$

Dass diese ein anordnungserhaltender Körperhomomorphismus ist, zeigt man wie in den Beweisen von Proposition 2.39 und Satz 2.40.

Es verbleibt die Bijektivität von η zu zeigen. Der Nachweis der Injektivität ist leicht,

denn: Seien $a, b \in K$ mit $a < b$. Da $\mathbb{Q}$ nach Korollar 2.45 (c) dicht in K liegt, gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$. Hieraus folgt bereits $S_a \supsetneq S_b$ und also $\eta(a) < \eta(b)$. #

Tatsächlich ist η aber auch surjektiv,

denn: Sei $S \in \mathcal{R}$ gegeben. Da dieses als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ von unten beschränkt ist, ist auch $\iota(S)$ als Teilmenge von K von unten beschränkt. Da K nach Voraussetzung vollständig ist, existiert $\inf \iota(S)$ in K und es gilt

$$\eta(\inf \iota(S)) = S_{\inf \iota(S)} \in \mathcal{R}.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir $S_{\inf \iota(S)} = S$ zeigen können. Dies untersuchen wir für die beiden Inklusionsrichtungen separat:

- Für ein beliebiges $x \in S_{\inf \iota(S)}$ gilt $\iota(x) > \inf \iota(S)$, so dass $\iota(x)$ keine untere Schranke ist. Es gibt daher ein $s \in S$ mit $\iota(s) < \iota(x)$, was nach Bemerkung 2.16 auch $s < x$ bedingt. Da S ein Dedekind-Schnitt ist, folgt damit $x \in S$ und insgesamt die erste Inklusion $S_{\inf \iota(S)} \subseteq S$.
- Sei nun umgekehrt ein $s \in S$ gegeben. Da S als Dedekind-Schnitt kein Minimum besitzt, gibt es ein $t \in S$ mit $t < s$. Wäre nun $\iota(s) \leq \inf \iota(S)$, so folgte $\iota(t) < \inf \iota(S)$, was nicht sein kann. Es gilt also $\iota(s) > \inf \iota(S)$ und also $s \in S_{\inf \iota(S)}$.

Insgesamt folgt die behauptete Surjektivität. #

□

⚠ Wir betrachten ab sofort, wie gegen Ende von Abschnitt 2.3, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ – und nicht mehr ihr Bild $\iota(\mathbb{Q})$ – als Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Wir werden ab sofort auch die uns aus der Schule bekannte **Dezimaldarstellung** der reellen Zahlen benutzen, diese aber erst in Abschnitt 3.7 herleiten.

Ein erstes wichtiges Resultat in den reellen Zahlen ist, dass wir in $\mathbb{R}$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ stets die quadratische Gleichung $x^2 = a$ lösen können. Das zeigt, dass unser in Proposition 2.21 geschildertes Eingangsproblem für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ im Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht mehr besteht:

Proposition 2.42. Zu jedem $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $x^2 = a$. Wir nennen x die **Quadratwurzel** von a und schreiben $x = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Beweis. Für $a = 0$ können wir $\sqrt{a} = \sqrt{0} = 0$ wählen. Sei nun $a \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wir zeigen zunächst die Existenz eines $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x^2 = a$. Da die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ das Vollständigkeitsaxiom (V) erfüllen, existiert in $\mathbb{R}$ das Supremum

$$x := \sup\{y \in \mathbb{R} : y^2 < a\};$$

hierfür müssen wir nur einsehen, dass die betrachtete Menge nichtleer und beschränkt ist. Das ist der Fall, da die Menge offensichtlich 0 enthält und durch $\max\{1, \sqrt{a}\}$ nach oben beschränkt ist. Genau wie im Beweis von Proposition 2.33 zeigt man nun, dass die Annahmen $x^2 > a$ und $x^2 < a$ jeweils zu einem Widerspruch führen. Nach (A_1) gilt daher $x^2 = a$.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit von x und nehmen dafür an, es gebe zwei Elemente $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^+$ mit $x^2 = a = \tilde{x}^2$. Mit der Kontraposition von Lemma 2.12 (i) folgt dann bereits $x = \tilde{x}$ und also die zu beweisende Eindeutigkeit. $\square$

Analog zeigt man:

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-, \forall n \in \mathbb{N}, \exists! x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- : x^n = a.$$

Wir nennen dieses x die **n -te Wurzel** von a und schreiben $x =: \sqrt[n]{a} =: a^{\frac{1}{n}}$. Dann ist $(a^n)^{\frac{1}{n}}$ die eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl x mit $x^n = a^n$ und also $(a^n)^{\frac{1}{n}} = a$ und trivialerweise auch $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$. Ist m eine weitere natürliche Zahl, so setzen wir daher wohldefiniert

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &:= (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m, \\ a^{-\frac{m}{n}} &:= (a^{-1})^{\frac{m}{n}}, \\ a^0 &:= 1 \quad \text{sowie} \quad 0^0 := 1. \end{aligned}$$

Diese erfüllen die folgenden Rechenregeln (Übung!):

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} &= a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}}, \\ a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} &= (ab)^{\frac{m}{n}}, \\ (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{r}{s}} &= a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}}. \end{aligned}$$

Eine weitere spannende Aussage, die in den reellen Zahlen gilt, ist der folgende Satz:

Satz 2.43 (Archimedisches Prinzip). Die Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht von oben beschränkt; es gibt also für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

Beweis. Nehmen wir an, die nichtleere Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ wäre in $\mathbb{R}$ von oben beschränkt. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existierte dann eine reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $b = \sup \mathbb{N}$. Nach Lemma 2.31 wäre dann $b - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, so dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$n_0 > b - 1$$

gäbe. Hieraus folgt aber sofort

$$n_0 + 1 > b,$$

wobei mit n_0 auch $n_0 + 1$ in $\mathbb{N}$ läge. Das steht im Widerspruch zu $b = \sup \mathbb{N}$ und kann also nicht sein. Es folgt, dass die Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ kein Supremum besitzt und also auch nicht von oben beschränkt sein kann. $\square$

Archimedes von Syrakus, geboren um 287 v. Chr. vermutlich in Syrakus und gestorben 212 v. Chr. ebenda, war ein griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike. Seine Werke waren auch noch im 16. und 17. Jahrhundert bei der Entwicklung der höheren Analysis von Bedeutung. Das Bild rechts ist ein Gemälde von Domenico Fetti aus dem Jahr 1620.



Bemerkung 2.44. Das Archimedische Prinzip gilt auch in $\mathbb{Q}$ und kann dort ohne Existenz der reellen Zahlen und des Supremums bewiesen werden,

denn: Für ein beliebiges $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ gilt

$$p + 1 > p = q \cdot \frac{p}{q} = \sum_{n=1}^q \frac{p}{q} \geq \frac{p}{q}.$$

Für alle $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^+$ gilt zudem bereits $1 \geq x$. #

Korollar 2.45. (a) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$. Wir nennen dieses n die **Gauß-Klammer** von x und schreiben $\lfloor x \rfloor := n$.

(b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ in $\mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(c) Die Menge $\mathbb{Q}$ liegt **dicht** in $\mathbb{R}$, in jedem Intervall (a, b) mit $a < b \in \mathbb{R}$ gibt es also (mindestens) eine rationale Zahl.

Beweis. (a) Für $x \geq 0$ setzen wir $n := \min\{k \in \mathbb{N} : k > x\} - 1$. Diese Zahl ist wohldefiniert,

denn: Nach dem Archimedischen Prinzip 2.43 ist die betrachtete Menge nicht leer. Nach Proposition 1.39 besitzt aber jede nichtleere Teilmenge X der natürlichen Zahlen ein Minimum. #

Da in den natürlichen Zahlen mit k stets auch $k + 1$ enthalten ist, gilt dann bereits $n \leq x < n + 1$. Ist m eine weitere natürliche Zahl mit $m \leq x < m + 1$, so folgt $|n - m| < 1$, also $n = m$ und somit die Eindeutigkeit. Für $x < 0$ argumentiert man über $-x \geq 0$.

- (b) Nach dem Archimedisches Prinzip 2.43 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$.
- (c) Aufgrund von $b - a > 0$ gibt es nach (b) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < b - a$. Es folgt $1 < nb - na$ und also $na + 1 < nb$. Nach (a) gilt dann

$$na < \lfloor na \rfloor + 1 \leq na + 1 < nb \quad \text{mit } \lfloor na \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$$

und also

$$a < \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} < b \quad \text{mit } \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} \in \mathbb{Q}.$$

□

Mitmachaufgabe 2.46. Wie hätten Sie in der Schule gezeigt, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt?

Lösung.

□

2.4 Mächtigkeit und Abzählbarkeit

Für endliche Mengen X, Y gilt:

$$\exists \text{ Bijektion } f: X \rightarrow Y \quad :\Longleftrightarrow \quad |X| = |Y|.$$

Diese Sichtweise ist sehr nützlich, beispielsweise gilt:

Proposition 2.47 (Schubfachprinzip). Seien X und Y endliche Mengen mit $|X| < |Y|$. Dann gibt es keine injektive Funktion $f: Y \rightarrow X$.

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe eine solche injektive Funktion $f: Y \rightarrow X$. Dann gälte

$$|Y| = \sum_{x \in X} |f^{-1}(x)| \leq \sum_{x \in X} 1 = |X|,$$

was einen Widerspruch zu unserer Annahme darstellt. Also kann es eine solche Funktion nicht geben. $\square$

Beispiel 2.48. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$. Verteilen Sie nun m Paar Socken auf n Schubladen, so gibt es mindestens eine Schublade mit zwei Sockenpaaren. Um das einzusehen, können wir die Funktion

$$f: \{\text{Sockenpaare}\} \rightarrow \{\text{Schubladen}\}$$

betrachten, die jedes Sockenpaar der entsprechenden Schublade zuordnet. Aufgrund von $m > n$ kann f nach dem Schubfachprinzip 2.47 nicht injektiv sein. Damit gibt es mindestens zwei verschiedene Sockenpaare S_1 und S_2 in derselben Schublade $f(S_1) = f(S_2)$.

Wir wollen ähnliche Überlegungen auch mit unendlichen Mengen anstellen können und erweitern das Konzept der Elementanzahl auf unendliche Mengen wie folgt:

- Definition 2.49.** (a) Zwei Mengen X, Y heißen **gleichmächtig**, falls eine Bijektion $f: X \rightarrow Y$ existiert. Da die Identität eine Bijektion ist, Bijektionen Umkehrabbildungen besitzen und Hintereinanderausführungen von Bijektionen nach Proposition 1.56 (b) wieder Bijektionen sind, ist durch die Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation gegeben. Die so definierte **Mächtigkeit** von X bezeichnen wir auch im unendlichen Fall mit $|X|$.
- (b) Eine Menge heißt **abzählbar**, falls sie endlich ist oder die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen besitzt, und **überabzählbar** sonst.

Beispiel 2.50. In Bemerkung 1.53 haben wir mit Hilberts Hotel eingesehen, dass die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ in Bijektion stehen und also gleichmächtig sind. Analog sieht man ein, dass auch die Mengen $2\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ abzählbar sind. Dies können wir uns wie folgt veranschaulichen:

- In Hilberts Hotel sind wie in Bemerkung 1.53 abzählbar unendlich viele Gäste g_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ untergebracht, und zwar jeweils im Zimmer z_{n+1} . Insbesondere ist das Hotel voll belegt. Plötzlich kommt es in allen Zimmern mit ungeraden Nummern zu einem Wasserschaden. Zum Glück lässt sich das Problem leicht lösen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zieht der Gast g_n aus Zimmer z_{n+1} in Zimmer $z_{2(n+1)}$ und mithin in ein Zimmer mit gerader Nummer um. So erhalten wir offensichtlich eine Bijektion zwischen den Mengen $\mathbb{N}$ und $2\mathbb{N}$.
- Gerade als die Wasserschäden in den Zimmern mit den ungeraden Nummern behoben sind, kommt ein großer Bus mit abzählbar unendlich vielen weiteren Gästen an. Diese heißen g_{-n} mit $n \in \mathbb{N}$ und können in die frisch renovierten Zimmer einquartiert werden, indem wir für alle $n \in \mathbb{N}$ dem

Gast g_{-n} das Zimmer z_{2n-1} zuweisen. Danach sind alle Zimmer wieder belegt und wir haben die Gäste g_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ in den abzählbar unendlich vielen Zimmern von Hilberts Hotel untergebracht.

Die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen ist in gewisser Weise die kleinste unendliche Mächtigkeit, genauer gilt:

Lemma 2.51 (Kriterium für Abzählbarkeit). *Sei X eine Menge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) X ist abzählbar.
- (ii) Es gibt eine Surjektion $\mathbb{N} \rightarrow X$ oder es gilt $X = \emptyset$.
- (iii) Es gibt eine Injektion $X \rightarrow \mathbb{N}$.

Insbesondere sind alle Teilmengen der natürlichen Zahlen abzählbar.

Beweis. Wir zeigen einen Ringschluss. Gelte zunächst Aussage (i) und sei also X abzählbar. Im Fall eines endlichen X ist nichts zu zeigen, das deckt insbesondere den Fall $X = \emptyset$ ab. Im Fall eines unendlichen X gibt es eine Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow X$, die insbesondere surjektiv ist.

Gelte nun Aussage (iii). Im Fall $X = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ surjektiv. Dann existiert für jedes $x \in X$ ein nichtleeres Urbild $f^{-1}(\{x\})$, das als nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum $m(x) := \min f^{-1}(\{x\})$ besitzt. Die so definierte Abbildung $m: X \rightarrow \mathbb{N}$ ist offensichtlich wohldefiniert und injektiv. Das zeigt Aussage (ii).

Gelte schließlich Aussage (ii) und existiere also eine Injektion $f: X \rightarrow \mathbb{N}$. Dann stehen X und $f(X)$ in Bijektion zueinander, so dass es zum Nachweis von Aussage (i) ausreicht, eine Abzählung von $f(X) \subseteq \mathbb{N}$ anzugeben. Dies tun wir rekursiv, indem wir $n_1 := \min f(X)$ und $n_{k+1} := \min f(X) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ setzen. $\square$

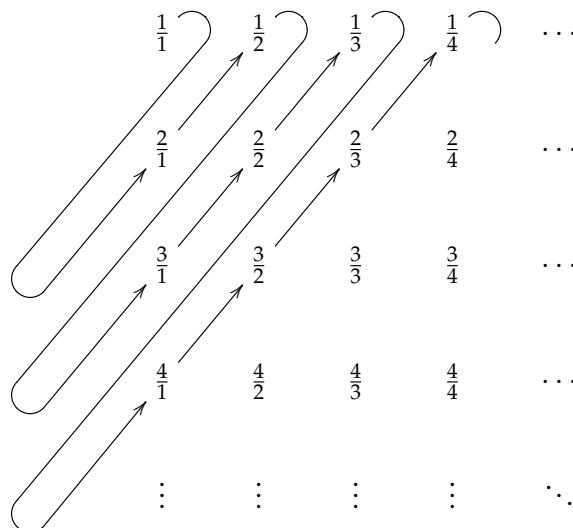
Um zu zeigen, dass auch die rationalen Zahlen abzählbar sind, verwenden wir das von Cantor veröffentlichte *Erste Diagonalverfahren*, das dieser nach Erkenntnissen aus dem Jahr 1926 in von ihm unerwähnter enger Zusammenarbeit mit Dedekind entwickelt hat:

Satz 2.52 (Cantor (1874)). *Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*

Beweis. Nach Beispiel 2.50 sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig. Um den Satz zu zeigen, reicht es daher aus, die Existenz einer Bijektion zwischen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ nachzuweisen. Das ist wiederum äquivalent dazu, zu zeigen, dass es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}^+$ gibt, weil diese durch Einfügen eines Vorzeichens unmittelbar eine Bijektion zwischen $-\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}^-$ liefert und wir zuletzt die Null auf die Null schicken können. Nach dem Kriterium für Abzählbarkeit 2.51 reduziert sich der Beweis des Satzes schließlich darauf, eine Surjektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ anzugeben. Das wollen wir nun tun. Die Idee dabei ist:

- Schreibe den Bruch $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ an die Stelle (p, q) des Gitters $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Zähle entlang der Diagonalen auf.

So erhalten wir zunächst



Jede durchlaufene Diagonale listet dabei die Brüche mit einer jeweils fest vorgegebenen Summe von Zähler und Nenner in absteigender Größe auf. Wir erhalten hieraus eine Folge rationaler Zahlen, die offensichtlich Dubletten aufweist:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Da diese Folge sämtliche positiven rationalen Zahlen trifft, haben wir so eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ gefunden und damit den Satz gezeigt. $\square$

Bemerkung 2.53. Der Beweis von Satz 2.52 zeigt stärker, dass für je zwei abzählbare Mengen X, Y auch ihr kartesisches Produkt $X \times Y$ wieder abzählbar ist. Iterativ sehen wir, dass dann auch beliebige (endliche) kartesische Produkte von abzählbaren Mengen wieder abzählbar sind. Das trifft insbesondere auf die Potenzen $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$ oder $\mathbb{Q}^n$ mit einem $n \in \mathbb{N}$ zu.

Mit dem Ersten Diagonalverfahren kann man zudem zeigen, dass abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen wieder abzählbar sind, das also

$$\forall n \in \mathbb{N}: X_n \text{ abzählbar} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ abzählbar}$$

gilt. Hierfür schreibt man für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Abzählung von X_n in die n -te Zeile und durchläuft die so notierten Elemente von $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ genauso in Diagonalen wie die positiven rationalen Zahlen im Beweis von Satz 2.52.

Dass es tatsächlich verschiedene unendliche Mächtigkeiten gibt, zeigte Cantor mit seinem **Zweiten Diagonalverfahren**, mit dem wir nun die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen beweisen:

Satz 2.54 (Cantor (1877)). Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind überabzählbar.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mathbb{R}$ und damit nach dem Kriterium für Abzählbarkeit 2.51 auch das Intervall $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar wäre. Dann gäbe es eine Abzählung

$$[0, 1) = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots). \quad (2.6)$$

Wir könnten nun eine reelle Zahl $a \in [0, 1)$ durch die Dezimaldarstellung

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} \quad \text{mit} \quad a_n := \begin{cases} 1 & \text{falls die } n\text{-te Nachkommastelle von } x^{(n)} \text{ ungleich 1 ist,} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren.² Als Element von $[0, 1)$ stimmte a daher nach (2.6) mit einem $x^{(n)}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ überein. Das kann aber nicht sein, da sich die n -ten Nachkommastellen von a und $x^{(n)}$ nach Konstruktion voneinander unterscheiden,

denn: Wäre die n -te Nachkommastelle von $x^{(n)}$ gleich 1, so wäre a_n gleich 2. Wäre andererseits die n -te Nachkommastelle von $x^{(n)}$ ungleich 1, so wäre a_n gleich 1. #

Unsere Annahme, $\mathbb{R}$ wäre abzählbar, muss also falsch sein und wir haben den Satz gezeigt. $\square$

Mitmachaufgabe 2.55. Wo war im Beweis von Satz 2.54 die Diagonale des Diagonalverfahrens?

Lösung.

$\square$

²Die Dezimaldarstellung der reellen Zahlen werden wir formal erst in Abschnitt 3.7 einführen. An dieser Stelle benötigen wir die folgenden Informationen: Jede reelle Zahl in $[0, 1)$ besitzt eine eindeutige Dezimaldarstellung der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ mit $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ derart, dass es unendlich viele n mit $a_n \neq 9$ gibt. Umgekehrt stellt jede solche Dezimaldarstellung eine eindeutige reelle Zahl in $[0, 1)$ dar.

Bemerkung 2.56. Der Beweis von Satz 2.54 zeigt stärker, dass für eine beliebige Menge X mit mindestens zwei Elementen die Menge

$$\text{Abb}(\mathbb{N}, X) := \{f: \mathbb{N} \rightarrow X \text{ Abbildung}\}$$

und mithin die Menge der Folgen mit Werten in X überabzählbar ist. Klar, dass andererseits für eine einelementige Menge X die Menge $\text{Abb}(\mathbb{N}, X)$ ebenfalls nur einelementig ist.

Beispiel 2.57. Wählen wir in Bemerkung 2.56 speziell $X = \{0, 1\}$, so erhalten wir die Überabzählbarkeit von $\text{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$. Hieraus folgt die Überabzählbarkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$,

denn: Offensichtlich folgt die Behauptung, wenn wir die Gleichmächtigkeit $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\text{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\})|$ zeigen können. Diese verstehen wir so: Jede Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ wählt eindeutig die Elemente einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ aus, indem sie diesen den Wert 1 und den übrigen natürlichen Zahlen den Wert 0 zuordnet, und wir erhalten eine Bijektion zwischen $\text{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. #

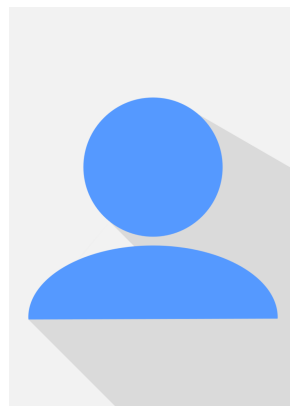
Tatsächlich kann man zeigen, dass die Mächtigkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit der der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ übereinstimmt.

▲ Im Jahr 1878 stellte Cantor die *Kontinuumshypothese* als Vermutung auf. Diese besagt, dass die Mächtigkeit des Kontinuums $\mathbb{R}$ in gewisser Weise die *kleinste* überabzählbare Mächtigkeit ist. Gödel zeigte 1938, dass sich die Kontinuumshypothese im üblichen axiomatischen Rahmen der Mengenlehre nicht widerlegen lässt. Cohen zeigte 1963 mit seiner eigens hierfür entwickelten Forcing-Methode, dass sie sich jedoch auch nicht beweisen lässt. Wir können uns also unabhängig von den üblichen Axiomen der Mengenlehre entscheiden, ob wir die Kontinuumshypothese annehmen wollen oder nicht!

Kurt Friedrich Gödel, geboren am 28. April 1906 in Brünn und gestorben am 14. Januar 1978 in Princeton, war ein österreichischer und später US-amerikanischer Mathematiker, Philosoph und einer der bedeutendsten Logiker des 20. Jahrhunderts. Auch seine philosophischen Erörterungen zu den Grundlagen der Mathematik fanden weite Beachtung. Das Foto zur Rechten zeigt ihn 1925 im Alter von 19 Jahren.



Paul Cohen, geboren am 2. April 1934 in Long Branch (New Jersey) und gestorben am 23. März 2007 in Stanford, war ein US-amerikanischer Logiker und Mathematiker. Unter anderem für seinen Nachweis der Unentscheidbarkeit der Kontinuums-hypothese erhielt er 1966 die Fields-Medaille. *Von Cohen habe ich kein gemeinfreies Foto gefunden.*



Was wir für endliche Mengen in Beispiel 1.21 bereits eingesehen hatten, gilt nach Beispiel 2.57 also auch für die Menge der natürlichen Zahlen: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ hat eine größere Mächtigkeit als die Menge $\mathbb{N}$. Allgemeiner haben wir:

Lemma 2.58. *Für eine beliebige Menge X hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine **größere Mächtigkeit** als X selbst, es gibt also eine injektive Abbildung $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, aber keine surjektive Abbildung $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.*

Beweis. Einerseits ist offensichtlich durch $x \mapsto \{x\}$ eine injektive Abbildung von X nach $\mathcal{P}(X)$ gegeben. Nehmen wir andererseits an, es gäbe eine surjektive Abbildung $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Für diese könnten wir die Menge

$$A := \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$$

definieren. Aufgrund der Surjektivität von f gäbe es dann ein $a \in X$ mit $f(a) = A$ und es gälte:

$$\begin{aligned} a \in A &\implies a \notin f(a) = A, \\ a \notin A &\implies a \in f(a) = A, \end{aligned}$$

was in beiden Fällen zu einem Widerspruch führt. Daher kann unsere Annahme der Existenz einer surjektiven Abbildung $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ nicht wahr sein und wir haben das Lemma bewiesen. $\square$

2.5 Die komplexen Zahlen

Wiewohl wir in dieser Vorlesung die Analysis der reellen Zahlen untersuchen, lassen sich einige Überlegungen auf dem Weg dorthin ohne großen Mehraufwand auch in einem für viele mathematische Teildisziplinen sehr wichtigen allgemeineren Setting, dem der **komplexen Zahlen**, durchführen. Diese führen wir an dieser Stelle noch kurz ein:

Auf der Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir die Verknüpfungen

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b') \quad \text{für alle } (a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2,$$

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba') \quad \text{für alle } (a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2.$$

Etwas mühselig, aber ohne konzeptuelle Schwierigkeiten, rechnet man nach (Übung):

Proposition 2.59. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper, der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Hierbei ist multiplikativ das neutrale Element durch $(1, 0)$ und die Inverse zu (a, b) durch $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ gegeben.

Wie man leicht überprüft, ist die Abbildung

$$\iota: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ a & \mapsto (a, 0) \end{cases}$$

ein injektiver Körperhomomorphismus, so dass sich $\mathbb{C}$ als Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{R}$ verstehen lässt. Visualisieren wir uns also die komplexen Zahlen als die Koordinatenebene mit den Koordinaten x und y , so können wir uns die reellen Zahlen als die x -Achse darin vorstellen. Wir nutzen dies für eine vereinfachte Notation der komplexen Zahlen und schreiben künftig

- a für $(a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}$,
- i für $(0, 1)$.

Auf diese Weise hat jede komplexe Zahl offensichtlich eine eindeutige Darstellung

$$z = a + bi \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Hierbei heißt a der **Realteil** und b der **Imaginärteil** von z . Wir schreiben

$$a =: \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad b =: \operatorname{Im}(z).$$

Wenn wir von nun an eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a + bi$ schreiben, meinen wir stets diese Darstellung von z über Real- und Imaginärteil.

 Aufgrund von

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

haben wir an dieser Stelle übrigens in $\mathbb{C}$ eine Quadratwurzel aus -1 gefunden, so dass der Körper $\mathbb{C}$ nach Korollar 2.14 nicht angeordnet werden kann.

Definition 2.60. Sei $z = a + bi$ in $\mathbb{C}$. Dann heißt

$$\bar{z} := a - bi$$

die zu z **komplex konjugierte Zahl**.

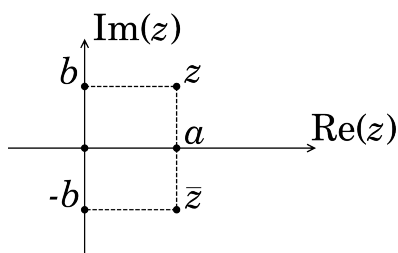


Abbildung 2.1: Die komplexe Konjugation lässt sich geometrisch als Spiegelung an der x -Achse veranschaulichen.

Man überprüft leicht (*Übung*) die folgenden Rechenregeln für die komplexe Konjugation, die für alle beteiligten $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} & \text{und} & \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \\ \bar{\bar{z}} &= z \iff z \in \mathbb{R} & \text{und} & \quad \overline{(\bar{z})} = z, \\ \operatorname{Re}(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2} & \text{und} & \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{aligned}$$

Definition 2.61. Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ heißt

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

der **Absolutbetrag** von z .

Für den Absolutbetrag und alle beteiligten $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Rechenregeln (*Übung*), die wir bereits aus Satz 2.19 und Korollar 2.20 für den Absolutbetrag der reellen Zahlen kennen:

$$\begin{aligned} |z| &\geq 0 \text{ und } |z| = 0 \iff z = 0, & (\text{positive Definitheit}) \\ |zw| &= |z| \cdot |w|, & (\text{Multiplikativität}) \\ |z + w| &\leq |z| + |w| \text{ und } |z - w| \geq ||z| - |w||, & (\text{Dreiecksungleichungen}) \end{aligned}$$

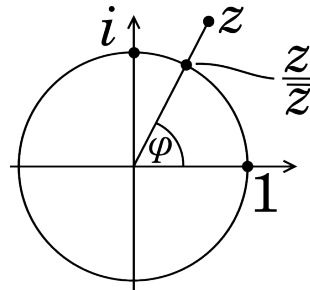
Durch direktes Nachrechnen anhand der Definitionen erhält man zudem:

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{und} \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Komplexe Zahlen lassen sich auch in **Polarkoordinaten** ausdrücken. Dafür schreiben wir

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

wobei $\frac{z}{|z|}$ offensichtlich Absolutbetrag 1 hat und sich über die Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ als Punkt des Einheitskreises in der Ebene vorstellen lässt:



Der Absolutbetrag $r := |z|$ und der Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ liefern uns die Polarkoordinatenschreibweise

$$z = (r, \varphi).$$

Mit etwas Trigonometrie kann man zeigen, dass sich bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen (r, φ) und (s, ψ) die Beträge multiplizieren und die Winkel addieren; es gilt also

$$(r, \varphi) \cdot (s, \psi) = (rs, (\varphi + \psi)_{2\pi}),$$

wobei $(\varphi + \psi)_{2\pi}$ die eindeutige reelle Zahl in $[0, 2\pi)$ bezeichne, die sich von $\varphi + \psi$ um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheidet.

2.6 Übungsaufgaben

Folgen und Reihen

Der Kern der Analysis liegt in der Beherrschung des Unendlichen durch präzise Grenzübergänge. Viele mathematische Objekte und Naturphänomene lassen sich nicht mit einer endlichen Anzahl von Rechenschritten exakt beschreiben. Hier liefern die in diesem Kapitel studierten Folgen und Reihen die entscheidenden Werkzeuge. Ein schönes Beispiel hierfür ist die in der Schule nur naiv eingeführte Dezimaldarstellung der reellen Zahlen. Was bedeutet es eigentlich, wenn wir schreiben, dass die Kreiszahl π den Wert 3,14159... hat? Hinter dieser vertrauten Schreibweise verbirgt sich eine *Reihe*, die unendliche Summe

$$3,14159\dots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \dots$$

Natürlich kann niemand tatsächlich unendlich viele Zahlen addieren. Wir umgehen dieses Problem, indem wir stattdessen endliche Teilsummen betrachten:

1. Teilsumme:	3
2. Teilsumme:	3,1
3. Teilsumme:	3,14
	$\vdots$

Diese Teilsummen bilden eine geordnete Liste – eine *Folge*. Je weiter wir in dieser Folge voranschreiten, desto näher kommen die Werte einem ganz bestimmten Ziel: dem exakten Wert von π . Folgen und Reihen erlauben es uns also, eine beliebige reelle Zahl beliebig genau zu approximieren, was wir in Abschnitt 3.7 kennenlernen werden. Die hiermit entwickelte Methode des Grenzübergangs ist überaus mächtig und wird in den folgenden Kapiteln auf vielfältige Weise eingesetzt werden.

3.1 Grenzwerte von Folgen

Definition 3.1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $a_n \in \mathbb{C}$. Dann sagen wir:

- (a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **konvergent (in $\mathbb{C}$)**, falls es ein $a \in \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ein solches a heißt **Grenzwert** bzw. **Limes** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und wir schreiben $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

- (b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **divergent**, falls sie nicht konvergent ist.
 (c) Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, so nennen wir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine **Nullfolge**.

Beispiel 3.2. (a) $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Nullfolge,

denn: Sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Korollar 2.45 (b) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

#

⚠ Wie dieses Beispiel zeigt, ist das Element $n_0 \in \mathbb{N}$ erst nach Wahl von ε bestimmt. Manchmal schreibt man daher auch $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

(b) $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent,

denn: Wir erhalten eine aussagenlogische Beschreibung der Divergenz, indem wir die Definition von Konvergenz gemäß den Regeln aus Bemerkung 1.11 negieren:

$$\forall a \in \mathbb{C}, \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0: |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Sei nun ein $a \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann wählen wir $\varepsilon := 1$. Sei weiter ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann wählen wir

$$n := \max\{n_0, \lfloor |a| \rfloor + 2\}$$

und es gilt

$$n \geq n_0 \quad \text{sowie} \quad |a_n - a| = |n - a| \geq n - |a| \geq 1 = \varepsilon.$$

#

Bemerkung 3.3. (a) In Definition 3.1 können wir bei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung „ $a \in \mathbb{C}$ “ durch „ $a \in \mathbb{R}$ “ ersetzen. Dass dies nichts ändert, kann man leicht sehen: Eine Folge reeller Zahlen konvergiert also genau dann in $\mathbb{R}$, wenn sie in $\mathbb{C}$ konvergiert.

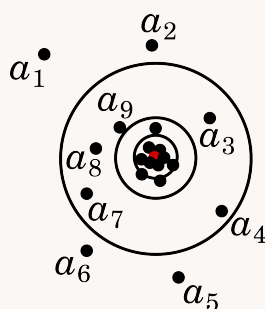
(b) Betrachten wir in der Situation von Definition 3.1 die (komplexe) ε -Umgebung

$$U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\},$$

so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$.
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: a_n \in U_\varepsilon(a)$.

Sprachlich formuliert bedeutet (ii), dass für jedes $\varepsilon > 0$ **fast alle**, das heißt: alle bis auf endlich viele, Folgenglieder in der Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen.



⚠ Letzteres ist nicht äquivalent dazu, dass für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$ liegen, sondern dazu, dass es für jeden konzentrischen Kreis um a nur endlich viele Folgenglieder gibt, die nicht in diesem Kreis liegen.

Lemma 3.4. Der Grenzwert einer jeden konvergenten Folge komplexer Zahlen ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $a, a' \in \mathbb{C}$ Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir nehmen an, diese wären verschieden. Dann gälte auch

$$\varepsilon := \frac{1}{3} \cdot |a - a'| > 0$$

und es gäbe $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0: |a_n - a| &< \varepsilon, \\ \forall n \geq n_1: |a_n - a'| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Für alle $n \geq n_2$ mit $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$ gälten dann beide Ungleichungen und wir hätten

$$3 \cdot \varepsilon = |a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2 \cdot \varepsilon,$$

was wegen $\varepsilon > 0$ nicht sein kann. □

⚠ Die hier verwendete Beweisidee ist ein Standardtrick der Analysis: Um den Betrag eines Rechenausdrucks nach oben abzuschätzen, ergänze diesen um eine komplizierte Null und

ziehe den Betrag mit der Dreiecksungleichung auseinander. Das ergibt immer dann Sinn, wenn wir – wie hier – die so entstehenden Beträge bekanntermaßen abschätzen können. Auch im kommenden Beweis setzen wir diesen Trick ein:

Lemma 3.5. *Jede konvergente Folge komplexer Zahlen ist beschränkt.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es dann ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mit

$$\forall n \geq n_0: |a_n - a| < 1.$$

Hieraus folgt

$$\forall n \geq n_0: |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Die Beschränktheit ergibt sich nun mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}.$$

□

In den folgenden Sätzen studieren wir interessante Beispiele von Folgengrenzwerten:

Satz 3.6. *Für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst im Spezialfall $q \in (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Sei dafür $\varepsilon > 0$. Dann müssen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $q^n < \varepsilon$ gilt. Dabei gilt

$$q^n < \varepsilon \iff \left(\frac{1}{q}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Aufgrund von $q \in (0, 1)$ gilt $\frac{1}{q} > 1$ und somit $x := \frac{1}{q} - 1 > 0$. Nach der Bernoulli'schen Ungleichung 2.13 gilt dann

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Zum Beweis der Behauptung in diesem Fall reicht es also aus, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ zu finden, so dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $1 + n \cdot x \geq \frac{1}{\varepsilon}$ gilt. Dies gilt aber nach dem Archimedischen Prinzip 2.43.

Trivialerweise ist die Behauptung auch für $q = 0$ korrekt. Gehen wir nun von einem beliebigen $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ aus, so gilt nach Definition $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$ gilt. Die allgemeine Behauptung folgt so unmittelbar aus dem bereits Bewiesenen. □

Satz 3.7. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis. Für $n \geq 2$ und $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ gilt

$$n = (1 + a_n)^n \stackrel{2.9}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} a_n^k \stackrel{n \geq 2}{\geq} \binom{n}{2} \cdot a_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a_n^2$$

und also

$$0 < a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Ähnlich wie in Beispiel 3.2 (a) können wir zeigen, dass $(\sqrt{\frac{2}{n-1}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist,

denn: Sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Korollar 2.45 (b) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$; ohne Einschränkung können wir dabei $n_0 \geq 2$ annehmen. Für alle

$$n \geq n_1 := 2 \cdot n_0^2 - 1$$

gilt dann

$$\left| \sqrt{\frac{2}{n-1}} - 0 \right| = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{n_1-1}} = \sqrt{\frac{2}{2n_0^2-2}} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

#

Zusammen mit der obigen Abschätzung erhalten wir hieraus

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: |\sqrt[n]{n} - 1| = |a_n - 0| \leq \left| \sqrt{\frac{2}{n-1}} \right| < \varepsilon \quad (3.1)$$

und wir haben den Satz bewiesen. $\square$

Korollar 3.8. Für alle reellen $a > 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $a \geq 1$. Dann gilt $b_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit a_n wie im Beweis von Satz 3.7 gilt offensichtlich die Abschätzung

$$\forall n \geq a: |b_n - 0| \leq |a_n - 0|.$$

Zusammen mit (3.1) folgt hieraus

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: |\sqrt[n]{a} - 1| = |b_n - 0| \leq |a_n - 0| < \varepsilon$$

und wir haben die Behauptung für $a \geq 1$ bewiesen. Im Fall $0 < a \leq 1$ betrachten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-1}}}.$$

Wenn wir nun den Grenzübergang in den Bruch hineinziehen dürften, wäre wegen $a^{-1} \geq 1$ die Behauptung auch in diesem Fall bewiesen. Tatsächlich ist dies erlaubt, und zwar nach Teil (d) des folgenden Lemmas 3.9. $\square$

Wir wollen solche nützlichen Zusammenhänge systematisieren und beschäftigen uns daher nun mit Rechenregeln für Grenzwerte:

Lemma 3.9. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen komplexer Zahlen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig ist $(\lambda \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda \cdot a$.
- (b) $(a_n \pm b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.
- (c) $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
- (d) Ist $b \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_0}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

⚠ Diese Rechenregeln lassen sich nur auf konvergente Folgen anwenden!

Mitmachaufgabe 3.10. Was kann passieren, wenn wir die Rechenregeln aus Lemma 3.9 auf nichtkonvergente Folgen anwenden? Etwa so etwas:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \infty \cdot 0.$$

Was genau wurde hier falsch gemacht?

Lösung.

□

Beweis von Lemma 3.9. Beim Beweis von Behauptung (a) können wir ohne Einschränkung von $\lambda \neq 0$ ausgehen. Sei also ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a gibt es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Hieraus folgt

$$|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

und wir haben Behauptung (a) bewiesen.

Wir zeigen nun Behauptung (b). Sei dafür ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Da wir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als konvergent vorausgesetzt haben, gibt es dann – nach Nehmen des Maximums – passend zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon' \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon'.$$

Hieraus folgt

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$$

und wir haben Behauptung (b) bewiesen.

Zum Beweis von Behauptung (c) überlegen wir uns zunächst

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b|.$$

Wir wollen die rechte Seite weiter abschätzen. Einerseits gibt es nach Lemma 3.5 ein $s > 0$ mit $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei wir ohne Einschränkung annehmen können, dass auch $|b| \leq s$ gilt. Andererseits gibt es aufgrund der Konvergenz der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzungen $|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2s}$ gelten. Insgesamt erhalten wir so

$$\forall n \geq n_0: |a_n b_n - ab| < s \cdot \varepsilon' + \varepsilon' \cdot s = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und wir haben Behauptung (c) bewiesen.

Schließlich beweisen wir Behauptung (d). Nach Aussage (c) reicht es dabei aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

zu zeigen, wobei wir zuerst klären müssen, wann b_n ungleich Null ist und somit invertiert werden kann. Wegen $b \neq 0$ und der Konvergenz von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es zu $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0: |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

und es folgt

$$\forall n \geq n_0: |b_n| = |b_n - b + b| \geq ||b_n - b| - |b|| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0.$$

Wir untersuchen nun die Konvergenz der Inversenfolge. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es aufgrund der Konvergenz von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_1: |b_n - b| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2},$$

wobei wir ohne Einschränkung $n_1 \geq n_0$ annehmen dürfen. Wir erhalten nun

$$\forall n \geq n_1: \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| < \frac{\varepsilon'}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \frac{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \varepsilon$$

und insgesamt somit Behauptung (d). □

Korollar 3.11. Für eine beliebige Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}(a) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im}(a).$$

Beweis. Aufgrund von $a_n = \operatorname{Re}(a_n) + i \cdot \operatorname{Im}(a_n)$ folgt die linke Seite mit Lemma 3.9 (a) und (b) unmittelbar aus der rechten Seite.

Gelte nun umgekehrt die linke Seite. Nach Definition 3.1 gilt dann

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: \varepsilon &> |a_n - a| \\ &= |(\operatorname{Re}(a_n) - \operatorname{Re}(a)) + i \cdot (\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(a))| \\ &= \sqrt{(\operatorname{Re}(a_n) - \operatorname{Re}(a))^2 + (\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(a))^2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: \varepsilon > |\operatorname{Re}(a_n) - \operatorname{Re}(a)|, |\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(a)|;$$

anschaulich ist das gerade die Aussage, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite ist. Mit Definition 3.1 erhalten wir so die rechte Seite. $\square$

In Abwandlung unserer in Bemerkung 3.3 (b) gewonnenen Anschauung im Komplexen beobachten wir im Reellen

$$|x - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon. \quad (3.2)$$

Die Menge dieser Punkte ist das offene Intervall

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

ist also der Durchschnitt der komplexen ε -Umgebung von a mit der reellen Achse und wird als die (*reelle*) ε -Umgebung von a bezeichnet. Bildhaft haben wir:

Lemma 3.12. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen. Gilt dann $a_n \leq b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b.$$

Insbesondere bleibt die Totalordnung $\leq$ auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ unter Grenzübergängen erhalten.

⚠ Die Aussage von Lemma 3.12 wird offensichtlich falsch, wenn wir $\leq$ durch $<$ ersetzen, da beispielsweise die Folgen $(0)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung $0 < \frac{1}{n}$ erfüllen, im Grenzübergang jedoch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \stackrel{3.2(a)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

gilt.

Beweis von Lemma 3.12. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dafür an, es gälte $a > b$. Aufgrund der Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existierte dann zu $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0: |a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon.$$

Mit unseren Vorüberlegungen folgte hieraus im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen

$$\forall n \geq n_0: b_n \stackrel{(3.2)}{<} b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon \stackrel{(3.2)}{<} a_n.$$

Es kann somit nicht $b > a$ gelten und wir haben das Lemma gezeigt. $\square$

Korollar 3.13 (Sandwich-Lemma). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit

- (i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n =: \ell$.
- (ii) Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq b_n \leq c_n$.

Dann ist auch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$.

Beweis. Nach Voraussetzung (i) gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0: |a_n - \ell|, |c_n - \ell| < \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung (ii) gibt es zudem ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_1: a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Zusammengenommen ergibt sich

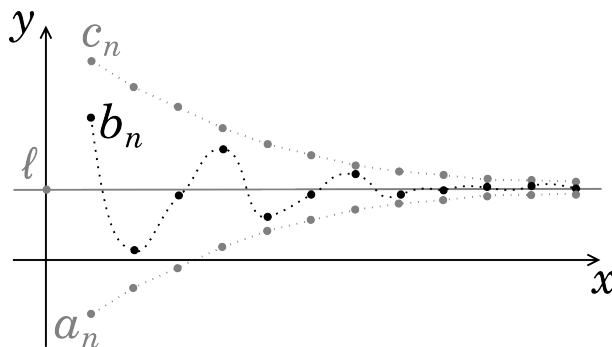
$$\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}: -\varepsilon < a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell < \varepsilon$$

und also

$$\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}: |b_n - \ell| < \varepsilon.$$

$\square$

Wir können uns die Situation so vorstellen, dass eine Folge, die – egal wie wild – zwischen zwei gegen denselben Wert konvergierenden Folgen verläuft, stets selbst gegen diesen Wert konvergiert:



In Übungsaufgabe 3.1 nutzen wir das Sandwich-Lemma 3.13, um ausgehend von Schulvorwissen eine weitere Anschauung für die Konvergenz von Folgen zu gewinnen. An dieser Stelle überzeugen wir uns jedoch mit einem Beispiel von seiner unmittelbaren Nützlichkeit:

Beispiel 3.14. Für reelle Zahlen $a, b \geq 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\},$$

denn: Ohne Einschränkung können wir $a \leq b$ annehmen. Dann gilt auch $a^n \leq b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir können wie folgt abschätzen:

$$\forall n \in \mathbb{N}: b = \sqrt[n]{b^n} \stackrel{0 \leq a^n}{\leq} \sqrt[n]{a^n + b^n} \stackrel{a^n \leq b^n}{\leq} \sqrt[n]{2b^n} = \sqrt[n]{2} \cdot b.$$

Trivialerweise ist $\lim_{n \rightarrow \infty} b = b$ und nach Korollar 3.8 sowie Lemma 3.9 (c) gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}b = b$. Mit dem Sandwich-Lemma 3.13 folgt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b = \max\{a, b\}$$

und somit die Behauptung. #

Definition 3.15. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt **monoton wachsend** bzw. **monoton fallend**, falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \geq a_n \quad \text{bzw.} \quad \forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \leq a_n.$$

Beispiel 3.16. (a) Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(b) Die Folge $(\frac{(-1)^n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht monoton, weder wachsend noch fallend.

Satz 3.17. Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n & \text{für } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monoton wachsend,} \\ \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n & \text{für } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monoton fallend.} \end{cases}$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei monoton wachsend, und ansonsten die gesamte Folge mit -1 multiplizieren. Dann besitzt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine obere Schranke $b \in \mathbb{R}$ und aufgrund der Vollständigkeit der reellen Zahlen existiert das Supremum

$$a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: a \geq a_n > a - \varepsilon,$$

denn: Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lemma 2.31 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Mit der Monotonie von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt dann für alle $n \geq n_0$

$$a \geq a_n \geq a_{n_0} > a - \varepsilon$$

und also die Behauptung. #

Hieraus folgt

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon$$

und somit die Behauptung $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. □

Beispiel 3.18. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist beschränkt und monoton wachsend,

denn: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\stackrel{2.9}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt zum einen die Beschränktheit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2 \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \stackrel{2.6}{=} \frac{2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \leq 4$$

und zum anderen die Monotonie

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

#

Nach Satz 3.17 konvergiert die Folge gegen eine reelle Zahl e , die auch die **Euler'sche Zahl** genannt wird und die in der Analysis eine zentrale Rolle spielt. Berechnen wir konkrete Werte für a_n , so erhalten wir Abschätzungen von unten für e . Für $n = 10$ finden wir so etwa $2,59 < e$.

Man kann diese Überlegungen noch ein wenig weiter spinnen: Die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert offensichtlich gegen 1, so dass nach Lemma 3.9 (c) auch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Produkte

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

gegen e konvergiert. Analog zum Obigen kann man zudem zeigen, dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fällt und die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

gilt. Mit dem Sandwich-Lemma 3.13 folgt so die Darstellung

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

der Euler'schen Zahl, mit der wir später weiterarbeiten werden. Berechnen wir konkrete Werte für b_n , so erhalten wir Abschätzungen von oben für e . Für $n = 10$ finden wir so etwa $e < 2,86$. Tatsächlich gilt

$$e = 2,71828 \dots$$

Leonhard Euler, geboren am 15. April 1707 in Basel und gestorben am 18. September 1783 in Sankt Petersburg, war ein Schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom, Geograph, Logiker und Ingenieur. Er machte wichtige und weitreichende Entdeckungen in vielen Bereichen der Mathematik, beispielsweise der Infinitesimalrechnung und der Graphentheorie. Gleichzeitig leistete Euler fundamentale Beiträge auf anderen Gebieten wie der Topologie und der analytischen Zahlentheorie. Er prägte große Teile der bis heute weltweit gebräuchlichen mathematischen Terminologie und Notation, beispielsweise führte er den Begriff der mathematischen Funktion in die Analysis ein. Das Gemälde zur Rechten zeigt ihn 1752 im Alter von 45 Jahren.



Definition 3.19. Eine **Intervallschachtelung** in den reellen Zahlen ist eine Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle $I_n := [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(IS₁) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_{n+1} \subseteq I_n$.

(IS₂) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| := |b_n - a_n| < \varepsilon$.

Satz 3.20 (Prinzip der Intervallschachtelung). Sei $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ eine Intervallschachtelung. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für diese gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x.$$

Beweis. Nach Konstruktion sind die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und monoton. Nach Satz 3.17 konvergieren sie also und es existieren Grenzwerte $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Die Folge $(b_n - a_n)_{n \rightarrow \infty}$ strebt nun nach Konstruktion einer Intervallschachtelung gegen Null, nach Lemma 3.9 (b) jedoch gegen $b - a$. Nach Lemma 3.4 gilt somit $b - a = 0$, also $a = b$. Aufgrund von

$$a_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \stackrel{3.17}{=} a = b \stackrel{3.17}{=} \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n \leq b_n$$

liegt dann $x := a$ in jedem Intervall I_n der Intervallschachtelung. Gälte dies genauso für ein weiteres $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, so wäre $a_n \leq \tilde{x} \leq b_n$ für alle n und nach Lemma 3.12 gälte $a \leq \tilde{x} \leq b = a$ und also $\tilde{x} = a$. $\square$

3.2 Häufungspunkte

Definition 3.21. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ ein **Häufungspunkt** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ jeweils für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

Beispiel 3.22. Die (divergente) Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt die zwei Häufungspunkte ± 1 , denn: Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &= 0 < \varepsilon && \text{für alle geraden } n \in \mathbb{N}, \\ |a_n - (-1)| &= 0 < \varepsilon && \text{für alle ungeraden } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

#

Bemerkung 3.23. Konvergente Folgen haben genau einen Häufungspunkt, nämlich $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

denn: Für ein beliebiges $b \neq a$ liegen mit $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$ fast alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$ und folglich nur endlich viele in $U_\varepsilon(b) \subseteq U_\varepsilon(a)^c$. #

⚠ Diese Eigenschaft ist nicht charakteristisch; es gibt also auch divergente Folgen mit genau einem Häufungspunkt. Ein mögliches Beispiel hierfür ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für

$$a_n := \frac{n - (-1)^n n}{2}$$

mit 0 als einzigem Häufungspunkt.

Mitmachaufgabe 3.24. Gibt es Folgen mit (abzählbar bzw. überabzählbar) unendlich vielen Häufungspunkten?

Lösung.

□

Definition 3.25. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in einer beliebigen Menge und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, gelte also $n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung 3.26. Man kann nun leicht zeigen (Übung!):

- (a) Teilfolgen von Teilfolgen sind auch Teilfolgen der ursprünglichen Folge.
- (b) Teilfolgen konvergenter Folgen sind konvergent.

Lemma 3.27. Ein $a \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen, wenn es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ gibt.

Beweis. Sei zunächst $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann definieren wir rekursiv eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$, wobei wir ausnutzen, dass nach Definition in jeder noch so kleinen ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von a unendlich viele Folgenglieder liegen müssen.

- Zuerst wählen wir ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} \in U_1(a)$.
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir des weiteren unter der Voraussetzung, dass die Zahlen $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$ bereits gewählt sind, ein n_k mit $n_k > n_{k-1}$ und $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$.

Nach Konstruktion gilt dann

$$|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$$

und also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a,$$

so dass wir eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a gefunden haben.

Sei nun umgekehrt $a \in \mathbb{C}$ Grenzwert einer konvergenten Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0: |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Da $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton wächst, gibt es somit unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$, so dass a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. □

Lemma 3.28. *Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Ein Index n_0 heißt **Gipfelpunkt** einer gegebenen reellen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn jedes nachfolgende Glied kleiner oder gleich diesem Glied ist, wenn also $a_{n_0} \geq a_n$ für alle $n > n_0$ gilt. Bei jeder beliebigen Folge gibt es nun genau zwei Möglichkeiten für die Anzahl dieser Gipfelpunkte:

Fall 1: Die Folge hat unendlich viele Gipfelpunkte. Dann können wir die Gipfelpunkte der Reihe nach auflisten: $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Da n_1 ein Gipfelpunkt ist, gilt für den Nachfolger n_2 die Abschätzung $a_{n_1} \geq a_{n_2}$. Da n_2 ein Gipfelpunkt ist, gilt für den Nachfolger n_3 die Abschätzung $a_{n_2} \geq a_{n_3}$. Iterativ entsteht eine monoton fallende Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Fall 2: Die Folge hat nur endlich viele Gipfelpunkte. Gibt es keinen Gipfelpunkt, so wählen wir $n_1 := 1$. Ansonsten gibt es einen letzten Gipfelpunkt und wir wählen einen Index n_1 , der hinter diesem letzten Gipfelpunkt liegt. Da n_1 kein Gipfelpunkt ist, muss es weiter hinten ein größeres Glied geben. Es existiert also ein $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} > a_{n_1}$. Da auch n_2 kein Gipfelpunkt ist, gibt es ein $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} > a_{n_2}$. Iterativ erhalten wir so eine streng monoton wachsende Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

In beiden Fällen haben wir eine monotone Teilfolge gefunden und insgesamt so das Lemma gezeigt. $\square$

Satz 3.29 (Satz von Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge reeller bzw. komplexer Zahlen besitzt eine in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ konvergente Teilfolge (und mithin einen Häufungspunkt).*

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zunächst eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Diese besitzt nach Lemma 3.28 eine monotone Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die nach Konstruktion wieder beschränkt ist. Der Satz in diesem Fall folgt nun mit Satz 3.17.

Sei nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann sind auch die Folgen

$$(\operatorname{Re}(a_n))_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (\operatorname{Im}(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

reeller Zahlen beschränkt und nach dem bereits Gezeigten existiert eine

$$\text{konvergente Teilfolge } (\operatorname{Re}(a_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}} \text{ in } (\operatorname{Re}(a_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Wieder nach dem bereits Gezeigten gibt es in der offensichtlich ebenfalls beschränkten zugehörigen (reellen) Teilfolge

$$(\operatorname{Im}(a_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$$

eine

$$\text{konvergente Teilfolge } (\operatorname{Im}(a_{n_{k_\ell}}))_{\ell \in \mathbb{N}}.$$

Nach Bemerkung 3.26 (b) ist die zugehörige Teilfolge

$$(\operatorname{Re}(a_{n_{k_\ell}}))_{\ell \in \mathbb{N}}$$

als Teilfolge einer konvergenten Folge wieder konvergent und beide sind nach Bemerkung 3.26 (a) (konvergente) Teilfolgen der ursprünglichen Folgen

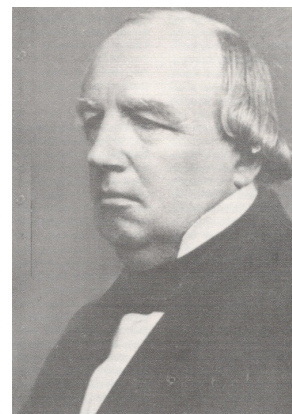
$$(\operatorname{Re}(a_n))_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (\operatorname{Im}(a_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Zusammen mit Korollar 3.11 zeigt das den Satz in voller Allgemeinheit. □

Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano, geboren am 5. Oktober 1781 in Prag und gestorben am 18. Dezember 1848 ebenda, war ein römisch-katholischer Priester, Philosoph und Mathematiker. Als Mathematiker betrieb er Grundlagenforschung in der Analysis. Er konstruierte vermutlich als erster eine Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist. Sein 1851 posthum erschienenen Hauptwerk *Paradoxien des Unendlichen* sammelt eine Vielzahl von Erkenntnissen über endliche und unendliche Mengen und führte den Begriff der Menge als Fachwort in die Mathematik ein. Die Lithographie zur Rechten wurde 1849 posthum angefertigt.



Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, geboren am 31. Oktober 1815 in Ostenfelde im Münsterland und gestorben am 19. Februar 1897 in Berlin, war ein deutscher Mathematiker, der sich um die logisch fundierte Aufarbeitung der Analysis verdient gemacht hat. Daneben leistete er bahnbrechende Beiträge in verschiedenen Gebieten der Mathematik, wie der Funktionentheorie, der Variationsrechnung, der Differentialgeometrie und der Theorie der elliptischen Funktionen. Das Foto zur Rechten zeigt ihn an seinem 70. Geburtstag.



3.3 Limes inferior und Limes superior

Satz 3.30. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann ist die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und hat ein Minimum und ein Maximum. Das Minimum heißt der **Limes inferior** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und wird $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ geschrieben, das Maximum der **Limes superior** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und wird $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ geschrieben.

Beweis. Sei $R \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| < R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 3.29 nichtleere Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch R beschränkt,

denn: Für einen beliebigen Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es nach Lemma 3.27 eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. Aus $|a_{n_k}| < R$ und Lemma 3.12 folgt dann $|a| \leq R$, was die Behauptung zeigt. #

Aufgrund der Vollständigkeit der reellen Zahlen besitzt die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Supremum b in den reellen Zahlen. Tatsächlich ist das Supremum b selbst ein Häufungspunkt und damit das Maximum der Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

denn: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.31 ist dann $b - \frac{\varepsilon}{2}$ keine obere Schranke für die Menge der Häufungspunkte und es muss also einen Häufungspunkt a mit $b - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq b$ geben. Damit liegen unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Intervall

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq \left(\left(b - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt, dass auch b ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. #

Die Existenz des Minimums zeigt man genauso. □

Beispiel 3.31. Für die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1 \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1.$$

Wie für den Grenzwert von konvergenten Folgen gibt es auch für den Limes inferior und den Limes superior von beschränkten Folgen Rechenregeln. Zum Beispiel gelten für beschränkte Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Regeln (Übung!)

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (r \cdot a_n) &= r \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n && \text{für alle } r \geq 0, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (r \cdot a_n) &= r \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n && \text{für alle } r \leq 0. \end{aligned}$$

Proposition 3.32. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.
- (ii) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt.
- (iii) Es gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Beweis. Dass Aussage (i) Aussage (ii) impliziert, hatten wir schon in Bemerkung 3.23 eingesehen.

Dass aus Aussage (ii) Aussage (iii) folgt, ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Limes inferior und des Limes superior.

Es verbleibt zu zeigen, dass Aussage (iii) auch Aussage (i) impliziert. Gelte also

$$a := \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0: a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

denn: Wären unendlich viele a_n größer oder gleich $a + \varepsilon$, so bildeten diese eine (beschränkte) Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und besäßen daher nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 3.29 einen Häufungspunkt, der größer als $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ wäre, was nicht sein kann. Analog kann es auch nicht unendlich viele a_n kleiner oder gleich $a - \varepsilon$ geben. #

Damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und hat den Grenzwert a . □

Wir würden gerne auch Aussagen über nichtbeschränkte Folgen treffen. Dafür setzen wir:

Definition 3.33. Falls eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach unten bzw. oben beschränkt ist, definieren wir

$$\inf X := -\infty \quad \text{bzw.} \quad \sup X := +\infty.$$

Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ setzen wir fort durch:

$$\forall x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty.$$

Definition 3.34. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt **bestimmt divergent gegen $+\infty$** , in Zeichen: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, falls gilt:

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: a_n > R.$$

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent gegen $-\infty$** , in Zeichen: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, falls $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

▲ Die Symbole $\pm\infty$ sind *keine* reellen Zahlen und wir können auch nicht einfach die Körperregeln von $\mathbb{R}$ anwenden. Wir definieren jedoch:

$$\begin{aligned}\infty + \infty &= \infty + x = x + \infty =: \infty && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ -\infty + (-\infty) &= -\infty + x = x + (-\infty) =: -\infty && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{x}{0} &= x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty \cdot \infty =: \infty && \text{für alle } x \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{x}{0} &= x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty \cdot \infty = \infty \cdot -\infty =: -\infty && \text{für alle } x \in \mathbb{R}^-.\end{aligned}$$

Die Ausdrücke $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, usw. sind *nicht* definiert!

Beispiel 3.35. Die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n \cdot n)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist divergent, aber nicht bestimmt divergent. Jedoch ist die Teilfolge $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ divergent gegen $+\infty$ und die Teilfolge $(a_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ divergent gegen $-\infty$.

Satz 3.36. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen $-\infty$ bzw. ∞ .
- (ii) Es ist $a_n < 0$ bzw. $a_n > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und die so ab einem n_0 wohldefinierte Folge $(\frac{1}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist dort eine Nullfolge.

Beweis. Offensichtlich gilt für eine bestimmt gegen $\pm\infty$ divergente Folge $(a_n)_{n \rightarrow \infty}$ die Abschätzung $a_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da der andere Fall genauso geht, können wir also für den Beweis ohne Einschränkung annehmen, es gelte $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Gelte zunächst Aussage (i). Wie gerade bereits eingesehen, gilt dann $a_n > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und mit $R := \frac{1}{\varepsilon}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0: a_n > R$$

und also mit

$$\forall n \geq n_0: \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| \stackrel{\text{o.E.}}{=} \frac{1}{a_n} < \frac{1}{R} = \varepsilon.$$

Zusammen ist das gerade Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii). Für ein beliebiges $R > 0$ setzen wir $\varepsilon := \frac{1}{R} > 0$. Nach Voraussetzung gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0: \frac{1}{a_n} = \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$$

und also mit

$$\forall n \geq n_0: a_n > \frac{1}{\varepsilon} = R.$$

Das zeigt gerade Aussage (i). □

Manchmal will man nicht nur wissen, dass eine reelle Folge gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, sondern auch eine Abschätzung dafür haben, wie schnell dies geschieht. Hierfür vergleichen wir mit anderen Folgen:

Definition 3.37 (Landau-Notation). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sagen wir ...

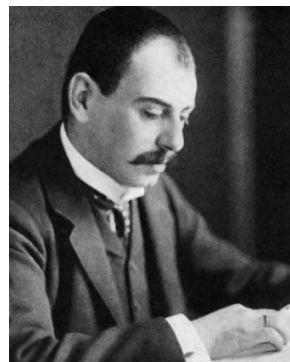
- ... dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $O(b_n)$ ist, wenn die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wir schreiben dann

$$a_n \in O(b_n) \quad \text{oder} \quad a_n = O(b_n).$$

- ... dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $o(b_n)$ ist, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ gilt. Wir schreiben dann

$$a_n \in o(b_n) \quad \text{oder} \quad a_n = o(b_n).$$

Edmund Georg Hermann Landau, geboren am 14. Februar 1877 in Berlin und gestorben am 19. Februar 1938 ebenda, war ein deutscher Mathematiker, der sich um die analytische Zahlentheorie verdient machte. Landaus Vorlesungen und Veröffentlichungen waren Kunstwerke der mathematisch knappen und exakten Beweisführung, die jede Form der Erklärung und Erläuterung zur Motivation ausließen. Dies galt vor allem für seine *Grundlagen der Analysis*. Das machte seinen Hörern und Lesern das Verständnis jedoch nicht gerade leicht. Als Hilbert 1938 vom Tod Landaus erfuhr, soll er in Hinblick auf diese Strenge und Exaktheit gesagt haben: „Er war der Pflichttreueste von uns allen“. Das Foto zur Rechten zeigt Landau an einem unbekannten Zeitpunkt vor 1930.



3.4 Cauchy-Folgen

Definition 3.38. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt **Cauchy-Folge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0: |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Beispiel 3.39. Sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge mit $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Dann gilt

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Also ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge.

Augustin-Louis Cauchy, geboren am 21. August 1789 in Paris und gestorben am 23. Mai 1857 in Sceaux, war ein französischer Mathematiker und Physiker. Als ein Pionier der Analysis entwickelte er die von Gottfried Wilhelm Leibniz und Sir Isaac Newton aufgestellten Grundlagen weiter, wobei er die fundamentalen Aussagen auch formal bewies und einer neuen Auffassung des Funktionsbegriffs zum Durchbruch verhalf. Er nimmt eine ähnliche Stellung in der Entwicklung der Analysis ein wie Leonhard Euler im 18. Jahrhundert und teilte sich im 19. Jahrhundert seine herausragende Stellung als Mathematiker in der ersten Hälfte des Jahrhunderts mit Carl Friedrich Gauß. Das Bild zur Rechten zeigt ihn 1840 im Alter von 51 Jahren.



Satz 3.40 (Cauchy-Kriterium für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$). *Ein Folge reeller bzw. komplexer Zahlen ist genau dann konvergent in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{C}$, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Wir zeigen den Satz für reelle Folgen; die entsprechenden Aussagen für komplexe Folgen zeigt man genauso.

Sei zunächst $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt unmittelbar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0: |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist die Eigenschaft einer Cauchy-Folge erfüllt.

Sei nun umgekehrt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Cauchy-Folge. Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt,

denn: Für die spezielle Wahl $\varepsilon = 1$ gilt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0: |a_m - a_n| < 1.$$

Das impliziert

$$\forall n \geq n_0: |a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$$

und also

$$\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\},$$

so dass wir die Behauptung gezeigt haben. #

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 3.29 besitzt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit einem Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Tatsächlich gilt sogar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

denn: Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \forall m, n \geq n_0: |a_m - a_n| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ \forall k \geq k_0: |a_{n_k} - a| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ n_{k_0} &\geq n_0. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\forall n \geq n_0: |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und somit die Behauptung. #

Da hiermit insbesondere die Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gezeigt ist, folgt hieraus der Satz. □

Bemerkung 3.41. (a) Das Cauchy-Kriterium 3.40 ermöglicht es, die Konvergenz einer Folge ausschließlich anhand ihrer Folgeglieder zu überprüfen. Beim Überprüfen der Konvergenz anhand der Definition muss man dagegen zuvor noch den Grenzwert erraten.

(b) Der Beweis des Cauchy-Kriteriums 3.40 zeigt noch mehr als im Satz behauptet wird:

- Die Hinrichtung des Kriteriums benötigt nur die Definitionen von Folgenkonvergenz und Cauchy-Folgen und gilt daher allgemein. So ist etwa auch jede in $\mathbb{Q}$ konvergente Folge rationaler Zahlen eine Cauchy-Folge.
- Die Rückrichtung des Kriteriums zeigt: Eine Cauchy-Folge, die eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a besitzt, ist selbst schon konvergent mit Grenzwert a .

(c) Die Rückrichtung des Cauchy-Kriteriums 3.40 ist eine besondere Eigenschaft. So ist etwa eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen nicht notwendigerweise konvergent in $\mathbb{Q}$,

denn: Es gibt jeweils eine monoton fallende und eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen mit Grenzwert $\sqrt{2}$; diese lassen sich etwa durch Auswählen von Folgegliedern in passenden $\frac{1}{n}$ -Umgebungen von $\sqrt{2}$ definieren. Da $\mathbb{Q}$ nach Lemma 2.45 (c) dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es weiter eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$, deren Folgeglieder für alle $n \in \mathbb{N}$ zwischen den entsprechenden Gliedern dieser beiden Folgen liegen. Nach dem Sandwich-Lemma 3.13 gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ und nach Satz 3.40 ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da der Grenzwert einer konvergenten Folge in $\mathbb{R}$ eindeutig ist, kann die so gefundene rationale Cauchy-Folge aber keinen rationalen Grenzwert haben. #

Beispiel 3.42. Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Beispiel 3.39 ist keine Cauchy-Folge und nach dem Cauchy-Kriterium 3.40 somit auch nicht konvergent.

Bemerkung 3.43. Das Konzept der Cauchy-Folgen ermöglicht eine alternative Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen wie folgt: Sei $\mathcal{C}$ die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ und $\sim$ die durch

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge}$$

definierte Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}$. Intuitiv wollen wir nun jeder Äquivalenzklasse den gemeinsamen Grenzwert zuordnen. Mit etwas Algebra kann man zeigen, dass die Faktormenge $\mathcal{C}/\sim$ ein Körper ist. Da die konstanten Folgen Cauchy-Folgen sind, lässt sich dabei jede rationale Zahl als konstante Folge in $\mathcal{C}/\sim$ wiederfinden. Da sich die Totalordnung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{C}/\sim$ erweitern lässt und $\mathcal{C}/\sim$ das Vollständigkeitsaxiom (V) erfüllt – das ist noch Arbeit! – ist $\mathcal{C}/\sim$ ein vollständiger angeordneter Körper und als solcher nach Satz 2.36 isomorph zu $\mathbb{R}$.

3.5 Konvergenz von Reihen

Definition 3.44. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der ***n*-ten Partialsummen** $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die **(unendliche) Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Konvergiert diese, so heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ihr **Reihenwert** und wir schreiben auch hier $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wir betrachten häufig auch Reihen, die mit einer 0-ten Partialsumme beginnen, also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Wir studieren nun erste Konvergenzkriterien für Reihen. Zunächst ergibt das Cauchy-Kriterium 3.40 bei der Anwendung auf die Folge der Partialsummen einer Reihe unmittelbar:

Proposition 3.45 (Cauchy-Kriterium für Reihen). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ eine Reihe. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent,
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0: \left| \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} a_k \right| < \varepsilon.$

Auf ähnliche Weise kann man das Sandwich-Lemma 3.13 und das Monotoniekriterium 3.17 übertragen.

Korollar 3.46 (notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ eine konvergente Reihe. Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis. Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen 3.45 gilt insbesondere

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: |a_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k \right| < \varepsilon.$$

Das zeigt bereits die Behauptung. □

Beispiel 3.47. (a) Die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nach Beispiel 3.42 divergent. Aufgrund der Positivität aller Reihenglieder ist die harmonische Reihe damit bestimmt divergent gegen $+\infty$.

(b) Für ein beliebiges $q \in \mathbb{C}$ heißt $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ die *geometrische Reihe*. Diese ist genau für $|q| < 1$ konvergent mit dem Reihenwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$

denn: Für einen festen Wert $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Satz 2.6

$$s_n := \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{für } q \neq 1, \\ n+1 & \text{für } q = 1. \end{cases}$$

Dass die Reihe für $|q| > 1$ divergiert, folgt mit dem notwendigen Konvergenzkriterium für Reihen 3.46. Im Fall $|q| < 1$ konvergieren nach Satz 3.6 die Zählerfolge und die (konstante und von Null verschiedene) Nennerfolge jeweils einzeln zu 1 und $1-q$ und mit Lemma 3.9 (d) folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

#

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für rationales $s > 1$ und divergiert für rationales $0 < s \leq 1$,³

denn: Die Divergenz für $0 < s \leq 1$ folgt mit der Abschätzung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq 0$$

und Teil (a).

³Diese Aussage ist allgemeiner für reelles s korrekt. Wir haben aber in dieser Vorlesung Potenzen bislang nur für rationale Exponenten definiert.

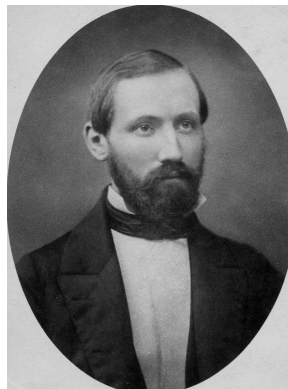
Die Konvergenz für $s > 1$ erfordert ein subtileres Argument: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^n)^s} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^s}\right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot 2^{-s} + 4 \cdot 4^{-s} + \dots + 2^n \cdot (2^n)^{-s} \\ &= \sum_{k=0}^n (2^{1-s})^k \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 2^{1-s}}, \end{aligned}$$

wobei wir für den letzten Schritt Teil (b) für $q = 2^{1-s}$ ausnutzen. Die Partialsummen sind also beschränkt; monoton wachsend sind sie sowieso. Es folgt die Konvergenz mit Satz 3.17. #

Lassen wir die rationale Zahl $s > 1$ variieren, erhalten wir eine Funktion in s , die **Riemann'sche Zetafunktion**. Diese spielt eine zentrale Rolle in der Zahlentheorie.

Georg Friedrich Bernhard Riemann, geboren am 17. September 1826 in Breselenz bei Dannenberg (Elbe) und gestorben am 20. Juli 1866 in Selasca am Lago Maggiore, war ein deutscher Mathematiker, der trotz seines relativ kurzen Lebens auf vielen Gebieten der Analysis, Differentialgeometrie, mathematischen Physik und der analytischen Zahlentheorie bahnbrechend wirkte. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker. Seine Arbeit legte den Grundstein für die Allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein. Das Bild zur Rechten zeigt ihn als Student.



Die Rechenregeln für konvergente Reihen ergeben sich auf offensichtliche Weise aus den Rechenregeln für konvergente Folgen aus Lemma 3.9.

Mitmachaufgabe 3.48. Hat man den Wert s der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ vergessen, so kann man ihn mit dem folgenden Trick berechnen: Es gilt nämlich

$$(a - 1) \cdot s = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a^n - \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \sum_{n=1}^{\infty} a^n - \sum_{n=0}^{\infty} a^n = -1$$

und also unmittelbar

$$s = \frac{1}{1 - a}.$$

Warum kann diese Überlegung aber den in Beispiel 3.47 (b) durchgeführten Beweis nicht ersetzen?

Lösung.

□

▲ Wie wir bereits in Beispiel 3.47 (a) gesehen haben, gilt die Umkehrung des Kriteriums 3.46 im Allgemeinen nicht: Für eine Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muss die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ also nicht konvergieren. Es gilt aber:

Proposition 3.49 (Leibniz-Kriterium). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Gottfried Wilhelm Leibniz, geboren am 1. Juli 1646 in Leipzig und gestorben am 14. November 1716 in Hannover, war ein deutscher Philosoph, Mathematiker, Physiker, Ingenieur, promovierter Jurist, Historiker, Bibliothekar und politischer Berater der frühen Aufklärung. Leibniz war der universale Geist seiner Zeit und (zusammen mit Newton) der Erfinder der Infinitesimalrechnung. Er gilt als einer der „größten Denker aller Zeiten“ sowie einer der wichtigsten Vordenker der Aufklärung. Diderot bemerkte in seiner Encyclopédie zu Leibniz' vielseitiger und sublimer Gedankenwelt: „Wenn man auf sich zurückkehrt, und die Talente, die man empfangt, mit denen eines Leibniz vergleicht, wird man versucht, die Bücher von sich zu werfen und in irgend einem versteckten Weltwinkel friedlich zu sterben“. Das Gemälde zur Rechten zeigt Leibniz um 1700 im Alter von 54 Jahren.



Beweis von Proposition 3.49. Wir betrachten die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} > s_{2n-1}$, so dass durch

$$I_n := [s_{2n-1}, s_{2n}]$$

ein reelles Intervall von Länge $|I_n| = a_{2n}$ gegeben ist. Da die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge ist, gibt es daher für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \varepsilon$. Da die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist, gelten zudem

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq s_{2n-1} && \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ s_{2n+2} &= s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n-1} && \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Inklusion $I_{n+1} \subseteq I_n$ gilt. Wir erhalten so eine Intervallschachtelung, so dass es nach dem Prinzip der Intervallschachtelung 3.20 ein eindeutig bestimmtes $s \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$$

gibt. Hieraus folgt die Konvergenz von $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und also die der alternierenden Reihe. $\square$

Beispiel 3.50. Die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium 3.49.

3.6 Absolute Konvergenz

Definition 3.51. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkung 3.52. Absolute Konvergenz impliziert gewöhnliche Konvergenz, denn: Das sieht man mit der iterativ aus der Dreiecksungleichung hergeleiteten Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n}^m |a_k| \quad \text{für alle } n \leq m \quad (3.3)$$

und dem Cauchy-Kriterium 3.45, angewandt sowohl für die ursprüngliche Reihe als auch die Reihe der Beträge. $\#$

⚠ Die andere Implikation gilt nicht! So ist die nach Beispiel 3.50 konvergente alternierende harmonische Reihe nach Beispiel 3.47 (a) nicht absolut konvergent.

Ein Vorteil der absoluten Konvergenz ist, dass sich diese mit einer Vielzahl von Kriterien nachweisen lässt:

Proposition 3.53 (Majorantenkriterium). Sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $b_n \in \mathbb{C}$ absolut konvergent und sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ eine weitere Reihe. Gilt dann $|a_n| \leq |b_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. In diesem Kontext nennt man $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die **Majorante**.

Beweis. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n}^m |a_k| \leq \sum_{k=n}^m |b_k| \quad \text{für alle } m \geq n \geq n_0.$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Cauchy-Kriterium 3.45. □

Von d'Alembert stammt das folgende Konvergenzkriterium:

Proposition 3.54 (Quotientenkriterium). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) Gibt es ein $q \in (0, 1)$ mit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(b) Gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, geboren am 16. November 1717 in Paris und gestorben am 29. Oktober 1783 ebenda, war ein französischer Mathematiker, Physiker und ein Philosoph der Aufklärung. D'Alembert arbeitete auf dem Gebiet der Funktionentheorie, löste 1747 die heute nach ihm benannte (eindimensionale) Wellengleichung der schwingenden Saite und wurde so der Begründer der mathematischen Kontinuumsphysik. Das Bild zur Rechten zeigt ihn 1753, im Alter von 46 Jahren.



Beweis. Beim Beweis beider Behauptungen können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass die jeweilige Voraussetzung für alle – und nicht nur fast alle – $n \in \mathbb{N}$ gilt und auch jeweils alle a_n ungleich Null sind.

Beim Beweis von Behauptung (a) folgt dann aus der Voraussetzung induktiv

$$|a_{n+1}| \leq |a_1| \cdot q^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| q^{n-1} = |a_1| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

eine Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist. Da diese wegen $q < 1$ und Beispiel 3.47 (b) konvergiert, folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und somit Behauptung (a) mit dem Majorantenkriterium 3.53.

Beim Beweis von Behauptung (b) folgt aus der Voraussetzung induktiv

$$|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq \dots \geq |a_1| > 0.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar mit dem notwendigen Konvergenzkriterium 3.46. $\square$

Bemerkung 3.55. Die Voraussetzung

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

in Proposition 3.54 (a) kann nicht abgeschwächt werden,

denn: Für die nach Beispiel 3.47 (a) divergente harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

aber es existiert kein $q \in (0, 1)$ mit $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$. #

Andererseits ist das Kriterium nur hinreichend, aber nicht notwendig,

denn: Analog zur Argumentation oben gilt für die nach Beispiel 3.47 (c) konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zwar

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

aber es existiert kein $q \in (0, 1)$ mit $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$. #

Beispiel 3.56. Für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, deren Spezialfall $e = e^1$ wir bereits in Beispiel 3.18 kennengelernt haben, absolut,

denn: Nach dem Archimedischen Prinzip 2.43 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > |z|$. Es folgt

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1} < \frac{n_0}{n_0+1} < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Die Behauptung folgt nun mit dem Quotientenkriterium 3.54. #

Die so entstehende Funktion $z \mapsto e^z$ heißt die **Exponentialfunktion**. Wir werden sie in Abschnitt ?? genauer untersuchen.

Ganz ähnlich wie das Quotientenkriterium 3.54 zeigt man das folgende, zuerst von Cauchy entdeckte, Kriterium (Übung!):

Proposition 3.57 (Wurzelkriterium). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ eine Reihe. Dann gilt:

(a) Gibt es ein $q \in (0, 1)$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(b) Gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{für unendlich viele } n \in \mathbb{N},$$

so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Eine wichtige Qualität absoluter Konvergenz ist, dass diese unter Änderungen der Summationsreihenfolge stabil bleibt, genauer:

Definition 3.58. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ eine Reihe und $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine **Umordnung** von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 3.59 (Umordnungssatz). Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ konvergiert wieder absolut und nimmt denselben Wert wie die ursprüngliche Reihe an.

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ mit einer Bijektion $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine ihrer Umordnungen. Da dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, existiert nach dem Cauchy-Kriterium 3.45 für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{n_0+1}| + \dots + |a_{n_0+p}| < \varepsilon \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Trivialerweise gibt es dann ein $k_0 \geq n_0$ mit

$$\{1, \dots, n_0\} \subseteq \{\sigma(1), \dots, \sigma(k_0)\}.$$

Ist daher $k \geq k_0$, so treten die Zahlen $a_1, \dots, a_{n_0}$ sowohl in der Summe $\sum_{n=1}^k a_n$ als auch in der Summe $\sum_{n=1}^k a_{\sigma(n)}$ auf und somit nicht mehr in deren Differenz. Es ist also

$$\sum_{n=1}^k a_n - \sum_{n=1}^k a_{\sigma(n)} = \delta_{n_0+1} a_{n_0+1} + \delta_{n_0+2} a_{n_0+2} + \dots + \delta_{n_0+p} a_{n_0+p}$$

mit einem $p \in \mathbb{N}$ und geeigneten Vorfaktoren $\delta_{n_0+1}, \dots, \delta_{n_0+p} \in \{-1, 0, +1\}$. Es folgt

$$\left| \sum_{n=1}^k a_n - \sum_{n=1}^k a_{\sigma(n)} \right| \leq |a_{n_0+1}| + \dots + |a_{n_0+p}| \stackrel{(3.4)}{<} \varepsilon,$$

so dass die Differenzen der Partialsummen eine Nullfolge bilden. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{\sigma(n)})$ konvergiert daher und nimmt den Wert 0 an. Da nach Voraussetzung auch die ursprüngliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, folgt die Konvergenz der Umordnung bei selbem Grenzwert aus Lemma 3.9 (b). $\square$

Exkurs

Dieser Abschnitt wird in der Vorlesung nicht behandelt und ist nicht prüfungsrelevant.

▲ Für Reihen, die konvergieren, aber nicht absolut konvergieren, stimmt das nicht,

denn: Betrachten wir die alternierende harmonische Reihe aus Beispiel 3.50. Diese konvergiert und ihre Glieder bilden nach dem notwendigen Konvergenzkriterium 3.46 eine Nullfolge. Die Teilreihen ihrer positiven bzw. negativen Glieder divergieren allerdings gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ gerade}}}^n \frac{(-1)^k}{k} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k} \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^n \frac{(-1)^k}{k} &= -1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2 \cdot \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} \\ &< -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{2 \cdot \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{1}{k} \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty. \end{aligned}$$

Dies können wir nutzen, um für jeden möglichen Reihenwert $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe zu finden, die diesen Wert annimmt! Für ein $s \in \mathbb{R}$ addieren wir dazu zunächst der Reihe nach so viele positive Reihenglieder auf, dass der Wert der Partialsumme größer als s ist, dann so viele negative Glieder, dass der Wert der Partialsumme wieder kleiner als s ist, und so fort. Da so alle Reihenglieder jeweils genau einmal zum Einsatz kommen, ist dies eine Umordnung, und da wir nach und nach die betragsgrößten Reihenglieder einsetzen, konvergiert diese tatsächlich gegen s . Im Beispiel $s = 0$ erhalten wir so:

$$\frac{1}{2} - 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} \right) - \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{22} + \frac{1}{24} \right) - \dots$$

#

Mitmachaufgabe 3.60. Wie erhält man eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe, die gegen $+\infty$ divergiert?

Lösung.

□

Wir wenden uns nun der Multiplikation unendlicher Reihen zu und stoßen auf das Problem,

dass es beim „Ausmultiplizieren“ in dieser Situation keine kanonische Additionsreihenfolge gibt: Je nachdem, in welcher Reihenfolge wir die entstehenden Produkte $a_n b_m$ aufaddieren, erhalten wir eine andere unendliche **Produktreihe**, wobei offensichtlich alle Produktreihen Umordnungen voneinander sind. Da konvergente Reihen ihre Werte durch Umordnen ändern können und sich in diesem Fall ein Produkt von Reihen nicht wohldefiniert angeben ließe, beschränken wir uns auf absolut konvergente Reihen, wo wir im Lichte des Umordnungssatzes 3.59 hoffen, dieses Problem nicht zu haben:

Satz 3.61. *Sind zwei komplexe Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, so konvergiert jede ihrer Produktreihen absolut gegen das Produkt $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$.*

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ eine beliebige Produktreihe bezüglich der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Für ein beliebiges $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |p_1| + \dots + |p_{k_0}| &\leq (|a_1| + \dots + |a_{\ell_0}|) \cdot (|b_1| + \dots + |b_{\ell_0}|) \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \right) < \infty. \end{aligned}$$

Es folgt, dass die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |p_n|$ monoton wachsend und beschränkt ist und somit nach Satz 3.17 konvergiert. Unsere Produktreihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ist also absolut konvergent. Nach dem Umordnungssatz 3.59 sind somit *alle* Produktreihen bezüglich der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und konvergieren gegen denselben Grenzwert. Es verbleibt zu zeigen, dass dieser Grenzwert durch das Produkt $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$ gegeben ist. Hierfür reicht es nach dem bisher Bewiesenen aus zu zeigen, dass eine *spezielle* Produktreihe diesen Wert als Grenzwert annimmt. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ mit

$$\begin{aligned} p_1 &:= 0, \\ p_n &:= a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 \quad \text{für alle } n \geq 2. \end{aligned}$$

Dann strebt

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in der Tat gegen das behauptete Produkt und wir haben den Satz gezeigt. $\square$

▲ Da in der Situation von Satz 3.61 *jede* Produktreihe zur Berechnung des Produkts der Reihenwerte herangezogen werden kann, bietet es sich an, das besonders übersichtliche **Cauchy-Produkt**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1)$$

einzusetzen.

3.7 Die g -adischen Darstellungen der reellen Zahlen

Wie bereits in Kapitel 2 angekündigt, sind wir nun in der Lage, die Dezimaldarstellung der reellen Zahlen sauber herzuleiten. Da es kaum zusätzlichen Aufwand bedeutet, gehen wir etwas allgemeiner vor und behandeln Darstellungen zu anderen Basen, wie etwa die Binärdarstellung, gleich mit. Sei dafür in diesem Abschnitt $g \geq 2$ stets eine feste natürliche Zahl und

$$S_g := \{0, 1, \dots, g-1\}$$

ein Vertretersystem aller Reste bei Division durch g . Dann gilt:

Proposition 3.62. *Jedes $n \in \mathbb{N}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form*

$$n = \sum_{k=0}^r a_k g^k \quad \text{mit } a_0, \dots, a_r \in S_g \text{ und } a_r \neq 0.$$

*Diese heißt die g -adische Darstellung von n , die a_k ihre **Ziffern** und $1+r$ ihre **Stellenzahl**. Die Zahl g , nach der entwickelt wird, heißt die **Basis** der Darstellung. Weiter heißen*

$$\sum_{k=0}^r a_k \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=0}^r (-1)^k a_k$$

die g -adische Quersumme bzw. die alternierende g -adische Quersumme von n .

Beweis. Um die Existenz einer g -adischen Darstellung für n zu zeigen, setzen wir zunächst $v_0 := n$ und gehen dann schrittweise vor: Sei $j \in \mathbb{N}_0$ und seien $v_0, \dots, v_j$ und $a_0, \dots, a_{j-1}$ mit

$$v_i = v_{i+1} \cdot g + a_i \quad \text{und} \quad 0 \leq a_i < g \leq v_i \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, j-1\} \quad (3.5)$$

gegeben. Dann gilt

$$\frac{v_i}{g} \geq v_{i+1} > 0 \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, j-1\}$$

und also

$$v_0 \cdot g^{-j} \geq v_1 \cdot g^{1-j} \geq \dots \geq v_j > 0.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: $v_j \geq g$. Dann führen wir mit v_j eine Division mit Rest durch g durch und erhalten (3.5) für $i = j$ mit ganzen Zahlen v_{j+1} und a_j .

Fall 2: $v_j < g$. Dann setzen wir $a_j := v_j$ und hören auf; in diesem Fall ist $0 < a_j < g$.

Wegen $v_0 \cdot g^{-j} \geq v_j$ gibt es stets ein j , für das Fall 2 eintritt, denn für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt $g^j \geq 2^j \geq j+1 > n$ für jedes $j \geq n$. Sei dies nach genau r Schritten der Fall. Dann gilt (3.5) für $i \in \{0, \dots, r-1\}$ und $0 < a_r := v_r < g$. Induktiv erhalten wir

$$v_0 = v_j \cdot g^j + \sum_{i=0}^{j-1} a_i g^i \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, r\}$$

und somit die Existenz einer g -adischen Darstellung für n . Insbesondere haben die Koeffizienten a_i die behaupteten Eigenschaften.

Zum Beweis der Eindeutigkeit der g -adischen Darstellung beachten wir, dass sich wegen $g^r \leq n < g^{r+1}$ die Stellenzahl der g -adischen Entwicklung eindeutig aus n ablesen lässt. Seien nun

$$\sum_{k=0}^r a_k g^k = n = \sum_{k=0}^r \tilde{a}_k g^k$$

zwei g -adische Darstellungen von n . Dann folgt

$$\sum_{k=0}^r (a_k - \tilde{a}_k) g^k = 0 \quad (3.6)$$

und insbesondere teilt g den 0-ten Summanden $a_0 - \tilde{a}_0$. Wegen $a_0, \tilde{a}_0 \in S_g$ impliziert das bereits $a_0 = \tilde{a}_0$. Berücksichtigen wir dies in (3.6), so erhalten wir, dass g^2 den 1-ten Summanden $(a_1 - \tilde{a}_1) \cdot g$ teilt, und schließen analog auf $a_1 = \tilde{a}_1$. Induktiv folgt $a_k = \tilde{a}_k$ für alle $k \in \{0, \dots, r\}$. $\square$

Proposition 3.63 (Teilbarkeitsregeln). *Für eine beliebige natürliche Zahl n mit g -adischer Darstellung $n = \sum_{i=0}^r a_i g^i$ gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Ein beliebiger Teiler d von $g - 1$ teilt n genau dann, wenn d die g -adische Quersumme von n teilt.*
- (b) *Ein beliebiger Teiler d von g teilt n genau dann, wenn d die Ziffer a_0 teilt.*
- (c) *Ein beliebiger Teiler d von $g + 1$ teilt n genau dann, wenn d die alternierende g -adische Quersumme von n teilt.*

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus

$$\begin{aligned} n &= \sum_{k=0}^r a_k ((g-1) + 1)^k = \sum_{k=0}^r a_k + (g-1) \cdot \mathbb{Z}, \\ n &= \sum_{k=0}^r a_k g^k = a_0 + g \cdot \mathbb{Z}, \\ n &= \sum_{k=0}^r a_k ((g+1) - 1)^k = \sum_{k=0}^r (-1)^k a_k + (g+1) \cdot \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 3.64. *Als Spezialfälle dieses Ergebnisses sind die Teilbarkeitsregeln durch 2, 3, 5, 9 und 11 in der Dezimaldarstellung bereits aus der Schule bekannt.*

Unser Ziel ist nun, die g -adische Darstellung der natürlichen Zahlen zu einer g -adischen Entwicklung der reellen Zahlen fortzusetzen. Dafür müssen wir bestimmte unendliche Reihen kontrollieren:

Lemma 3.65. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei ein $a_{-n} \in S_g$ gegeben. Dann konvergiert die unendliche Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n g^n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} g^{-n}$$

absolut gegen ein $s \in [0, 1]$.

Beweis. Die gegebene Reihe hat die Majorante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g-1)g^{-n} = (g-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (g^{-1})^n,$$

die aufgrund von $g^{-1} < 1$ und Beispiel 3.47 (b) (absolut) gegen

$$(g-1) \cdot \left(\frac{1}{1-g^{-1}} - 1 \right) = (g-1) \cdot \frac{g-(g-1)}{g-1} = 1$$

konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium 3.53 konvergiert dann auch die gegebene Reihe absolut. Da ihre Glieder nichtnegativ sind, nimmt sie nach Lemma 3.12 einen Wert in $[0, 1]$ an. $\square$

Satz 3.66. Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}^+$ hat eine eindeutige und nach Lemma 3.65 wohldefinierte Darstellung der Form

$$x = \sum_{k=-\infty}^r a_k g^k := \sum_{k=0}^r a_k g^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k g^k$$

mit einem $r \in \mathbb{N}_0$ und $a_k \in S_g$ für alle $k \in \{r, r-1, \dots\}$, $a_k \neq g-1$ für unendlich viele k und $x > 1 \implies a_r \neq 0$ sowie $0 \leq x < 1 \implies (r=0 \text{ und } a_0=0)$. Diese heißt die **g -adische Entwicklung** von x und die a_k ihre **Ziffern**. Wir schreiben einfacher

$$x = [a_r \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots]_g$$

und lassen im Fall $g = 10$ Klammern und Index weg.

Durch die g -adische Entwicklung erhalten wir in Zusammenspiel mit Lemma 3.65 eine Bijektion zwischen den positiven reellen Zahlen und der Menge aller unendlichen Reihen von dem angegebenen Typ, die sich durch Angabe eines Vorzeichens leicht auf die kompletten reellen Zahlen ausdehnen lässt.

Beweis. Ist $x \geq 1$, so besitzt $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ nach Proposition 3.62 eine eindeutige g -adische Darstellung

$$\lfloor x \rfloor = \sum_{k=0}^r a_k g^k \quad \text{mit } a_0, \dots, a_r \in S_g \text{ und } a_r \neq 0.$$

Wir können daher für den Rest des Beweises $x - \lfloor x \rfloor$ statt x betrachten und also ohne Einschränkung $0 \leq x < 1$ annehmen.

Zum Beweis der Existenz einer g -adischen Entwicklung setzen wir nun

$$x_1 := x, \quad a_{-k} := \lfloor x_k g \rfloor \quad \text{und} \quad x_{k+1} := x_k \cdot g - \lfloor x_k g \rfloor \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Konstruktionsgemäß ist dann $0 \leq x_k < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zudem gilt

$$x_k \cdot g = a_{-k} + x_{k+1}, \quad \text{also} \quad x_k = a_{-k} \cdot g^{-1} + x_{k+1} \cdot g^{-1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und somit rekursiv

$$x_k = \sum_{j=k}^{k+\ell-1} a_{-j} g^{k-j-1} + x_{k+\ell} \cdot g^{-\ell} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Es gibt hierbei unendlich viele a_{-j} ungleich $g - 1$,

denn: Gäbe es nun ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_{-j} = g - 1$ für alle $j \geq k$, so erhielten wir für $\ell \rightarrow \infty$ nach Beispiel 3.47 (b)

$$x_k = (g - 1) \cdot \sum_{j=k}^{\infty} g^{k-j-1} = (g - 1) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} g^{-j} = 1,$$

was wir bereits ausgeschlossen hatten.⁴

#

Eine g -adische Entwicklung von x erhalten wir schließlich, indem wir in der obigen Formel $k = 1$ setzen und ℓ gegen unendlich gehen lassen – hierfür bemerken wir, dass aufgrund von $0 \leq x_k < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ offensichtlich $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{1+\ell} g^{-\ell} = 0$ gilt.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit. Da wir im Existenzbeweis gesehen haben, dass der Nachkommaanteil einer jeden g -adischen Entwicklung in $(0, 1)$ liegt, ist der zugehörige Vorkommaanteil stets durch $\lfloor x \rfloor$ gegeben und wir können im Weiteren ohne Einschränkung $x \in [0, 1)$ annehmen. Seien nun

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} g^{-k} = x = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_{-k} g^{-k} \quad (3.7)$$

zwei g -adische Entwicklungen von x . Wir nehmen an, es gäbe Zahlen $k \in \mathbb{N}$ mit $a_{-k} \neq \tilde{a}_{-k}$ und wählen j als die kleinste dieser Zahlen. Mit dieser Wahl folgte

$$1 \leq |a_{-j} - \tilde{a}_{-j}| \stackrel{(3.7)}{=} \left| \sum_{k>j} (a_{-k} - \tilde{a}_{-k}) g^{j-k} \right| \leq \sum_{k>j} |a_{-k} - \tilde{a}_{-k}| g^{j-k} \leq (g - 1) \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} g^{-\ell} = 1,$$

⁴An dieser Stelle löst sich auch das schulische Mysterium über die Dezimaldarstellung $0, \bar{9}$ auf: Würden wir diese zulassen, hätte sie in der Tat den Wert 1.

wobei die für die zweite Abschätzung verwendete Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung auf unendliche Reihen aus dem endlichen Fall (3.3) und Lemma 3.12 folgt und ein nützliches Werkzeug ist. Da in dieser Ungleichungskette alle Abschätzungen nach oben bereits Gleichheiten sein müssten, hätten dann insbesondere alle Terme der Form $a_{-k} - \tilde{a}_{-k}$ mit $k > j$ dasselbe Vorzeichen und erfüllten $|a_{-k} - \tilde{a}_{-k}| = g - 1$. Wegen $a_{-k}, \tilde{a}_{-k} \in S_g$ wäre dies nur in einem von zwei Szenarien möglich: Entweder gälten

$$a_{-k} = 0 \text{ und } \tilde{a}_{-k} = g - 1 \quad \text{für alle } k > j,$$

oder

$$a_{-k} = g - 1 \text{ und } \tilde{a}_{-k} = 0 \quad \text{für alle } k > j.$$

In beiden Fällen gäbe es eine g -adische Entwicklung von x mit nur endlich vielen von $g - 1$ verschiedenen Ziffern, was nicht sein kann. Je zwei g -adischen Entwicklungen von x stimmen also überein. Es folgt die Eindeutigkeit. $\square$

Bemerkung 3.67. Um für eine reelle Zahl x in einem gegebenen Intervall $(a, b]$ rekursiv ihre g -adische Entwicklung – beziehungsweise Näherungen davon – zu bestimmen, können wir das Prinzip der Intervallschachtelung 3.20 einsetzen: Das Intervall $(a, b]$ lässt sich disjunkt in die g gleichlangen Teilintervalle

$$\left(a, a + \frac{b-a}{g}\right], \left(a + \frac{b-a}{g}, a + \frac{2(b-a)}{g}\right], \dots, \left(a + \frac{(g-1)(b-a)}{g}, b\right]$$

zerlegen und x liegt in genau einem von diesen. Das bedeutet, dass es eine Ziffer $a_{-1} \in S_g$ gibt mit

$$a_{-1} \cdot g^{-1} < x \leq (a_{-1} + 1) \cdot g^{-1}.$$

Wir können nun das Intervall

$$\left(a + \frac{a_{-1}(b-a)}{g}, a + \frac{(a_{-1} + 1)(b-a)}{g}\right]$$

disjunkt in g gleichlange Teilintervalle zerlegen und erhalten so die nächste Ziffer a_{-2} der g -adischen Entwicklung von x . Fahren wir fort, so erhalten wir – indem wir die zugehörigen abgeschlossenen Intervalle betrachten – eine Intervallschachtelung, deren Intervalle nach Konstruktion allesamt x enthalten. Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung 3.20 konvergieren die Folgen der zugehörigen Intervallgrenzen gegen x . Diese liefern die g -adische Entwicklung von x .

Als Anschauungsbeispiel führen wir eine rekursive Näherungsberechnung der Dezimaldarstellung von $x := \sqrt{2}$ durch und nutzen hierfür die in dieser Vorlesung noch nicht bewiesene Monotonie der Quadratwurzelfunktion aus. Diese Zahl ist durch $x^2 = 2$ und $x > 0$ beschrieben. Aufgrund von

$$1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$$

gilt zunächst $x \in (1, 2]$. Nun unterteilen wir $(1, 2]$ disjunkt in die zehn gleichlangen Teilintervalle

$$\left(1, \frac{11}{10}\right], \left(\frac{11}{10}, \frac{12}{10}\right], \dots, \left(\frac{19}{10}, 2\right]$$

und quadrieren deren Grenzen. Wir erhalten

$$(1,4)^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = (1,5)^2$$

und somit $x \in (14/10, 15/10]$. Disjunktes Unterteilen in zehn gleichlange Teilintervalle liefert

$$\left(\frac{14}{10}, \frac{141}{100}\right], \left(\frac{141}{100}, \frac{142}{100}\right], \dots, \left(\frac{149}{100}, \frac{15}{10}\right].$$

Quadrieren wir die Grenzen, so stellen wir fest, dass

$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = (1,42)^2$$

gilt und erhalten $x \in (141/100, 142/100]$ und somit die Näherung $x = 1,41 \dots$ der Dezimaldarstellung von $x = \sqrt{2}$.

Es ist möglich, der g-adischen Entwicklung einer reellen Zahl anzusehen, ob diese bereits rational ist. Das zeigen wir jetzt:

Definition 3.68. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt **periodisch**, wenn es ein $p \in \mathbb{N}$ und ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit

$$a_{p+n} = a_n \quad \text{für alle } n > \ell$$

gibt. Das minimal mögliche p hierbei heißt die **Periodenlänge** der Folge. Hat die Folge Periodenlänge p , so heißt das minimale ℓ , das die obige Gleichung mit p erfüllt, die **Vorperiodenlänge** der Folge.

Proposition 3.69. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}^+$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) $x \in \mathbb{Q}^+$.
- (ii) Die Ziffernfolge der g-adischen Entwicklung von x ist periodisch.

Beweis. Gelte zunächst Aussage (i) und also $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Die Ziffern der g-adischen Entwicklung von x sind dann wie im Beweis von Satz 3.66 durch

$$x_1 := \frac{p}{q} - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor, \quad a_{-k} := \lfloor x_k g \rfloor \quad \text{und} \quad x_{k+1} := x_k \cdot g - \lfloor x_k g \rfloor \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

rekursiv zu ermitteln. Setzen wir nun noch $q_k := x_k \cdot q$, so folgt aus dem Obigen leicht $q_k \in S_q$. Nach dem Schubfachprinzip 2.47 gibt es daher ganze $0 \leq r < s$ mit $q_r = q_s$ und also auch mit $x_r = x_s$. Die Proposition folgt, da sich hieraus mit der Rekursionsformel $x_{r+n} = x_{s+n}$ und somit auch $a_{-(r+n)} = a_{-(s+n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt. Das ist Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii) und sei die g-adische Entwicklung von x durch $x =$

$\sum_{k=-\infty}^r a_k g^k$ mit einem $r \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Dann gibt es $\ell, p \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} x - \lfloor x \rfloor &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} g^{-k} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{-k} g^{-k} + g^{-\ell} \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} g^{-jp} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^p a_{-(k+\ell)} g^{-k} \right) \\ &\stackrel{3.47(b)}{=} \frac{1}{g^{\ell}(g^p - 1)} \cdot \left((g^p - 1) \cdot \sum_{k=1}^{\ell} a_{-k} g^{\ell-k} + \sum_{k=1}^p a_{-(k+\ell)} g^{p-k} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Es folgt die Rationalität von $x - \lfloor x \rfloor$ und somit auch die von x selbst. $\square$

Die Rückrichtung des obigen Beweises ist konstruktiv und gibt uns mithin eine Methode, eine beliebige periodische g -adische Entwicklung in einen Bruch umzuwandeln.

Beispiel 3.70. *Starten wir mit der Dezimaldarstellung*

$$1,23\overline{45},$$

so ist die Periodenlänge $p = 2$, die Vorperiodenlänge $\ell = 2$ und wir erhalten nach (3.8) den Bruch

$$\begin{aligned} 1,23\overline{45} &= 1 + \frac{1}{10^2(10^2 - 1)} \cdot \left((10^2 - 1) \cdot (2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) + (4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0) \right) \\ &= \frac{9900 + (99 \cdot 23) + 45}{9900} = \frac{12222}{9900} = \frac{679}{550}. \end{aligned}$$

3.8 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Als Coach im Help-Desk verfolgen Sie die folgende Situation: Aaron hat die in Definition 3.1 eingeführte Folgenkonvergenz noch nicht ganz verstanden und fragt andere Studierende um Hilfe. Julia und Lilly aus Aarons Zettelgruppe versuchen ihm *im etwas zugänglicheren Fall einer reellen Folge* zu erklären, wie sie diesen verstanden haben.

Julia: Ich stelle mir das vor, wie wenn wir in der Schule das Verhalten von Funktionen im Unendlichen betrachtet haben und die waagerechte Asymptote bestimmt haben. Jetzt haben wir eben Folgen statt Funktionen. Ich stelle mir da oft vor, dass man im Graphen die Folgenglieder der Folge verbindet, dann sieht es wieder aus, wie eine Funktion aus der Schule.

(a) Zunächst rekapitulieren Sie, was Sie in der Schule über waagerechte Asymptoten gelernt haben. Dafür ...

- ... skizzieren Sie beispielhaft den Graphen einer Funktion $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit waagerechter Asymptote und erläutern Sie das Verhalten für große Argumente.
- ... beschreiben Sie anschaulich, was es bedeutet, dass eine Funktion eine waagerechte Asymptote hat.

(b) Nun setzen Sie Ihre bisherigen Vorstellungen in Beziehung zu den hochschulmathematischen Konzepten und betrachten mögliche Anknüpfungspunkte. Dafür ...

- ... zeichnen Sie zunächst geeignete Ausschnitte der Graphen der Folgen:
 - $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \frac{1}{n}$.
 - $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$
 - $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- ... analysieren Sie, welche Verhaltensweisen bei Folgen auftreten können, die bei den in der Schule an dieser Stelle typischerweise behandelten Funktionen nicht vorkommen oder dort nicht betrachtet werden.
- ... reflektieren Sie, welche Ihrer schulischen Vorstellungen aus (a) bei den jeweiligen Folgen weiterhin richtig sind und an welchen Stellen diese an ihre Grenzen stoßen
- ... untersuchen Sie, wie Julias Vorschlag, die Folgenglieder zur Veranschaulichung stetig miteinander zu verbinden, Probleme machen oder aber auch helfen kann.

Aaron: Ah okay, jetzt kann ich mir das schon besser vorstellen. Aber die formale Definition kann ich irgendwie immer noch nicht greifen ...

Julia: Die Definition bedeutet „Kommt eine Folge einer Zahl immer näher, so ist diese Zahl der Grenzwert der Folge.“

Lilly: Ich merke mir das immer so: „Ein Grenzwert einer Folge ist die Zahl, in deren beliebig kleiner Nähe unendlich viele Folgenglieder liegen.“

(c) Jetzt analysieren Sie den Begriff des Folgengrenzwerts unter den Gesichtspunkten der Hochschulmathematik. Prüfen Sie dafür die Interpretationen der Definition von Julia und Lilly.⁵ Dafür ...

- ... formalisieren Sie zunächst die Aussagen von Julia und Lilly, indem Sie sie in Quantorenschreibweise übersetzen.
- ... benennen Sie, wo genau die Fehler in den jeweiligen Interpretationen liegen, und geben je ein Gegenbeispiel an.
- ... arbeiten Sie die fachliche Unschärfe der häufig auch in der Schule verwendeten Formulierung „immer näher kommen“ in Julias Aussage heraus.

Aaron: Okay, ich glaube, ich hab's jetzt verstanden! Das ist wie beim Sandwich-Lemma 3.13: Wenn ich eine Funktion mit waagerechter Asymptote habe und diese Funktion dann wiederum an ihrer waagerechten Asymptote spiegele, entsteht eine Art Trichter. Verläuft eine Folge innerhalb eines solchen Trichters, ist sie konvergent. Dort ist es dann egal, wie sie sich verhält, solange kein Folgenglied wieder außerhalb liegt.

(d) Zuletzt fassen Sie Ihre erarbeiteten Erkenntnisse zusammen und formulieren einen Kommentar an die Zettelgruppe von Aaron, Julia und Lilly. Dafür ...

⁵Diese Teilaufgabe folgt der Vorlage von Weber, Birke-Johanna (2022): *Sammlung von „Lehramtsaufgaben“ für die Analysis*. Unveröffentlichtes Manuskript, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel; dort wiederum adaptiert nach Prediger, Susanne (2013): *Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. Ein Ansatz zur Stärkung der mathematischen Fundierung unterrichtlichen Handelns*. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 151-168). Wiesbaden: Springer Spektrum.

- ... erklären Sie in eigenen Worten, wie Aarons Idee zu verstehen ist und bewerten Sie seine Vorstellung.
- ... zeigen Sie zusammenfassend auf, welche der Vorstellungen der drei bereits richtig und hilfreich für das Verstehen des Folgengrenzwerts sind und wo Fehler oder Ungenauigkeiten liegen.

Stetige Funktionen und die Topologie des $\mathbb{R}^d$

Die Natur ist voller Prozesse, die sich ohne plötzliche Sprünge vollziehen. Wenn eine Pflanze wächst, ein abgekühlter Kaffee sich erwärmt oder ein Auto beschleunigt, durchlaufen alle physikalischen Größen lückenlos jeden Zwischenwert. Der grundlegenden Eigenschaft, dass sich die Größe der Änderung der Ausgabewerte durch ausreichendes Beschränken der Änderung der Eingabewerte – wie etwa der Zeit – kontrollieren lässt, entspricht in der Mathematik das Konzept der *Stetigkeit*. Dieser lässt sich einerseits mit den in Kapitel 3 studierten Folgen in Verbindung bringen, andererseits auch mit der Topologie – also der Teilmengenstruktur – der beteiligten Eingabe- und Ausgabemengen.

4.1 Die euklidische Norm

In diesem Kapitel untersuchen wir den folgenden Typ von Funktionen auf Stetigkeit:

Definition 4.1. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere Teilmenge. Eine **reellwertige** bzw. **komplexwertige Funktion** auf D ist dann eine Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Für zwei Funktionen $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) definieren wir

$$\begin{aligned}(f \pm g)(x) &:= f(x) \pm g(x) & \forall x \in D, \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) & \forall x \in D\end{aligned}$$

und, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt, auch

$$\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D.$$

So erhalten wir weitere komplexwertige (oder reellwertige) Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$.

Um beschreiben zu können, wann sich Eingabewerte solcher Funktionen nur geringfügig ändern, benötigen wir einen Abstandsbegriff auf $\mathbb{R}^d$. In Analogie zum aus Definition 2.18 bekannten Absolutbetrag der komplexen Zahlen setzen wir:

Definition 4.2. Für ein $d \in \mathbb{N}$ ist die **euklidische Norm** eines Punktes $x = (x_1, \dots, x_d)$ in $\mathbb{R}^d$ durch

$$|x| := \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2}$$

und der **euklidische Abstand** zweier Punkte $x = (x_1, \dots, x_d)$ und $y = (y_1, \dots, y_d)$ in $\mathbb{R}^d$ durch

$$d(x, y) := |x - y| := \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2}$$

gegeben.

⚠ Offenbar stimmt der Absolutbetrag auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^2$ überein. Wir werden diese Identifikation künftig oft gebrauchen, ohne dies noch einmal eigens zu rechtfertigen.

Euklid von Alexandria, geboren ca. 350 v. Chr. und gestorben ca. 270 v. Chr., war ein griechischer Mathematiker. Er gilt als „Vater der Geometrie“ und ist Namensgeber für die euklidische Geometrie zur anschaulichen Darstellung des zwei- und dreidimensionalen Raums. In seinem berühmtesten Werk, den *Elementen*, trug er das Wissen der griechischen Mathematik seiner Zeit zusammen. Viele Sätze der Elemente stammen offenbar nicht von Euklid selbst. Seine Hauptleistung besteht vielmehr in der Sammlung und einheitlichen Darstellung des mathematischen Wissens sowie der strengen Beweisführung, die zum Vorbild für die spätere Mathematik wurde. Das von Joos van Wassenhove angefertigte Bild rechts ist aus dem Jahr 1474.



Genau wie beim Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ gilt auch hier offensichtlich wieder die **positive Definitheit**. Da in $\mathbb{R}^d$ keine Multiplikation definiert ist, lässt sich keine Multiplikativität zeigen, wohl aber die **Homogenität**

$$|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d$$

die sich unmittelbar einsehen lässt. Schwieriger ist die Dreiecksungleichung, für die wir einen Umweg einschlagen müssen:

Lemma 4.3. Für ein $d \in \mathbb{N}$ und $x = (x_1, \dots, x_d)$ sowie $y = (y_1, \dots, y_d)$ in $\mathbb{R}^d$ gelten:

- (a) Es gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung** $(\sum_{n=1}^d x_n y_n)^2 \leq (\sum_{n=1}^d x_n^2) \cdot (\sum_{n=1}^d y_n^2)$.
- (b) Es gilt die **Dreiecksungleichung** $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Karl Hermann Amandus Schwarz, geboren am 25. Januar 1843 in Hermsdorf (Schlesien) und gestorben am 30. November 1921 in Berlin, war ein deutscher Mathematiker. Schwarz beschäftigte sich insbesondere mit der Funktionentheorie und der Theorie der Minimalflächen. Besonders zu erwähnen sind seine Arbeiten zum Riemann'schen Abbildungssatz, zur Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Kreis und seine Arbeiten über die hypergeometrische Differentialgleichung. Das Foto zur Rechten zeigt ihn 1890, im Alter von 47 Jahren.



Beweis. Zunächst zeigen wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Im Fall $\sum_{n=1}^d y_n^2 = 0$ sind alle $y_n = 0$ und die Ungleichung stimmt trivialerweise. Ohne Einschränkung können wir also ab sofort $\sum_{n=1}^d y_n^2 > 0$ annehmen. Für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n=1}^d (x_n - \lambda y_n)^2 = \sum_{n=1}^d (x_n^2 - 2\lambda x_n y_n + \lambda^2 y_n^2) \\ &\leq \sum_{n=1}^d x_n^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \sum_{n=1}^d x_n y_n + \lambda^2 \cdot \sum_{n=1}^d y_n^2. \end{aligned}$$

Setzen wir nun speziell $\lambda = \frac{\sum_{n=1}^d x_n y_n}{\sum_{n=1}^d y_n^2}$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n=1}^d x_n^2 - 2 \cdot \frac{\sum_{n=1}^d x_n y_n}{\sum_{n=1}^d y_n^2} \cdot \sum_{n=1}^d x_n y_n + \left(\frac{\sum_{n=1}^d x_n y_n}{\sum_{n=1}^d y_n^2} \right)^2 \cdot \sum_{n=1}^d y_n^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^d x_n^2 - \frac{(\sum_{n=1}^d x_n y_n)^2}{\sum_{n=1}^d y_n^2} \end{aligned}$$

und somit Behauptung (a).

Nun zeigen wir die Dreiecksungleichung. Es gilt

$$|x + y|^2 = \sum_{n=1}^d (x_n + y_n)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^d x_n^2 + 2 \cdot \sum_{n=0}^d x_n y_n + \sum_{n=1}^d y_n^2 \\
&\stackrel{(a)}{\leq} |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2 \\
&= (|x| + |y|)^2.
\end{aligned}$$

Da beide Seiten nichtnegative reelle Zahlen sind, können wir die Wurzel ziehen und erhalten Behauptung (b). $\square$

Mit der nun eingeführten euklidischen Norm anstelle des Absolutbetrags lassen sich, aufbauend auf dem Vorgehen in Kapitel 3, die Konvergenz und Beschränktheit von Folgen in Teilmengen $D \subseteq \mathbb{R}^d$ erklären:

Definition 4.4. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$. Dann nennen wir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$

- ... **konvergent** mit **Grenzwert** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a \in \mathbb{R}^d$, falls die reelle Folge $(|a_n - a|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge im Sinne von Definition 3.1 ist,
- ... **divergent**, falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen kein $a \in \mathbb{R}^d$ konvergiert.

Lemma 4.5. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$. Für ein beliebiges $j \in \{1, \dots, d\}$ sei weiter

$$\pi_j: \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, \dots, x_d) & \mapsto x_j \end{cases}$$

die **Projektion** auf die j -te Komponente. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen ein $a \in \mathbb{R}^d$, wenn für alle $j \in \{1, \dots, d\}$ die Folgen $(\pi_j(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\pi_j(a)$ konvergieren.
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt, wenn für alle $j \in \{1, \dots, d\}$ die Folgen $(\pi_j(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt sind.

Beweis. Das verbleibt als eine Übung! $\square$

Korollar 4.6 (Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}^d$). Sei $d \in \mathbb{N}$. Dann besitzt jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ eine in $\mathbb{R}^d$ konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$. Aus der Beschränktheit von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt sich nach Lemma 4.5 (b) in der dortigen Notation insbesondere die Beschränktheit von $(\pi_1(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 3.29 besitzt diese also eine konvergente Teilfolge. Da Teilfolgen von Teilfolgen wieder Teilfolgen sind und Teilfolgen beschränkter Folgen wieder beschränkt sind, erhalten wir iterativ eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ derart, dass $(\pi_j(a_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ für alle $j \in \{1, \dots, d\}$ konvergiert, etwa gegen ein $x_k \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 4.5 (a) konvergiert die Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ so gegen $x := (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, was das Korollar zeigt. $\square$

4.2 Stetigkeit

Definition 4.7. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere Teilmenge. Dann heißt eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) **stetig in** $x_0 \in D$, falls gilt:

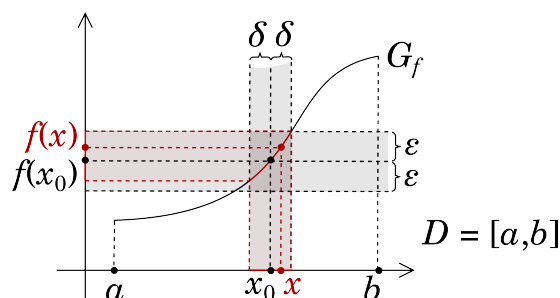
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Weiter heißt f **stetig in** D , falls f in jedem Punkt von D stetig ist. Wir schreiben

$$\mathcal{C}^0(D, \mathbb{C}) := \{f: D \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ stetig in } D\},$$

$$\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}) := \{f: D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig in } D\}.$$

▲ Ähnlich wie in Beispiel 3.2 (a) angemerkt, hängt der Wert δ im Allgemeinen von ε ab.



Unmittelbar aus Definition 4.7 folgt, dass die Einschränkung $f|_E$ einer in $D \subseteq \mathbb{R}^d$ stetigen Funktion f auf eine beliebige nichtleere Teilmenge $E \subseteq D$ stetig in E ist.

Beispiel 4.8. (a) Seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere Teilmenge. Dann ist für jedes $a \in \mathbb{C}$ die konstante Abbildung

$$f: \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{C}, \\ x & \mapsto a \end{cases}$$

stetig,

denn: Es gilt

$$\forall \varepsilon > 0: (|x - x_0| < 1 =: \delta) \implies (|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon).$$

#

(b) Die Identitäten $\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\text{id}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetig,

denn: Es gilt für ein $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0: (|x - x_0| < \varepsilon =: \delta) \implies (|\text{id}_{\mathbb{R}}(x) - \text{id}_{\mathbb{R}}(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon)$$

bzw. genauso für ein $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\forall \varepsilon > 0: (|z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |\text{id}_{\mathbb{C}}(z) - \text{id}_{\mathbb{C}}(z_0)| = |z - z_0| < \varepsilon).$$

#

(c) Die Gauß-Klammer $\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und unstetig in allen $x_0 \in \mathbb{Z}$,

denn: Seien zunächst $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt $\lfloor x_0 \rfloor < x_0 < \lfloor x_0 \rfloor + 1$ und es gibt ein $\delta > 0$ mit

$$\lfloor x_0 \rfloor < x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta < \lfloor x_0 \rfloor + 1,$$

da

$$0 < \delta < \min\{x_0 - \lfloor x_0 \rfloor, \lfloor x_0 \rfloor + 1 - x_0\}$$

erfüllbar ist. Mit dem jeweils passenden δ gilt für alle solchen x_0 also

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\lfloor x \rfloor - \lfloor x_0 \rfloor| = 0 < \varepsilon.$$

Die Gauß-Klammer ist also in allen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig.

Sei nun $x_0 \in \mathbb{Z}$ gegeben. Um die Unstetigkeit von $\lfloor \cdot \rfloor$ in x_0 nachzuweisen, müssen wir

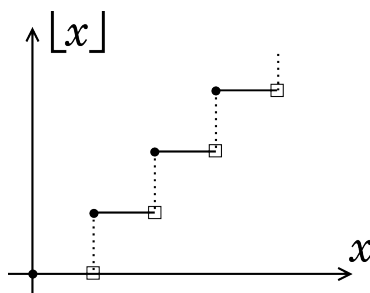
$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \delta \text{ und } |\lfloor x \rfloor - \lfloor x_0 \rfloor| \geq \varepsilon.$$

zeigen. Wir wählen $\varepsilon = 1$. Für ein beliebiges $\delta > 0$ gelten dann für $x := x_0 - \frac{\delta}{2}$ die Abschätzungen

$$|x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

$$|\lfloor x \rfloor - \lfloor x_0 \rfloor| \stackrel{x < x_0}{=} \lfloor x_0 \rfloor - \lfloor x \rfloor = x_0 - \lfloor x \rfloor \stackrel{x < x_0}{\geq} 1 = \varepsilon$$

und somit die Unstetigkeit der Gauß-Klammer in allen $x_0 \in \mathbb{Z}$.



#

⚠ Schränken wir $\lfloor \cdot \rfloor$ auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ein, erhalten wir nach dem Bisherigen eine stetige Funktion $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Stetigkeit hängt also vom Definitionsbereich ab und kann daher nicht einfach mit einer Regel wie „kann den Graphen zeichnen, ohne den Stift abzusetzen“ beschrieben werden. Mit der Idee einer solchen **Bleistiftstetigkeit** und den damit verbundenen Anschauungen setzen wir uns in den Übungsaufgaben 4.1 und 4.2 genauer auseinander.

Lemma 4.9 (Folgenkriterium für Stetigkeit). Seien $d \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere Teilmenge und $x_0 \in D$. Dann sind für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist stetig in x_0 ,
- (ii) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

▲ Wir können diese Eigenschaft kurz als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

schreiben und sagen: *Limesbildung und stetige Funktionen vertauschen.*

Beweis von Lemma 4.9. Gelte zunächst Aussage (i) und sei also f stetig in x_0 . Seien dann $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Funktion f ist stetig in x_0 und wir haben

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Da die Folge der x_n gegen x_0 konvergiert, gilt zudem

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: |x_n - x_0| < \delta.$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$\forall n \geq n_0: |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

und also $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$, wie behauptet. Das ist Aussage (ii).

Um die andere Implikation per Kontraposition zu zeigen, nehmen wir nun umgekehrt an, Aussage (i) gelte nicht, f sei also nicht stetig in x_0 . Dann gilt

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D: |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Wählen wir speziell $\delta = \frac{1}{n}$, so erhalten wir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in D: |x_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \text{ und } |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Die so gefundene Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x_0 , die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ aber nicht gegen $f(x_0)$. Aussage (ii) kann also nicht gelten. $\square$

Proposition 4.10. Seien $d \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere Teilmenge und $x_0 \in D$. Weiter seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in x_0 . Dann sind die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$ und, falls $g(x_0) \neq 0$, auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0 .

Beweis. Die Proposition folgt aus dem Folgenkriterium 4.9 und den Rechenregeln für konvergente Folgen 3.9. Wir führen hier exemplarisch nur den Beweis für die Stetigkeit von $f + g$ vor, wobei wir noch anmerken, dass der Nachweis der Stetigkeit von $\frac{f}{g}$ in x_0 als Vorüberlegung benötigt, dass die stetige Funktion g aufgrund ihrer Nullstellenfreiheit in x_0 in einer ganzen ε -Umgebung um x_0 nicht Null sein kann:

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} ((f + g)(x_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) \\ &\stackrel{3.9(b)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &= f(x_0) + g(x_0) \\ &= (f + g)(x_0). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $f + g$ folgt nun mit dem Folgenkriterium 4.9. □

Beispiel 4.11. (a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist die durch $z \mapsto z^n$ gegebene **Potenzfunktion** $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig,

denn: Das folgt unmittelbar aus Beispiel 4.8 (a) und (b) sowie Proposition 4.10. #

(b) Für alle $r \in \mathbb{N}_0$ und alle $a \in \mathbb{C}$ ist die durch $z \mapsto a \cdot z^r$ gegebene **Monomfunktion** $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig,

denn: Das folgt unmittelbar aus (a) und Proposition 4.10. #

Hierbei nennt man die Zahl r den **Grad** der Monomfunktion.

(c) Für alle $r \in \mathbb{N}_0$ und alle $(r + 1)$ -Tupel von Koeffizienten $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ ist die durch $z \mapsto \sum_{k=0}^r a_k z^k$ gegebene **Polynomfunktion** $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig,

denn: Das folgt unmittelbar aus (b) und Proposition 4.10. #

Hierbei nennt man die Zahl r den **Grad** der Polynomfunktion.

▲ Durch Einschränken auf die reellen Zahlen erhält man, dass auch die reellen Potenzfunktionen, Monomfunktionen und Polynomfunktionen stetig sind.

Proposition 4.12. Seien $d \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere Teilmenge und $x_0 \in D$. Weiter seien $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: E \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer Teilmenge $f(D) \subseteq E \subseteq \mathbb{C}$. Ist f stetig in x_0 und g stetig in $y_0 := f(x_0)$, so ist die Hintereinanderausführung $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in x_0 .

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Nach dem Folgenkriterium 4.9 gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) = y_0$$

aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 und, mit $y_n := f(x_n)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(y_0)$$

aufgrund der Stetigkeit von g in y_0 . Zusammengenommen erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$$

und nach dem Folgenkriterium somit die Stetigkeit von $g \circ f$. $\square$

Die folgende Verschärfung des Stetigkeitsbegriffs lässt sich manchmal leichter überprüfen und liefert so ein hinreichendes Kriterium für Stetigkeit:

Definition 4.13. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere Teilmenge. Dann heißt eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ **Lipschitz-stetig** mit **Lipschitz-Konstante** $L \geq 0$, falls gilt:

$$\forall x, y \in D: |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

▲ Die Lipschitz-Konstante L ist durch f nicht eindeutig bestimmt!

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, geboren am 14. Mai 1832 in Königsberg und gestorben am 7. Oktober 1903 in Bonn, war ein deutscher Mathematiker und Hochschullehrer. Er arbeitete auf fast allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik und wurde insbesondere durch sein Lehrbuch der Analysis bekannt. Heute noch von besonderer Bedeutung ist der von ihm entwickelte Begriff der Lipschitz-Stetigkeit. Er forschte auch auf dem Gebiet der Differentialformen und der Mechanik, insbesondere der Hamilton-Jacobi'schen Methode zur Lösung von Bewegungsgleichungen. Das Foto zur Rechten zeigt ihn 1885 im Alter von 53 Jahren.



Proposition 4.14. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere Teilmenge. Dann ist jede Lipschitz-stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ auch stetig.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, die Lipschitz-Konstante L der Lipschitz-stetigen Funktion f sei positiv. Zu gegebenen $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in D$ setzen wir dann $\delta := \frac{\varepsilon}{L} > 0$ und erhalten

$$\forall x \in D: (|x - x_0| < \delta) \implies (|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| < L \cdot \delta = \varepsilon).$$

Die Funktion f ist also auch stetig. $\square$

Beispiel 4.15. Die Funktionen $|\cdot|, \operatorname{Re}, \operatorname{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$,

denn: Für den Absolutbetrag $|\cdot|$ folgt dies unmittelbar aus der umgekehrten Dreiecksungleichung 2.20, für Real- und Imaginärteil aus dem elementargeometrischen Satz von Pythagoras:

$$|\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(w)|, |\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(w)| \leq |z - w|.$$

#

Nach Proposition 4.14 sind diese Funktionen dann auch stetig und nach den Propositionen 4.10 sowie 4.12 sind dann für jede stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit nichtleerem $D \subseteq \mathbb{R}^d$ die Funktionen

$$|f|, \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f): D \rightarrow \mathbb{R}$$

sowie

$$\bar{f}: \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \overline{f(x)} = \operatorname{Re}(f(x)) - i \cdot \operatorname{Im}(f(x)) \end{cases}$$

stetig.

Mitmachaufgabe 4.16. Gilt auch die Umkehrung von Proposition 4.14 und ist also jede stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ auch Lipschitz-stetig?

Lösung.

□

4.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Analog zum Vorgehen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ definieren wir auch für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}^d$ die ε -**Umgebung** von a durch

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a| < \varepsilon\}.$$

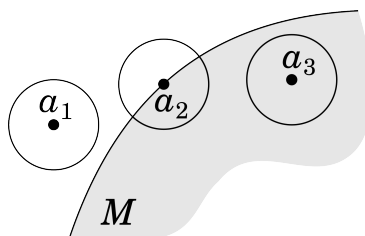
Sie hat die Gestalt einer d -dimensionalen Kugel mit Radius ε um a .

Definition 4.17. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge. Dann heißt ein Punkt $a \in \mathbb{R}^d$ ein

innerer Punkt von M	$\iff \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \subseteq M,$
äußerer Punkt von M	$\iff \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus M,$
Randpunkt von M	$\iff \forall \varepsilon > 0: M \cap U_\varepsilon(a) \neq \emptyset \neq (\mathbb{R}^d \setminus M) \cap U_\varepsilon(a).$

Die Menge aller Randpunkte von M nennen wir den **Rand** ∂M von M .

▲ Eine beliebige Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ zerlegt $\mathbb{R}^d$ offensichtlich disjunkt in ihre inneren Punkte, ihre äußeren Punkte und ihren Rand. In der folgenden Abbildung ist a_1 ein äußerer Punkt, a_2 ein Randpunkt und a_3 ein innerer Punkt:



Beispiel 4.18. (a) Sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gilt $\partial M = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$,

denn: Für einen Punkt $a := (x, y) \in \mathbb{R}^2$ gibt es drei Möglichkeiten:

Fall 1: $x < 0$. Dann liegt $U_{\frac{x}{2}}(a)$ komplett außerhalb von M , da die erste Koordinate eines jeden Punktes darin kleiner als $x + \frac{-x}{2} = \frac{x}{2} < 0$ ist. Es folgt, dass a ein äußerer Punkt und also kein Randpunkt ist.

Fall 2: $x = 0$. Dann enthält $U_\varepsilon(a)$ für jedes $\varepsilon > 0$ Punkte innerhalb und außerhalb von M , etwa $a + (\frac{\varepsilon}{2}, 0)$ und $a + (-\frac{\varepsilon}{2}, 0)$, so dass a ein Randpunkt ist.

Fall 3: $x > 0$. Dann liegt $U_{\frac{x}{2}}(a)$ komplett innerhalb von M , da die erste Koordinate eines jeden Punktes darin größer als $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0$ ist. Es folgt, dass a ein innerer Punkt und also kein Randpunkt ist.

▲ Fügen wir zu M eine beliebige Teilmenge des Randes ∂M hinzu, so gilt die obige Fallunterscheidung weiterhin und der Rand bleibt unverändert! #

(b) Seien $d \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$. Dann ist $\partial U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a| = r\}$ die **Sphäre** von Radius r um a ,

denn: Das zeigt man ähnlich wie in Teil (a). #

(c) Aufgrund von $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{R}^d = \emptyset$ ist für jedes $d \in \mathbb{N}$ der Rand der Menge $\mathbb{R}^d$ in sich selbst trivialerweise leer.

▲ Der Rand von $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}^{d+1}$ ist ganz $\mathbb{R}^d$ und somit nicht leer.

(d) Betrachten wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$, so ist $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$,

denn: Nach Korollar 2.45 liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, so dass es in jedem offenen, reellen Intervall eine rationale Zahl gibt. Insbesondere gilt $\mathbb{Q} \cap U_\varepsilon(a) \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Mit Lemma 3.65 und Satz 3.66 kann man leicht zeigen, dass auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, und es folgt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap U_\varepsilon(a) \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. #

▲ Der Rand von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist, im Sinne von Satz 2.52 und Satz 2.54, größer als die Menge selbst!

Definition 4.19. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge. Dann heißt $M \dots$

- ... **offen**, wenn $\partial M \cap M = \emptyset$ gilt,
- ... **abgeschlossen**, wenn $\partial M \subseteq M$ gilt.

Lemma 4.20. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge. Dann gelten für ihr Komplement $\mathbb{R}^d \setminus M$ in $\mathbb{R}^d$ die folgenden Aussagen:

- (a) $\partial(\mathbb{R}^d \setminus M) = \partial M$.
 (b) $\mathbb{R}^d \setminus M$ offen bzw. abgeschlossen $\iff M$ abgeschlossen bzw. offen.

Beweis. Behauptung (a) folgt sofort aus der Definition des Randes und $(\mathbb{R}^d \setminus (\mathbb{R}^d \setminus M)) = M$.

Wir zeigen nun Behauptung (b). Hier gilt

$$\begin{aligned} M \text{ offen} &\stackrel{4.19}{\iff} \partial M \cap M = \emptyset \\ &\iff \partial M \subseteq \mathbb{R}^d \setminus M \\ &\stackrel{(a)}{\iff} \partial(\mathbb{R}^d \setminus M) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus M \\ &\stackrel{4.19}{\iff} M \text{ abgeschlossen.} \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, da die zweite Äquivalenz hierzu offensichtlich äquivalent ist. □

Beispiel 4.21. In Anlehnung an die jeweiligen Teilaussagen von Beispiel 4.18 gilt:

- (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ist offen und

$$M \cup \partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$$

ist abgeschlossen.

- (b) Seien $d \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$. Dann ist $U_r(a)$ offen und

$$U_r(a) \cup \partial U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a| \leq r\}$$

abgeschlossen.

- (c) Für alle $d \in \mathbb{N}$ sind Teilmengen $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ von $\mathbb{R}^d$ **abgeschlossen**, also offen und abgeschlossen.
 (d) Die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Proposition 4.22 (Kriterium für Offenheit). Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) M ist offen.
 (ii) Jeder Punkt von M ist ein innerer Punkt.

Beweis. Gelte zunächst Aussage (i) und sei also M offen. Wir betrachten ein beliebiges $a \in M$. Nach Definition 4.19 ist dann $a \notin \partial M$, so dass es nach Definition 4.17 ein $\varepsilon > 0$ mit

$$M \cap U_\varepsilon(a) = \emptyset \quad \text{oder} \quad (\mathbb{R}^d \setminus M) \cap U_\varepsilon(a) = \emptyset$$

gibt. Wegen $a \in M$ erhalten wir so $(\mathbb{R}^d \setminus M) \cap U_\varepsilon(a) = \emptyset$. Das impliziert sofort $U_\varepsilon(a) \subseteq M$ und also Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii). Wir betrachten ein beliebiges $a \in M$. Nach Voraussetzung gibt es für dieses ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq M$. Das impliziert $U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) = \emptyset$ und nach Definition 4.17 also $a \notin \partial M$. Insgesamt haben wir nun $\partial M \cap M = \emptyset$ gezeigt, was nach Definition 4.19 bedeutet, dass M offen ist. Das ist Aussage (i). $\square$

Korollar 4.23. Sei $d \in \mathbb{N}$. Dann ist jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ eine Vereinigung von – nach Beispiel 4.21 (b) offenen – ε -Umgebungen.

Beweis. Sei M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Nach Proposition 4.22 ist dann jedes $a \in M$ ein innerer Punkt; es gibt also für alle $a \in M$ ein $\varepsilon_a > 0$ mit $U_{\varepsilon_a}(a) \subseteq M$. Offensichtlich gilt dann

$$M = \bigcup_{a \in M} U_{\varepsilon_a}(a).$$

$\square$

⚠ Man kann leicht zeigen, dass einpunktige Teilmengen $\{a\} \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen sind. Somit lässt sich jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ als Vereinigung

$$M = \bigcup_{a \in M} \{a\}$$

abgeschlossener Teilmengen schreiben.

Proposition 4.24 (Kriterium für Abgeschlossenheit). Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) M ist abgeschlossen.
- (ii) Für alle in $\mathbb{R}^d$ konvergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in M$.

Beweis. Gelte zunächst Aussage (i) und sei also M abgeschlossen. Wir betrachten eine in $\mathbb{R}^d$ konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit Grenzwert a . Nach Konstruktion gibt es dann für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Bedingung $|a_n - a| < \varepsilon$ erfüllt ist. Es gilt daher

$$\forall \varepsilon > 0: M \cap U_\varepsilon(a) \neq \emptyset.$$

Läge nun a nicht in M , so gälte andererseits

$$\forall \varepsilon > 0: (\mathbb{R}^d \setminus M) \cap U_\varepsilon(a) \neq \emptyset$$

und a wäre nach Definition 4.17 ein Randpunkt von M . Das kann aber nicht sein, da M nach Voraussetzung abgeschlossen ist und nach Definition 4.19 somit alle seine Randpunkte enthält. Es folgt, dass a in M liegen muss und also Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii). Zum Nachweis der Abgeschlossenheit von M , reicht es nach Definition 4.19 dann aus, $\partial M \subseteq M$ zu zeigen. Dafür betrachten wir einen beliebigen Punkt $a \in \partial M$. Nach Definition 4.17 erfüllt dieser

$$\forall \varepsilon > 0: M \cap U_\varepsilon(a) \neq \emptyset$$

und insbesondere

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in M \cap U_{\frac{1}{n}}(a).$$

Auf diese Weise erhalten wir eine gegen a konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nach Voraussetzung ist also $a \in M$ und wir haben Aussage (i) gezeigt. $\square$

Beispiel 4.25. Wir können die Kontraposition des Kriteriums für Abgeschlossenheit 4.24 verwenden, um zu zeigen, dass eine Menge nicht abgeschlossen ist: So ist etwa das Intervall $[0, 1)$ nicht abgeschlossen, da die in $[0, 1)$ verlaufende konvergente Folge $(1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1 geht, was nicht in $[0, 1)$ liegt.

Satz 4.26. Seien $d \in \mathbb{N}$, I eine Indexmenge und $M_i \subseteq \mathbb{R}^d$ für jedes $i \in I$ eine Teilmenge. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Sind alle M_i offen in $\mathbb{R}^d$, so auch $\bigcup_{i \in I} M_i$; beliebige Vereinigungen offener Mengen sind also offen.
- (b) Sind alle M_i abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$, so auch $\bigcap_{i \in I} M_i$; beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind also abgeschlossen.

Beweis. Für $I = \emptyset$ gelten $\bigcup_{i \in I} M_i = \emptyset$ und $\bigcap_{i \in I} M_i = \mathbb{R}^d$. Da diese beiden Mengen nach Beispiel 4.21 (c) sowohl offen als auch abgeschlossen sind, gilt der Satz in diesem Fall. Für den Rest des Beweises können wir daher ohne Einschränkung $I \neq \emptyset$ annehmen.

Wir zeigen zunächst Behauptung (a) und nehmen dafür an, die M_i seien alle offen. Wir betrachten ein beliebiges $a \in \bigcup_{i \in I} M_i$. Für dieses existiert ein $i_0 \in I$ mit $a \in M_{i_0}$. Da M_{i_0} offen ist, gibt es nach dem Kriterium für Offenheit 4.22 ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq M_{i_0}$. Trivialerweise ist dann auch $U_\varepsilon(a) \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$. Aufgrund der Beliebigkeit von a und dem Kriterium für Offenheit 4.22 ist dann auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} M_i$ offen.

Hieraus und mit Lemma 4.20 (b) folgt nun leicht auch Behauptung (b). $\square$

Bemerkung 4.27. (a) Beliebige Durchschnitte offener Mengen müssen nicht wieder offen sein, siehe etwa

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n} \right) = [-1, 1].$$

Endliche Durchschnitte offener Mengen sind jedoch wieder offen (Übung!).

- (b) Beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen müssen nicht wieder abgeschlossen sein, siehe etwa

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n} \right] = (-1, 1).$$

Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind jedoch wieder abgeschlossen (Übung!).

Definition 4.28. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge. Dann heißt $\mathring{M} := M \setminus \partial M$ das **Innere** von M und $\overline{M} := M \cup \partial M$ der **Abschluss** von M .

Proposition 4.29. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Das Innere $\mathring{M}$ ist offen. Tatsächlich ist $\mathring{M}$ die größte offene Menge, die in M enthalten ist und lässt sich als Vereinigung aller in M enthaltenen offenen Mengen schreiben.
- (b) Der Abschluss $\overline{M}$ ist abgeschlossen. Tatsächlich ist $\overline{M}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält und lässt sich als Durchschnitt aller M enthaltenden abgeschlossenen Mengen schreiben.

Beweis. Wir zeigen nur Behauptung (a). Behauptung (b) zeigt man ganz ähnlich.

Sei $U \subseteq M$ offen. Dann gilt auch $U \subseteq \mathring{M}$,

denn: Jedes $a \in U$ ist ein innerer Punkt von U und also auch von M . Da a somit eine ε -Umgebung besitzt, die komplett in M enthalten ist, folgt hieraus $a \notin \partial M$ und mit Definition 4.28 insgesamt die Behauptung. #

Es ist aber auch $\mathring{M}$ selbst offen,

denn: Wir betrachten ein beliebiges $a \in \mathring{M} = M \setminus \partial M$. Für dieses gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq M$. Nach dem oben Gezeigten gilt dann bereits $U_\varepsilon(a) \subseteq \mathring{M}$, so dass a ein innerer Punkt von $\mathring{M}$ ist. Die Behauptung folgt nun mit dem Kriterium für Offenheit 4.22. #

Aus diesen beiden Aussagen folgt nun direkt, dass $\mathring{M}$ die größte offene Menge ist, die in M enthalten ist, und dass es sich als Vereinigung aller in M enthaltenen offenen Mengen schreiben lässt. □

Korollar 4.30. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge. Dann gelten die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} M \text{ ist offen} & \iff M = \mathring{M}, \\ M \text{ ist abgeschlossen} & \iff M = \overline{M}. \end{aligned}$$

Insbesondere gelten

$$\mathring{\mathring{M}} = \mathring{M} \quad \text{und} \quad \overline{\overline{M}} = \overline{M}.$$

Beweis. Ist M offen, so ist $M \subseteq \overset{\circ}{M}$ und also $M = \overset{\circ}{M}$ nach Proposition 4.29 (a). Ist andererseits $M = \overset{\circ}{M}$, so ist M nach Proposition 4.29 (a) offen. Die andere Aussage zeigt man genauso. $\square$

Beim Umgang mit dem Inneren und dem Abschluss von Mengen ist im Allgemeinen Vorsicht geboten, wie man am folgenden Beispiel sieht:

Beispiel 4.31. Betrachten wir $M = \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned}\partial M &= \partial \mathbb{Q} \stackrel{4.18(d)}{=} \mathbb{R}, \\ \overset{\circ}{M} &= M \setminus \partial M = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{R} = \emptyset, \\ \overline{M} &= M \cup \partial M = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dies führt zu den folgenden, unintuitiven Resultaten:

$$\begin{aligned}\partial \overset{\circ}{M} &= \partial \emptyset = \emptyset \neq \mathbb{R} = \partial M, \\ \overline{\overset{\circ}{M}} &= \overline{\emptyset} = \emptyset \neq \mathbb{R} = \overset{\circ}{\mathbb{R}} = \overset{\circ}{\overline{M}}.\end{aligned}$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem wichtigen Stetigkeitskriterium, das sich mit dem Begriff einer offenen Menge herleiten lässt:

Definition 4.32. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann heißt eine Teilmenge $M \subseteq D \dots$

- ... **offen in D** bzw. **relativ offen**, falls es eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $M = D \cap U$ gibt.
- ... **abgeschlossen in D** bzw. **relativ abgeschlossen**, falls es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $M = D \cap A$ gibt.

Beispiel 4.33. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Die Teilmengen $\emptyset$ und D sind **abgeschlossen**, also offen und abgeschlossen, in D , denn es gilt $\emptyset = D \cap \emptyset$ sowie $D = D \cap \mathbb{R}^d$ und nach Beispiel 4.21 (c) sind $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ beide abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$.
- (b) Ist $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, so ist jede Teilmenge $M \subseteq D$ genau dann offen in D , wenn sie offen ist.
- (c) Ist $D \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, so ist jede Teilmenge $M \subseteq D$ genau dann abgeschlossen in D , wenn sie abgeschlossen ist.

Proposition 4.34 (Kriterium für relative Offenheit). Seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann sind für eine Teilmenge $M \subseteq D$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) M ist offen in D ,
- (ii) Für jeden Punkt $x \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $D \cap U_\varepsilon(x) \subseteq M$.

Beweis. Dies verbleibt als eine Übung. $\square$

Satz 4.35 (topologisches Kriterium für Stetigkeit). Seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere Teilmenge. Dann sind für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist stetig in D .
- (ii) Für alle Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$U \text{ ist offen in } \mathbb{R} \implies f^{-1}(U) \text{ ist offen in } D.$$

Beweis. Im Beweis werden wir eine auf die Situation in diesem Lemma angepasste Formulierung von Stetigkeit verwenden: Nach Definition 4.7 ist eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ nämlich genau dann stetig in D , wenn

$$\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: f(D \cap U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0)) \quad (4.1)$$

gilt.

Gelte nun zunächst Aussage (i) und sei also f stetig in D . Wir betrachten eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ und müssen zeigen, dass deren Urbild offen in D ist. Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir dabei ohne Einschränkung $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ annehmen. Sei also $x_0 \in f^{-1}(U) \subseteq D$. Nach dem Kriterium für Offenheit 4.22 gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq U$. Da f stetig ist, gibt es somit nach (4.1) ein $\delta > 0$ mit $f(D \cap U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$. Es folgt

$$D \cap U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0))) \subseteq f^{-1}(U)$$

und nach dem Kriterium für relative Offenheit 4.34 somit, dass $f^{-1}(U)$ in D offen ist. Das zeigt Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii). Zum Nachweis der Stetigkeit von f gemäß (4.1) betrachten dann ein $x_0 \in D$ und ein $\varepsilon > 0$. Die Menge $U := U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq \mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$. Nach Aussage (ii) ist daher auch $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0))) \subseteq D$ offen in D und nach dem Kriterium für relative Offenheit 4.34 gilt

$$\exists \delta > 0: D \cap U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0))).$$

Es folgt

$$f(D \cap U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0)).$$

und somit die Stetigkeit (i) von f . □

4.4 Kompaktheit

Definition 4.36. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Gibt es dann ein $r > 0$ mit $M \subseteq U_r(0)$, so heißt M *beschränkt*.

Definition 4.37. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Besitzt dann jede Folge in M eine in M konvergente Teilfolge, so heißt M **kompakt**.

Satz 4.38 (Satz von Heine-Borel). Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) M ist kompakt.
- (ii) M ist beschränkt und abgeschlossen.

Heinrich Eduard Heine, geboren am 18. März 1821 in Berlin und gestorben am 21. Oktober 1881 in Halle an der Saale, war ein deutscher Mathematiker und Hochschullehrer. Nach ihm benannt ist der Satz von Heine über stetige Funktionen, der aussagt, dass jede stetige Funktion auf kompaktem Definitionsbereich gleichmäßig stetig ist. Die Arbeiten von Heine über Fourier-Reihen waren ein Ausgangspunkt für Georg Cantors Untersuchungen, die zu dessen Entwicklung der Mengenlehre führten. Das Foto zur Rechten zeigt ihn 1881, in seinem Todesjahr.



Félix Édouard Justin Émile Borel, geboren am 7. Januar 1871 in Saint-Affrique und gestorben am 3. Februar 1956 in Paris, war ein französischer Mathematiker und Politiker. Er leistete grundlegende Beiträge zur Topologie, zur Maßtheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Funktionentheorie und Spieltheorie. Das Foto zur Rechten zeigt ihn 1918, im Alter von 47 Jahren.



Beweis von Satz 4.38. Gelte zunächst Aussage (i) und sei also M kompakt. Dann ist M auch beschränkt,

denn: Wäre M unbeschränkt, so gäbe es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit $|a_n| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge hätte keine konvergente Teilfolge, was wegen der Kompaktheit von M nicht sein kann. #

Weiter muss M aber auch abgeschlossen sein,

denn: Für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}^d$ gibt es wegen der Kompaktheit von M eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = b \in M$. Da Teilfolgen konvergenter Folgen wieder konvergent sind und denselben Grenzwert wie die gesamte Folge besitzen, folgt hieraus $a = b \in M$. Aufgrund der Beliebigkeit der betrachteten Folge und dem Kriterium für Abgeschlossenheit 4.24 erhalten wir so die Behauptung. #

Insgesamt haben wir so Aussage (ii) hergeleitet.

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii) und sei also M beschränkt und abgeschlossen. Wir betrachten nun eine beliebige Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 4.6 besitzt diese eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit einem Grenzwert $a \in \mathbb{R}^d$. Wegen der Abgeschlossenheit von M gilt dann sogar $a \in M$ und die Kompaktheit von M folgt. $\square$

Korollar 4.39. Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere kompakte Teilmenge. Dann existieren $\min K$ und $\max K$.

Beweis. Die kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ ist nach dem Satz von Heine-Borel 4.38 beschränkt und besitzt daher und wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein Supremum $\sup K$ in $\mathbb{R}$. Es bleibt zu zeigen, dass dieses in K liegt. Da $\sup K$ die eindeutig bestimmte kleinste obere Schranke von K ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in K$ mit $\sup K - \frac{1}{n} \leq a_n \leq \sup K$. Wir erhalten so eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K , die nach Konstruktion gegen $\sup K$ konvergiert. Da die kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ nach dem Satz von Heine-Borel 4.38 auch abgeschlossen ist, folgt tatsächlich $\sup K \in K$ und wir haben die Existenz von $\max K$ nachgewiesen.

Die Existenz von $\min K$ zeigt man analog. $\square$

Proposition 4.40. Seien $d \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^d$ auch das Bild $f(K) \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.

Beweis. Da Einschränkungen stetiger Funktionen wieder stetig sind, können wir ohne Einschränkung $D = K$ annehmen. Sei also $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $f(K)$. Dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K mit $f(a_n) = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da K als kompakt vorausgesetzt war, hat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $a \in K$ konvergiert. Mit dem Folgenkriterium für Stetigkeit 4.9 erhalten wir, dass die Bildfolge $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $f(a) \in f(K)$ konvergiert. Insgesamt haben wir gezeigt, dass jede beliebige Folge in $f(K)$ eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Wert in $f(K)$ konvergiert. Das ist die Kompaktheit von $f(K)$. $\square$

Korollar 4.41. Seien $d \in \mathbb{N}$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere kompakte Teilmenge und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf K ein Minimum und ein Maximum an, es gibt also $x_{\min}, x_{\max} \in K$ mit

$$\forall x \in K: \min f := f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) =: \max f.$$

Beweis. Nach Proposition 4.40 ist $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und nach Korollar 4.39 gibt es daher $y_{\min}, y_{\max} \in f(K)$ mit

$$\forall y \in f(K): y_{\min} \leq y \leq y_{\max}.$$

Dann gibt es aber auch $x_{\min}, x_{\max} \in K$ mit

$$\forall x \in K: f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}).$$

□

Beispiel 4.42. Nach Beispiel 4.11 (a) ist die durch $x \mapsto x^2$ gegebene Potenzfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Es gilt nun:

- Schränken wir f auf die kompakte Teilmenge $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ein, so nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum $\min f = 0 = f(0)$ und ihr Maximum $\max f = 1 = f(-1) = f(1)$ an.
- Schränken wir f auf die nichtkompakte Teilmenge $(-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ein, so gilt

$$\sup f(((-1, 1))) = \sup[0, 1) = 1 \notin f(((-1, 1))),$$

so dass die stetige Funktion f auf der nichtkompakten Menge $(-1, 1)$ ihr Maximum nicht annimmt.

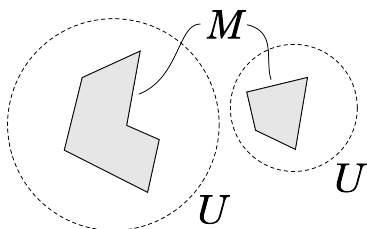
- Setzen wir $f|_{(-1, 1)}$ unstetig wieder auf $[-1, 1]$ fort, indem wir in den beiden Endpunkten des Intervalls den Wert 0 vorschreiben, so nimmt diese unstetige Funktion auf dem Kompaktum $[-1, 1]$ kein Maximum an.

4.5 Zusammenhang

Definition 4.43. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge. Dann heißt M **zusammenhängend**, wenn für alle disjunkten nichtleeren offenen Teilmengen $U, U' \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt:

$$M \subseteq U \cup U' \implies M \subseteq U \text{ oder } M \subseteq U'.$$

Interessant ist hier auch die Kontraposition: Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^d$, die sich durch nichtleere offene Teilmengen $U, U' \subseteq \mathbb{R}^d$ trennen lässt, ist *nicht* zusammenhängend:



Beispiel 4.44. (a) Die Teilmenge $M := U_1((0, 0)) \cup \overline{U_1((3, 0))} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist nicht zusammenhängend, denn: Für die disjunkten nichtleeren offenen Teilmengen $U := U_1(0)$ und $U' := U_2(3)$ des $\mathbb{R}^2$ gilt offensichtlich $M \subseteq U \cup U'$, aber weder $M \subseteq U$ noch $M \subseteq U'$. #

(b) Punktmengen $\{a\}$ mit $a \in \mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ sind zusammenhängend (Übung!).

(c) Die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend,

denn: Für die disjunkten nichtleeren offenen Teilmengen $U := (-\infty, \sqrt{2})$ und $U' := (\sqrt{2}, \infty)$ von $\mathbb{R}$ gilt $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\} = U \cup U'$ nach Proposition 2.21, aber es ist weder $\mathbb{Q} \subseteq U$ noch $\mathbb{Q} \subseteq U'$, so dass $\mathbb{Q}$ nicht zusammenhängend ist. #

Unser nächstes Ziel ist nun, die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu beschreiben. Dies geschieht in folgendem Satz:

Satz 4.45. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) M ist genau dann ein Intervall, wenn für alle $a, b \in M$ mit $a < b$ bereits $[a, b] \subseteq M$ gilt.
- (b) M ist genau dann zusammenhängend, wenn M ein Intervall ist.

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zum Beweis von Behauptung (a) reicht es aus zu zeigen, dass M ein Intervall ist, wenn für alle $a, b \in M$ mit $a < b$ bereits $[a, b] \subseteq M$ gilt, da die andere Implikation offensichtlich ist. Gehen wir also von dieser Annahme aus und betrachten ein beliebiges $a \in M$. Für dieses setzen wir

$$s := \sup\{b \in [a, \infty) : [a, b] \subseteq M\} \in [a, \infty) \cup \{\infty\}.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: $s = \infty$. Dann ist nach Voraussetzung $[a, b] \subseteq M$ für alle $b \geq a$ und also $[a, \infty) \subseteq M$.

Fall 2: $s < \infty$. Dann ist $[a, s) \subseteq M$,

denn: Gäbe es ein $x \in [a, s)$ mit $x \notin M$, so existierte zu jedem $\varepsilon := \min\{\frac{s-x}{2}, s-a\} > 0$ ein $b \in [s-\varepsilon, s]$ mit $[a, b] \subseteq M$. Für dieses gälte

$$b \geq s - \varepsilon \geq s - \frac{s-x}{2} = \frac{s+x}{2} < x$$

und im Widerspruch zu unserer Annahme also $x \in [a, b] \subseteq M$. #

Es ist dann $M \cap [a, \infty) \in \{[a, s), [a, s]\}$,

denn: Wäre dem nicht so, gäbe es ein $x \in M$ mit $x > s$ und nach Voraussetzung gälte $[a, x] \subseteq M$. Das kann aber nach Definition von s nicht sein. #

Zusammengenommen haben wir also eingesehen, dass $M \cap [a, \infty)$ entweder gleich $[a, \infty)$ ist oder $[a, s)$ bzw. $[a, s]$ für ein $s \in \mathbb{R}$. Ganz analog zeigt man durch Betrachten von

$$i := \inf\{b \in (-\infty, a) : [b, a] \subseteq M\} \in [a, \infty) \cup \{\infty\},$$

dass $M \cap (-\infty, a]$ entweder gleich $(-\infty, a]$ ist oder $(i, a]$ bzw. $[i, a]$ für ein $i \in \mathbb{R}$. Insgesamt folgt, dass M ein Intervall ist, und also Behauptung (a).

Wir zeigen nun Behauptung (b). Sei dafür zunächst $M \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir betrachten zwei disjunkte nichtleere offene Teilmengen $U, U' \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \subseteq U \cup U'$ und nehmen an, es gäbe jeweils ein Element $a \in M \cap U$ und $b \in M \cap U'$. Aufgrund der Disjunktheit von U und U' gälte hierbei $a \neq b$ und ohne Einschränkung $a < b$. Mit Aussage (a) erhielten wir so $[a, b] \subseteq M \subseteq U \cup U'$. Bei Betrachtung von

$$s := \sup\{x \in [a, b] : [a, x] \subseteq U\} \in [a, b] \subseteq U \cup U'$$

könnten wir nun zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $s \in U$. Aufgrund der Offenheit von U und dem Kriterium für Offenheit 4.22 gäbe es dann ein $\delta > 0$ mit $[s - \delta, s + \delta] \subseteq U_{2\delta}(s) \subseteq U$. Wegen $s - \delta < s$ gälte weiter $[a, s - \delta] \subseteq U$ und im Widerspruch zur Definition von s also $[a, s + \delta] = [a, s - \delta] \cup [s - \delta, s + \delta] \subseteq U$.

Fall 2: $s \in U'$. Aufgrund der Offenheit von U' und dem Kriterium für Offenheit 4.22 gäbe es dann ein $\delta' > 0$ mit $[s - \delta', s + \delta'] \subseteq U_{2\delta'}(s) \subseteq U'$. Wegen $s - \delta' < s$ gälte weiter $[a, s - \delta'] \subseteq U$, so dass im Widerspruch zur angenommenen Disjunktheit von U und U' bereits $s - \delta' \in U \cap U'$ gälte.

Da beide Fälle zu einem Widerspruch führen, muss unsere Annahme, die Durchschnitte $M \cap U$ und $M \cap U'$ wären beide nichtleer, falsch gewesen sein. Aufgrund der Beliebigkeit von U und U' folgt, dass M zusammenhängend ist.

Sei nun umgekehrt M zusammenhängend. Wir nehmen an, M wäre kein Intervall. Nach Aussage (a) gäbe es dann $a, b \in M$ mit $[a, b] \not\subseteq M$ und weiter also ein $x \in [a, b]$ mit $x \notin M$. Setzen wir nun $U := (-\infty, x)$ und $U' := (x, \infty)$, so wären $U, U' \subseteq \mathbb{R}$ disjunkt, nichtleer und offen und es gälte $M \subseteq U \cup U' = \mathbb{R} \setminus \{x\}$. Da wir M als zusammenhängend vorausgesetzt hatten, wäre nun also $M \cap U = \emptyset$ oder $M \cap U' = \emptyset$. Wegen $a \in M \cap U$ und $b \in M \cap U'$ könnte das aber nicht sein, so dass wir einen Widerspruch gefunden haben. Unsere Annahme, M wäre kein Intervall, muss also falsch gewesen sein. Insgesamt haben wir hiermit Behauptung (b) bewiesen. $\square$

Satz 4.46. Seien $d, e \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ zusammenhängend und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^e$ stetig. Dann ist auch $f(D) \subseteq \mathbb{R}^e$ zusammenhängend.

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition der Behauptung und gehen also davon aus, dass $f(D)$ nicht zusammenhängend ist. Nach Definition 4.43 gibt es dann zwei disjunkte nichtleere offene Teilmengen $U, U' \subseteq \mathbb{R}^e$ mit

$$\begin{aligned} f(D) &\subseteq U \cup U', \\ f(D) \cap U &\neq \emptyset \neq f(D) \cap U'. \end{aligned}$$

Da f stetig ist, sind dann nach dem topologischen Kriterium für Stetigkeit 4.35 die Urbilder $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(U')$ offen in D . Nach Definition 4.32 gibt es daher offene Teilmengen $V, V' \subseteq \mathbb{R}^d$ mit

$$f^{-1}(U) = D \cap V \quad \text{und} \quad f^{-1}(U') = D \cap V'.$$

Für diese gilt zunächst

$$(D \cap V) \cap (D \cap V') = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(U') = f^{-1}(U \cap U') = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset. \quad (4.2)$$

Betrachten wir nun Punkte $x \in D \cap V$ und $x' \in D \cap V'$. Da $D \cap V$ und $D \cap V'$ offen in D sind, gibt es dann nach dem Kriterium für relative Offenheit 4.34 Zahlen $\varepsilon_x, \varepsilon_{x'} > 0$ mit

$$D \cap U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq D \cap V \quad \text{und} \quad D \cap U_{\varepsilon_{x'}}(x') \subseteq D \cap V'.$$

In dieser Situation gilt bereits $U_{\frac{\varepsilon_x}{2}}(x) \cap U_{\frac{\varepsilon_{x'}}{2}}(x') = \emptyset$,

denn: Gäbe es doch einen Punkt a im Durchschnitt dieser beiden Mengen, so gälte

$$|x - x'| \leq |x - a| + |x' - a| < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_{x'}}{2} \leq \max\{\varepsilon_x, \varepsilon_{x'}\},$$

wobei wir ohne Einschränkung $\varepsilon_x \leq \varepsilon_{x'}$ annehmen könnten. Es folgte dann

$$x \in U_{\varepsilon_{x'}}(x')$$

und also

$$x \in (D \cap V) \cap (D \cap U_{\varepsilon_{x'}}(x')) \subseteq (D \cap V) \cap (D \cap V') \stackrel{(4.2)}{=} \emptyset.$$

Das kann natürlich nicht sein, so dass wir die Behauptung gezeigt haben. #

Setzen wir nun

$$\tilde{V} := \bigcup_{x \in D \cap V} U_{\frac{\varepsilon_x}{2}}(x) \quad \text{und} \quad \tilde{V}' := \bigcup_{x' \in D \cap V'} U_{\frac{\varepsilon_{x'}}{2}}(x'),$$

so sind diese Mengen nach Konstruktion disjunkt und als Vereinigungen offener Mengen wieder offen. Weiter erfüllen sie offensichtlich $\tilde{V} \supseteq D \cap V$ und $\tilde{V}' \supseteq D \cap V'$ und sind daher insbesondere nichtleer,

denn: Nach Konstruktion ist $f(D) \cap U \neq \emptyset$. Es existiert also ein $x \in D \cap f^{-1}(U) = D \cap V$, so dass diese Menge nichtleer ist. Analog zeigt man, dass auch $D \cap V'$ nichtleer ist. #

Schließlich ist $D \subseteq (D \cap V) \cup (D \cap V') \subseteq \tilde{V} \cup \tilde{V}'$,

denn: Es gilt

$$\begin{aligned} D &= f^{-1}(f(D)) = f^{-1}((f(D) \cap U) \cup (f(D) \cap U')) \\ &= f^{-1}(f(D) \cap U) \cup f^{-1}(f(D) \cap U') \\ &= \left(f^{-1}(f(D)) \cap f^{-1}(U) \right) \cup \left(f^{-1}(f(D)) \cap f^{-1}(U') \right) \\ &= (D \cap V) \cup (D \cap V'). \end{aligned}$$

#

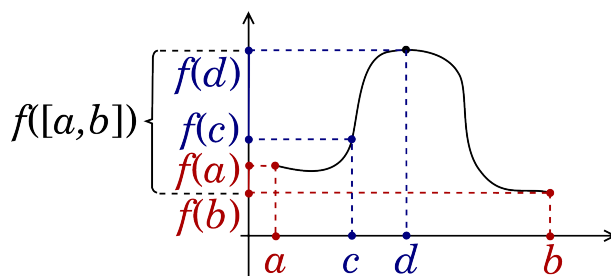
Insgesamt haben wir gezeigt, dass D nach Definition 4.43 nicht zusammenhängend ist, was den Satz zeigt. $\square$

Korollar 4.47 (Zwischenwertsatz). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis. Nach Satz 4.45 (b) ist das Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend, so dass nach Satz 4.46 auch das stetige Bild $f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend ist. Wieder nach Satz 4.45 (b) ist daher $f([a, b])$ ein Intervall. Dieses enthält $f(a)$ und $f(b)$, wobei wir ohne Einschränkung davon ausgehen können, dass $f(a) \leq f(b)$ gelte. Mit Satz 4.45 (a) folgt dann $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$ und somit die Behauptung. $\square$

Wir haben also hergeleitet:

- Im Fall $f(a) \leq f(b)$ gilt nach dem Zwischenwertsatz $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$.
- Im Fall $f(a) \geq f(b)$ gilt nach dem Zwischenwertsatz $[f(b), f(a)] \subseteq f([a, b])$.



▲ Für alle y in $[f(a), f(b)]$ bzw. $[f(b), f(a)]$ gibt es also ein $x \in [a, b]$ mit $y = f(x)$.

Korollar 4.48. Seien $r \in \mathbb{N}_0$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad r , wie wir sie in Beispiel 4.11 (c) eingeführt haben. Ist dann r ungerade, so existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$, also eine Nullstelle von f .

▲ Mehr kann man im Allgemeinen nicht aussagen: $x \mapsto x^{2r} + 1$ für ein $r \in \mathbb{N}$ hat keine Nullstelle und $x \mapsto x^{2r+1}$ für $r \in \mathbb{N}_0$ hat genau eine Nullstelle (in $x_0 = 0$).

Beweis. Sei f durch $f(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k$ gegeben, wobei wir ohne Einschränkung von $a_r > 0$ ausgehen können. Dann gibt es ein $R > 0$ mit

$$f(-R) < 0 < f(R),$$

denn: Schreiben wir

$$f(x) = x^r \cdot g(x) \quad \text{mit } g(x) := \sum_{k=0}^r a_r x^{k-r},$$

so gilt $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} g(n) = a_n > 0$. Insbesondere gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) > 0$ und $f(-n_0) < 0$ und die Behauptung folgt mit $R := n_0$. #

Da Polynomfunktionen nach Beispiel 4.11 (c) stetig sind, gilt dann nach dem Zwischenwertsatz 4.47

$$0 \in [f(-R), f(R)] \subseteq f([-R, R]),$$

so dass es ein $x_0 \in [-R, R] \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$ gibt. $\square$

Definition 4.49. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend** bzw. **monoton fallend**, falls gilt:

$$\forall x, y \in [a, b]: x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \quad \text{bzw.} \quad \forall x, y \in [a, b]: x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

und **streng monoton wachsend** bzw. **streng monoton fallend**, falls gilt:

$$\forall x, y \in [a, b]: x < y \implies f(x) < f(y) \quad \text{bzw.} \quad \forall x, y \in [a, b]: x < y \implies f(x) > f(y).$$

In Ausgestaltung der Überlegungen in Mitmachaufgabe 1.59 erhalten wir nun den Satz, der das in der Schule dazu vermittelte Bild begründet:

Satz 4.50. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend. Dann ist $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ bzw. $f: [a, b] \rightarrow [f(b), f(a)]$ bijektiv mit stetiger und streng monoton wachsender bzw. streng monoton fallender Umkehrfunktion.

▲ Für den Satz ist es wichtig, dass f auf einem Kompaktum definiert ist,

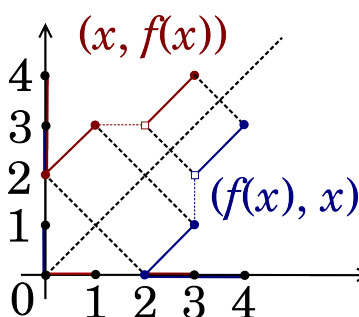
denn: Die durch

$$x \mapsto \begin{cases} x + 2 & \text{für } x \in [0, 1], \\ x + 1 & \text{für } x \in (2, 3] \end{cases}$$

definierte Funktion $f: [0, 1] \cup (2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend (und insbesondere injektiv) mit Bild $[2, 4] \subseteq \mathbb{R}$. Ihre Umkehrfunktion ist aber durch

$$y \mapsto \begin{cases} y - 2 & \text{für } y \in [2, 3], \\ y - 1 & \text{für } y \in (3, 4] \end{cases}$$

gegeben und weist eine Unstetigkeitsstelle in $y = 3$ auf. #



Beweis von Satz 4.50. Für den Beweis gehen wir ohne Einschränkung davon aus, dass f streng monoton wachsend ist. Dann ist f offensichtlich injektiv und erfüllt

$$f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)].$$

Da f aber auch stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz 4.47 anwenden und erhalten

$$f([a, b]) \supseteq [f(a), f(b)].$$

Zusammengenommen ist $[f(a), f(b)]$ das Bild von f und wir erhalten die Bijektivität von

$$f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$$

und somit die Existenz der Umkehrfunktion

$$f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b].$$

Diese Umkehrfunktion ist streng monoton wachsend,

denn: Seien $r, s \in [f(a), f(b)]$ mit $r < s$. Wegen der Bijektivität von f gibt es dann eindeutige und von einander verschiedene $c, d \in [a, b]$ mit $r = f(c)$ und $s = f(d)$. Gälte nun $c > d$, so folgte mit dem streng monotonen Wachstum von f im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $r = f(c) > f(d) = s$. Das kann also nicht sein, so dass wir $f^{-1}(r) = c < d = f^{-1}(s)$ erhalten und somit die Behauptung nachgewiesen haben. #

Um zu zeigen, dass f^{-1} auch stetig ist, reicht es nach dem topologischen Kriterium für Stetigkeit 4.35 aus zu zeigen, dass für eine beliebige offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ das Urbild $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ offen in $[f(a), f(b)]$ ist. Sei also $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist $[a, b] \setminus U = [a, b] \cap (\mathbb{R} \setminus U)$ abgeschlossen und beschränkt und nach dem Satz von Heine-Borel 4.38 daher kompakt. Nach Proposition 4.40 ist dann auch das Bild $f([a, b] \setminus U)$ von $[a, b] \setminus U$ unter der stetigen Funktion f kompakt. Da f bijektiv, streng monoton wachsend und stetig ist, gilt weiter

$$f([a, b] \setminus U) = f([a, b]) \setminus f(U) = [f(a), f(b)] \setminus f(U)$$

und wieder nach dem Satz von Heine-Borel 4.38 ist $[f(a), f(b)] \setminus f(U)$ abgeschlossen. Hieraus folgt wiederum, dass

$$f(U) = [f(a), f(b)] \setminus ([f(a), f(b)] \setminus f(U)) = [f(a), f(b)] \cap \mathbb{R} \setminus f(U)$$

offen in $[f(a), f(b)]$ ist. Hieraus folgt die Stetigkeit von f^{-1} und insgesamt der Satz. $\square$

Korollar 4.51. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die durch $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ gegebene n -te **Wurzelfunktion** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$ stetig und streng monoton wachsend.

Beweis. Nach Beispiel 4.11 (a) ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die durch $x \mapsto x^n$ gegebene Potenzfunktion stetig. Interpretieren wir diese als Funktion $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$, so ist sie zudem streng monoton wachsend, wie man leicht mit dem Binomischen Lehrsatz 2.9 überprüfen kann. Wir dürfen also Satz 4.50 anwenden und erhalten, dass die n -te Potenzfunktion eine stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$ besitzt. Nach Konstruktion erfüllt diese für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$ die Bedingung $f(a)^n = a$ und also $f(a) = \sqrt[n]{a}$. Das zeigt die Behauptung. $\square$

4.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. Nadine und Toby bearbeiten das aktuelle Übungsblatt. Das Thema ist Stetigkeit:

Aufgabe 1

Prüfen Sie die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

- | | |
|--|--|
| (i) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{für } x \leq 0, \\ x & \text{für } x > 0. \end{cases}$ | (ii) $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{für } x \leq 0, \\ x & \text{für } x > 0. \end{cases}$ |
| (iii) $f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$ | (iv) $f_4(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \text{für } \lfloor x \rfloor \text{ gerade,} \\ (\lfloor x \rfloor + 1) - x & \text{für } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade.} \end{cases}$ |
| (v) $f_5(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ | (vi) $f_6(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ |

Toby: Ah, Stetigkeit kenne schon! Ich habe mal eine GFS zu dem Thema in der Schule gehalten. Man kann Stetigkeit einfach am Graphen überprüfen, dann muss man nicht die komplizierten Definitionen aus der Vorlesung nutzen. Das war, glaube ich so:

Eine Funktion ist stetig an der Stelle x_0 , wenn man ihren Graphen mit einem Bleistift durch diese Stelle durchzeichnen kann, ohne diesen abzusetzen.

(a) Zuerst ordnen Sie die so gegebene, intuitive **Bleistiftstetigkeit** in den hochschulmathematischen Kontext ein. Dafür ...

- ... überprüfen Sie die Stetigkeit der Funktionen (i)–(iv) in $\mathbb{R}$ sowohl mit der Bleistiftstetigkeit als auch mit Mitteln der Hochschulmathematik.
- ...mathematisieren Sie Tobys umgangssprachliche Beschreibung, indem Sie Tobys Formulierung plausibel in mathematische Ausdrücke übertragen. Nutzen Sie dabei keine umgangssprachlichen Formulierungen, wie *mit einem Bleistift durch diese Stelle durchzeichnen*, sondern bleiben sie mathematisch präzise.

- ... argumentieren Sie, ob die von Ihnen formulierte Bleistiftstetigkeit für die Funktionen (i)–(iv) eine sinnvolle Anschauung des Stetigkeitsbegriffs gibt.

Nadine: Das mit dem Bleistift klappt vielleicht bei einfachen Funktionen. Aber eigentlich geht das schon dann nicht mehr, wenn man einfach einen Punkt aus der Funktion 'rausnimmt, wie bei (iii). Ein echter Bleistift ist doch viel zu dick, um nur diesen einen Punkt auszulassen, da fährt man beim Zeichnen einfach drüber!

Toby: Ach komm, wir machen Mathe! Natürlich ist der Bleistift unendlich dünn und „sieht“ so auch einzelne fehlende Punkte.

Nadine: Na gut, aber was ist dann mit (v) und (vi)? Wenn ich bei den beiden Funktionen dein Kriterium an der Stelle $x_0 = 0$ anwenden will, weiß ich nicht mal, wo ich den Bleistift ansetzen soll.

(b) *Nun loten Sie die Grenzen der Bleistiftvorstellung anhand weniger übersichtlicher Funktionsbeispiele aus. Dafür ...*

- ... überprüfen Sie zunächst mit Mitteln der Hochschulmathematik, ob die Funktionen (v) und (vi) in $x_0 = 0$ stetig sind.
- ...erläutern Sie, warum Tobys Kriterium der Bleistiftstetigkeit hier nicht anwendbar ist. Arbeiten Sie heraus, welche Eigenschaften der Funktion hier das anschauliche Zeichnen verhindern. Gehen Sie dabei insbesondere auf Nadines Einwand ein – was bedeutet dieser mathematisch?

Toby: Oh man, heißt das, meine Anschauung aus der Schule ist komplett falsch? Warum haben wir das dann überhaupt so gemacht?

Nadine: Naja, man kann sich das ja schon manchmal so vorstellen, aber es gilt nicht immer – es kann also keine Definition sein.

(c) *Zuletzt reflektieren Sie die Bleistiftstetigkeit als Brücke zwischen schulischer Anschauung und hochschulmathematischer Definition. Dafür ...*

- ...schreiben Sie eine Antwort an Toby, in der Sie seine Vorstellung der Bleistiftstetigkeit aus mathematischer Sicht einordnen:
 - ...stellen Sie dar, dass sein Ansatz durchaus aus einer richtigen Vorstellung entspringt. Erklären Sie dafür, wie die Bleistiftstetigkeit Aspekte der formalen Definition anschaulich macht.
 - Arbeiten Sie außerdem heraus, weshalb die Bleistiftstetigkeit keine mathematische Definition von Stetigkeit ersetzen kann. Unterscheiden Sie dabei die Begriffe *Anschauung*, *Kriterium* und *Definition* und erläutern Sie deren jeweilige Funktion für das mathematische Arbeiten.

Aufgabe 4.2.⁶ Toby und Nadine widmen sich nun noch einmal dem Thema Stetigkeit vom

⁶Aufgabe adaptiert nach Weber, Birke-Johanna (2022): *Sammlung von „Lehramtsaufgaben“ für die Analysis*. Unveröffentlichtes Manuskript, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Kiel.

letzten Zettel, denn sie haben weitere Funktionen entdeckt, die ihnen Schwierigkeiten bereiten:

$$g_j(x) = \begin{cases} x^j \cdot f_4\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{mit } j \in \{0, 1, 2\},$$

wobei f_4 die Funktion aus Aufgabe 4.1 ist.

Toby: Dass f_4 stetig ist, haben wir ja auf dem letzten Zettel schon gezeigt. Also sind die Funktionen g_j für alle $x \neq 0$ als Verkettung bzw. Produkt stetiger Funktionen stetig. Dann können wir für die Problemstelle $x_0 = 0$ die Bleistiftstetigkeit ja super nutzen, um herauszufinden, ob die g_j dort stetig sind, oder?

Nadine: Mh, da habe ich wieder ein Problem: Die Funktionen wackeln krass in der Nähe von Null! Darf mein mathematischer Bleistift denn unendlich oft schwingen oder unendlich weit gehen, bevor er überhaupt bei der Null ankommt? Und wenn die Funktion so sehr wackelt, weiß ich doch auch gar nicht, wo sie dann wirklich bei $x_0 = 0$ ankommt. Zum Beispiel für $j = 0$ ist ja $g_0(x) = f_4\left(\frac{1}{x}\right)$, und da entferne ich mich ja immer wieder von der Null ...

Toby: Wir können dem Bleistift doch einfach alle Fähigkeiten geben, die wir brauchen, wenn es uns dann hilft zu entscheiden, ob die Funktion an der Stelle stetig ist oder nicht.

Nadine: Ich glaube nicht, dass das funktioniert, solche Eigenschaften darf selbst der mathematische Bleistift nicht haben. Ich glaube das Kriterium kann man hier nicht benutzen.

(a) *Nun analysieren Sie in weiteren Fällen die Tragfähigkeit der Bleistiftstetigkeit. Dafür ...*

- ... überprüfen Sie auch hier zunächst für alle drei Fälle $j \in \{0, 1, 2\}$ die Stetigkeit der Funktion g_j in $x_0 = 0$ mit Mitteln der Hochschulmathematik.
- ...nehmen Sie begründet Stellung zur Auseinandersetzung von Nadine und Toby.
 - Begründen Sie welche Eigenschaften der mathematische Bleistift haben darf und wo diese Vorstellung beim mathematisch sauberen Modellieren an ihre Grenzen stößt?
 - Schließen Sie, ob man die Stetigkeit hier mit der Bleistiftstetigkeit überprüfen kann?

(b) *Zum Abschluss entwickeln Sie auf Grundlage Ihrer bisherigen Erkenntnisse zu Bleistiftstetigkeit ein mathematisch tragfähiges Konzept. Dafür ...*

- ...formulieren Sie ein hochschulmathematisches Stetigkeitskriterium im Sinne der Bleistiftstetigkeit. Achten Sie darauf, dass insbesondere alle bisher behandelten Fälle sauber eingeordnet werden.
- ...führen Sie abschließend die Vor- und Nachteile dieses Kriteriums im Vergleich zur Definition aus der Vorlesung aus.

Differentialrechnung

Nach heutigem mathematischen Sprachgebrauch versteht man unter der Differenzierbarkeit die Eigenschaft einer Funktion, sich lokal in der Umgebung eines Punktes optimal durch eine lineare Abbildung approximieren zu lassen. Historisch entwickelte sich dieses Konzept im 17. Jahrhundert aus zwei eng verwandten Fragestellungen: dem geometrischen Problem der Tangentenbestimmung an beliebige Kurven, geprägt von Leibniz, und der physikalischen Beschreibung momentaner Änderungsraten, wie etwa der Momentangeschwindigkeit, durch Newton. Gemeinsam mit der bei uns erst später behandelten Integralrechnung bildet die Differentialrechnung den Kern der klassischen Analysis.

Sir Isaac Newton, geboren am 4. Januar 1643 in Woolsthorpe-by-Colsterworth und gestorben am 31. März 1727 in Kensington, war ein englischer Universalgelehrter. Er wirkte an der Universität Cambridge, war verantwortlich für die Royal Mint und Präsident der Royal Society. Aufgrund seiner Leistungen auf den Gebieten der Physik und Mathematik gilt Newton als einer der bedeutendsten Naturwissenschaftler. Fast gleichzeitig mit Gottfried Wilhelm Leibniz entwickelte Newton die Infinitesimalrechnung. Der 1798 entstandene Stich zur Rechten zeigt ihn 1677 im Alter von 34 Jahren.



In den Abschnitten 5.1 und 5.2 führen wir zunächst die Begriffe der Differenzierbarkeit und der Ableitung präzise ein und entwickeln den algebraischen Kalkül zu deren Berechnung, wie etwa die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel. In Abschnitt 5.3 befassen wir uns mit den zentralen Existenzsätzen der Differentialrechnung und nutzen diese, um fundamentale Kriterien für das

Monotonieverhalten und die Existenz lokaler Extrema zu beweisen. Schließlich vertiefen wir in Abschnitt 5.5 die Idee der lokalen Linearisierung und untersuchen, wie sich hinreichend oft differenzierbare Funktionen durch Polynome annähern lassen. Als wichtige Spezialfälle studieren wir schließlich in Abschnitt ?? die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen samt ihrer Reihendarstellungen.

5.1 Differenzierbarkeit

Seien $d, e \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $x_0 \in D$. Für eine Funktion $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^e$ schreiben wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^e,$$

falls eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen gilt:

- (i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \setminus \{x_0\}: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon,$
- (ii) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } D \setminus \{x_0\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$

Fordern wir in (i) und (ii) zusätzlich noch $x < x_0$ bzw. $x_n < x_0$, so schreiben wir

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^e, \quad (\text{linksseitiger Limes})$$

fordern wir zusätzlich noch $x > x_0$ bzw. $x_n > x_0$, so schreiben wir

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^e. \quad (\text{rechtsseitiger Limes})$$

Lemma 5.1. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ genau dann, wenn $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ existieren und übereinstimmen. Ist das der Fall, so ist zudem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x).$$

Beweis. Das verbleibt als eine Übung. □

Beispiel 5.2. (a) Es ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2,$$

▲ Allgemein haben wir den folgenden Zusammenhang: Seien $d, e \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $g: D \rightarrow \mathbb{R}^e$ eine Funktion. Für

$$f := g|_{D \setminus \{x_0\}}: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^e$$

gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0) \iff g \text{ ist stetig in } x_0.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht, betrachte dafür in (ii) die Nullfolge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

(c) $\lim_{x \rightarrow x_0} \lfloor x \rfloor$ existiert genau für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Definition 5.3. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Existiert dann für ein $x_0 \in I$ der Grenzwert

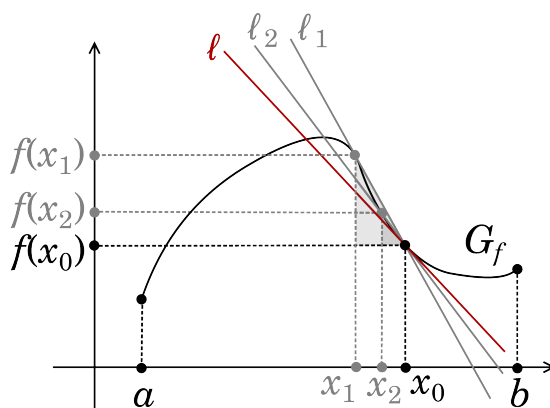
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}},$$

so heißt f **differenzierbar** in x_0 und wir nennen den Grenzwert die **Ableitung von f in x_0** und schreiben $f'(x_0)$ oder $\frac{d}{dx}f(x_0)$. Die Funktion f heißt **differenzierbar auf I** , falls f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist. Die Funktion

$$f': \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto f'(x) \end{cases}$$

heißt dann die **Ableitung** von f auf I .

Geometrisch kann die Ableitung einer Funktion f in einem Punkt $x_0 \in I$ als die Steigung der Tangente an den Graphen G_f in x_0 verstanden werden,



denn: In der Abbildung stellen wir uns die Punkte x_1, x_2 als die ersten Glieder einer gegen x_0 konvergierenden Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $I = [a, b]$ vor. Für die zugehörigen Sekanten

$$\ell_1: x \mapsto f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) \quad (\text{Gerade durch } (x_0, f(x_0)) \text{ und } (x_1, f(x_1)))$$

$$\ell_2: x \mapsto f(x_0) + \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \cdot (x - x_0) \quad (\text{Gerade durch } (x_0, f(x_0)) \text{ und } (x_2, f(x_2)))$$

sind passende Steigungsdreiecke eingezeichnet. Lassen wir nun $n \rightarrow \infty$ gehen, so erhalten wir die Tangente

$$\ell: x \mapsto f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

an den Graphen G_f in x_0 . Diese hat in der Tat die Steigung $f'(x_0)$. #

Beispiel 5.4. (a) Jede konstante Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto c \end{cases} \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}$$

erfüllt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0 \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}$$

und ist somit auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) \equiv 0$.

(b) Die Identität $\text{id}_{\mathbb{R}}$ erfüllt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{id}_{\mathbb{R}}(x) - \text{id}_{\mathbb{R}}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1 \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}$$

und ist somit auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $\text{id}'_{\mathbb{R}}(x) \equiv 1$.

(c) Die Betragsfunktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$$

erfüllt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \begin{cases} -1 & \text{für alle } x_0 < 0, \\ 1 & \text{für alle } x_0 > 0, \end{cases}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, weil wir zur Berechnung des Grenzwerts über eine gegen x_0 konvergente Folge ohne Einschränkung annehmen können, dass deren Folgenglieder dasselbe Vorzeichen wie x_0 haben. Weiter gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, denn bei Einsetzen der beiden Nullfolgen $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(-\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ erhalten wir unterschiedlichen Werte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\frac{-1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1.$$

Die Betragsfunktion ist also nicht differenzierbar in $x = 0$, aber differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Ableitung $f'(x) \equiv -1$ für $x < 0$ und $f'(x) \equiv 1$ für $x > 0$.

(d) Die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

erfüllt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2 \cdot x_0 \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}$$

und ist somit auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 2 \cdot x$.

Lemma 5.5 (Kriterium für Differenzierbarkeit). Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist differenzierbar in x_0 .
- (ii) Es gibt eine in x_0 stetige Funktion $\Delta_f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(x_0) + \Delta_f(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis. Gelte zunächst Aussage (i) und sei also f differenzierbar in x_0 . Setzen wir nun

$$\Delta_f(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{für alle } x \neq x_0, \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0, \end{cases}$$

so folgt die Stetigkeit von Δ_f mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta_f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{f \text{ diff'bar}}{=} f'(x_0) = \Delta_f(x_0).$$

Die nachzuweisende Formel ist zudem für $x \neq x_0$ trivial und für $x = x_0$ gilt offensichtlich

$$f(x_0) = f(x_0) + \Delta_f(x_0) \cdot (x_0 - x_0).$$

Insgesamt haben wir Aussage (ii) hergeleitet.

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii). Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(ii)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta_f(x) \stackrel{(ii)}{=} \Delta_f(x_0) = f'(x_0)$$

und also die Differenzierbarkeit (i) von f in x_0 . $\square$

Satz 5.6. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist dann f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 auch stetig.

▲ Dass umgekehrt nicht jede in x_0 stetige Funktion auch in x_0 differenzierbar sein muss, haben wir schon in Beispiel 5.4 (c) mit der (offenbar) überall stetigen und in $x_0 = 0$ nicht differenzierbaren Betragsfunktion gesehen.

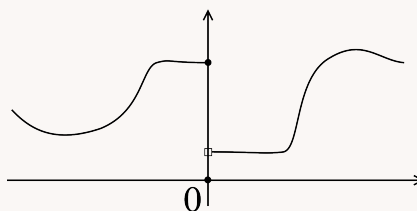
Beweis. Ist f in x_0 differenzierbar, so gibt es nach Lemma 5.5 eine in x_0 stetige Funktion $\Delta_f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(x_0) + \Delta_f(x) \cdot (x - x_0).$$

Da auch die konstante Funktion $f(x_0)$ und das Polynom $x - x_0$ in x_0 stetig sind, folgt die Stetigkeit von f sofort mit Proposition 4.10. $\square$

Mitmachaufgabe 5.7. Betrachten Sie die folgende Überlegung, nach der es – entgegen der Aussage von Satz 5.6! – eine Funktion gibt, die in einem Punkt differenzierbar, aber nicht stetig ist:

Behauptung. Die in der folgenden Abbildung gezeigte Funktion besitzt offenbar eine Sprungstelle in $x_0 = 0$ und ist dort somit nicht stetig. Andererseits ist die Funktion aber links wie rechts von der Sprungstelle waagrecht, so dass der Differenzenquotienten links- wie rechtsseitigen Grenzwert 0 hat. Nach Lemma 5.1 existiert somit die Grenzwert des Differenzenquotienten gegen 0 und die Funktion ist in $x_0 = 0$ differenzierbar.



Wo genau ist der Fehler in dieser Argumentation?

Lösung.

□

5.2 Differentiationsregeln

Lemma 5.8. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $\lambda \cdot f$ sowie $f \pm g$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x_0) &= \lambda \cdot f'(x_0), \\ (f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0).\end{aligned}$$

A In der Sprache der Linearen Algebra ist also der Raum der auf I differenzierbaren Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und die Zuordnung $f \mapsto f'$ definiert eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung.

Beweis. Da wir stets $\lambda = 1$ oder $f \equiv 0$ wählen können, reicht es zum Beweis des Lemmas aus, zu zeigen, dass jede Funktion vom Typ $f \pm \lambda \cdot g$ in x_0 differenzierbar ist und die Rechenregel

$$(f \pm \lambda g)'(x_0) = f'(x_0) \pm \lambda \cdot g'(x_0)$$

erfüllt. Tatsächlich gilt in der Notation von Lemma 5.5 bereits

$$(f \pm \lambda g)(x) = f(x) \pm \lambda \cdot g(x) \stackrel{5.5}{=} (f(x_0) \pm \lambda \cdot g(x_0)) + (\Delta_f(x) \pm \lambda \Delta_g(x)) \cdot (x - x_0)$$

Aufgrund der Stetigkeit von Δ_f und Δ_g im Punkt x_0 ist dann auch $\Delta_f \pm \lambda \cdot \Delta_g$ in x_0 stetig. Es folgt, dass die Funktion $f \pm \lambda \cdot g$ nach Lemma 5.5 in x_0 differenzierbar ist und dort nach Konstruktion die Ableitung

$$(f \pm \lambda g)'(x_0) = \Delta_f(x_0) \pm \lambda \cdot \Delta_g(x_0) = f'(x_0) \pm \lambda \cdot g'(x_0)$$

besitzt. □

Im Jahr 1677 zeigte Leibniz eine weitere Rechenregel, die heute oft nach ihm die **Leibniz-Regel** genannt wird und über das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen spricht:

Lemma 5.9 (Produktregel). Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0

differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Beweis. In der Notation von Lemma 5.5 gilt

$$\begin{aligned} & (fg)(x) \\ &= f(x) \cdot g(x) \\ &\stackrel{5.5}{=} f(x_0) \cdot g(x_0) + [f(x_0) \cdot \Delta_g(x_0) + \Delta_f(x_0) \cdot g(x_0) + \Delta_f(x_0) \cdot \Delta_g(x_0) \cdot (x - x_0)] \cdot (x - x_0). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist als Summe von Produkten von Funktionen, die nach Voraussetzung bzw. Satz 5.6 stetig in x_0 sind, wieder stetig in x_0 . Es folgt, dass die Funktion $f \cdot g$ nach Lemma 5.5 in x_0 differenzierbar ist und dort nach Konstruktion die Ableitung

$$(fg)'(x_0) = f(x_0) \cdot \Delta_g(x_0) + \Delta_f(x_0) \cdot g(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

besitzt. □

Beispiel 5.10. Für alle $r \in \mathbb{N}_0$ und alle $(r+1)$ -Tupel von Koeffizienten $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ ist die wie in Beispiel 4.11 (c) gegebene Polynomfunktion

$$p: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \sum_{k=0}^r a_k x^k \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und besitzt dort die Ableitung

$$p'(x) = \sum_{k=1}^r a_k k x^{k-1},$$

denn: Nach Lemma 5.8 und Beispiel 5.4 (a) folgt die Behauptung sofort, wenn wir zeigen können, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die durch $x \mapsto x^k$ gegebene Potenzfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und dort die Ableitung $x \mapsto k \cdot x^{k-1}$ besitzt. Das führen wir in einem Induktionsbeweis durch:

Induktionsanfang: Nach Beispiel 5.4 (b) gilt

$$\frac{d}{dx} x^1 = \text{id}'_{\mathbb{R}}(x) = 1 = 1 \cdot x^0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Das zeigt die Behauptung für $k = 1$.

Induktionsschritt: Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt und leiten daraus ihre Gültigkeit für $k+1$ her. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^{k+1} &= \frac{d}{dx} (x \cdot x^k) \\ &\stackrel{5.9}{=} \left(\frac{d}{dx} x \right) \cdot x^k + x \cdot \left(\frac{d}{dx} x^k \right) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{IV}}{=} 1 \cdot x^k + x \cdot (k \cdot x^{k-1})$$

$$= (k+1) \cdot x^k$$

und also die Behauptung für $k+1$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung also für alle $k \in \mathbb{N}$.

#

Lemma 5.11 (Quotientenregel). Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen mit $g(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung erfüllt die in x_0 differenzierbare Funktion g die Eigenschaft $g(x_0) \neq 0$. Da g nach Satz 5.6 in x_0 stetig ist, folgt wie in der Überlegung im Beweis von Proposition 4.10, dass g in einer ganzen ε -Umgebung um x_0 nicht Null sein kann und somit der Quotient $\frac{f}{g}$ dort eine wohldefinierte Funktion beschreibt, die wir auf Differenzierbarkeit untersuchen können.

Aufgrund der Produktregel 5.9 reicht es weiter aus, zu zeigen, dass im Spezialfall $f \equiv 1$ die Behauptung

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

gilt. Dem ist aber so,

denn: Aufgrund der Differenzierbarkeit von g in x_0 gilt zunächst

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)} \stackrel{5.5}{=} \frac{\Delta_g(x) \cdot (x - x_0)}{g(x) \cdot g(x_0)}$$

und folglich

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)} + \left(-\frac{\Delta_g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)}\right) \cdot (x - x_0).$$

Der Ausdruck in Klammern ist als Verknüpfung von Funktionen, die nach Voraussetzung bzw. Satz 5.6 stetig in x_0 sind, wieder stetig in x_0 . Es folgt, dass die Funktion $\frac{1}{g}$ nach Lemma 5.5 in x_0 differenzierbar ist und dort nach Konstruktion die Ableitung

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{\Delta_g(x_0)}{g(x_0)^2} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

besitzt.

#

□

Beispiel 5.12. Seien $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen und sei D das als Urbild der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter der stetigen Abbildung q offene Komplement der Nullstellenmenge von q in $\mathbb{R}$. Dann heißt der Quotient $\frac{p}{q}$ eine **rationale Funktion** und ist nach Beispiel 5.10 und der Quotientenregel 5.11 eine differenzierbare Funktion auf D . Die Ableitung lässt sich dann mit der gegebenen Formel bestimmen. So ist für ein $k \in \mathbb{N}$ etwa

$$\frac{d}{dx} x^{-k} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^k} = -\frac{kx^{k-1}}{(x^k)^2} = (-k) \cdot x^{-k-1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Lemma 5.13 (Kettenregel). Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(I) \subseteq J$ und $g: J \rightarrow \mathbb{R}$. Sind dann f in einem $x_0 \in I$ und g in $y_0 := f(x_0) \in J$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und besitzt dort die Ableitung

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. In der Notation von Lemma 5.5 gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &\stackrel{5.5}{=} g(f(x_0)) + \Delta_g(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)) \\ &\stackrel{5.5}{=} (g \circ f)(x_0) + \Delta_g(f(x)) \cdot (\Delta_f(x)(x - x_0)) \\ &= (g \circ f)(x_0) + [\Delta_g(f(x)) \Delta_f(x)] \cdot (x - x_0). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist stetig in x_0 , so dass $g \circ f$ differenzierbar in x_0 ist. Nach Konstruktion ist weiter

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Insgesamt haben wir die Behauptung gezeigt. □

Mitmachaufgabe 5.14. Oft sieht man zum Beweis der Kettenregel 5.13 die folgende, einfachere Argumentation:

Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Die Behauptung folgt bereits, wenn wir in beiden Brüchen zur Rechten x gegen x_0 gehen lassen.

Warum ist diese Argumentation problematisch?

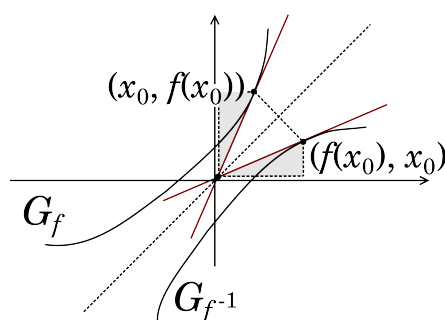
Lösung. □

In Fortführung der Überlegungen von Mitmachaufgabe 1.59 erhalten wir nun ein Lemma, das uns die Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion auf einem Intervall beschreibt:

Lemma 5.15. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend sowie in einem $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die laut Satz 4.50 wohldefinierte Umkehrabbildung f^{-1} in $f(x_0) =: y_0 \in f((a, b))$ ebenfalls differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Wir haben uns nach Definition 5.3 die Ableitung einer in einem Punkt x_0 differenzierbaren Funktion f als Steigung der Tangente an den Graphen G_f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ vorgestellt. Nach Mitmachaufgabe 1.59 ist der Graph $G_{f^{-1}}$ der inversen Funktion f^{-1} gerade das Spiegelbild des Graphen G_f an der ersten Winkelhalbierenden.



Existiert nun die Ableitung von f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$, so ist diese anschaulich die Steigung der Tangente an den Graphen $G_{f^{-1}}$ im Punkt $(y_0, f^{-1}(y_0)) = (f(x_0), x_0)$. Nach Konstruktion ist diese Tangente das Spiegelbild der Tangente an den Graphen G_f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an der ersten Winkelhalbierenden. Wie man durch Vergleichen der jeweiligen Steigungsdreiecke leicht erkennt, sind daher die Steigungen dieser Tangenten und also die Werte der Ableitungen von f in x_0 und von f^{-1} in y_0 multiplikativ zueinander invers.

⚠ Diese anschauliche Überlegung hilft uns nicht bei der entscheidenden Frage, ob die inverse Funktion f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ überhaupt differenzierbar ist.

Beweis von Lemma 5.15. Da f in x_0 differenzierbar ist, gibt es nach Lemma 5.5 eine stetige Funktion $\Delta_f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(x_0) + \Delta_f(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Da f streng monoton steigend ist, ist f insbesondere injektiv und wir erhalten

$$\Delta_f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0 \quad \text{für alle } x \neq x_0.$$

Nach Voraussetzung erhalten wir zudem

$$\Delta_f(x_0) = f'(x_0) \neq 0.$$

Nun ersetzen wir $x = f^{-1}(y)$. Nach Umsortieren erhalten wir so

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + \frac{y - y_0}{\Delta_f(f^{-1}(y))} = f^{-1}(y_0) + \frac{1}{\Delta_f(f^{-1}(y))} \cdot (y - y_0).$$

Der Vorfaktor ist hierbei wohldefiniert nach unseren Vorüberlegungen und stetig in y_0 , da f^{-1} dies nach Satz 4.50 ist und die Hintereinanderausführung stetiger Funktionen sowie die Inverse einer nirgendwo verschwindenden stetigen Funktion wieder stetig sind. Nach Lemma 5.5 ist somit f^{-1} in y_0 differenzierbar und besitzt dort die Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

Korollar 5.16. Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist die in Korollar 4.51 eingeführte n -te Wurzelfunktion $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ differenzierbar und besitzt dort die Ableitung

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}.$$

⚠ In $x = 0$ ist die n -te Wurzelfunktion nicht differenzierbar. Das kann man leicht über die Nichtexistenz des Grenzwerts des Differenzenquotienten für $x \rightarrow 0$ zeigen.

Beweis. Als Umkehrfunktion der streng monoton wachsenden und nach Beispiel 5.10 differenzierbaren n -ten Potenzfunktion ist die n -te Wurzelfunktion nach Lemma 5.15 auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar und hat dort die Ableitung

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{n}} \stackrel{5.15, 5.10}{=} \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}.$$

□

5.3 Der Mittelwertsatz

Definition 5.17. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Dann heißt $f: I \rightarrow \mathbb{R} \dots$

- ... **stetig differenzierbar**, falls f differenzierbar und $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.
- ... **2-fach differenzierbar** mit der zweiten Ableitung $f^{(2)} := f'' := (f')'$, falls $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Rekursiv definieren wir so für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$, wann eine Funktion (**stetig**) **n -fach differenzierbar** mit der n -ten Ableitung $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ ist und schreiben

$$C^0(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig in } I\}$$

$$C^n(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } n\text{-fach stetig differenzierbar auf } I\} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N},$$

$$C^\infty(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } n\text{-fach stetig differenzierbar auf } I \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Funktionen $f \in C^\infty(I)$ heißen **unendlich oft differenzierbar** oder auch **glatt**.

Offensichtlich gilt

$$C^0(I) \supseteq C^1(I) \supseteq \dots \supseteq C^n(I) \supseteq \dots \supseteq C^\infty(I)$$

bzw. $C^\infty(I) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(I).$

Bemerkung 5.18. Alle Inklusionen $C^n(I) \supseteq C^{n+1}(I)$ sind strikt, es gibt also für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}$, die n -fach stetig differenzierbar aber nicht $(n+1)$ -fach stetig differenzierbar ist. So ist etwa die durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für alle } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{für alle } x < 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $C^1(\mathbb{R})$ mit stetiger Ableitung $f'(x) = 2 \cdot |x|$, aber nach Beispiel 5.4 (c) nicht 2-fach differenzierbar und insbesondere nicht in $C^2(\mathbb{R})$.

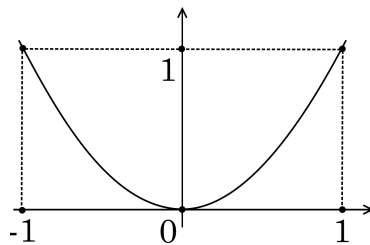
Definition 5.19. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ hat ein **lokales Minimum** bzw. **lokales Maximum** in x_0 , falls gilt:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap I: f(x_0) \leq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x_0) \geq f(x).$$

Beispiel 5.20. Die Funktion

$$f: \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

hat ein lokales Minimum in $x = 0$ und lokale Maxima in $x = \pm 1$.



Lemma 5.21 (notwendiges Kriterium für lokale Extrema). Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$ ein **lokales Extremum**, also ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum, von f . Ist dann f in x_0 differenzierbar, so gilt bereits $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Ohne Einschränkung gehen wir für den Beweis davon aus, dass f in x_0 ein lokales Maximum besitzt; der Fall eines lokalen Minimums geht analog. Nach Voraussetzung und da x_0 im Inneren von I liegt, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(x_0) \subseteq I \quad \text{und} \quad f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in U_\varepsilon(x_0).$$

Ist nun Δ_f die nach Lemma 5.5 existente, in x_0 stetige Funktion mit

$$f(x) = f(x_0) + \Delta_f(x) \cdot (x - x_0),$$

so gilt

$$\Delta_f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0), \\ \leq 0 & \text{für alle } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Im Grenzübergang gegen x_0 folgt daraus

$$\lim_{x \nearrow x_0} \Delta_f(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow x_0} \Delta_f(x) \leq 0. \quad (5.1)$$

Nun ist aber $\Delta_f(x)$ stetig in x_0 und erfüllt $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta_f(x) = f'(x_0)$. Nach Lemma 5.1 gilt daher

$$\lim_{x \nearrow x_0} \Delta_f(x) = f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \Delta_f(x)$$

und mit (5.1) folgt $f'(x_0) = 0$, so dass wir die Behauptung gezeigt haben. $\square$

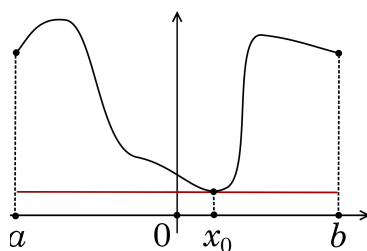
▲ Das notwendige Kriterium 5.21 ist nicht hinreichend. So ist etwa die durch $f(x) = x^3$ gegebene Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$, besitzt aber in $x_0 = 0$ kein lokales Extremum.

Satz 5.22 (Satz von Rolle). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Gilt dann $f(a) = f(b)$, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Michel Rolle, geboren am 21. April 1652 in Ambert und gestorben am 8. November 1719 in Paris, war ein französischer Mathematiker, der sich in erster Linie mit der Algebra und diophantischen Gleichungen beschäftigte. 1690 erschien sein *Traité d'algèbre*, in der er auch das heute übliche Zeichen für n -te Wurzeln einführte. In der Analysis bekannt ist der nach ihm benannte Satz über differenzierbare Funktionen. Dieser hat bei Rolle seinen Ursprung in einer umfassenderen algebraischen Theorie, die er *Theorie der Kaskaden* nannte und die im Wesentlichen im Übergang von einem Polynom zu seiner Ableitung bestand, obwohl Rolle selbst noch keine Begriffe der Infinitesimalrechnung benutzte.



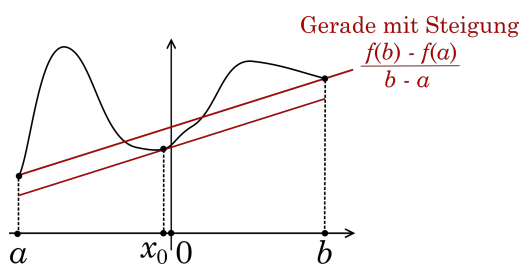
Wir hatten uns die Ableitung von f in x_0 als die Steigung der Tangente an den Graphen G_f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ vorgestellt. Damit $f'(x_0) = 0$ gilt, muss die Tangente waagrecht verlaufen. Anschaulich können wir stets eine solche Tangente finden, indem wir eine waagerechte Gerade so lange senkrecht nach oben bzw. unten verschieben, bis sie am Graphen von f „anstößt“.



Beweis von Satz 5.22. Nach Korollar 4.41 nimmt die stetige Funktion f auf dem Kompaktum $[a, b]$ ihr Minimum $\min f$ in einem $x_{\min} \in [a, b]$ und ihr Maximum $\max f$ in einem $x_{\max} \in [a, b]$ an. Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, die Funktion f sei nicht konstant. Dann gilt $\min f < \max f$ und aufgrund von $f(a) = f(b)$ liegt mindestens eines der Extrema $x_{\min}, x_{\max}$ bereits im Inneren (a, b) . Der Satz folgt, da nach dem notwendigen Kriterium für lokale Extrema 5.21 die Ableitung von f an dieser Stelle bereits den Wert 0 annimmt. $\square$

Satz 5.23 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Beweis. Statt f betrachten wir die Funktion

$$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a),$$

bei der wir von f die lineare Funktion durch $(a, f(a))$ mit Steigung $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ abziehen. Diese ist nach Konstruktion in $[a, b]$ stetig, auf (a, b) differenzierbar und erfüllt $\tilde{f}(a) = f(a) = \tilde{f}(b)$. Wir können somit den Satz von Rolle 5.22 auf $\tilde{g}$ anwenden und erhalten die Existenz eines $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = \tilde{f}'(x_0) = f'(x_0) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Das zeigt den Satz. □

Korollar 5.24. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:

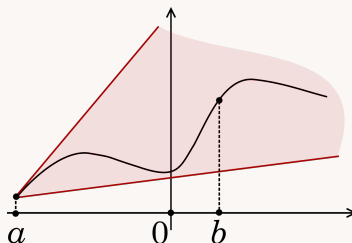
(a) Aus $m \leq f'(x) \leq M$ für alle $x \in I$ folgt

$$\forall a, b \in I \text{ mit } a < b: m \cdot (b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M \cdot (b - a).$$

Anders ausgedrückt gilt also

$$\forall a, b \in I \text{ mit } a < b: f(a) + m \cdot (b - a) \leq f(b) \leq f(a) + M \cdot (b - a),$$

so dass wir den Graphen von $f(x)$ für $x \geq a$ durch zwei Geraden durch $(a, f(a))$ eingeschlossen haben.



(b) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f konstant.

(c) Gilt $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend.

Beweis. Zum Beweis von Behauptung (a) wenden wir den Mittelwertsatz 5.23 auf die Funktion $f|_{[a,b]}$ an und erhalten die Existenz eines $x_0 \in (a, b)$ mit

$$m \leq f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M.$$

Die Behauptung folgt durch Multiplizieren mit $b - a$.

Wir zeigen nun Behauptung (b). Gilt $0 \leq f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$, so folgt mit Aussage (a) für $m = M = 0$ bereits $f(a) = f(b)$ für alle $a, b \in I$ mit $a < b$. Das ist die Konstanz von f und somit Behauptung (b).

Zum Beweis von Behauptung (c) benutzen wir, dass nach dem Mittelwertsatz 5.23 für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit

$$f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a).$$

Ist nun $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist insbesondere $f'(x_0) > 0$ und also $f(b) - f(a) > 0$. Da dies für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ gilt, folgt, dass in diesem Fall f auf I streng monoton steigend ist. Ist andererseits $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so folgt analog, dass f auf I streng monoton fallend ist. Das ist Behauptung (c). □

⚠ Diese Aussagen gelten nur im Fall, dass I ein Intervall und somit zusammenhängend ist. Betrachten wir etwa

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (0,1), \\ 1 & \text{für } x \in (1,2). \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 0$ auf ganz $(0,1) \cup (1,2)$, aber offensichtlich nicht konstant.

Lemma 5.25 (hinreichendes Kriterium für lokale Extrema). Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in C^2(I)$. Gelten dann $(f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x) > 0)$ bzw. $(f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0)$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum bzw. ein lokales Maximum.

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir an, es sei $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$; der andere Fall lässt sich genauso beweisen. Da f'' nach Voraussetzung stetig ist, folgt aus $f''(x_0) > 0$ die Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit $f''(x) > 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap I =: J$, wobei J nach Satz 4.45 (a) ein Intervall ist. Wir können daher Korollar 5.24 (c) auf $f'|_J$ anwenden und erhalten, dass $f'|_J$ streng monoton wachsend ist. Für ein $x_1 \in J$ folgt nun nach dem Mittelwertsatz 5.23

$$\begin{aligned} \exists x_2 \in (x_0, x_1): f(x_1) - f(x_0) &= f'(x_2) \cdot (x_1 - x_0) > f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) = 0 & \text{falls } x_0 < x_1, \\ \exists x_2 \in (x_1, x_0): f(x_1) - f(x_0) &= f'(x_2) \cdot (x_1 - x_0) > f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) = 0 & \text{falls } x_0 > x_1. \end{aligned}$$

Für alle $x_1 \in J \setminus \{x_0\}$ gilt also $f(x_1) > f(x_0)$, so dass x_0 ein lokales Minimum ist. □

Satz 5.26 (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind. Ist dann $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. Tatsächlich gilt unter den Voraussetzungen $g(a) \neq g(b)$,

denn: Nehmen wir an, es gälte $g(a) = g(b)$. Dann wären für g die Voraussetzungen des Satzes von Rolle 5.22 erfüllt und es gäbe nach diesem ein $c \in (a, b)$ mit $g'(c) = 0$. Das steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und kann daher nicht sein. Es folgt die Behauptung. #

Um nun die Existenz eines $x_0 \in (a, b)$ wie gefordert zu zeigen, definieren wir die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g(x) \cdot (f(b) - f(a)).$$

Diese ist nach den Voraussetzungen an f und g stetig in $[a, b]$ sowie differenzierbar auf (a, b) , so dass nach dem Mittelwertsatz 5.23 ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$h'(x_0) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = 0$$

existiert, wobei man die letzte Gleichheit durch plumpes Einsetzen und Ausrechnen erhält. Berechnen wir die Ableitung von h , so erhalten wir

$$f'(x_0) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(x_0) \cdot (f(b) - f(a)) = 0$$

und nach leichten Umformungen unter Berücksichtigung von $g(b) - g(a) \neq 0$ die Behauptung. $\square$

! Es ist nicht möglich, diesen Satz zu beweisen, indem man den Mittelwertsatz 5.23 direkt auf die Funktionen f und g anwendet, weil man so zwei im Allgemeinen *verschiedene* Werte $x_1, x_2 \in (a, b)$ erhält, an denen die jeweiligen Aussagen gelten.

Satz 5.27 (Regel von de L'Hospital). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind, wobei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gelte. Gilt dann

- $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$,
- $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert,

so gilt

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die analoge Aussage für $x \rightarrow a$ anstelle von $x \rightarrow b$ gilt genauso.

Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital, geboren 1661 in Paris und gestorben am 2. Februar 1704 ebenda, war ein französischer Mathematiker. Am bekanntesten ist er für die nach ihm benannte Regel von de L'Hospital, die aber eigentlich von Johann I Bernoulli entdeckt wurde. L'Hospital ist auch der Autor des ersten Lehrbuches über Differentialrechnung, welches 1696 veröffentlicht wurde. Es beinhaltet Schriften seines Lehrers Bernoulli. In einem Vorwort erweist L'Hospital den Bernoullis und Leibniz seinen Dank, nimmt aber gleichzeitig für sich in Anspruch, die Grundlagen der Darstellung der Differentialrechnung in seinem Buch selbst entwickelt zu haben. Erst im 20. Jahrhundert wurden die Manuskripte von Bernoullis Vorlesungen in Paris, denen L'Hospital in seinem Buch folgte, und diesbezügliche finanzielle Abmachungen mit diesem bekannt.



Beweis von Satz 5.27. Wir zeigen nur den Fall von $x \rightarrow b$ für

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0.$$

Dort können wir f und g durch $f(b) := 0$ und $g(b) := 0$ stetig auf $(a, b]$ fortsetzen. Da nach Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, können wir den verallgemeinerten Mittelwertsatz 5.26 für ein beliebiges $x \in (a, b)$ auf die Einschränkungen $f|_{[x, b]}$, $g|_{[x, b]}$ anwenden und erhalten die Existenz eines $x_0 \in (x, b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Da x_0 nach Konstruktion in (x, b) liegt, geht es für $x \rightarrow b$ ebenfalls gegen b . Es folgt

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und somit die Behauptung. □

Beispiel 5.28. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1,$$

denn: Dieser Grenzwert ist schwer direkt zu berechnen, da Zähler und Nenner für $x \rightarrow 0$ beide gegen Null gehen. In der Tat: Schreiben wir $f(x) := \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ und $g(x) := x$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Nach Korollar 5.16 und der Kettenregel bzw. Beispiel 5.10 gilt nun aber

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \quad \text{und} \quad g'(x) = 1.$$

Der Grenzwert

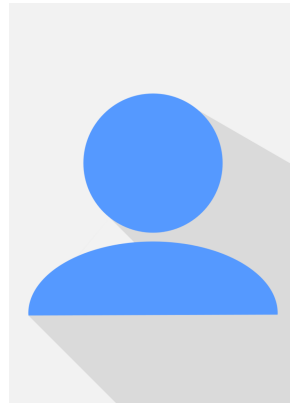
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) = 1$$

und existiert insbesondere. Wir können daher die Regel von de L'Hospital 5.27 anwenden, nach der der ursprünglich zu untersuchende Grenzwert ebenfalls den Wert 1 annimmt. #

5.4 Geometrische Einführung der trigonometrischen Funktionen

Wir führen nun – ganz ähnlich wie in der Schule – mit den Methoden der elementaren Geometrie die im Weiteren sehr wichtigen trigonometrischen Funktionen ein. Die hierbei verwendeten Argumente sind teilweise heuristischer Natur, wenn wir etwa Begriffe wie den der „Fläche“ oder den der „Länge“ einer „Kurve“ ohne streng mathematische Definition verwenden.

Bartholomäus Pitiscus, geboren am 24. August 1561 in Schloin bei Grünberg im Fürstentum Glogau und gestorben am 2. Juli 1613 in Heidelberg, war reformierter Theologe und ab 1594 Oberhofprediger am kurfürstlichen Hof zu Heidelberg. Neben theologischen Schriften verfasste Pitiscus mathematische Arbeiten. Sein bedeutendster Beitrag war die *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* aus dem Jahr 1595. Mit diesem Buch prägte er den Begriff der Trigonometrie („Dreiecksmessung“). *Von Pitiscus habe ich kein gemeinfreies Portrait gefunden.*



Für ein $r \in \mathbb{R}^+$ seien also

$$A(r) := \text{Flächeninhalt von } \overline{U_r(0)} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (\text{Area})$$

$$C(r) := \text{Umfang des Kreises } \partial U_r(0). \quad (\text{Circumferentia})$$

Um diese Größen zu bestimmen, nähern wir den Kreis $\partial U_r(0)$ für $n \geq 3$ durch umschreibende regelmäßige n -Ecke $P_n(r)$ mit Schwerpunkt im Ursprung an. Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ gehen diese in den angenäherten Kreis über. Setzen wir nun

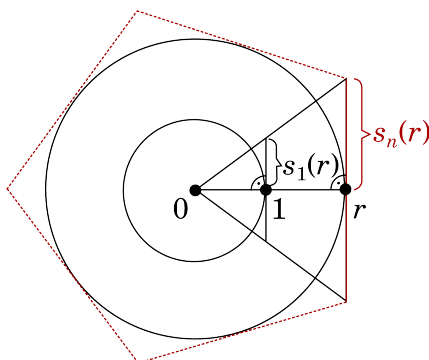
$$A_n(r) := \text{Flächeninhalt von } P_n(r),$$

$$C_n(r) := \text{Umfang von } P_n(r),$$

so gilt in der Notation der Abbildung nach Konstruktion

$$A_n(r) = n \cdot s_n(r) \stackrel{\text{Strahlensatz}}{=} n \cdot s_n(1) \cdot r^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A(1) \cdot r^2,$$

$$C_n(r) = 2n \cdot s_n(r) \stackrel{\text{Strahlensatz}}{=} 2n \cdot s_n(1) \cdot r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \cdot A(1) \cdot r.$$



Setzen wir nun $\pi := A(1)$, so erhalten wir die bekannten Formeln

$$A(r) = \pi \cdot r^2,$$

$$C(r) = 2\pi \cdot r$$

für den Flächeninhalt und den Umfang der Kreise mit Radius r . Die Zahl π heißt auch die **Kreiszahl** oder die **Ludolph'sche Zahl**. Es gilt

$$\pi = 3,14159\dots$$

Betrachten wir speziell das kleine rechtwinklige Dreieck in der Abbildung genauer und bezeichnen seinen Winkel am Ursprung mit φ , so läuft dieser also bei einer Umrundung des Kreises im Gegenuhrzeigersinn von 0 bis $C(1) = 2\pi$.

Ludolph van Ceulen, geboren am 28. Januar 1540 in Hildesheim und gestorben am 31. Dezember 1610 in Leiden, war ein Fechtmeister und Mathematiker. Er ist noch heute berühmt durch die auf 35 Dezimalstellen genaue Berechnung der Kreiszahl π , den ersten Fortschritt nach der Berechnung auf 15 Nachkommastellen durch den persischen Mathematiker Dschamschid Masud al-Kaschi im Jahr 1424. Bis ins 19. Jahrhundert bezeichnete man π daher auch als Ludolph'sche Zahl. Er verbrachte einen Großteil seines Lebens mit diesen Berechnungen und ließ die 35 Stellen in seinen Grabstein eingravieren. Der Druck zur Rechten stammt aus dem Jahr 1625.



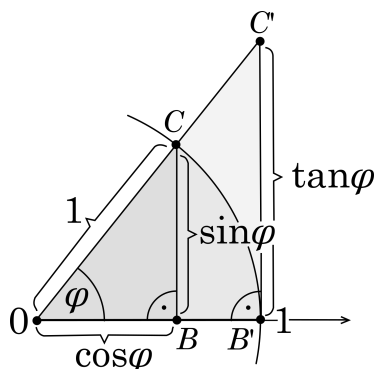
In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit rechtem Winkel bei B heißen die längste Seite die **Hypotenuse** und die beiden kürzeren Seiten die **Katheten**. Ist nun α der Winkel bei A , so setzen wir

$$\sin \alpha := \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}, \quad (\text{Sinus})$$

$$\cos \alpha := \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}, \quad (\text{Kosinus})$$

$$\tan \alpha := \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (\text{Tangens})$$

Betrachten wir nun speziell in der Situation des Umschreibens eines Kreises mit einem regelmäßigen n -Eck das Dreieck $\triangle OBC$, wobei wir die Punkte wie in der nachfolgenden Abbildung bezeichnen, so stellen wir fest, dass dessen Hypotenuse konstruktionsgemäß die Länge 1 besitzt, so dass die Längen der Katheten durch $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ gegeben sind. Mit dem Strahlensatz folgt hieraus noch $|\overline{B'C'}| = \tan \varphi$:



Vergleichen wir die in der Abbildung verschiedenen schattierten Flächeninhalte, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 A(\triangle OBC) &< A(\triangle O'B'C') < A(\text{Sector } OBC) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi &< \frac{\varphi}{2\pi} \cdot A(1) < \frac{1}{2} \cdot \tan \varphi \cdot 1 \\
 \Leftrightarrow \sin \varphi \cdot \cos \varphi &< \varphi < \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \\
 \Leftrightarrow \cos \varphi &< \frac{\varphi}{\sin \varphi} < \frac{1}{\cos \varphi}.
 \end{aligned}$$

Nach Definition von Sinus und Kosinus ist geometrisch klar, dass

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varphi \nearrow 0} \sin \varphi &= 0 = \lim_{\varphi \searrow 0} \sin \varphi, \\
 \lim_{\varphi \nearrow 0} \cos \varphi &= 1 = \lim_{\varphi \searrow 0} \cos \varphi
 \end{aligned}$$

gilt. Mit den obigen Abschätzungen erhalten wir so

$$\lim_{\varphi \nearrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) = \lim_{\varphi \nearrow 0} \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) = 1 = \lim_{\varphi \searrow 0} \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) = \lim_{\varphi \searrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right).$$

Für die Ableitungen von Sinus und Kosinus – für die wir formal weder Stetigkeit noch Differenzierbarkeit nachgewiesen haben – folgt an der Stelle $\varphi = 0$ hieraus

$$\begin{aligned}
 \sin' 0 &= \left(\frac{d}{d\varphi} \sin \varphi \right) \Big|_{\varphi=0} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi - \sin 0}{\varphi - 0} = 1, \\
 \cos' 0 &= \left(\frac{d}{d\varphi} \cos \varphi \right) \Big|_{\varphi=0} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\cos \varphi - \cos 0}{\varphi - 0} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\cos \varphi - 1}{\varphi} \cdot \frac{\cos \varphi + 1}{\cos \varphi + 1} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \varphi - 1}{\varphi \cdot (\cos \varphi + 1)} \\
 &\stackrel{\text{Pythagoras}}{=} - \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + 1} = -1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0,
 \end{aligned}$$

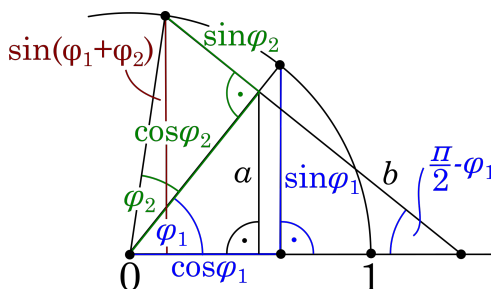
wobei wir den Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck $\triangle OBC$ anwenden. Um nun die Differenzierbarkeit von Sinus und Kosinus nachzuweisen und die jeweiligen Ableitungen zu

bestimmen, benötigen wir die Additionstheoreme von Sinus und Kosinus. Auch diese leiten wir uns geometrisch her:

Satz 5.29 (Additionstheoreme von Sinus und Kosinus). *Für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen:*

$$\begin{aligned}\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) &= \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \pm \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1, \\ \cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \mp \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2.\end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen das Additionstheorem des Sinus für die Addition der Winkel φ_1 und φ_2 und tragen diese dafür übereinander im Einheitskreis ab. Die Winkelgröße $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ ganz rechts in der nachstehenden Abbildung erhalten wir mit dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck.



Mit dem Strahlensatz erhalten wir in der Notation der Abbildung nun

$$\frac{a}{\cos \varphi_2} = \frac{\sin \varphi_1}{1} \quad \text{und also} \quad a = \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \frac{b + \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad \text{und also} \quad \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{a \cdot (b + \sin \varphi_2)}{b} \\ &= \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot (b + \sin \varphi_2)}{b}.\end{aligned}$$

Nach Definition von Sinus und Kosinus gilt weiter

$$\frac{a}{b} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \cos \varphi_1 \quad \text{und also} \quad b = \frac{a}{\cos \varphi_1} = \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir das Additionstheorem des Sinus für die Addition der Winkel. Ersetzen wir dort φ_2 durch $-\varphi_2$, so erhalten wir das Additionstheorem des Sinus für die Subtraktion der Winkel.

Das Additionstheorem des Kosinus zeigt man analog. □

Wir nutzen dieses Resultat nun aus und zeigen

$$\begin{aligned}
 \sin' \varphi &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\varphi + h) - \sin \varphi}{h} \\
 &\stackrel{5.29}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi \cdot \cos h + \cos \varphi \cdot \sin h - \sin \varphi}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin \varphi \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos \varphi \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\
 &= \cos \varphi
 \end{aligned}$$

und analog

$$\cos' \varphi = -\sin \varphi.$$

Eine unmittelbare Konsequenz hieraus ist $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$.

5.5 Taylor-Entwicklung

Definition 5.30. Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$. Dann heißt

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

das *n-te Taylor-Polynom* von f an der Stelle x_0 . Es gilt

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Das *n-te Restglied* r_n ist gegeben durch

$$r_n := f - p_n.$$

Brook Taylor, geboren am 18. August 1685 in Edmonton (Middlesex) und gestorben am 29. Dezember 1731 in London, war ein britischer Mathematiker. Sein Werk *Methodus incrementorum directa & inversa* aus dem Jahr 1715 enthielt die ihm seit 1712 bekannte Potenzreihenentwicklung einer differenzierbaren Funktion, deren grundlegende Bedeutung für den Differentialkalkül Joseph-Louis Lagrange erst 1772 bemerkte. Das Gemälde zur Rechten zeigt ihn 1720 im Alter von 35 Jahren.



Satz 5.31. Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$. Dann ist p_n die einzige Polynomfunktion, die

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

erfüllt. Wir sagen, das Taylor-Polynom p_n **approximiert** die Funktion f bis zur Ordnung n .

Beweis. Nach der Regel von de L'Hospital 5.27 gilt für eine beliebige Polynomfunktion p

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - p'(x)}{n \cdot (x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - p^{(n)}(x)}{n!} = 0 \\ \iff p^{(k)}(x_0) &= f^{(k)}(x_0) \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Der Satz folgt, da eine Polynomfunktion p vom Grad n eindeutig durch die Werte $p(x_0)$, $p'(x_0), \dots, p^{(n)}(x_0)$ bestimmt ist. Letzteres stimmt,

denn: Eine beliebige Polynomfunktion p lässt sich in der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

schreiben. Wie man induktiv leicht zeigen kann, gilt dann für alle $k \in \{0, \dots, n\}$

$$p^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k,$$

so dass sich aus den Werten der diversen Ableitungen von p an der Stelle x_0 die Koeffizienten und somit die gesamte Polynomfunktion herleiten lässt. #

□

Satz 5.32. Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^{n+1}(I)$ und $x, x_0 \in I$. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0 , so dass für das n -te Restglied der Taylor-Entwicklung von f die folgende, von Lagrange entwickelte Formel gilt:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Beweis. Wir wenden den verallgemeinerten Mittelwertsatz 5.26 auf die Funktionen $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ und $g(x) := (x - x_0)^n$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{r_n(x)}{g(x)} &= \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{r'_n(x_1)}{g'(x_1)} && \text{für ein } x_1 \text{ zwischen } x \text{ und } x_0 \\ &= \frac{r'_n(x_1) - r'_n(x_0)}{g'(x_1) - g'(x_0)} = \frac{r''_n(x_2)}{g''(x_2)} && \text{für ein } x_2 \text{ zwischen } x_1 \text{ und } x_0 \\ &&& \text{und also zwischen } x \text{ und } x_0 \end{aligned}$$

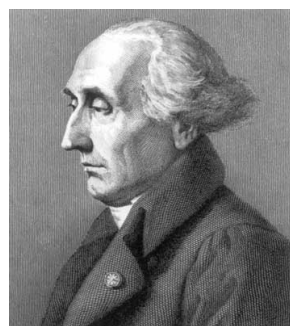
$$\vdots$$

$$= \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

für ein ξ zwischen x und x_0

□

Joseph-Louis de Lagrange, geboren am 25. Januar 1736 in Turin als Giuseppe Lodovico Lagrangia und gestorben am 10. April 1813 in Paris, war ein italienischer Mathematiker, Physiker und Astronom der später in Berlin und Paris wirkte. Lagrange begründete die analytische Mechanik, die er 1788 in seinem Lehrbuch *Mécanique analytique* darstellte. Weitere Arbeitsgebiete waren das Dreikörperproblem der Himmelsmechanik, die Variationsrechnung und die Theorie der komplexen Funktionen. In der Analysis ist die Lagrange'sche Darstellung des Restgliedes der Taylor-Formel bekannt. Das Erstellungsdatum der Abbildung zur Rechten ist unbekannt.



Korollar 5.33. Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^{n+1}(I)$ und $x_0 \in I$ mit

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Ist n gerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.
- (b) Ist n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.
- (c) Ist n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

Beweis. Nach Satz 5.32 gibt es zu jedem $x \neq x_0 \in I$ ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Da wir $f \in C^{(n+1)}(I)$ vorausgesetzt hatten, ist $f^{(n+1)}$ stetig, so dass es ein $\delta > 0$ gibt, für das $f^{(n+1)}$ in ganz $U_\delta(x_0)$ dasselbe Vorzeichen hat. Die Behauptungen folgen nun insgesamt aus dem Verhalten von $(x - x_0)^{n+1}$ in x_0 . □

Korollar 5.34. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^\infty(I)$. Gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ für alle $x \in I$, so wird die Funktion f auf I durch ihre **Taylor-Reihe** dargestellt, das heißt, es gilt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Beweis. Nach Definition gilt $p_n = f - r_n$, so dass der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$ für ein $x \in I$ genau dann existiert, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x)$ existiert. Ist dies der Fall, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x).$$

Da wir $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ vorausgesetzt haben, ergibt sich hieraus unmittelbar die Behauptung. $\square$

! Im Beweis haben wir gesehen, dass die Taylor-Reihe einer gegebenen Funktion nicht immer existiert und, wenn sie existiert, auch nicht mit der Funktion übereinstimmen muss.

Beispiel 5.35. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $I = \mathbb{R}$ und den Punkt $x_0 = 0$. Nach den Überlegungen am Ende von Abschnitt 5.4 gilt dann

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } k \in 4 \cdot \mathbb{N}_0, \\ \cos(x) & \text{für } k \in 4 \cdot \mathbb{N}_0 + 1, \\ -\sin(x) & \text{für } k \in 4 \cdot \mathbb{N}_0 + 2, \\ -\cos(x) & \text{für } k \in 4 \cdot \mathbb{N}_0 + 3. \end{cases}$$

All diese Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ betragsmäßig durch 1 beschränkt, wie wir über die Herleitung von Sinus und Kosinus über Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck wissen. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt daher für ein geeignetes ξ zwischen 0 und x die Asymptotik

$$|r_n(x)| \stackrel{5.32}{=} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und nach Korollar 5.34 erhalten wir

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$$

Analog gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$$

5.6 Übungsaufgaben