

Funktionentheorie 2

Wintersemester 2025

Dr. Hendrik Kasten

28. Januar 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Riemann'sche Flächen	3
1.1	Der Begriff der Riemann'schen Fläche	3
1.2	Holomorphe Abbildungen	13
1.3	Meromorphe Funktionen	16
1.4	Einfache Eigenschaften holomorpher Abbildungen	18
1.5	Elliptische Funktionen	25
1.6	Übungsaufgaben	34
2	Überlagerungstheorie	39
2.1	Homotopie und Fundamentalgruppe	39
2.2	Überlagerungen	44
2.3	Hochhebungen	47
2.4	Unverzweigte unbegrenzte Überlagerungen	50
2.5	Die universelle Überlagerung	56
2.6	Diskontinuierliche Gruppenaktionen	62
2.7	Eine Klassifikation der Riemann'schen Flächen	71
2.8	Übungsaufgaben	77
3	Modulkurven	80
3.1	Die Gruppe der Möbius-Transformationen	80
3.2	Fixpunkte von Möbius-Transformationen	84
3.3	Gruppenaktionen durch Möbius-Transformationen	87
3.4	Kongruenzuntergruppen	91
3.5	Fuchs'sche Gruppen	101
3.6	Der Begriff der Modulkurve	103
3.7	Modulfunktionen	109
3.8	Übungsaufgaben	112
4	Differentialformen	116
4.1	Garben	116
4.2	Meromorphe Differentialformen auf Riemann'schen Flächen	120
4.3	Integration von Differentialformen	126
4.4	Garbenkohomologie	134

4.5	Die exakte Kohomologiesequenz	141
4.6	Der Satz von Riemann-Roch	146
4.7	Die Formel von Riemann-Hurwitz	150
4.8	Die Geschlechtsformel	152
4.9	Übungsaufgaben	154

Riemann'sche Flächen

Vermutlich von den Arbeiten Abels über Additionstheoreme elliptischer Funktionen inspiriert, begründete RIEMANN¹ in seiner Dissertation 1851 und einem Folgeartikel aus dem Jahr 1857 einen völlig neuen, geometrischen Zugang zu der Beschreibung von analytischen Funktionen. Statt mit Formeln versuchte er, diese durch ihr qualitatives Verhalten zu charakterisieren. Die von Riemann angestoßene Theorie verlangte aber neuartige mathematische Konzepte und Techniken aus Topologie und Analysis, die erst danach entwickelt wurden. Ihren logischen Abschluss fand sie daher erst später, im 1913 erschienenen Buch *Die Idee der Riemann'schen Fläche* von WEYL². Wir führen in diesem Kapitel den Begriff der *Riemann'schen Fläche* ein und studieren elementare Eigenschaften von Riemann'schen Flächen und Abbildungen zwischen ihnen. Abschließend studieren wir mit den elliptischen Funktionen einen klassischen Beispielfall für diese Theorie.

1.1 Der Begriff der Riemann'schen Fläche

Bevor wir den Begriff der Riemann'schen Fläche einführen, wollen wir uns einige topologische Grundbegriffe in Erinnerung rufen:

Definition 1.1. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ aus einer Menge X und einer Teilmenge $\mathcal{O}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X mit den Eigenschaften

(T_1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(T_2) Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ ist in $\mathcal{O}$.

(T_3) Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ ist in $\mathcal{O}$.³

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

²Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955)

³Offensichtlich genügt es zum Nachweis von (T_3) zu zeigen, dass der Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathcal{O}$ wieder in $\mathcal{O}$ liegt. Letzteres ist oftmals weniger aufwändig.

Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so nennen wir $\mathcal{O}$ eine **Topologie** auf X und die Elemente von $\mathcal{O}$ die **offenen Mengen** von X . Statt $(X, \mathcal{O})$ schreiben wir dann oft auch einfacher X für den topologischen Raum und merken uns, dass die Topologie durch $\mathcal{O}$ gegeben ist.

Beispiel 1.2. (a) Eine beliebige Menge X lässt sich mit der **diskreten** Topologie versehen, bezüglich welcher alle Teilmengen von X offen sind. Wir sprechen dann vom diskreten Raum $X_{\text{disk}} := (X, \mathcal{P}(X))$.

(b) Eine beliebige Menge X lässt sich mit der **indiskreten** Topologie versehen, bezüglich welcher $\emptyset$ und X die einzigen offenen Teilmengen von X sind. Wir sprechen dann vom indiskreten Raum $X_{\text{indisk}} := (X, \{\emptyset, X\})$.

Definition 1.3. Seien $(X, \mathcal{O})$ und $(Y, \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sagen wir:

$$\begin{aligned} f \text{ ist stetig} &: \iff \text{für alle } U' \in \mathcal{O}' \text{ gilt } f^{-1}(U') \in \mathcal{O}, \\ f \text{ ist offen} &: \iff \text{für alle } U \in \mathcal{O} \text{ gilt } f(U) \in \mathcal{O}'. \end{aligned}$$

Klar, dass Verkettungen stetiger Abbildungen wieder stetig und Verkettungen offener Abbildungen wieder offen sind.

Beispiel 1.4. Sei X eine beliebige Menge und sei Y ein beliebiger topologischer Raum. Dann gelten für den wie in Beispiel 1.2 definierten topologischen Raum X_{disk} offensichtlich die folgenden Aussagen:

(a) Jede Abbildung $X_{\text{disk}} \rightarrow Y$ ist stetig.

(b) Jede Abbildung $Y \rightarrow X_{\text{disk}}$ ist offen.

Definition 1.5. Seien X, Y topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sagen wir:

$$\begin{aligned} f \text{ ist ein Homöomorphismus} &: \iff f \text{ ist stetig, } f \text{ ist bijektiv und } f^{-1} \text{ ist stetig} \\ &\iff f \text{ ist stetig, bijektiv und offen.} \end{aligned}$$

Die topologischen Räume X, Y heißen **homöomorph**, in Zeichen: $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt. Offensichtlich ist Homöomorphie eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume.

Definition 1.6. Ein topologischer Raum X mit der Trennungseigenschaft

(T₂) Für alle $x \neq y \in X$ gibt es offene Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.

heißt **HAUSDORFF'sch**⁴ oder auch ein **Hausdorff-Raum**.

⁴Felix Hausdorff (1868–1942)

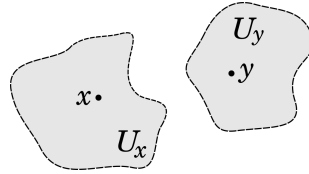


Abbildung 1.1: In einem Hausdorff-Raum lassen sich zwei beliebige Punkte durch offene Umgebungen trennen.

Beispiel 1.7. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathbb{R}^n$ Hausdorff'sch,

denn: Für $n = 0$ gibt es in $\mathbb{R}^n$ keine zwei verschiedenen Punkte, so dass nichts zu zeigen ist. Für $n \geq 1$ betrachten wir zu je zwei verschiedenen Punkten $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ die offenen Kugeln $U_r(x)$ und $U_r(y)$ mit Radius $r = \frac{1}{3} \cdot \|x - y\|_2$, wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. #

Via $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ folgt, dass auch $\mathbb{C}^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ Hausdorff'sch ist.

Definition 1.8. Ein topologischer Raum X erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls es eine höchstens abzählbare Basis der Topologie von X gibt.⁵

Beispiel 1.9. Trivialerweise erfüllt $\mathbb{R}^0$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ erfüllt $\mathbb{R}^n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, da die abzählbare Menge der offenen Kugeln $U_r(q)$ mit $r \in \mathbb{Q}$ und $q \in \mathbb{Q}^n$ offensichtlich eine Basis der Standardtopologie von $\mathbb{R}^n$ bildet. Entsprechend erfüllt auch $\mathbb{C}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Nun können wir schrittweise die Struktur der Riemann'schen Fläche einführen:

Definition 1.10. Für einen Hausdorff-Raum X und ein $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir:

- (a) Eine (**n -dimensionale**) **reelle (bzw. komplexe) Karte** von X ist ein Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$, wobei U eine beliebige offene Teilmenge von X und V eine beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) ist.
- (b) Ein (**n -dimensionaler**) **reeller (bzw. komplexer) Atlas** auf X ist ein System

$$\mathcal{A} := \left\{ \varphi_i: U_i \rightarrow V_i \text{ (n-dimensionale) reelle (bzw. komplexe) Karte von } X : \right. \\ \left. i \in I \text{ Indexmenge} \right\}$$

von Karten mit $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

⁵In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ eine **Basis** der Topologie $\mathcal{O}$, wenn bereits jedes $O \in \mathcal{O}$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. Nach dem **Basiskriterium** ist umgekehrt eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau dann Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf einer gegebenen Menge X , wenn die folgenden Axiome gelten:

(B1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

(B2) Für alle $B, C \in \mathcal{B}$ ist $B \cap C$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

In diesem Fall ist $\mathcal{O}$ eindeutig bestimmt und es gilt

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq X : U \text{ ist Vereinigung von Mengen aus } \mathcal{B}\}.$$

Definition 1.11. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Eine n -dimensionale reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit ist dann ein Hausdorff-Raum X mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom und einem n -dimensionalen reellen (bzw. komplexen) Atlas.

Etwas *ungenau* merken wir uns: Eine n -dimensionale reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit sieht lokal so aus wie $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$).

Beispiel 1.12. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) eine n -dimensionale reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit,

denn: Die Hausdorff-Eigenschaft und das zweite Abzählbarkeitsaxiom haben wir schon überprüft. Die Behauptung gilt daher bereits, weil die Identität $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ (bzw. $\text{id}_{\mathbb{C}^n}$) ein Homöomorphismus ist. #

Über die Identifikation zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ ist weiter $\mathbb{C}^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine $2n$ -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit.

Einen allgemeinen topologischen Raum darauf zu überprüfen, ob er eine Mannigfaltigkeit ist, kann recht aufwändig sein. Die Überprüfung des zweiten Abzählbarkeitsaxioms können wir uns jedoch in einer recht großen Klasse von Beispielen erleichtern;⁶ es gilt nämlich:

Lemma 1.13. Hat ein Hausdorff-Raum X einen reellen (bzw. komplexen) Atlas mit höchstens abzählbar vielen Karten, so erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis. Wie wir schon eingesehen haben, erfüllt $\mathbb{R}^n$ und damit auch jede offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Sei nun

$$\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \text{ reelle Karte von } X : i \in I\} \quad \text{mit einer Indexmenge } I$$

ein reeller Atlas von X mit einer höchstens abzählbaren Indexmenge I . Dann erfüllen für alle $i \in I$ die offenen Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom; es gibt also für jedes $i \in I$ eine höchstens abzählbare Menge J_i und offene Teilmengen $\{V_{i,j}\}_{j \in J_i}$ von V_i , so dass es für jedes offene $\tilde{V}_i \subseteq V_i$ eine Teilmenge $J_{\tilde{V}_i} \subseteq J_i$ gibt mit

$$\tilde{V}_i = \bigcup_{j \in J_{\tilde{V}_i}} V_{i,j}.$$

Sei nun $U \subseteq X$ eine beliebige offene Teilmenge. Für ein beliebiges $i \in I$ ist dann wegen der Homöomorphie der Karte φ_i das Bild $\varphi_i(U \cap U_i)$ eine offene Teilmenge von V_i . Nach unserer Vorüberlegung gibt es also eine Teilmenge $J_{\varphi_i(U \cap U_i)} \subseteq J_i$ mit

$$\varphi_i(U \cap U_i) = \bigcup_{j \in J_{\varphi_i(U \cap U_i)}} V_{i,j}$$

⁶Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass Riemann'sche Flächen nach dem Satz von RADÓ⁷ stets das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Wir leiten diesen nicht her; wer sich aber für diesen Aspekt nicht interessiert, kann diesen daher im Folgenden übergehen.

⁷Tibor Radó (1895–1965)

und also mit

$$U = \bigcup_{i \in I} (U \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U \cap U_i)) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_{\varphi_i(U \cap U_i)}} \varphi_i^{-1}(V_{i,j}).$$

Da die höchstens abzählbare Vereinigung höchstens abzählbarer Mengen wieder höchstens abzählbar ist, folgt die Behauptung für einen Hausdorff-Raum mit einem reellen Atlas mit höchstens abzählbar vielen Karten. Die entsprechende Aussage für einen komplexen Atlas mit höchstens abzählbar vielen Karten folgt sofort, weil sich jeder solche Atlas über die Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ als reeller Atlas interpretieren lässt. $\square$

Da jeder reelle (bzw. komplexe) Atlas auf einem kompakten Raum einen endlichen Teilatlas besitzt, wird dort die Situation besonders einfach:

Korollar 1.14. *Hat ein kompakter Hausdorff-Raum X einen beliebigen reellen (bzw. komplexen) Atlas, so erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Beispiel 1.15. *Die Riemann'sche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist eine kompakte eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit,*

denn: Als erstes zeigen wir, dass $\overline{\mathbb{C}}$ Hausdorff'sch ist, und legen dafür zunächst die Topologie auf $\overline{\mathbb{C}}$ fest: Wir setzen die (Hausdorff'sche) Standardtopologie auf $\mathbb{C}$ fort, indem wir im Punkt ∞ durch die Mengen

$$U_\varepsilon(\infty) := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{\infty\} \quad \text{mit } \varepsilon > 0$$

eine Umgebungsbasis⁸ angeben. Mit dieser Definition wird klar, dass sich auch der Punkt ∞ von einem beliebigen $z \in \mathbb{C}$ durch offene Umgebungen trennen lässt und $\overline{\mathbb{C}}$ somit Hausdorff'sch ist.

Nun wollen wir die Kompaktheit von $\overline{\mathbb{C}}$ zeigen. Jede offene Überdeckung von $\overline{\mathbb{C}}$ enthält eine Umgebung U_∞ von ∞ , und nach Definition der Topologie von $\overline{\mathbb{C}}$ enthält dieses U_∞ eine offene Menge $U_\varepsilon(\infty)$ mit geeignetem $\varepsilon > 0$ als Teilmenge. Die Menge

$$\overline{U_\varepsilon(\infty)} = \overline{\mathbb{C}} \setminus U_\varepsilon(\infty)$$

ist bekanntlich kompakt in $\mathbb{C}$ und wird somit durch eine endliche Teilüberdeckung der ursprünglichen Überdeckung von $\overline{\mathbb{C}}$ überdeckt. Die Kompaktheit von $\overline{\mathbb{C}}$ folgt, weil wir durch Hinzunahme von U_∞ zu dieser endlichen Teilüberdeckung eine endliche Teilüberdeckung unserer beliebigen offenen Überdeckung von $\overline{\mathbb{C}}$ gefunden haben.

⁸Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ und ein $x \in X$ heißt eine Familie $\mathcal{U}_x := (U_{x,i})_{i \in I_x}$ von offenen Umgebungen von x eine **Umgebungsbasis** von x , falls jede offene Umgebung von x mindestens eine der Umgebungen $U_{x,i}$ enthält. Die Kenntnis einer Topologie auf X ist gleichbedeutend dazu, in jedem Punkt $x \in X$ eine passende Umgebungsbasis angeben zu können. Das Angabens einer Umgebungsbasis von ∞ ist daher ein besonders unaufwändiger Weg, die Standardtopologie auf $\mathbb{C}$ auf die Riemann'sche Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auszuweiten.

Nach Korollar 1.14 und der Kompaktheit von $\overline{\mathbb{C}}$ genügt es zum Beweis der Behauptung nun, irgendeinen komplexen Atlas von $\overline{\mathbb{C}}$ anzugeben. Tatsächlich ist

$$\varphi_1: \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto z, \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_2: \begin{cases} \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto \frac{1}{z} \end{cases} \quad (1.1)$$

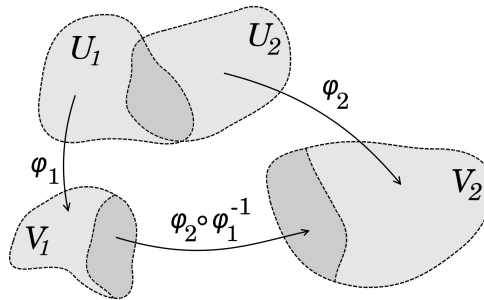
ein komplexer Atlas mit nur zwei Karten, denn dass $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup (\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ eine offene Überdeckung von $\overline{\mathbb{C}}$ darstellt und φ_1 ein Homöomorphismus ist, ist klar. Und die Homöomorphie von φ_2 gilt, weil $\varphi_2 = \varphi_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ eine selbstinverse meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$ mit einzigem Pol bei $z = 0$ ist. #

Definition 1.16. Sei nun X speziell eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann definieren wir die folgenden Begriffe:

- (a) Zwei komplexe Karten $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ von X mit $i \in \{1, 2\}$ heißen **biholomorph verträglich**, wenn die **Kartenwechselabbildung**

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

eine biholomorphe Funktion ist.



- (b) Sind die komplexen Karten eines komplexen Atlas $\mathcal{A}$ auf X paarweise biholomorph verträglich, so heißt $\mathcal{A}$ ein **biholomorpher Atlas** auf X .
- (c) Zwei biholomorphe Atlanten $\mathcal{A}_i$ von X mit $i \in \{1, 2\}$ heißen **biholomorph verträglich**, wenn jede komplexe Karte aus $\mathcal{A}_1$ mit jeder komplexen Karte aus $\mathcal{A}_2$ biholomorph verträglich ist.
- (d) Offensichtlich ist die biholomorphe Verträglichkeit biholomorpher Atlanten von X eine Äquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse unter dieser Relation heißt eine **komplexe Struktur** auf X .

Definition 1.17. Eine **Riemann'sche Fläche** ist ein Paar $(X, \mathcal{S})$ bestehend aus einer zusammenhängenden eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X und einer komplexen Struktur $\mathcal{S}$ auf X .

Eine komplexe Struktur ist im Allgemeinen schlecht anzugeben. Da andererseits jeder biholomorphe Atlas einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit einer eindeutigen komplexen Struktur derselben zugeordnet ist, genügt in der Praxis die Angabe eines Paares $(X, \mathcal{A})$ bestehend aus einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X und einem biholomorphen Atlas $\mathcal{A}$ von X . Man beachte jedoch, dass dies stets so zu verstehen sein muss, dass zur

Riemann'schen Fläche alle Karten gehören, die in einem biholomorphen Atlas aus der zu $\mathcal{A}$ gehörigen komplexen Struktur enthalten sind.

Wir wollen ab sofort unsere Notation wieder etwas einfacher halten. Wenn klar ist, dass wir uns im Kontext einer Riemann'schen Fläche $(X, \mathcal{S})$ bewegen, schreiben wir von nun an einfacher

- X für $(X, \mathcal{S})$,
- **Atlas von X** für einen biholomorphen Atlas aus der komplexen Struktur $\mathcal{S}$,
- **Karte von X** für eine komplexe Karte aus einem beliebigen biholomorphen Atlas aus der komplexen Struktur $\mathcal{S}$.

Beispiel 1.18. (a) Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist eine Riemann'sche Fläche,

denn: Dass $\mathbb{C}$ zusammen mit dem durch $\mathcal{A} = \{\text{id}_{\mathbb{C}}\}$ gegebenen komplexen Atlas eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist, hatten wir schon gesehen. Die Behauptung folgt, da offensichtlich $\mathbb{C}$ zusammenhängend und $\mathcal{A}$ biholomorph ist. #

(b) Die Riemann'sche Zahlenkugel $\bar{\mathbb{C}}$ ist eine kompakte Riemann'sche Fläche,

denn: Wir wissen, dass $\bar{\mathbb{C}}$ eine kompakte eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist. Außerdem ist $\bar{\mathbb{C}}$ offensichtlich zusammenhängend. Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, dass der in (1.1) gegebene Atlas $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ biholomorph ist. Dem ist aber so, denn zum einen gilt

$$\varphi_1(\mathbb{C} \cap (\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})) = \varphi_2(\mathbb{C} \cap (\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})) = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

und zum anderen ist

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ z & \mapsto \frac{1}{z} \end{cases}$$

biholomorph. #

Bemerkung 1.19. Sei $(X, \mathcal{S})$ eine Riemann'sche Fläche und $D \subseteq X$ ein **Gebiet**, also eine zusammenhängende offene Teilmenge von X . Für jeden biholomorphen Atlas $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{S}$ ist die Menge

$$\mathcal{A}|_D := \{\varphi|_{U \cap D}: U \cap D \rightarrow \varphi(U \cap D) : (\varphi: U \rightarrow V) \in \mathcal{A}\}$$

ein biholomorpher Atlas von D und liefert dort somit auch eine komplexe Struktur $\mathcal{S}|_D$. Das Paar $(D, \mathcal{S}|_D)$ ist also wieder eine Riemann'sche Fläche. Die Zuordnung $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}|_D$ ist dabei offensichtlich wohldefiniert.

Beispiel 1.20. Die obere Halbebene $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Riemann'sche Fläche,

denn: Nach Teil (a) von Beispiel 1.18 trägt die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ die Struktur einer Riemann'schen Fläche. Die Behauptung folgt mit Bemerkung 1.19, da $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$ bekanntlich ein Gebiet ist. #

Abschließend für diesen Abschnitt führen wir nun mit den Periodentori noch eine weitere Klasse Riemann'scher Flächen ein. Für deren Konstruktion holen wir ein wenig aus und erinnern zunächst an das Konzept des Gitters in $\mathbb{C}$:

Definition 1.21. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen. Dann heißt

$$\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 := \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

das von ω_1 und ω_2 aufgespannte **Gitter** und $\{\omega_1, \omega_2\}$ eine **Basis** von Λ . Offensichtlich lässt sich ein beliebiger Punkt $z \in \mathbb{C}$ schreiben als Summe $z = \tilde{z} + \omega$ mit einem $\omega \in \Lambda$ und einem $\tilde{z}$ aus der **Fundamentalmasche**

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_\Lambda := \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1, t_2 \in [0, 1]\}$$

des Gitters Λ . Diese Schreibweise ist eindeutig, falls $\tilde{z}$ nicht auf dem Rand $\partial\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ liegt. Wir erhalten eine Überdeckung

$$\mathbb{C} = \bigcup_{\omega \in \Lambda} (\mathcal{F}_\Lambda + \omega)$$

der komplexen Ebene mit Kopien der Fundamentalmasche.⁹

Bemerkung 1.22. Zwei $\mathbb{R}$ -Basen $\{\omega_1, \omega_2\}$ und $\{\omega'_1, \omega'_2\}$ von $\mathbb{C}$ sind genau dann Basen desselben Gitters Λ , wenn es eine Matrix

$$M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} : \det(A) \in \{\pm 1\}\}$$

gibt mit

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

denn: Übungsaufgabe 1.1

#

Ein beliebiges Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ bildet zusammen mit der Addition eine Untergruppe der abelschen Gruppe $(\mathbb{C}, +)$. Es folgt, dass der Quotient

$$\mathbb{C}/\Lambda := \{z + \Lambda : z \in \mathbb{C}\}$$

mit der vererbten Addition wieder die Struktur einer abelschen Gruppe trägt. Konstruktionsgemäß ist hierbei für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ die Menge $[z] := [z]_\Lambda := z + \Lambda$ die Äquivalenzklasse unter der durch

$$z \sim_\Lambda z' \iff z - z' \in \Lambda$$

⁹Diese Überdeckung wird überschneidungsfrei und somit eine Parkettierung, wenn man statt der Fundamentalmasche $\mathcal{F}$ die halboffene Menge

$$\{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1, t_2 \in [0, 1)\}$$

betrachtet. Dass wir dennoch die abgeschlossene Menge als Fundamentalmasche festlegen, liegt daran, dass so die „Verklebung“ des Fundamentalbereichs zu einem Torus (vgl. Definition 1.23 bis Satz 1.25) konzeptioneller ausfällt, weil dort so klar ist, womit ein Randpunkt verklebt werden soll.

gegebenen Äquivalenzrelation und $\mathbb{C}/\Lambda$ die Menge solcher Äquivalenzklassen. Durchläuft z ein nicht näher spezifiziertes Vertretersystem der Äquivalenzklassen von $\mathbb{C}/\Lambda$, so schreiben wir in Missbrauch der Notation manchmal auch $z \in \mathbb{C}/\Lambda$.

Definition 1.23. Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebiges Gitter. Dann heißt der Quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ der **Periodentorus** zu den, gemäß Bemerkung 1.22 nicht eindeutigen, **Perioden** ω_1 und ω_2 und die Abbildung

$$\pi_\Lambda: \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda, \\ z & \mapsto [z]_\Lambda \end{cases}$$

die **kanonische Projektion modulo Λ** .

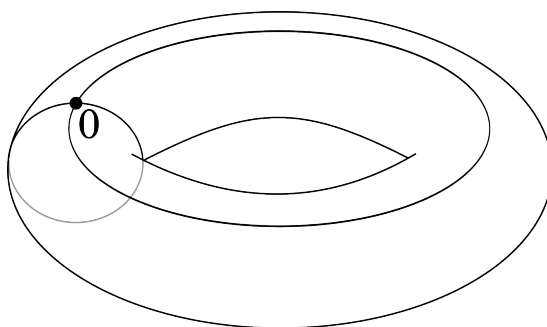


Abbildung 1.2: Den Periodentorus $\mathbb{C}/\Lambda$ kann man sich in der Form eines Doughnuts vorstellen. Die eingezeichneten Linien lassen die Fundamentalmasche $\mathcal{F}_\Lambda$ des Gitters erkennen.

Wir versehen nun für ein beliebiges Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ den Torus $\mathbb{C}/\Lambda$ mit der Struktur einer Riemann'schen Fläche. Zuerst müssen wir dafür eine Topologie auf $\mathbb{C}/\Lambda$ angeben. Dabei nutzen wir aus, dass wir auf $\mathbb{C}$ mit der Standardtopologie bereits eine Topologie kennen und versehen $\mathbb{C}/\Lambda$ mit der **Quotiententopologie** bezüglich der kanonischen Projektion $\pi_\Lambda: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$. Genauer bedeutet das

$$U \subseteq \mathbb{C}/\Lambda \text{ ist offen} \quad :\Longleftrightarrow \quad \pi_\Lambda^{-1}(U) \text{ ist offen in } \mathbb{C}.$$

Auf diese Weise wird π_Λ automatisch zu einer stetigen Abbildung. Andererseits ist π_Λ auch offen,

denn: Es ist zu zeigen, dass das Bild $\pi_\Lambda(V)$ einer beliebigen offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{C}$ offen ist. Nach Definition der Quotiententopologie genügt es, stattdessen die Offenheit von $\pi_\Lambda^{-1}(\pi_\Lambda(V))$ zu zeigen. Diese gilt aber, weil letzteres die Vereinigung der offenen Mengen $\omega + V$ mit $\omega \in \Lambda$ beliebig ist. #

Für den Torus lassen sich damit die folgenden Eigenschaften herleiten:

Lemma 1.24. Für ein beliebiges Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ ist der Torus $\mathbb{C}/\Lambda$ ein kompakter Hausdorff-Raum.

Beweis. Die Kompaktheit gilt, da $\mathbb{C}/\Lambda$ das Bild des Kompaktums $\mathcal{F}$ unter der stetigen Abbildung π_Λ ist.

Wir müssen nun noch die Hausdorff'eigenschaft zeigen. Seien dafür w_1, w_2 zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{C}/\Lambda$ und seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zwei Zahlen mit $\pi_\Lambda(z_j) = w_j$ für $j \in \{1, 2\}$. Ohne Einschränkung können wir dabei $z_2 - z_1 \in \mathcal{F}$ annehmen. Da $\mathbb{C}$ Hausdorff'sch ist, gibt es offene Umgebungen U_1 von z_1 und U_2 von z_2 mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann gilt trivialerweise $w_1 \in \pi_\Lambda(U_1)$ und $w_2 \in \pi_\Lambda(U_2)$. Ohne Einschränkung können wir außerdem annehmen, U_1 und U_2 seien offene Kreisscheiben, deren Radius kleiner ist als die Hälfte des Minimums der Beträge $|z_2 - z_1|$, $|z_2 - (z_1 + \omega_1)|$, $|z_2 - (z_1 + \omega_2)|$ und $|z_2 - (z_1 + \omega_1 + \omega_2)|$.

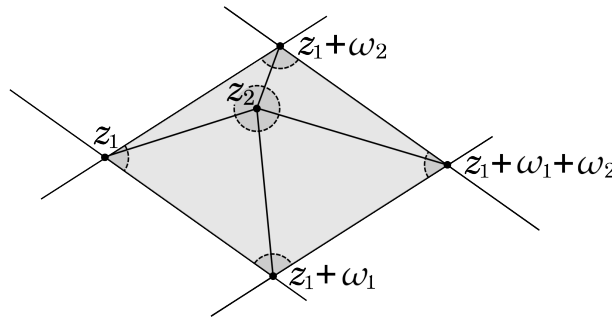


Abbildung 1.3: Die Umgebungen um z_1 und z_2 sind so klein gewählt, dass ihr Radius kleiner ist als die Hälfte des minimalen Abstands zwischen z_2 und einer der vier „Ecken“ der um z_1 verschobenen Fundamentalmasche.

Dann gilt auch $\pi_\Lambda(U_1) \cap \pi_\Lambda(U_2) = \emptyset$. Wegen der Offenheit von π_Λ sind schließlich $\pi_\Lambda(U_1)$ und $\pi_\Lambda(U_2)$ auch offen, so dass wir offene Umgebungen von w_1 und w_2 gefunden haben, durch die sich die beiden Punkte trennen lassen. $\square$

Satz 1.25. Für ein beliebiges Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ist der Torus $\mathbb{C}/\Lambda$ eine kompakte Riemann'sche Fläche.

Beweis. Nach Lemma 1.24 und Korollar 1.14 genügt es zum Beweis des Satzes, irgendeinen biholomorphen Atlas für $\mathbb{C}/\Lambda$ anzugeben. Das machen wir wie folgt: Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, die kein Paar voneinander verschiedener modulo Λ äquivalenter Punkte enthält. Wegen dieser Eigenschaft und der Stetigkeit und der Offenheit von π_Λ ist dann $\pi_\Lambda|_V: V \rightarrow \pi_\Lambda(V) =: U$ ein Homöomorphismus und wir können seine Umkehrabbildung $\varphi: U \rightarrow V$ als eine Karte von $\mathbb{C}/\Lambda$ wählen. Die Menge $\mathcal{A}$ aller Karten, die sich so erhalten lassen, ist offensichtlich ein komplexer Atlas von $\mathbb{C}/\Lambda$. Es verbleibt also zu zeigen, dass je zwei Karten aus $\mathcal{A}$ biholomorph verträglich sind.

Seien also $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ und $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2$ zwei Karten aus $\mathcal{A}$. Wir wollen die Biholomorphie der Funktion

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

nachweisen. Tatsächlich ist für $i \in \{1, 2\}$ auf $\varphi_i(U_1 \cap U_2) \subseteq V_i$ der Homöomorphismus π_Λ invers zur Karte φ_i , so dass

$$\pi_\Lambda((\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z)) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi_\Lambda(z) \quad \text{für alle } z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

gilt. Es folgt

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z) \sim_\Lambda z \quad \text{für alle } z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2),$$

also

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z) - z \in \Lambda \quad \text{für alle } z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2).$$

Eine stetige Abbildung hat genau dann ein Bild aus isolierten Punkten, wenn sie lokal konstant ist. Es gibt also zu jeder Zusammenhangskomponente K von $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ ein $\omega \in \Lambda$ mit

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z) = z + \omega \quad \text{für alle } z \in K.$$

Insbesondere ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ lokal eine Translation und als solche biholomorph, was zu zeigen war. $\square$

1.2 Holomorphe Abbildungen

Definition 1.26. Sei X eine Riemann'sche Fläche und sei $U \subseteq X$ offen. Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **holomorph** genau dann, wenn für alle Karten $\varphi': U' \rightarrow V'$ von X die Funktion

$$f \circ (\varphi')^{-1}: \varphi'(U' \cap U) \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph ist. Die Menge der holomorphen Funktionen auf U wird mit $\mathcal{O}(U)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.27. Sei X eine Riemann'sche Fläche. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Nach Definition 1.16 ist jede Karte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ von X eine holomorphe Funktion. Man nennt φ auch eine **lokale Koordinate** und (U, φ) eine **Koordinatenumgebung** eines jeden Punktes $x_0 \in U$. In diesem Zusammenhang schreibt man auch oft z für φ .
- (b) Holomorphe Funktionen wie in Definition 1.26 sind stetig,
denn: Übungsaufgabe 1.2. #
- (c) Wir müssen die Holomorphiebedingung aus Definition 1.26 nicht für alle Karten von X überprüfen, sondern nur für die Karten aus einem fest gewählten Atlas von X . Wegen der biholomorphen Verträglichkeit folgt die Aussage für die anderen Karten dann automatisch.
- (d) Punktweise Summen und Produkte holomorpher Funktionen sind offenbar wieder holomorph, genauso sind konstante Funktionen holomorph. Die Menge $\mathcal{O}(U)$ trägt so die Struktur einer $\mathbb{C}$ -Algebra.

Eine schöne Verallgemeinerung eines Satzes aus der Funktionentheorie ist der folgende:

Satz 1.28 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz). *Seien X eine Riemann'sche Fläche, $U \subseteq X$ offen und $x \in U$ ein beliebiger Punkt. Dann lässt sich jede beschränkte Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{x\})$ eindeutig zu einer Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ fortsetzen.*

Beweis. Es gilt zu zeigen, dass sich f holomorph nach x fortsetzen lässt. Sei dafür $\varphi: U' \rightarrow V'$ eine beliebige Karte von X mit $x \in U'$. Dann ist

$$f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi(U' \cap (U \setminus \{x\})))$$

eine beschränkte holomorphe Funktion. Nach dem aus der Funktionentheorie bekannten Riemann'schen Hebbarkeitssatz für $X = \mathbb{C}$ gibt es also eine holomorphe Fortsetzung

$$\widetilde{f \circ \varphi^{-1}} \in \mathcal{O}(\varphi(U' \cap U)).$$

Weil nach Definition der Riemann'schen Fläche alle Kartenwechselabbildungen biholomorph sind, ist dann nach Definition 1.26

$$\tilde{f} := \widetilde{f \circ \varphi^{-1}} \circ \varphi \in \mathcal{O}(U' \cap U).$$

Die Behauptung folgt, da φ beliebig gewählt war und die Karten von X ganz X überdecken. $\square$

Definition 1.29. *Seien X und Y Riemann'sche Flächen. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **holomorph**, falls für jedes Paar von Karten¹⁰ $\varphi: U \rightarrow V$ von X und $\psi: U' \rightarrow V'$ von Y mit $f(U) \subseteq U'$ die Funktion*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V'$$

holomorph ist. Die Menge der holomorphen Abbildungen von X nach Y wird mit $\text{Hol}(X, Y)$ bezeichnet.

*Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **biholomorph**, wenn sie bijektiv ist und sowohl f als auch ihre Umkehrabbildung holomorph sind. Zwei Riemann'sche Flächen heißen **biholomorph äquivalent**, wenn es eine biholomorphe Abbildung zwischen ihnen gibt. Die Menge der biholomorphen Abbildungen von X auf sich selbst nennen wir die **Automorphismengruppe** $\text{Aut}(X)$ von X .*

Bemerkung 1.30. (a) Im Spezialfall $Y = \mathbb{C}$ gilt $\text{Hol}(X, \mathbb{C}) = \mathcal{O}(X)$.

(b) Hintereinanderausführungen holomorpher Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen sind wieder holomorph.

Aus dem entsprechenden Satz der Funktionentheorie folgt nun:

Satz 1.31 (Identitätssatz für holomorphe Abbildungen). *Seien X, Y Riemann'sche Flächen und seien $f, g \in \text{Hol}(X, Y)$ holomorphe Abbildungen, für die die Menge*

$$N_{f-g} := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

in X einen Häufungspunkt x_0 enthält.¹¹ Dann stimmen die Funktionen f und g auf ganz X überein.

¹⁰An dieser Stelle ist es wichtig, sich zu verdeutlichen, dass die Karten von X und Y frei in der jeweiligen komplexen Struktur – und nicht nur in einem fest gewählten Atlas – ausgewählt werden dürfen, da es sonst sein kann, dass f keine Karte von X in eine Karte von Y abbildet und die Holomorphiebedingung somit trivial wäre.

¹¹Ein **Häufungspunkt** einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist hierbei wie üblich ein Punkt in X , für den jede offene Umgebung in X unendlich viele Punkte von M enthält.

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$A := \{x \in X : \text{es gibt ein offenes } W = W(x) \subseteq X \text{ mit } x \in W \text{ und } f|_W \equiv g|_W\}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass A offen, abgeschlossen und nichtleer ist. Weil X als Riemann'sche Fläche zusammenhängend ist, folgt daraus dann die Gleichheit $A = X$ und somit der Satz.

Es gilt $x_0 \in A$,

denn: Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine beliebige Karte von X mit $x_0 \in U$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass U zusammenhängt, und betrachten sonst stattdessen diejenige Zusammenhangskomponente von U , die x_0 enthält. Nach Voraussetzung enthält U unendlich viele Elemente von N_{f-g} , ohne Einschränkung können wir sogar annehmen, sie liegen alle in U . Wegen der Stetigkeit von φ ist folglich $\varphi(x_0) \in V$ ein Häufungspunkt von $\varphi(N_{f-g})$. Für eine beliebige Karte $\psi: U' \rightarrow V'$ von Y mit $f(U), g(U) \subseteq U'$ gilt dann nach dem **Identitätssatz** für holomorphe Funktionen auf Gebieten in $\mathbb{C}$ die Gleichheit¹²

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})|_V \equiv (\psi \circ g \circ \varphi^{-1})|_V.$$

Es folgt sofort $f|_U \equiv g|_U$ und somit $x_0 \in A$ mit $W(x_0) = U$. #

A ist offen, da mit jedem $x \in A$ definitionsgemäß auch eine offene Umgebung $W(x)$ von x in A enthalten ist und daher

$$A = \bigcup_{x \in A} W(x)$$

eine Vereinigung offener Mengen ist.¹³

A ist abgeschlossen,

denn: Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass alle Randpunkte von A schon in A enthalten sind. Wegen der Stetigkeit von f und g gilt für einen solchen Randpunkt x die Gleichheit $f(x) = g(x)$. Es gibt daher Karten $\varphi: U \rightarrow V$ von X und $\psi: U' \rightarrow V'$ von Y mit $x \in U$ und $f(U), g(U) \subseteq U'$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass U zusammenhängt; sonst betrachten wir stattdessen diejenige Zusammenhangskomponente von U , die x enthält. Als offene Umgebung des Randpunkts x von A hat U einen nichtleeren Durchschnitt mit A . Wir haben bereits eingesehen, dass A offen ist. Es folgt, dass $U \cap A$, und somit auch $\varphi(U \cap A)$, eine nichtleere offene Menge ist. Da V somit einen Häufungspunkt von $\varphi(U \cap A)$ enthält, können wir den Identitätssatz für holomorphe Funktionen auf Gebieten in $\mathbb{C}$ anwenden, nach dem die Gleichheit

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})|_V \equiv (\psi \circ g \circ \varphi^{-1})|_V$$

gilt. Hieraus folgt sofort $f|_U \equiv g|_U$ und somit $x \in A$ mit $W(x) = U$. #

□

¹²Eine solche Karte gibt es, da aus Stetigkeitsgründen $f(x_0) = g(x_0)$ gilt.

¹³Man bemerke, dass diese Argumentation unabhängig von der Wahl der jeweiligen $W(x)$ ist.

1.3 Meromorphe Funktionen

Einen wichtigen Spezialfall holomorpher Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen stellen meromorphe Funktionen auf Riemann'schen Flächen dar. Um dies einzusehen, definieren wir den Begriff zunächst wie in der Funktionentheorie üblich und stellen dann den Zusammenhang zu den holomorphen Abbildungen her:

Definition 1.32. Sei X eine Riemann'sche Fläche, $U \subseteq X$ offen und sei $f: U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine Abbildung. Genau dann heißt f eine **meromorphe Funktion** auf U , falls gilt

- (i) $S(f) := f^{-1}(\{\infty\})$ ist abgeschlossen in U und besteht nur aus isolierten Punkten.
- (ii) $f_0 := f|_{U \setminus S(f)} \in \mathcal{O}(U \setminus S(f))$.
- (iii) Für jeden Punkt $x_0 \in S(f)$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$.

Die Punkte in $S(f)$ heißen die **Polstellen** von f . Die Menge aller auf U meromorphen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(U)$.

Bemerkung 1.33. (a) Meromorphe Funktionen wie in Definition 1.32 sind stetig,

denn: Sei $f \in \mathcal{M}(U)$. Nach Bedingung (ii) in Definition 1.32 ist $f|_{U \setminus S(f)}$ holomorph und nach Bemerkung 1.27 insbesondere stetig. Um auf die Stetigkeit in ganz U zu schließen, müssen wir daher nur noch zeigen, dass f in jedem der Punkte aus $S(f)$ stetig ist. Nach Beispiel 1.15 bilden die offenen Mengen der Form

$$U_\varepsilon(\infty) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{\infty\} \quad \text{mit } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$$

eine Umgebungsbasis von ∞ in $\overline{\mathbb{C}}$. Sei nun $x_0 \in S(f)$ beliebig und $\varphi: U' \rightarrow V'$ eine beliebige Karte von U mit $x_0 \in U'$. Wegen der Homöomorphie von φ und 1.32 (iii) bildet $f \circ \varphi^{-1}|_{V'}$ kleine δ -Umgebungen von $\varphi(x_0)$ in ein gegebenes $U_\varepsilon(\infty)$ ab. Da φ homöomorph ist, gibt es ein Element W der Umgebungsbasis von x_0 in U , dessen φ -Bild in einer solchen δ -Umgebung liegt. Für dieses W gilt $f(W) \subseteq U_\varepsilon(\infty)$, was die Stetigkeit von f in x_0 zeigt. #

- (b) Seien $f, g \in \mathcal{M}(U)$. Dann ist die punktweise Summe $f_0 + g_0$ bzw. das punktweise Produkt $f_0 \cdot g_0$ auf $U \setminus (S(f) \cup S(g))$ eine holomorphe Funktion. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 1.28 können wir diese Funktion auf eventuelle hebbare Singularitäten holomorph fortsetzen. Die Menge $\mathcal{M}(U)$ trägt so die Struktur einer $\mathbb{C}$ -Algebra.

Die meromorphen Funktionen auf einer Riemann'schen Fläche X können wir nun als holomorphe Abbildungen zwischen den Riemann'schen Flächen X und $\overline{\mathbb{C}}$ erkennen. Genauer gilt:

Satz 1.34. Sei X eine Riemann'sche Fläche. Dann gilt

$$\mathcal{M}(X) = \text{Hol}(X, \overline{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\},$$

wobei ∞ die durch $f(x) = \infty$ für alle $x \in X$ gegebene konstante Funktion bezeichne.

Beweis. Sei zunächst $f \in \mathcal{M}(X)$. Nach Bemerkung 1.33 ist f dann auf ganz X stetig. Um $f \in \text{Hol}(X, \overline{\mathbb{C}})$ einzusehen, müssen wir nun zeigen, dass für jedes Paar von Karten $\varphi: U \rightarrow V$ von X und $\psi: U' \rightarrow V'$ von $\overline{\mathbb{C}}$ mit $f(U) \subseteq U'$ die Funktion

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V'$$

holomorph ist. Da f auf $X \setminus S(f)$ holomorph ist, gilt die Holomorphie von $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ auf $V \setminus \varphi(S(f) \cap U)$. Außerdem ist $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ als Verkettung stetiger Abbildungen auf ganz V stetig. Da $\varphi(S(f) \cap U) \subseteq V$ eine abgeschlossene Teilmenge aus isolierten Punkten ist, folgt die Behauptung iterativ mit dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 1.28.

Sei nun $f \neq \infty$ eine holomorphe Abbildung von X nach $\overline{\mathbb{C}}$. Dann sind die Bedingungen (ii) und (iii) aus Definition 1.32 trivialerweise erfüllt. Zu zeigen bleibt, dass $S(f)$ abgeschlossen in X ist und nur aus isolierten Punkten besteht. Das folgt aber unmittelbar aus der Annahme $f \neq \infty$ und dem Identitätssatz 1.31. $\square$

Bemerkung 1.35. Aus Satz 1.34 folgt, dass der Identitätssatz 1.31 auch für meromorphe Funktionen auf einer Riemann'schen Fläche X gilt. Deshalb hat eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$, wobei 0 die durch $f(x) = 0$ für alle $x \in X$ gegebene konstante Funktion bezeichnet, nur isolierte Nullstellen. Somit lassen sich Funktionen aus $\mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ invertieren, was $\mathcal{M}(X)$ zu einem Körper macht.

Abschließend für diesen Abschnitt untersuchen wir als ein Beispiel nun noch die meromorphen Funktionen auf Periodentori. Diese lassen sich schön durch eine geeignete Klasse meromorpher Funktionen auf der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ beschreiben, die wir nun zunächst einführen:

Definition 1.36. Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Unter einer **elliptischen Funktion** bezüglich Λ versteht man eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit

$$f(z + \omega) = f(z) \quad \text{für alle } \omega \in \Lambda \text{ und alle } z \in \mathbb{C}.$$

Die Menge der elliptischen Funktionen bezüglich Λ bezeichnen wir mit $K(\Lambda)$.

Bemerkung 1.37. Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter mit Basis $\{\omega_1, \omega_2\}$. Dann lässt sich jeder Gitterpunkt $\omega \in \Lambda$ schreiben als $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, und eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ist offenbar genau dann elliptisch bezüglich Λ , wenn

$$f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gilt. Aus diesem Grund nennt man elliptische Funktionen anschaulich auch **doppeltperiodische Funktionen**.

Satz 1.38. Jede bezüglich eines Gitters $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ elliptische Funktion $f \in K(\Lambda)$ induziert durch $f = F \circ \pi_\Lambda$ eine meromorphe Funktion $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$. Die Zuordnung $f \mapsto F$ liefert eine Bijektion

$$K(\Lambda) \cong \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda).$$

Beweis. Dass die einer elliptischen Funktion f zugeordnete Funktion F wohldefiniert ist, folgt aus der Λ -Invarianz von f und die Meromorphie von F folgt aus der Definition der komplexen Struktur von $\mathbb{C}/\Lambda$. Gehen wir umgekehrt von einer meromorphen Funktion $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ aus, so ist die Komposition $f = F \circ \pi_\Lambda$ offenbar eine bezüglich Λ elliptische Funktion. Die behauptete Zuordnung ergibt also in beide Richtungen Sinn und liefert offensichtlich eine Bijektion zwischen den Mengen $K(\Lambda)$ und $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$. $\square$

Bemerkung 1.39. Nach Bemerkung 1.35 trägt $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$, ausgestattet mit punktweiser Addition und Multiplikation, die Struktur eines Körpers. Auch auf $K(\Lambda)$ lassen sich punktweise Addition und Multiplikation einführen. Offensichtlich gelten dann für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ die Rechenregeln

$$\begin{aligned} ((F_1 + F_2) \circ \pi_\Lambda)(z) &= ((F_1 \circ \pi_\Lambda) + (F_2 \circ \pi_\Lambda))(z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \\ ((F_1 \cdot F_2) \circ \pi_\Lambda)(z) &= ((F_1 \circ \pi_\Lambda) \cdot (F_2 \circ \pi_\Lambda))(z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Schreiben wir $1_{\mathbb{C}}$ bzw. $1_{\mathbb{C}/\Lambda}$ für die durch $f(z) = 1$ gegebene konstante Abbildung auf $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}/\Lambda$, so gilt außerdem

$$1_{\mathbb{C}/\Lambda} \circ \pi_\Lambda = 1_{\mathbb{C}}.$$

Insgesamt überträgt die Zuordnung $F \mapsto F \circ \pi_\Lambda$ die Körpereigenschaften von $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ auf $K(\Lambda)$ und wird so zu einem Körperisomorphismus.

1.4 Einfache Eigenschaften holomorpher Abbildungen

In diesem Abschnitt beweisen wir einige elementare Eigenschaften holomorpher Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen. Grundlegend ist hier der folgende Satz, der sich als Verallgemeinerung des **Satzes von der Gebietstreue** auffassen lässt:



Satz 1.40 (Lokale Gestalt holomorpher Abbildungen). Seien X, Y Riemann'sche Flächen, $x_0 \in X$, $f \in \text{Hol}(X, Y)$ nichtkonstant und $y_0 := f(x_0)$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 1$ und Karten $\varphi: U \rightarrow V$ von X bzw. $\psi: U' \rightarrow V'$ von Y mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $x_0 \in U$ und $\varphi(x_0) = 0$.
- (ii) $y_0 \in U'$ und $\psi(y_0) = 0$.
- (iii) $f(U) \subseteq U'$.
- (iv) Für die Abbildung $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V'$ gilt $F(z) = z^k$ für alle $z \in V$.

Beweis. Es gibt Karten $\varphi: U \rightarrow V$ von X und $\psi: U' \rightarrow V'$ von Y , welche die Eigenschaften (i)–(iii) erfüllen,

denn: Sei $\psi: U' \rightarrow V'$ eine beliebige Karte mit $y_0 \in U'$. Dann können wir ohne Einschränkung $\psi(y_0) = 0$ annehmen und sonst ψ durch $\tau' \circ \psi$ mit der Translation $\tau': z \mapsto z - \psi(y_0)$ ersetzen. Sei nun $\varphi: U \rightarrow V$ eine beliebige Karte mit $x_0 \in U$. Dann können wir ohne Einschränkung $f(U) \subseteq U'$ annehmen und sonst φ durch seine Einschränkung auf den (nichtleeren!) Durchschnitt

von U mit dem Urbild unter f einer geeigneten offenen Umgebung von y_0 in U' ersetzen. Weiter können wir ohne Einschränkung $\varphi(x_0) = 0$ annehmen und sonst φ durch $\tau \circ \varphi$ mit der Translation $\tau: z \mapsto z - \varphi(x_0)$ ersetzen. #

Wir betrachten nun die holomorphe Funktion

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V'.$$

Wäre diese konstant, so müsste auch die Einschränkung von f auf U konstant sein. Letzteres wäre aber nach dem Identitätssatz 1.31 ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung, dass f auf ganz X eine nichtkonstante Funktion ist. Da weiterhin $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0) = 0$ gilt, gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 1$ und eine Funktion $g \in \mathcal{O}(V)$ mit $g(0) \neq 0$ und

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = z^k \cdot g(z) \quad \text{für alle } z \in V.$$

In einer hinreichend kleinen Umgebung von $z = 0$, in der g keine Nullstelle hat, finden wir eine holomorphe Funktion h mit $g = h^k$. Mit dem Satz von der inversen Funktion lässt sich zeigen, dass die Zuordnung $z \mapsto z \cdot h(z)$ eine kleine Umgebung $V_1 \subseteq V$ von $z = 0$ biholomorph auf eine kleine Umgebung V_2 von $z = 0$ abbildet. Wir wollen diese biholomorphe Abbildung mit $\alpha: V_1 \rightarrow V_2$ bezeichnen. Wir ersetzen nun die Karte $\varphi: U \rightarrow V$ durch die Karte

$$\alpha \circ \varphi: \varphi^{-1}(V_1) \rightarrow V_2.$$

Für die Abbildung $F = \psi \circ f \circ (\alpha \circ \varphi)^{-1}$ gilt dann nach Konstruktion $F(z) = z^k$ für alle $z \in V_2$, also Eigenschaft (iv). $\square$

Bemerkung 1.41. Die Zahl k in Satz 1.40 kann wie folgt charakterisiert werden (vgl. Übungsaufgabe 1.8): Zu jeder Umgebung U_0 von x_0 gibt es Umgebungen $U \subseteq U_0$ von x_0 und U' von $y_0 = f(x_0)$, so dass für jeden Punkt $y \in U'$ mit $y \neq y_0$ die Menge $f^{-1}(y) \cap U$ genau k Elemente hat. Wir nennen k die **Vielfachheit**, mit der die Abbildung f den Wert y_0 im Punkt x_0 annimmt und schreiben $k = y_0\text{-ord}(f; x_0)$.

Beispiel 1.42. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $z_0 \in D$ und $w_0 \in \mathbb{C}$ beliebig.

- (a) Für eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ gibt die Vielfachheit $0\text{-ord}(f; z_0)$ offensichtlich gerade die Nullstellenordnung im Punkt $z = z_0$ an. Außerdem gilt

$$w_0\text{-ord}(f; z_0) = 0\text{-ord}(f - w_0; z_0).$$

- (b) Unter Benutzung der aus (1.1) bekannten Karten von $\bar{\mathbb{C}}$ zeigt man leicht, dass für eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(D)$ die Vielfachheit $\infty\text{-ord}(f; z_0)$ gerade die Polstellenordnung von f im Punkt $z = z_0$ beschreibt (Übung!).

- (c) Der Begriff der Vielfachheit lässt sich über die Identifikation von $K(\Lambda)$ mit $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ auch auf elliptische Funktionen übertragen, denn für $f \in K(\Lambda)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $w_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ mit $f(z_0) = w_0$ gilt auch $f(z_0 + \omega) = w_0$ für alle $\omega \in \Lambda$. Wir sprechen in diesem Kontext von w_0 -Stellen (und insbesondere Null- oder Polstellen) modulo Λ der elliptischen Funktion f und schreiben für ihre Vielfachheit wieder $w_0\text{-ord}(f; z_0)$.



Genau wie im Spezialfall $X = \mathbb{C}$ aus dem Satz von der Gebietstreue lassen sich aus Satz 1.40 eine ganze Reihe wichtiger Folgerungen gewinnen:

Korollar 1.43 (Offenheitssatz). Für je zwei Riemann'sche Flächen X, Y ist jedes nichtkonstante $f \in \text{Hol}(X, Y)$ bereits offen.

Beweis. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Dann gibt es nach Satz 1.40 Karten $\varphi: U_{x_0} \rightarrow V$ von X und $\psi: U' \rightarrow V'$ von Y mit $x_0 \in U_{x_0}$ und $f(U_{x_0}) \subseteq U'$, so dass die Abbildung $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V'$ durch $F(z) = z^k$ mit einem $k \geq 1$ gegeben ist. $F|_V$ ist offensichtlich offen. Die Offenheit von $f|_{U_{x_0}}$ folgt, da die Kartenabbildungen Homöomorphismen sind.

Sei nun $\tilde{U} \subseteq X$ eine beliebige offene Teilmenge. Dann ist nach der obigen Überlegung für jedes $x_0 \in \tilde{U}$ die Menge $f(\tilde{U} \cap U_{x_0})$ eine offene Umgebung von $f(x_0)$ in $f(\tilde{U})$. Es folgt die Offenheit von $f(\tilde{U})$ und damit die Behauptung. $\square$

Korollar 1.44 (Biholomorphiekriterium). Seien X, Y Riemann'sche Flächen und sei $f \in \text{Hol}(X, Y)$ injektiv. Dann liefert f eine biholomorphe Abbildung von X nach $f(X)$.

Beweis. Wegen der Injektivität von f gilt in der lokalen Beschreibung von f wie in Satz 1.40 in der dortigen Notation stets $k = 1$. Für Karten $\varphi: U \rightarrow V$ von X und $\psi: U' \rightarrow V'$ von Y mit $x_0 \in U$ und $f(U) \subseteq U'$ wie dort ist daher $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \text{id}_V$ und somit insbesondere holomorph invertierbar. Da φ und ψ als Karten invertierbar sind, ist $f|_U$ invertierbar und mit der Definition des Begriffs der holomorphen Abbildung zwischen Riemann'schen Flächen erhalten wir die Holomorphie von $f^{-1}|_{f(U)}$. Das Biholomorphiekriterium folgt. $\square$

Korollar 1.45 (Maximumprinzip). Seien X eine Riemann'sche Fläche und $f \in \mathcal{O}(X)$ nichtkonstant. Dann nimmt f auf X kein lokales Betragsmaximum an.

Beweis. Das zeigt man genau wie das **Maximumprinzip** in der Funktionentheorie. Man verwendet den Offenheitssatz 1.43 statt des Satzes von der Gebietstreue. $\square$



Zum Abschluss dieses Abschnitts untersuchen wir noch das Verzweigungsverhalten holomorpher Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen:

Definition 1.46. Seien X, Y Riemann'sche Flächen und $f \in \text{Hol}(X, Y)$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen ihnen. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt ein **Verzweigungspunkt** von f , wenn

$$k := f(x_0)\text{-ord}(f; x_0) > 1$$

gilt. Wir nennen $k - 1$ auch die **Verzweigungsordnung** von f in x_0 .

Nach Konstruktion liegen die Verzweigungspunkte einer nichtkonstanten holomorphen Abbildung isoliert. Im Fall kompakter Riemann'scher Flächen erhalten wir so:

Proposition 1.47. Seien X, Y kompakte Riemann'sche Flächen und $f \in \text{Hol}(X, Y)$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen ihnen. Dann hat f nur endlich viele Verzweigungspunkte.¹⁴

Beweis. Betrachten wir eine Überdeckung $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ durch offene Umgebungen U_x wie in Satz 1.40. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup_{v=1}^n U_{x_v}$. Nach Konstruktion besitzt für alle $v \in \{1, \dots, n\}$ die Einschränkung $f|_{U_{x_v}}$ höchstens in x_v einen Verzweigungspunkt, so dass die Behauptung folgt. $\square$

Definition 1.48. Seien X, Y kompakte Riemann'sche Flächen und $f \in \text{Hol}(X, Y)$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen ihnen. Dann heißt die nach Proposition 1.47 endliche Summe

$$v_f := \sum_{x_0 \in X} (f(x_0)\text{-ord}(f; x_0) - 1)$$

die **Gesamtverzweigungsordnung** von f .

Eine weitere Endlichkeitsaussage lässt sich in allgemeinerem Kontext zeigen. Dafür definieren wir zunächst:

Definition 1.49. Seien X, Y Riemann'sche Flächen und $f \in \text{Hol}(X, Y)$. Wir nennen f **eigentlich**, wenn das Urbild unter f jeder kompakten Teilmenge von Y wieder kompakt ist.

Bemerkung 1.50. Die Nützlichkeit des Begriffs der Eigentlichkeit einer holomorphen Abbildung zwischen zwei Riemann'schen Flächen zeigt sich bereits daran, dass er die Situation einer kompakten Definitionsmenge verallgemeinert: Seien X, Y Riemann'sche Flächen und sei $f \in \text{Hol}(X, Y)$. Ist nun X kompakt und $A \subseteq Y$ abgeschlossen, so ist die Einschränkung

$$f|_{X \setminus f^{-1}(A)} : (X \setminus f^{-1}(A)) \rightarrow Y \setminus A$$

eigentlich,

denn: Im Hausdorff-Raum $Y \setminus A$ ist jedes gegebene Kompaktum $K \subseteq Y \setminus A$ abgeschlossen. Das Urbild $f^{-1}(K)$ unter der stetigen Abbildung f ist daher ebenfalls abgeschlossen und als Teilmenge des Kompaktums X selbst kompakt. $\#$

Ein wichtiger Spezialfall dieser Aussage ist offensichtlich $A = \emptyset$, in dem wir die Abbildung f nicht einschränken müssen.

Lemma 1.51. Seien X, Y Riemann'sche Flächen und sei $f \in \text{Hol}(X, Y)$ eigentlich und nichtkonstant. Dann ist f **abgeschlossen**¹⁵ und surjektiv.

¹⁴Für nichtkompakte Riemann'sche Flächen stimmt dies im Allgemeinen nicht, wie man am Beispiel der Funktion $\sin^2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sieht. Diese hat in jedem Punkt $x_k := \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ einen Verzweigungspunkt mit Verzweigungsordnung 1.

¹⁵Bilder abgeschlossener Mengen sind also stets wieder abgeschlossen.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Abgeschlossenheit von f . Seien dafür $A \subseteq X$ abgeschlossen und $y \in Y \setminus f(A)$ beliebig. Sei weiter $U_y \subseteq Y$ eine kompakte Umgebung von y . Wegen der Eigentlichkeit von f ist dann $f^{-1}(U_y)$ und somit auch $f^{-1}(U_y) \cap A$ kompakt. Als stetiges Bild eines Kompaktums ist schließlich

$$f(f^{-1}(U_y) \cap A) = U_y \cap f(A)$$

eine kompakte und somit abgeschlossene Teilmenge des Hausdorff-Raums Y . Es folgt, dass

$$U_y \setminus (U_y \cap f(A))$$

eine offene Umgebung von y . Insgesamt haben wir die Offenheit von $Y \setminus f(A)$ und also die Abgeschlossenheit von $f(A)$ gezeigt.

Wir zeigen nun die Surjektivität von f . Wegen der soeben nachgewiesenen Abgeschlossenheit ist insbesondere $f(X)$ abgeschlossen. Nach dem Offenheitssatz 1.43 ist $f(X)$ aber auch offen. Da Y als Riemann'sche Fläche zusammenhängend ist, folgt $f(X) \in \{\emptyset, Y\}$. Da $f(X)$ als Bild der nichtleeren Menge X unter f nicht leer ist, folgt $f(X) = Y$ und somit die Surjektivität. $\square$

Korollar 1.52. Seien X, Y Riemann'sche Flächen und sei $f \in \text{Hol}(X, Y)$ nichtkonstant. Ist X kompakt, so ist auch Y kompakt und f ist eigentlich und surjektiv.

Beweis. Die Eigentlichkeit und die Surjektivität folgen mit Bemerkung 1.50 und Lemma 1.51; die Kompaktheit ist dann offensichtlich. $\square$

Korollar 1.53. Auf einer kompakten Riemann'schen Fläche ist jede holomorphe Funktion konstant.

Beweis. Das folgt sofort aus Korollar 1.52, weil $\mathbb{C}$ nicht kompakt ist. $\square$

Korollar 1.54 (Erster LIOUVILLE'scher Satz¹⁶). Jedes holomorphe $f \in K(\Lambda)$ ist konstant.

Beweis. Nach Korollar 1.53 sind für jedes Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ die holomorphen Funktionen auf dem (kompakten) Periodentorus $\mathbb{C}/\Lambda$ konstant. Über den Körperisomorphismus $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda) \cong K(\Lambda)$ sind somit auch die holomorphen elliptischen Funktionen konstant. $\square$

Der Erste Liouville'sche Satz lässt sich natürlich auch leicht elementar aus dem Satz von Liouville ableiten, da holomorphe Funktionen für jedes Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ auf der (kompakten) Fundamentalmasche ihr Betragsmaximum annehmen und doppeltperiodische ganze Funktionen somit auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt sind.

Definition 1.55. Seien X, Y Riemann'sche Flächen und $f \in \text{Hol}(X, Y)$. Wir nennen f **endlich**, wenn f eigentlich ist und für jeden Punkt $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(y)$ unter f endlich ist.

Lemma 1.56. Seien X, Y Riemann'sche Flächen mit $X \neq \emptyset$ und sei $f \in \text{Hol}(X, Y)$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

¹⁶Joseph Liouville (1809–1882)



- (i) Die Abbildung f ist eigentlich und nichtkonstant.
- (ii) Die Abbildung f ist endlich.

Beweis. Sei f zunächst endlich. Nach Definition 1.55 ist dann f eigentlich. Weiter ist für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(y)$ endlich und also wegen $X \neq \emptyset$ von X verschieden. Das ist die Nichtkonstanz von f .

Sei nun umgekehrt f eigentlich und nichtkonstant. Nach Definition 1.49 ist dann für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(y)$ des Kompaktums $\{y\} \subseteq Y$ wieder kompakt im Hausdorff-Raum X und daher insbesondere abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(y)$ endlich ist. Hierfür genügt es offenbar zu zeigen, dass der Durchschnitt von $f^{-1}(y)$ mit einem beliebigen Kompaktum $K \subseteq X$ endlich ist, dass $f^{-1}(y)$ also **lokalendlich** ist. Wegen $f^{-1}(y) \neq X$ genügt es hierfür wiederum zu zeigen, dass $f^{-1}(y)$ **analytisch** ist, dass also $f^{-1}(y) \subseteq X$ abgeschlossen ist und jeder Punkt $x \in f^{-1}(y)$ eine Umgebung U_x in X besitzt, so dass $U_x \cap f^{-1}(y)$ die Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion in $\mathcal{O}(f^{-1}(y))$ ist,

denn: Für eine beliebige analytische Menge $A \subseteq X$ ist die Menge M der Häufungspunkte von A wegen der Abgeschlossenheit von A eine Teilmenge von A . Wir zeigen nun die Offenheit von M und betrachten dafür einen beliebigen Punkt $a \in M$. Da A analytisch ist, gibt es eine Umgebung $U_a \subseteq X$, für die $U_a \cap A$ die Nullstellenmenge eines $f \in \mathcal{O}(U_a)$ ist. Nach dem Identitätssatz 1.31 ist die Einschränkung von f auf die Zusammenhangskomponente von $U_a \cap A$, die a enthält, identisch Null, so dass wir eine offene Umgebung von a in M gefunden haben. Es ist also in der Tat M offen. Andererseits ist nach Definition des Begriffs des Häufungspunkts die Menge $X \setminus M$ ebenfalls offen. Da X als Riemann'sche Fläche zusammenhängend ist, folgt $M \in \{X, \emptyset\}$ und also entweder $A = X$ oder A lokalendlich. #

Dass die abgeschlossene Teilmenge $f^{-1}(y) \subseteq X$ analytisch ist, folgt, da $f^{-1}(y) = X \cap f^{-1}(y)$ selbst bereits die Nullstellenmenge der holomorphen Funktion $f - y \in \mathcal{O}(X)$ ist. Insgesamt haben wir so die Endlichkeit von f gezeigt. $\square$

Proposition 1.57. Seien X, Y Riemann'sche Flächen und $f \in \text{Hol}(X, Y)$ nichtkonstant und eigentlich. Dann ist die natürliche Zahl

$$\mu_f := \sum_{x_0 \in f^{-1}(y_0)} y_0\text{-ord}(f; x_0)$$

unabhängig vom Punkt $y_0 \in Y$ und heißt der **Grad** von f .

Beweis. Da Y als Riemann'sche Fläche zusammenhängt, genügt es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\mu_f: \begin{cases} Y & \rightarrow \mathbb{N}, \\ y & \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} y\text{-ord}(f; x) \end{cases}$$

lokal konstant ist.

Nach Korollar 1.52 ist für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(y)$ nicht leer. Mit Lemma 1.56 folgt daher, dass $f^{-1}(y)$ eine nichtleere endliche Menge $\{x_1, \dots, x_\ell\} \subseteq X$ ist.

Seien nun für jedes $\lambda \in \{1, \dots, \ell\}$ wie in Satz 1.40 Karten $\varphi_\lambda: \tilde{U}_\lambda \rightarrow V_\lambda$ von X mit $x_\lambda \in \tilde{U}_\lambda$ und $\psi_\lambda: U'_\lambda \rightarrow V'_\lambda$ von Y mit $y \in U'_\lambda$ gegeben, für die

$$F_\lambda(z) = \psi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}(z) = z^{k_\lambda} \quad \text{mit } k_\lambda \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Ohne Einschränkung dürfen wir dabei annehmen, die Mengen $\tilde{U}_\lambda$ für $\lambda \in \{1, \dots, \ell\}$ seien paarweise disjunkt. Alle genannten Eigenschaften treffen auch noch zu, wenn wir die soeben eingeführten Kartenabbildungen einschränken auf eine beliebige offene Umgebung $U' \subseteq \bigcap_{\lambda=1}^{\ell} f(\tilde{U}_\lambda) \subseteq U'_\lambda$ von y bzw. auf $U_\lambda := (f|_{\tilde{U}_\lambda})^{-1}(U') \subseteq \tilde{U}_\lambda$ für alle $\lambda \in \{1, \dots, \ell\}$. Wir können dabei U' so wählen, dass

$$f^{-1}(U') = \bigsqcup_{\lambda=1}^{\ell} (f|_{\tilde{U}_\lambda})^{-1}(U') = \bigsqcup_{\lambda=1}^{\ell} U_\lambda$$

gilt,

denn: Klar, dass für alle solchen U' die rechte Seite in der linken enthalten ist. Auszuschließen ist also lediglich, dass $f^{-1}(U')$ noch Elemente enthält, die nicht in $U := \bigsqcup_{\lambda=1}^{\ell} U_\lambda$ liegen. Wegen der in Lemma 1.51 gezeigten Abgeschlossenheit von f ist

$$Y \setminus f(X \setminus U) = \{\tilde{y} \in Y : f^{-1}(\tilde{y}) \subseteq U\}$$

offen. Diese Menge enthält unser festes y , so dass es eine offene Umgebung U' von y gibt mit $U' \subseteq \bigcap_{\lambda=1}^{\ell} f(\tilde{U}_\lambda)$ und $f^{-1}(U') \subseteq U$. #

Nach Konstruktion und Satz 1.40 folgt nun

$$\mu_f(y') = \sum_{\lambda=1}^{\ell} k_\lambda \quad \text{für alle } y' \in U'$$

und somit die Proposition. $\square$

Korollar 1.58. Sei X eine Riemann'sche Fläche und sei $f \in \mathcal{M}(X)$ nichtkonstant und eigentlich. Dann hat f mit Vielfachheiten gerechnet ebenso viele Nullstellen wie Polstellen.

Korollar 1.59 (Dritter Liouville'scher Satz). Für ein nichtkonstantes $f \in K(\Lambda)$ hängt die positive ganze Zahl

$$\text{ord}(f) := \sum_{z \in \mathbb{C}/\Lambda} w_0\text{-ord}(f; z) \quad \text{mit } w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$$

nicht von w_0 ab. Man nennt $\text{ord}(f)$ die **Ordnung** der elliptischen Funktion f .

Beweis. Zum Beweis des Korollars genügt es zu zeigen, dass die rechte Seite für $w_0 = 0$ und $w_0 = \infty$ für alle elliptischen Funktionen dieselben Werte annimmt, denn offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} w_0\text{-ord}(f; z) &= 0\text{-ord}(f - w_0; z) & \text{für alle } w_0 \in \mathbb{C}, \\ \infty\text{-ord}(f; z) &= \infty\text{-ord}(f - w_0; z) & \text{für alle } w_0 \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

so dass sich dann unter Betrachtung der Funktion $f - w_0$ die allgemeine Behauptung ergibt. Dies folgt aber unmittelbar aus Korollar 1.58, wenn wir berücksichtigen, dass wir die Vielfachheiten modulo Λ der Null- und Polstellen von elliptischen Funktionen $f \in K(\Lambda)$ in Beispiel 1.42 (c) als die Vielfachheiten der zugehörigen meromorphen Funktionen auf dem Periodentorus $\mathbb{C}/\Lambda$ definiert hatten. $\square$

Genau wie der Erste lässt sich auch der Dritte Liouville'sche Satz elementar beweisen. Hierfür wendet man den bei uns erst später aus dem Residuensatz 4.41 hergeleiteten Zweiten Liouville'schen Satz auf die logarithmische Ableitung einer gegebenen elliptischen Funktion an.

1.5 Elliptische Funktionen

Wir haben elliptische Funktionen mit dem Ersten und dem Dritten Liouville'schen Satz schon ein wenig kennengelernt, kennen aber außer den konstanten Funktionen noch immer kein konkretes Beispiel. Wir werden diesen Missstand nun beheben und so über die Identifikation $K(\Lambda) \cong \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ aus Satz 1.38 auch nichttriviale Beispiele meromorpher Funktionen auf einer ersten Klasse Riemann'scher Flächen außer Gebieten in $\mathbb{C}$ und $\overline{\mathbb{C}}$ kennenlernen. Tatsächlich gibt Satz 1.72 eine sehr explizite Beschreibung von ganz $K(\Lambda)$ und somit auch aller meromorphen Funktionen auf Periodentori.

Um uns die Schreibarbeit zu erleichtern, sei in diesem Abschnitt stets $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ ein fest gewähltes Gitter. Außerdem werden wir kurz $\sum'_{\omega \in \Lambda}$ anstelle von $\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}}$ schreiben. Wir konstruieren nun eine nichtkonstante Funktion in $K(\Lambda)$:

Proposition 1.60. *Die Reihe*

$$\wp(z) := \wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

ist auf Kompakta in $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ gleichmäßig absolut konvergent und definiert eine gerade holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ mit Polstellen der Ordnung 2 in den Punkten aus Λ .¹⁷ Die so erhaltene meromorphe Funktion

¹⁷Wie kommt man darauf, gerade diese Reihe zu studieren? Folgender Ansatz liegt zugrunde: Nach dem Ersten Liouville'schen Satz 1.54 sind die elliptischen Funktionen von Ordnung 0 konstant und man kann zeigen, dass es keine elliptischen Funktionen von Ordnung 1 gibt – bei uns geschieht das erst später in Korollar 2.49. Es ist also naheliegend, eine elliptische Funktion von Ordnung 2 zu suchen. Jetzt muss man ein bisschen raten und sucht nach einer elliptischen Funktion von Ordnung 2, die in allen Gitterpunkten einen Pol zweiter Ordnung besitzt. Wie man meromorphe Funktionen aus $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit gegebenen Anforderungen an ihre Hauptteile konstruiert, ist uns aus dem Satz von MITTAG-LEFFLER¹⁸ bekannt. Wenn wir noch berücksichtigen, dass aufgrund der Elliptizität die Hauptteile in allen Gitterpunkten gleich sein müssen, dann erscheint es vielversprechend, nach einer Lösung der durch

$$h_\omega(z) = z^2 \quad \text{für alle } \omega \in \Lambda$$

gegebenen Hauptteilverteilung $\{h_\omega\}_{\omega \in \Lambda}$ zu suchen. Da die Reihe

$$\sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^2},$$

nicht absolut konvergiert, fügen wir gemäß dem „Kochrezept“ für den Satz von Mittag-Leffler noch konvergenzerzeugende Summanden an und erhalten schließlich die Reihe $\wp$ als Lösung der Hauptteilverteilung.

¹⁸Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846–1927)



$\wp \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ heißt die **Weierstraß'sche $\wp$ -Funktion**.

Bevor wir die Proposition zeigen, untersuchen wir das Konvergenzverhalten bestimmter Reihen etwas allgemeiner:

Lemma 1.61. Sei $r > 2$. Dann ist

$$\sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{|\omega|^r}$$

endlich.

Beweis. Wir betrachten

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto \left| \frac{x\omega_1 + y\omega_2}{xi+y} \right|^r. \end{cases}$$

Diese Funktion hat die folgenden Eigenschaften:

- $f(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, denn $\{\omega_1, \omega_2\}$ ist über $\mathbb{R}$ linear unabhängig.
- $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- f nimmt auf dem Kompaktum $\mathcal{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ sein Minimum an, ist dort also durch eine Konstante $C > 0$ nach unten beschränkt.

Erinnern wir uns an die Polarkoordinatendarstellung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und wenden diese Eigenschaften von f an, so erhalten wir

$$f(x,y) \geq C \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Diese Abschätzung gilt natürlich insbesondere für $(x,y) = (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so dass wir hieraus

$$\frac{1}{|m\omega_1 + n\omega_2|^r} \leq \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{|mi + n|^r}$$

erhalten. Nach dem Majorantenkriterium folgt also das Lemma, wenn wir

$$\sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|mi + n|^r} < \infty$$

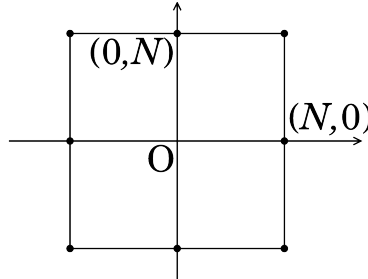
zeigen können. Hierbei haben wir die euklidische Norm $|mi + n| = \sqrt{m^2 + n^2}$ verwendet. Das müssen wir jedoch nicht, da in $\mathbb{R}^2$ alle Normen äquivalent sind. Insbesondere dürfen wir statt der euklidischen die **Maximumsnorm**

$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$$

verwenden und es genügt

$$\sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\|(m,n)\|_\infty^r} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{|\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \|(x,y)\|_\infty = N\}|}{N^r} < \infty$$

zu zeigen. Wie man der Abbildung



entnimmt, gilt hierbei $|\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \|(x, y)\|_\infty = N\}| = 8N$. Das Lemma folgt, da für $r > 2$

$$8 \cdot \sum_{N=1}^{\infty} N^{1-r} < \infty$$

gilt. □

Beweis von Proposition 1.60. Sei $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \Lambda$ kompakt und gelte $|z| \leq R$ für alle $z \in K$. Sei außerdem $\omega \in \Lambda$ mit $|\omega| > 2R$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &= \left| \frac{\omega^2 - (z-\omega)^2}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \\ &= \left| \frac{\omega^2 - (z^2 - 2z\omega + \omega^2)}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \\ &= \left| \frac{z(z-2\omega)}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \\ &= \frac{|z| \cdot |z-2\omega|}{|\omega|^2 \cdot |z-\omega|^2}. \end{aligned}$$

Wir schätzen die Faktoren einzeln ab:

- $|z| \leq R$ nach Voraussetzung.
- $|z-2\omega| \leq |z| + 2 \cdot |\omega| \leq R + 2 \cdot |\omega| < \frac{|\omega|}{2} + 2 \cdot |\omega| = \frac{5}{2} \cdot |\omega|$.
- $|z-\omega|^2 \geq (|\omega| - |z|)^2 \geq (|\omega| - R)^2 \geq (|\omega| - \frac{|\omega|}{2})^2 = \frac{1}{4} \cdot |\omega|^2$,

wobei wir bei der zweiten Abschätzung beachten, dass wegen unserer Wahl von z und ω die Ungleichung $|z| \leq R \leq 2R \leq |\omega|$ gilt.

Eingesetzt in unsere ursprüngliche Gleichung ergibt sich

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{R \cdot \frac{5}{2} |\omega|}{|\omega|^2 \cdot \frac{1}{4} |\omega|^2} = \frac{10R}{|\omega|^3}.$$

Nach Lemma 1.61 ist daher die Reihe auf K gleichmäßig absolut konvergent. Mit dem Konvergenzatz von Weierstraß folgern wir sofort, dass $\wp(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ holomorph ist.

Mit ω durchläuft auch $-\omega$ ganz Λ einfach und wir erhalten

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(-z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(-z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \wp(z)$$

und also die Geradheit von $\wp(z)$.

Dass $\wp$ in den Punkten von Λ doppelte Polstellen hat, kann leicht aus der Definition abgelesen werden. In der Tat ist der Hauptteil von $\wp$ in $z = \omega \in \Lambda$ gerade $\frac{1}{(z-\omega)^2}$. $\square$

Wir zeigen nun, dass die Weierstraß'sche $\wp$ -Funktion elliptisch ist, weisen dies aber zuerst für ihre Ableitung nach:

Proposition 1.62. *Es gilt*

$$\wp'(z) = -2 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

Die Funktion $\wp'$ ist ungerade und liegt in $K(\Lambda)$.

Beweis. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß können wir $\wp(z)$ gliedweise ableiten. Das führt zu

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2 \cdot \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3} = -2 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

Ganz ähnlich wie im Beweis von Proposition 1.60 zeigt man, dass diese Reihe absolut konvergiert. Sei nun $\omega_0 \in \Lambda$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \wp'(z + \omega_0) &= -2 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z + \omega_0 - \omega)^3} = -2 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - (\omega - \omega_0))^3} \\ &= -2 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3} = \wp'(z), \end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Gleichheit verwendet haben, dass mit ω auch $\omega - \omega_0$ ganz Λ einfach durchläuft. Es folgt $\wp' \in K(\Lambda)$.

Die Ungeradheit von $\wp'(z)$ zeigt man analog zur Geradheit von $\wp(z)$ in Proposition 1.60 oder folgert sie daraus, dass die Ableitung einer geraden Funktion stets ungerade ist. $\square$

Proposition 1.63. *$\wp$ liegt in $K(\Lambda)$ und es gilt $\text{ord}(\wp) = 2$.*

Beweis. Nach Proposition 1.62 gilt

$$\wp'(z + \omega_j) - \wp'(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \text{ und } j \in \{1, 2\}.$$

Die Ableitung der holomorphen Funktion $\wp(z + \omega_j) - \wp(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \Lambda)$ mit $j \in \{1, 2\}$ ist also konstant Null. Da $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ ein Gebiet ist, gilt

$$\wp(z + \omega_j) - \wp(z) = C_j \in \mathbb{C} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \text{ und } j \in \{1, 2\}.$$

Betrachten wir nun speziell $z = -\frac{\omega_j}{2} \notin \Lambda$. Dann folgt

$$C_j = \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega_j}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = 0 \quad \text{für } j \in \{1, 2\}.$$

Schließlich ist klar, dass $\text{ord}(\wp) = 2$ gilt, da $\wp$ in den Gitterpunkten Pole zweiter Ordnung hat und ansonsten holomorph ist. $\square$

Wir haben nun mit $\wp = \wp_\Lambda$ zum beliebigen Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ eine nichtkonstante elliptische Funktion gefunden und untersuchen diese genauer:

Proposition 1.64. Die Funktion $\wp(z)$ hat um $z = 0$ die LAURENT-Entwicklung¹⁹

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geq 1} (2n+1)G_{2n+2}z^{2n} \quad \text{für alle } z \in U_\varrho(0) \text{ mit } \varrho := \min\{|\omega| : \omega \in \Lambda \setminus \{(0,0)\}\},$$

wobei mit

$$G_k := G_k(\Lambda) := \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^k}$$

die **homogene EISENSTEIN-Reihe**²⁰ zu Λ vom Gewicht k bezeichnet sei.

Beweis. Wir schreiben

$$\wp(z) =: \frac{1}{z^2} + g(z) \quad \text{mit } g(z) := \sum'_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \in \mathcal{O}(U_\varrho(0)).$$

Sukzessives Ableiten ergibt

$$g^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)! \cdot \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^{2+n}} \in \mathcal{O}(U_\varrho(0)) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Insbesondere gilt daher

$$\begin{aligned} g^{(n)}(0) &= (-1)^n (n+1)! \cdot \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(-\omega)^{2+n}} \\ &= (n+1)! \cdot \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^{2+n}} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ (n+1)! G_{2+n} & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von TAYLOR²¹ erhalten wir

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

¹⁹Pierre Alphonse Laurent (1813–1854)

²⁰Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1851)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \geq 2 \text{ gerade}} (n+1) G_{2+n} z^n && (\text{Beachte } g(0) = 0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2n+2} z^{2n}
\end{aligned}$$

und somit die Proposition. $\square$

Satz 1.65 (Differentialgleichung der $\wp$ -Funktion). *In $K(\Lambda)$ gilt die Gleichung*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

mit den Weierstraßkonstanten

$$g_2 := g_2(\Lambda) := 60 G_4(\Lambda) \quad \text{und} \quad g_3 := g_3(\Lambda) := 140 G_6(\Lambda)$$

des Gitters Λ .

Beweis. Nach Proposition 1.64 gilt für alle $z \in U_\varrho(0)$

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + 3G_4 \cdot z^2 + 5G_6 \cdot z^4 + \dots, \\
\wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6G_4 \cdot z + 20G_6 \cdot z^3 + \dots
\end{aligned}$$

Das können wir nutzen, um die Hauptteile und die konstanten Terme der einzelnen Summanden in der Differentialgleichung zu berechnen. Wie man jeweils durch Ausmultiplizieren der bekannten Reihen sieht, gilt für alle $z \in U_\varrho(0)$

$$\begin{array}{rclcl}
\wp'(z)^2 &= & 4z^{-6} & - & 24G_4 \cdot z^{-2} & - & 80G_6 & + & \dots, \\
4 \cdot \wp(z)^3 &= & 4z^{-6} & + & 36G_4 \cdot z^{-2} & + & 60G_6 & + & \dots, \\
g_2 \cdot \wp(z) &= & & & 60G_4 \cdot z^{-2} & + & 0 & + & \dots
\end{array}$$

Zusammengefasst folgt

$$\wp'(z)^2 - 4 \cdot \wp(z)^3 + g_2 \cdot \wp(z) = -140G_6 + \dots = -g_3 + \dots \quad \text{für alle } z \in U_\varrho(0).$$

Das bedeutet, dass die Funktion $(\wp')^2 - 4 \cdot \wp^3 + g_2 \cdot \wp \in K(\Lambda)$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität hat und den Wert $-g_3$ annimmt. Sie lässt sich daher holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Nach dem Ersten Liouville'schen Satz 1.54 gilt daher in $K(\Lambda)$ die Identität

$$(\wp')^2 - 4 \cdot \wp^3 + g_2 \cdot \wp = -g_3,$$

womit wir den Satz gezeigt haben. $\square$

Korollar 1.66. *Seien $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ und $e_j := \wp(\frac{\omega_j}{2})$ für $j \in \{1, 2, 3\}$. Dann gilt in $K(\Lambda)$ die Gleichung*

$$(\wp')^2 = 4 \cdot (\wp - e_1) \cdot (\wp - e_2) \cdot (\wp - e_3).$$

²¹Brook Taylor (1685–1731)

Beweis. Weil $\wp'$ ungerade und ω_j -periodisch für $j \in \{1, 2, 3\}$ ist, gilt

$$-\wp'(\frac{\omega_j}{2}) = \wp'(-\frac{\omega_j}{2}) = \wp'(\frac{\omega_j}{2}) = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Nach Satz 1.65 sind also e_1, e_2, e_3 Nullstellen des kubischen Polynoms $4X^3 - g_2X - g_3 \in \mathbb{C}[X]$. Das Korollar folgt, wenn wir zeigen können, dass e_1, e_2, e_3 paarweise verschieden sind.

Für ein beliebiges $j \in \{1, 2, 3\}$ gilt nach dem obigen

$$\wp(\frac{\omega_j}{2}) - e_j = 0 \quad \text{und} \quad \wp'(\frac{\omega_j}{2}) = 0.$$

Die Funktion $\wp - e_j$ hat also in $\frac{\omega_j}{2}$ eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung. Für $\wp$ haben wir somit

$$e_j\text{-ord}(\wp; \frac{\omega_j}{2}) \geq 2 \quad \text{für alle } j \in \{1, 2, 3\}$$

gezeigt. Nehmen wir nun an, es gälte $e_i = e_j$ für ein Paar (i, j) mit $i \neq j$. Dann folgte sofort

$$e_i\text{-ord}(\wp; \frac{\omega_i}{2}) \geq 2 \quad \text{und} \quad e_i\text{-ord}(\wp; \frac{\omega_j}{2}) \geq 2.$$

Andererseits sind nach Voraussetzung $\frac{\omega_i}{2}$ und $\frac{\omega_j}{2}$ modulo Λ verschieden, so dass wir $\text{ord}(\wp) \geq 4$ erhielten, was im Widerspruch zu Proposition 1.63 steht. $\square$

Die Weierstraß'sche $\wp$ -Funktion und ihre Ableitung $\wp'$ sind unsere ersten nichttrivialen Beispiele für elliptische Funktionen. Wie wir nun zeigen werden, spielen sie eine zentrale Rolle bei der Klassifikation derselben. Da die entsprechenden Resultate körpertheoretisch formuliert sind, wollen wir uns zunächst ein paar algebraische Grundbegriffe in Erinnerung rufen:

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Eine Teilmenge $k \subseteq K$, für die $(k, +)$ eine Untergruppe von $(K, +)$ ist und $(k \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Untergruppe von $(K \setminus \{0\}, \cdot)$, trägt ausgestattet mit der eingeschränkten Addition und der eingeschränkten Multiplikation selbst wieder die Struktur eines Körpers. Man nennt eine solche Teilmenge einen **Teilkörper** von K und K/k eine **Körpererweiterung**. Offensichtlich kann man K zusammen mit der Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} k \times K &\rightarrow K \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda \cdot a \end{aligned}$$

als einen k -Vektorraum auffassen. Man nennt $[K : k] := \dim_k(K)$ den **Körpergrad** von K/k .

Beispiel 1.67. (a) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ist Körpererweiterung vom Grad $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, denn $\{1, i\}$ ist eine $\mathbb{R}$ -Basis von $\mathbb{C}$.

(b) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist Körpererweiterung vom Grad $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$, denn $\pi \in \mathbb{R}$ ist transzendent.

(c) $K(\Lambda)/\mathbb{C}$ ist Körpererweiterung vom Grad $[K(\Lambda) : \mathbb{C}] = \infty$, denn alle Potenzen $\wp^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind $\mathbb{C}$ -linear unabhängig.

Seien $(K, +_K, \cdot_K)$ und $(K', +_{K'}, \cdot_{K'})$ Körper mit Nullelementen 0_K bzw. $0_{K'}$ und Einselementen 1_K bzw. $1_{K'}$. Eine Abbildung $\varphi: K \rightarrow K'$ heißt ein **Körperhomomorphismus**, wenn sie für alle $a, b \in K$ die Rechenregeln

- (i) $\varphi(a +_K b) = \varphi(a) +_{K'} \varphi(b)$,
- (ii) $\varphi(a \cdot_K b) = \varphi(a) \cdot_{K'} \varphi(b)$,
- (iii) $\varphi(1_K) = 1_{K'}$

erfüllt. Ein bijektiver Körperhomomorphismus heißt ein **Körperisomorphismus**. Da Körperhomomorphismen **stets injektiv** sind, langt es hierfür, die Surjektivität zu überprüfen.



Definition 1.68. Der Teilkörper²²

$$K_+(\Lambda) := \{f \in K(\Lambda) : f(z) = f(-z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\} \subseteq K(\Lambda)$$

heißt der **Körper der geraden elliptischen Funktionen**.

Lemma 1.69. Sei $f \in K_+(\Lambda)$ mit $S(f) = f^{-1}(\{\infty\}) \subseteq \Lambda$. Dann ist f ein Polynom in $\wp$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung f nicht konstant. Dann ist nach dem Ersten Liouville'schen Satz 1.54 die Menge $S(f)$ nicht leer; es gibt also ein $\omega_0 \in S(f)$. Aufgrund der Voraussetzung $S(f) \subseteq \Lambda$ liegt ω_0 in Λ und wegen der Λ -Periodizität von f gilt sogar $S(f) \supseteq \Lambda$. Zusammengefasst erhalten wir $S(f) = \Lambda$.

Da f gerade ist, hat f in $z = 0$ einen Pol von Ordnung $2n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Die Laurent-Entwicklung von f um $z = 0$ ist also von der Form

$$f(z) = a_{-2n}z^{-2n} + \sum_{v > -n} a_{2v}z^{2v} \quad \text{für alle } z \in U_\varrho(0)$$

mit $a_{-2n} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a_{2v} \in \mathbb{C}$ für alle $v > -n$. Andererseits kennen wir aus Proposition 1.64 die Laurent-Entwicklung von $\wp$ und somit auch diejenige von $\wp^n \in K_+(\Lambda)$ in $z = 0$. Offenbar liegt für die Funktion

$$g := f - a_{-2n}\wp^n \in K_+(\Lambda)$$

die Polstellenmenge $S(g)$ wieder in Λ , und es gilt $\infty\text{-ord}(g; 0) < 2n$. Nun verfahren wir mit g genauso wie zuvor mit f und fahren induktiv fort. In endlich vielen Schritten erhalten wir ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$, für das die Funktion $f - P(\wp)$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität hat und dort den Wert Null annimmt. Wegen der Elliptizität von f und $\wp$ ist dann $f - P(\wp)$ eine ganze, elliptische Funktion, also konstant Null nach dem Ersten Liouville'schen Satz 1.54. Es folgt $f = P(\wp)$ und somit das Lemma. $\square$

Lemma 1.70. Die Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{C}(X) & \rightarrow K_+(\Lambda), \\ P & \mapsto P(\wp) \end{cases}$$

ist ein Körperisomorphismus.

²²Dass $K_+(\Lambda)$ tatsächlich ein Körper ist, ist eine leichte Übungsaufgabe.

Beweis. Die Abbildung φ ist wohldefiniert,

denn: Das Bild von φ liegt wegen der Elliptizität und der Geradheit von $\wp$ tatsächlich in $K_+(\Lambda)$, wenn wir ausschließen können, dass der Nenner $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ einer rationalen Funktion aus $\mathbb{C}(X)$ von φ auf die Nullabbildung geschickt wird. Es ist klar, dass dies nicht geschehen kann, wenn Q ein konstantes Polynom ist. Für $\deg(Q) \geq 1$ ist $Q(\wp)$ nicht konstant Null, weil $Q(\wp)$ in $z = 0$ wegen $\infty\text{-ord}(\wp; 0) = 2$ eine Polstelle der Ordnung $2 \deg(Q)$ hat. #

Das Einsetzen eines $\mathbb{C}$ -Algebrenelements in $\mathbb{C}(X)$ ist ein Körperhomomorphismus, wie man entweder leicht nachrechnet oder aus der Linearen Algebra weiß. Nach unseren Vorbemerkungen genügt es also für den Beweis des Lemmas, die Surjektivität von φ und also $\mathbb{C}(\wp) := \varphi(\mathbb{C}(X)) = K_+(\Lambda)$ zu zeigen. Da wir schon $\mathbb{C}(\wp) \subseteq K_+(\Lambda)$ eingesehen haben, genügt es sogar, $\mathbb{C}(\wp) \supseteq K_+(\Lambda)$ zu zeigen.

Sei also $f \in K_+(\Lambda) \setminus \mathbb{C}$ und sei $z_0 \notin \Lambda$ eine Polstelle der Ordnung $n \geq 1$ von f . Wegen $0\text{-ord}((\wp(z) - \wp(z_0))^n; z_0) \geq n$ hat dann

$$g(z) := f(z) (\wp(z) - \wp(z_0))^n$$

in $z = z_0$ eine hebbare Singularität. Die Polstellenmenge $S_\Lambda(f)$ von f modulo Λ ist endlich und die Funktion

$$G(z) := f(z) \cdot \prod_{s \in S_\Lambda(f) \setminus \Lambda} (\wp(z) - \wp(s))^{\infty\text{-ord}(f; s)}$$

hat höchstens Pole in Λ . Da G nach Konstruktion in $K_+(\Lambda)$ liegt, folgt die Behauptung mit Lemma 1.69. $\square$

Lemma 1.71. *Es gilt $[K(\Lambda) : K_+(\Lambda)] = 2$ und $\{1, \wp'\}$ ist eine Basis von $K(\Lambda)/K_+(\Lambda)$.*

Beweis. Mit $f(z) \in K(\Lambda)$ ist auch $f(-z)$ elliptisch bezüglich Λ . Setzen wir

$$f_\pm(z) := \frac{f(z) \pm f(-z)}{2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

so ist $f_+ \in K(\Lambda)$ gerade und $f_- \in K(\Lambda)$ ungerade. Es gilt dann

$$f = f_+ + f_- = f_+ + \wp' \cdot \frac{f_-}{\wp'} \in K_+(\Lambda) + \wp' \cdot K_+(\Lambda).$$

Wir haben hiermit gezeigt, dass $\{1, \wp'\}$ ein Erzeugendensystem des $K_+(\Lambda)$ -Vektorraums $K(\Lambda)$ ist. Die Behauptung folgt, weil $K_+(\Lambda)$ nach Proposition 1.62 ein echter Teilkörper von $K(\Lambda)$ ist. $\square$

Fassen wir die obigen Lemmata zusammen, so erhalten wir eine präzise Beschreibung des Körpers $K(\Lambda)$:

Satz 1.72 (Struktursatz für elliptische Funktionen). *Es gilt*

$$K(\Lambda) = \mathbb{C}(\wp) \oplus \mathbb{C}(\wp) \cdot \wp'.$$

1.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. Beweisen Sie Bemerkung 1.22, zeigen Sie also, dass zwei $\mathbb{R}$ -Basen $\{\omega_1, \omega_2\}$ und $\{\omega'_1, \omega'_2\}$ von $\mathbb{C}$ genau dann Basen desselben Gitters Λ sind, wenn es eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.2. Beweisen Sie Bemerkung 1.27 (c), zeigen Sie also, dass holomorphe Funktionen auf Riemann'schen Flächen stetig sind.

Aufgabe 1.3. Als Gebiete in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ sind die offene Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

und $\mathbb{C}$ selbst Beispiele Riemann'scher Flächen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}$ und $\mathbb{C}$ als topologische Räume homöomorph, jedoch nicht als Riemann'sche Flächen biholomorph äquivalent sind.

Aufgabe 1.4. Sei X eine Riemann'sche Fläche und

$$\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i : i \in I\}$$

ein Atlas von X . Es bezeichne $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation. Sei ferner

$$\mathcal{A}^\sigma := \{\sigma \circ \varphi_i : U_i \rightarrow \sigma(V_i) : \varphi_i \in \mathcal{A}, i \in I\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $\mathcal{A}^\sigma$ ist ein biholomorpher Atlas auf der X zugrunde liegenden komplexen Mannigfaltigkeit. Die dadurch induzierte Riemann'sche Fläche bezeichnen wir mit X^σ .
- (b) Die Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^\sigma$ sind nicht biholomorph verträglich.
- (c) Die Riemann'schen Flächen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^\sigma$ sind biholomorph äquivalent, wobei $\mathbb{C}$ wie üblich mit der durch den Atlas $\{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\}$ induzierten komplexen Struktur ausgestattet sei. Wie lassen sich die Elemente von $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\sigma)$ durch die von $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ charakterisieren?

Aufgabe 1.5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}^n$ die Menge der eindimensionalen komplexen Untervektorräume von $\mathbb{C}^{n+1}$. Der durch den Vektor $0 \neq (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ aufgespannte $\mathbb{C}$ -Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n+1}$ wird im Folgenden mit $[z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{P}^n$ bezeichnet. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} [z_1 : \dots : z_{n+1}] &= [z'_1 : \dots : z'_{n+1}] \text{ in } \mathbb{P}^n \\ \iff \text{es gibt ein } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } (z_1, \dots, z_{n+1}) &= \lambda \cdot (z'_1, \dots, z'_{n+1}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Für $i \in \{1, \dots, n+1\}$ bezeichne $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$ die Menge aller eindimensionalen komplexen Untervektorräume $\mathbb{C}^{n+1}$, die nicht in der durch $z_i = 0$ gegebenen Hyperebene von $\mathbb{C}^{n+1}$ liegen. Dann gilt $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$ und es existieren bijektive Abbildungen

$$\varphi_i: \begin{cases} U_i & \rightarrow \mathbb{C}^n, \\ [z_1 : \dots : z_{n+1}] & \mapsto \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right). \end{cases}$$

- (b) Die Teilmenge

$$\{\varphi_i^{-1}(V) : V \subseteq \mathbb{C}^n \text{ offen}, i \in \{1, \dots, n+1\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{P}^n)$$

definiert eine Topologie²³ auf der Menge $\mathbb{P}^n$. Letztere wird dadurch zu einem kompakten, zusammenhängenden Hausdorff-Raum und die Abbildungen $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ sind Homöomorphismen.

- (c) Die Menge $\mathcal{A} := \{\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n : i \in \{1, \dots, n+1\}\}$ ist ein biholomorpher Atlas auf $\mathbb{P}^n$.
 (d) Die so definierte Riemann'sche Fläche $\mathbb{P}^1$ ist biholomorph äquivalent zur Riemann'schen Zahlenkugel $\bar{\mathbb{C}}$.

Aufgabe 1.6. Sei $f \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$ eine meromorphe Funktion auf der Riemann'schen Zahlenkugel. Zeigen Sie, dass es dann Polynome $p, q \in \mathbb{C}[X]$ gibt mit

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } q(z) \neq 0.$$

Aufgabe 1.7. Sei die Abbildung $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ durch die Zuordnung

$$z \mapsto \begin{cases} z + \frac{1}{z} & \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ \infty & \text{für alle } z \in \{0, \infty\} \end{cases}$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie $f \in \text{Hol}(\bar{\mathbb{C}}, \bar{\mathbb{C}})$.
 (b) Bestimmen Sie $f(z_0)\text{-ord}(f; z_0)$ für alle $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$.
 (c) Berechnen Sie $\sum_{z \in f^{-1}(\{w_0\})} w_0\text{-ord}(f; z)$ für alle $w_0 \in \bar{\mathbb{C}}$.

Aufgabe 1.8. Seien X, Y Riemannsche Flächen, $f \in \text{Hol}(X, Y)$ nichtkonstant, $x_0 \in X$ und $y_0 := f(x_0)$. Wie in Satz 1.40 bezeichnen im Folgenden $\varphi: U \rightarrow V$ bzw. $\psi: U' \rightarrow V'$ Karten von X bzw. Y mit $x_0 \in U$, $\varphi(x_0) = 0$, $y_0 \in U'$, $\psi(y_0) = 0$, $f(U) \subseteq U'$ sowie $F(z) = z^k$ für $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V'$ mit einem $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Es gilt

$$(f|_U)^{-1}(\{y_0\}) = \{x_0\}.$$

²³Sei X eine Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann definiert $\mathcal{S}$ auf X dadurch eine Topologie, dass genau diejenigen Teilmengen von X als offen gesetzt werden, die sich als beliebige Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen aus $\mathcal{S}$ schreiben lassen. $\mathcal{S}$ wird dann als **Subbasis** dieser Topologie bezeichnet.

(b) Es gilt die folgende Variante von Bemerkung 1.41:

Für jede offene Umgebung U von x_0 gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ von x_0 , eine offene Umgebung $\tilde{U}'$ von y_0 und eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl k , sodass für jedes $y \in \tilde{U}' \setminus \{y_0\}$ die Menge $\tilde{U} \cap f^{-1}(\{y\})$ genau k Elemente besitzt. Ferner ist k genau diejenige natürliche Zahl, die in Satz 1.40 vorkommt.

Aufgabe 1.9. In dieser Aufgabe sehen wir exemplarisch, dass sich nicht alle Aussagen der Funktionentheorie auf $\mathbb{C}$ unverändert auf Riemann'sche Flächen übertragen lassen. Sei $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ meromorph. Wir definieren

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f := \operatorname{res}_{z=0} \tilde{f} \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(z) := -\frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt die folgende Variante des Residuensatzes:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=R} f(z) \, dz,$$

wobei die Kreislinie im mathematisch positiven Sinn einfach durchlaufen wird und $R > 0$ so groß gewählt ist, dass f keine Singularitäten in der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$ besitzt. Wieso ist letzteres möglich?

(b) Es folgt die im Kontext Riemann'scher Flächen oft als Residuensatz bezeichnete Aussage

$$\sum_{z_0 \in \overline{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_{z=z_0} f = 0.$$

(c) Benutzen Sie die Formel aus (a), um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_{|z|=1} \frac{5z^6 + 4}{2z^7 + 1} \, dz.$$

Die Kreislinie wird hierbei wie üblich im mathematisch positiven Sinn einfach durchlaufen.

(d) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ hat in ∞ eine hebbare Singularität, aber es gilt $\operatorname{res}_{z=\infty} f = -1$.

Bemerkung: Das Ergebnis aus (d) zeigt, dass das Residuum im Punkt $z = \infty$ nicht dem Koeffizienten a_{-1} der Laurent-Entwicklung von f um ∞ entspricht. Dies liegt darin begründet, dass sich das Residuum auf das Differential $f(z) \, dz$ bezieht, für das unter Kartenwechsel $f\left(\frac{1}{z}\right) d\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right) \, dz$ gilt, die Laurent-Entwicklung aber auf die Funktion f . Wir werden Differentiale und Residuen auf Riemann'schen Flächen in Kapitel 4 kennenlernen.

Aufgabe 1.10. Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Zu jedem $\omega \in \Lambda$ gebe es ein $c_\omega \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z + \omega) = c_\omega \cdot f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass es dann komplexe Zahlen $a, c \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = c \cdot e^{az}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 1.11. Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann setzen wir

$$\Delta(\Lambda) := g_2^3(\Lambda) - 27g_3^2(\Lambda),$$

wobei $g_2(\Lambda)$ und $g_3(\Lambda)$ wie in Satz 1.65 gegeben seien. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Es gilt $\Delta(\Lambda) \neq 0$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass ein komplexes Polynom der Form $p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ mit $a \neq 0$ genau dann drei paarweise verschiedene Nullstellen besitzt, wenn seine **Diskriminante** $b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2$ ungleich 0 ist.

Seien ab jetzt

$$j(\Lambda) := \frac{g_2^3(\Lambda)}{\Delta(\Lambda)} \quad \text{und} \quad j(\tau) := j(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

- (b) Es gelten $j(i) = 1$ und $j(e^{\frac{2\pi i}{3}}) = 0$.

- (c) Für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathbb{H}$ gilt: $j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = j(\tau)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $j(a\Lambda) = j(\Lambda)$ für alle $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

- (d) Sei $(g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2$ mit $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Dann gilt: Wenn es ein Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ mit $j(\Lambda) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$ gibt, so auch ein Gitter $\Lambda' \subset \mathbb{C}$ mit $(g_2, g_3) = (g_2(\Lambda'), g_3(\Lambda'))$.

Bemerkung: Die j -Invariante $j: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist tatsächlich eine surjektive holomorphe Funktion, vgl. Aufgabe 1.12. Es ist also jedes Paar $(g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2$ mit $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ durch ein Gitter realisierbar.

Aufgabe 1.12. In dieser Aufgabe weisen wir die in Aufgabe 1.11 nur behaupteten Eigenschaften der Holomorphie und der Surjektivität von $j(\tau)$ nach. Zeigen Sie dafür die folgenden Aussagen:

- (a) Aus Lemma 1.61 folgt, dass für jedes $k \geq 3$ die Eisenstein-Reihe

$$G_k(\tau) := G_k(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}$$

eine holomorphe Funktion ist, was folglich dann auch auf die Funktionen

$$g_2(\tau) := g_2(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}), \quad g_3(\tau) := g_3(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}), \quad \Delta(\tau) := \Delta(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}$$

zutrifft.

- (b) Für ungerades $k \geq 3$ gilt

$$G_k \equiv 0.$$

- (c) Für gerades $k \geq 4$ gilt

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G_k(\tau) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} =: 2 \cdot \zeta(k).$$

Mit $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ und $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ folgt hieraus

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Delta(\tau) = 0.$$

Mit der in Teil (a) von Aufgabe 1.11 gezeigten Nullstellenfreiheit von $\Delta(\tau)$ folgt, dass $j(\tau)$ eine auf $\mathbb{H}$ holomorphe Funktion ist, die

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |j(\tau)| = \infty.$$

erfüllt.

- (d) Die holomorphe Funktion $j(\tau)$ nimmt auf dem Gebiet $\mathbb{H}$ jeden Wert aus $\mathbb{C}$ an.

Überlagerungstheorie

Die Theorie der Riemann'schen Flächen ist dadurch motiviert, dass bei der analytischen Fortsetzung holomorpher Funktionen längs verschiedener Kurven verschiedene Funktionswerte entstehen können. Setzt man so einen holomorphen „Funktionskeim“ unbegrenzt analytisch fort, so entsteht eine im Allgemeinen mehrdeutige Funktion. Um wieder eindeutige Funktionen zu erhalten, ersetzt man den Definitionsbereich durch eine über der komplexen Ebene gelegene mehrblättrige Fläche, die über jedem ursprünglichen Punkt gerade so viele Punkte besitzt wie die fortgesetzte analytische Funktion Funktionskeime annimmt. Auf dieser „Überlagerungsfläche“ wird die analytische Funktion dann eindeutig. Wir besprechen diese Überlagerungen in diesem Kapitel zunächst topologisch, behalten dabei aber stets den Anwendungsfall auf Riemann'sche Flächen im Blick und können schließlich in Abschnitt 2.7 mit den Methoden der Überlagerungstheorie eine Klassifikation der Riemann'schen Flächen angeben.

2.1 Homotopie und Fundamentalgruppe

Definition 2.1. Eine *Kurve* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$. Zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ mit

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) \quad \text{und} \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$$

heißen **homotop**, in Zeichen $\gamma_0 \sim \gamma_1$, wenn es eine stetige Abbildung $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit

- $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ und $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0, 1]$,
- $H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ für alle $s \in [0, 1]$.

Eine Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ in einem topologischen Raum X , für die **Anfangspunkt** $\gamma(0)$ und **Endpunkt** $\gamma(1)$ übereinstimmen, heißt **geschlossen**. Eine geschlossene Kurve γ mit Anfangs- und Endpunkt x_0 heißt **nullhomotop** in X genau dann, wenn γ in X zur **Punktkurve**

$$\dot{\gamma}_{x_0}(t) = x_0 \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

homotop ist.

In einem gegebenen topologischen Raum X wird offenbar durch Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kurven in X mit Anfangspunkt $x_0 \in X$ und Endpunkt $x_1 \in X$ definiert. Für die Homotopieklasse einer gegebenen Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ schreiben wir $[\gamma]$.

Definition 2.2. Seien X ein topologischer Raum und $x_0, x_1, x_2 \in X$ fest gewählt. Seien weiter eine Kurve $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 und eine Kurve $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ von x_1 nach x_2 gegeben. Dann sagen wir:

(a) Die **zusammengesetzte Kurve** $(\gamma_0 \cdot \gamma_1): [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_2 ist gegeben durch

$$(\gamma_0 \cdot \gamma_1)(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_1(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

(b) Die **inverse Kurve** $\gamma_0^{-1}: [0, 1] \rightarrow X$ von x_1 nach x_0 ist gegeben durch

$$\gamma_0^{-1}(t) := \gamma_0(1 - t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Man rechnet leicht nach: Für drei Punkte $x_0, x_1, x_2 \in X$, zwei homotope Kurven γ_0 und $\tilde{\gamma}_0$ von x_0 nach x_1 und zwei homotope Kurven γ_1 und $\tilde{\gamma}_1$ von x_1 nach x_2 sind die jeweiligen zusammengesetzten Kurven ebenfalls homotop, es gilt also $(\gamma_0 \cdot \gamma_1) \sim (\tilde{\gamma}_0 \cdot \tilde{\gamma}_1)$.

Lemma 2.3. Seien X ein topologischer Raum und $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$ fest gewählt. Seien weiter $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$ Kurven mit

$$\gamma_k(0) = x_k \text{ und } \gamma_k(1) = x_{k+1} \quad \text{für } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Dann gelten die folgenden Homotopien:

- (a) $\dot{\gamma}_{x_0} \cdot \gamma_0 \sim \gamma_0 \sim \gamma_0 \cdot \dot{\gamma}_{x_1}$,
- (b) $\gamma_0 \cdot \gamma_0^{-1} \sim \dot{\gamma}_{x_0}$,
- (c) $(\gamma_0 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2 \sim \gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)$.

Dieses Lemma beweisen wir in Übungsaufgabe 2.1. Als Spezialfall erhalten wir das folgende wichtige Korollar:

Korollar 2.4. Seien X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ fest gewählt. Auf der Menge

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\gamma] : \gamma: [0, 1] \rightarrow X \text{ Kurve mit Anfangs- und Endpunkt } x_0\}$$

lässt sich via

$$[\gamma_0] \cdot [\gamma_1] := [\gamma_0 \cdot \gamma_1] \quad \text{für alle } [\gamma_0], [\gamma_1] \in \pi_1(X, x_0)$$

eine Verknüpfung definieren. $\pi_1(X, x_0)$ wird so zu einer Gruppe mit neutralem Element $[\dot{\gamma}_{x_0}]$, der **Fundamentalgruppe** von X bezüglich des **Basispunktes** x_0 .

Beweis. Die Verknüpfung der Fundamentalgruppe ist nach unserer Überlegung im Anschluss an Definition 2.2 wohldefiniert und nach Lemma 2.3 (c) assoziativ. Nach Lemma 2.3 (a) ist $[\dot{\gamma}_{x_0}]$ das neutrale Element und nach Lemma 2.3 (b) gilt $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$ für alle $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. $\square$

Seien ein topologischer Raum X sowie zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ fest vorgegeben. Dann definiert offensichtlich für eine beliebige Kurve $\delta: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 , also mit $\delta(0) = x_0$ und $\delta(1) = x_1$, die Zuordnung

$$[\gamma] \mapsto [\delta^{-1} \cdot \gamma \cdot \delta]$$

einen Gruppenisomorphismus $\varphi: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Für wegzusammenhängende topologische Räume ist damit der Isomorphietyp der Fundamentalgruppe unabhängig vom Basispunkt und wir schreiben oft auch $\pi_1(X)$ statt $\pi_1(X, x_0)$.²⁴

Definition 2.5. Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn $\pi_1(X) = 0$ gilt.²⁵

Proposition 2.6. In einem einfach zusammenhängenden, wegzusammenhängenden topologischen Raum X seien zwei Punkte x_0 und x_1 gegeben. Dann sind je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 homotop.

Beweis. Wegen $\pi_1(X, x_1) = 0$ gilt $\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_0 \sim \dot{\gamma}_{x_1}$ und somit auch

$$\gamma_0 \sim \dot{\gamma}_{x_0} \cdot \gamma_0 \sim (\gamma_1 \cdot \gamma_1^{-1}) \cdot \gamma_0 \sim \gamma_1 \cdot (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_0) \sim \gamma_1 \cdot \dot{\gamma}_{x_1} \sim \gamma_1,$$

was zu zeigen war. $\square$

Beispiel 2.7. Die Riemann'sche Zahlenkugel $\bar{\mathbb{C}}$ ist einfach zusammenhängend,

denn: Wir zeigen $\pi_1(\bar{\mathbb{C}}) = \pi_1(\bar{\mathbb{C}}, 0) = 0$ und betrachten dafür eine beliebige geschlossene Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ mit Anfangs- und Endpunkt 0. Da $[0, 1]$ kompakt und γ stetig ist, gibt es endlich viele – nicht notwendigerweise geschlossene – Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+1}: [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die zusammengesetzte Kurve $\tilde{\gamma} := \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_{2n+1}$ ist zu γ homotop.
- Die Kurven γ_{2v+1} mit $v \in \{0, \dots, n\}$ verlaufen ganz in $\mathbb{C}$, die Kurven γ_{2v} mit $v \in \{1, \dots, n\}$ ganz in $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.²⁶ Anfangs- und Endpunkte der Kurven γ_{2v} sind hierbei von ∞ verschieden.

²⁴Der Gruppenisomorphismus φ ist im Allgemeinen nicht kanonisch, sondern hängt von der Wahl der Kurve δ ab: Konstruieren wir ausgehend von einer weiteren Kurve $\tilde{\delta}: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 analog einen Gruppenisomorphismus $\tilde{\varphi}$, so gilt für den Automorphismus $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$

$$(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)([\gamma]) = (\tilde{\delta} \cdot \delta^{-1}) \cdot \gamma \cdot (\tilde{\delta} \cdot \delta^{-1})^{-1} \quad \text{für alle } \gamma \in \pi_1(X, x_0).$$

Kanonizität gilt also nur für abelsches $\pi_1(X, x_0)$.

²⁵Es ist gewöhnungsbedürftig aber etabliert, $\pi_1(X) = 0$ zu schreiben, wenn die Fundamentalgruppe nur aus dem neutralen Element besteht, obwohl die Gruppenverknüpfung multiplikativ geschrieben wird.

²⁶Wir benutzen die in (1.1) eingeführte, den Standardkarten auf $\bar{\mathbb{C}}$ zugrundeliegende offene Überdeckung $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup (\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$.

Bekanntermaßen ist die offene Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homöomorph zu $\mathbb{C}$ und daher einfach zusammenhängend. Wir können somit Proposition 2.6 anwenden und finden für alle $v \in \{1, \dots, n\}$ zu den jeweiligen Kurven γ_{2v} homotope Kurven γ'_{2v} , die ganz in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ verlaufen. Es gilt dann

$$\tilde{\gamma}' := \gamma_1 \cdot \gamma'_2 \cdot \dots \cdot \gamma'_{2n} \cdot \gamma_{2n+1} \sim \tilde{\gamma} \sim \gamma,$$

und $\tilde{\gamma}'$ verläuft ganz in $\mathbb{C}$. Die Behauptung folgt nun mit $\pi_1(\mathbb{C}) = 0$. #

Definition 2.8. Zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ mit nicht notwendigerweise identischem Anfangs- und Endpunkt in einem topologischen Raum X heißen **frei homotop**, wenn es eine stetige Abbildung $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit:

- $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ und $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0, 1]$,
- $H(0, s) = H(1, s)$ für alle $s \in [0, 1]$.

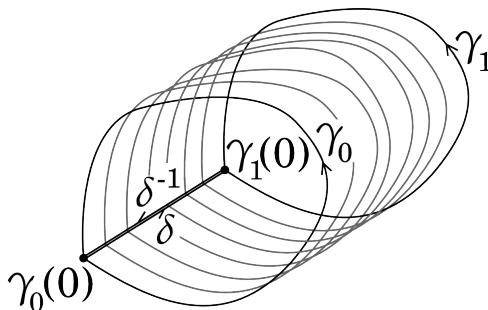
Wir wollen die freie Homotopie geschlossener Kurven mit der in Definition 2.1 eingeführten Homotopie bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt vergleichen. Seien dafür γ_0 und γ_1 zwei frei homotope geschlossene Kurven in einem topologischen Raum X . Setzen wir in dieser Situation $\gamma_s(t) := H(t, s)$, so ist jedes γ_s eine geschlossene Kurve in X und in den Spezialfällen $s = 0$ bzw. $s = 1$ stimmt γ_s mit γ_0 bzw. γ_1 überein. Die Kurvenschar

$$\{\gamma_s : s \in [0, 1]\}$$

stellt so eine stetige Deformation der Kurve γ_0 in die Kurve γ_1 dar. Für $t \in [0, 1]$ setzen wir nun weiter $\delta(t) := H(0, t)$. Dann ist offensichtlich δ eine Kurve mit Anfangspunkt $\delta(0) = \gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ und Endpunkt $\delta(1) = \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$, genauer gilt sogar

$$\delta(s) = \gamma_s(0) = \gamma_s(1) \quad \text{für alle } s \in [0, 1].$$

Die Kurve $\delta \cdot \gamma_1 \cdot \delta^{-1}$ ist also geschlossen mit Anfangs- und Endpunkt x_0 und man sieht leicht ein, dass sie im Sinne von Definition 2.1 homotop zu γ_0 ist.



Da zwei im Sinne von Definition 2.1 zueinander homotope geschlossene Kurven mit identischem Anfangs- und Endpunkt offensichtlich auch frei homotop im Sinne von Definition 2.8 sind, haben wir zusammenfassend folgende Bemerkung gezeigt:

Bemerkung 2.9. Zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ mit identischem Anfangs- und Endpunkt in einem topologischen Raum X sind genau dann frei homotop im Sinne von Definition 2.8, wenn sie homotop im Sinne von Definition 2.1 sind. Es führt also nicht zu Missverständnissen, wenn wir im Folgenden einfach von homotopen Kurven reden, sobald eine der beiden Definitionen anwendbar ist.

Proposition 2.10. Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn je zwei geschlossene Kurven in X frei homotop sind.

Beweis. Nach Definition 2.5 und Korollar 2.4 ist ein wegzusammenhängender topologischer Raum X genau dann einfach zusammenhängend, wenn für alle $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &= \{[\gamma] : \gamma: [0, 1] \rightarrow X \text{ Kurve mit Anfangs- und Endpunkt } x_0\} \\ &= \{[\dot{\gamma}_{x_0}]\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

gilt.

Sei nun zunächst X einfach zusammenhängend. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es für je zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ eine Kurve $\delta: [0, 1] \rightarrow X$ mit

$$\delta(0) = \gamma_0(0) = \gamma_0(1) =: x_0 \quad \text{und} \quad \delta(1) = \gamma_1(0) = \gamma_1(1) =: x_1.$$

Nach (2.1) sind dann γ_0 und $\delta \cdot \gamma_1 \cdot \delta^{-1}$ als geschlossene Kurven mit Anfangs- und Endpunkt x_0 homotop; es gibt also eine stetige Abbildung $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ wie in Definition 2.1 mit

- $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ und $H(t, 1) = (\delta \gamma_1 \delta^{-1})(t)$ für alle $t \in [0, 1]$,
- $\begin{cases} H(0, s) = \gamma_0(0) = (\delta \cdot \gamma_1 \cdot \delta^{-1})(0), \\ H(1, s) = \gamma_0(1) = (\delta \cdot \gamma_1 \cdot \delta^{-1})(1) \end{cases}$ für alle $s \in [0, 1]$.

Es ist klar, dass die stetige Abbildung

$$(\delta_s \cdot H \cdot \delta_s^{-1}): [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X \quad \text{mit } \delta_s(t) := \delta(s + (1-s)t) \text{ für alle } s, t \in [0, 1]$$

die Forderungen für eine freie Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 wie in Definition 2.8 erfüllt.

Nehmen wir nun umgekehrt an, zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ in X seien frei homotop mit Homotopieabbildung $H(s, t)$. In der Herleitung von Bemerkung 2.9 haben wir in dieser Situation festgestellt, dass

$$\delta \cdot \gamma_1 \cdot \delta^{-1} \sim \gamma_0 \quad \text{mit } \delta(t) := H(0, t)$$

gilt. Die Behauptung folgt mit (2.1), wenn wir dies im Spezialfall $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) =: x_0$ betrachten. $\square$

Abschließend in diesem Abschnitt wollen wir einsehen, dass die Zuordnung der Fundamentalgruppe zu einem topologischen Raum auf strukturelle Weise sinnvoll ist. Sei dafür $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ist $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ eine Kurve in X , so ist $(f \circ \gamma): [0, 1] \rightarrow Y$ eine Kurve in Y . Sind γ_1 und γ_2 homotope Kurven in X , so sind $f \circ \gamma_1$

und $f \circ \gamma_2$ homotope Kurven in Y . Auf diese Weise induziert f für ein beliebiges $x_0 \in X$ eine Abbildung

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

der Fundamentalgruppen. Wegen

$$f \circ (\gamma_1 \cdot \gamma_2) = (f \circ \gamma_1) \cdot (f \circ \gamma_2)$$

ist diese Abbildung ein Gruppenhomomorphismus. Für einen beliebigen weiteren topologischen Raum Z und eine beliebige weitere stetige Abbildung $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

In der Sprache der Kategorientheorie haben wir also gezeigt, dass durch

$$\pi_1: \begin{cases} (X, x_0) & \mapsto \pi_1(X, x_0), \\ (f: (X, x_0) \rightarrow (Y, f(x_0))) & \mapsto (f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))) \end{cases}$$

ein *kovarianter Funktor* von der Kategorie der topologischen Räume mit ausgewähltem Punkt in die Kategorie der Gruppen gegeben ist.

2.2 Überlagerungen

Deutlich allgemeiner als in der Topologie üblich definieren wir:

Definition 2.11. Für je zwei topologische Räume X, Y und eine Abbildung $p: Y \rightarrow X$ sagen wir:

- (a) Die Abbildung p heißt **diskret**, wenn das Urbild eines jeden Punktes von X eine diskrete Menge in Y ist.²⁷
- (b) Die Abbildung p heißt eine **Überlagerung**, wenn sie stetig, offen und diskret ist.

Definition 2.12. Für je drei topologische Räume X, Y, Z und Überlagerungen $p: Y \rightarrow X$ und $q: Z \rightarrow X$ definieren wir:

- (a) Für $y_0 \in Y$ und $x_0 \in X$ mit $x_0 = p(y_0)$ sagen wir, y_0 **liegt über** x_0 bzw. x_0 ist der **Spurpunkt** von y_0 .
- (b) Erfüllt eine Abbildung $f: Y \rightarrow Z$ die Bedingung $p = q \circ f$, so heißt f **spurtreu**.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

Ein Punkt $y_0 \in Y$ der über einem Punkt $x_0 \in X$ liegt, wird unter der spurtreuen Abbildung f also auf einen Punkt $z_0 \in Z$ abgebildet, der ebenfalls über x_0 liegt.

²⁷Hiermit meinen wir eine Teilmenge Z von Y , deren durch Schneiden der in Y offenen Teilmengen mit Z definierten Unterraumtopologie die diskrete Topologie auf Z ist. Um zu zeigen, dass eine Teilmenge $Z \subseteq Y$ diskret ist, reicht es mit Axiom (T_2) aus zu zeigen, dass sich je zwei Elemente von Z durch offene Mengen in Y trennen lassen.

Beispiel 2.13. (a) *Trivialerweise ist jeder Homöomorphismus topologischer Räume eine Überlagerung.*

(b) *Für Riemann'sche Flächen X, Y ist jede nichtkonstante holomorphe Abbildung $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung,*

denn: Die Abbildung p ist nach Definition stetig und nach dem Offenheitssatz 1.43 offen. Wir zeigen nun, dass p nur dann nichtdiskret sein kann, wenn es konstant ist. Sei also p nichtdiskret, so dass ein Punkt $x \in X$ existiert, dessen Urbild unter p nicht diskret ist. Definitionsgemäß gibt es dann eine Teilmenge $M \subseteq p^{-1}(x)$, die nicht offen ist. Da Y durch homöomorphe Urbilder offener Kreisscheiben unter seinen Kartenabbildungen überdeckt werden kann und beliebige Vereinigungen offener Mengen wieder offen sind, dürfen wir dabei ohne Einschränkung annehmen, dass M in einem solchen Urbild enthalten und sein Bild $\psi(M)$ unter der zugehörigen Kartenabbildung $\psi: U' \rightarrow V'$ beschränkt ist. Da $V' \subseteq \mathbb{C}$ Hausdorff'sch ist, lässt sich jede endliche Menge von Punkten in V' durch offene Kreisscheiben trennen, so dass $\psi(M) \subseteq V'$ als nichtoffene Teilmenge zudem unendlich sein muss. Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRAß²⁸ enthält somit die Menge $\psi(M)$ – und mit ihr auch ihr homöomorphes Urbild M – einen Häufungspunkt. Nach dem Identitätssatz 1.31 folgt nun die Konstanz von p . #

Eine schöne Interpretation von Überlagerungen im Kontext Riemann'scher Flächen gibt die folgende Bemerkung:

Bemerkung 2.14. *Seien X, Y Riemann'sche Flächen und $p: Y \rightarrow X$ eine holomorphe Überlagerung. Dann heißt eine holomorphe Funktion $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. eine meromorphe Funktion $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine **mehrdeutige holomorphe bzw. meromorphe Funktion** auf X . Für ein $x \in X$ mit $p^{-1}(x) = \{y_j : j \in J\}$ sind die Zahlen $f(y_j)$ mit $j \in J$ die Werte der mehrdeutigen Funktion f an der Stelle x .*

Beispiel 2.15. *Setzen wir in der Situation von Bemerkung 2.14 speziell $Y = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}^\times$ und $p = \exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, so entspricht die identische Funktion $\text{id}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dem mehrdeutigen Logarithmus auf $\mathbb{C}^\times$, denn für ein $z \in \mathbb{C}^\times$ besteht $\exp^{-1}(z)$ genau aus den verschiedenen Werten des Logarithmus.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{C} \\ \exp \downarrow & \nearrow \log & \\ \mathbb{C}^\times & & \end{array}$$

Ein wichtiger Grund für unsere allgemeinere Definition einer Überlagerung ist, dass wir Verzweigung erlauben wollen. Hierfür definieren wir:

Definition 2.16. *Seien X, Y topologische Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Ein Punkt $y_0 \in Y$ heißt ein **Verzweigungspunkt** von p , wenn es keine Umgebung U' von y_0 gibt, für die $p|_{U'}$ injektiv ist. Die Überlagerung p heißt **unverzweigt**, falls sie keine Verzweigungspunkte besitzt.*

Bemerkung 2.17. *Nach Beispiel 2.13 (b) ist jede nichtkonstante holomorphe Abbildung $p: Y \rightarrow X$ zwischen Riemann'schen Flächen X und Y eine Überlagerung. Ein $y_0 \in Y$ ist dabei offensichtlich und*

²⁸Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848) und Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897)

beruhigenderweise genau dann ein Verzweigungspunkt im Sinne von Definition 2.16, wenn es auch ein Verzweigungspunkt im Sinne von Definition 1.46 ist. Schreiben wir $Vz(p) \subseteq Y$ für die Menge aller Verzweigungspunkte von p , so ist insbesondere die Einschränkung

$$p|_{Y \setminus Vz(p)}: (Y \setminus Vz(p)) \rightarrow (X \setminus p(Vz(p)))$$

unverzweigt. Insbesondere trifft dies im Fall $Vz(p) = \emptyset$ bereits auf p selbst zu.

Beispiel 2.18. (a) Die Abbildung $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ist eine unverzweigte Überlagerung, denn die Einschränkung von $\exp$ auf jede Teilmenge $U' \subseteq \mathbb{C}$, die keine zwei Punkte enthält, die sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden, ist injektiv.

(b) Für ein beliebiges Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ist die kanonische Projektion $\pi_\Lambda: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ eine unverzweigte Überlagerung, denn die Einschränkung von π_Λ auf jede Teilmenge $U' \subseteq \mathbb{C}$, die keine zwei Punkte enthält, die sich um ein Element von Λ unterscheiden, ist injektiv.

Proposition 2.19. Seien X, Y topologische Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Abbildung p ist eine unverzweigte Überlagerung.
- (ii) Die Abbildung p ist ein **lokaler Homöomorphismus**, es gibt also für alle $y_0 \in Y$ eine offene Umgebung $U' \subseteq Y$ derart, dass $p(U') \subseteq X$ eine offene Umgebung von $p(y_0)$ ist und $p|_{U'}: U' \rightarrow p(U')$ ein Homöomorphismus.

Beweis. Gelte zunächst (i) und sei also p eine unverzweigte Überlagerung. Dann ist kein Punkt von Y ein Verzweigungspunkt und es gibt für alle $y_0 \in Y$ eine offene Umgebung U' von y_0 , für die $p|_{U'}$ injektiv ist. Da p als Überlagerung stetig und offen ist, bildet p die Menge U' homöomorph auf die offene Teilmenge $p(U') \subseteq X$ ab. Insgesamt haben wir (ii) gezeigt.

Gelte nun umgekehrt (ii) und sei also p ein lokaler Homöomorphismus. Als solcher ist p trivialerweise stetig, offen und besitzt keine Verzweigungspunkte. Die Abbildung p ist aber auch diskret,

denn: Zu jedem Punkt y_0 aus dem Urbild $p^{-1}(x_0)$ eines beliebigen $x_0 \in X$ gibt es nach Voraussetzung eine offene Umgebung U' , die durch p homöomorph auf die offene Menge $p(U') \subseteq X$ abgebildet wird. Für diese gilt $U' \cap p^{-1}(x_0) = \{y_0\}$. Die Punkte des Urbilds $p^{-1}(x_0)$ eines beliebigen x_0 lassen sich also durch offene Mengen in Y trennen, was die Behauptung zeigt. #

Insgesamt haben wir (i) gezeigt. □

Satz 2.20. Seien X eine Riemann'sche Fläche, Y ein Hausdorff-Raum und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung. Dann gibt es genau eine komplexe Struktur auf Y , für die p holomorph – und dann sogar lokal biholomorph – wird.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz einer solchen komplexen Struktur. Sei dafür $U' \subseteq Y$ eine beliebige offene Teilmenge, für die $p|_{U'}: U' \rightarrow p(U')$ ein Homöomorphismus ist, und sei

$\varphi: p(U') \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ eine Karte der komplexen Struktur von X . Dann ist $\psi := \varphi \circ p: U' \rightarrow V$ eine komplexe Karte auf Y . Wir bezeichnen die Menge aller komplexen Karten auf Y , die sich auf diese Weise erhalten lassen, mit $\mathcal{A}$. Aufgrund der Unverzweigtheit von p überdecken die Karten aus $\mathcal{A}$ ganz Y und, da die Karten auf der Riemann'schen Fläche X paarweise biholomorph verträglich sind, trifft das nach Konstruktion auch auf die Karten aus $\mathcal{A}$ zu. Es folgt, dass $\mathcal{A}$ ein biholomorpher Atlas auf Y ist und somit eine komplexe Struktur auf Y definiert. Wählen wir diese komplexe Struktur, so ist wegen der Biholomorphie der Kartenwechselabbildungen der Riemann'schen Fläche X dann auch die Überlagerung $p: (Y, \mathcal{A}) \rightarrow X$ lokal biholomorph und also holomorph.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit einer solchen komplexen Struktur betrachten wir einen weiteren komplexen Atlas $\mathcal{A}'$ auf Y , für den die Überlagerung $p: (Y, \mathcal{A}') \rightarrow X$ holomorph und also lokal biholomorph ist. Dann ist die identische Abbildung $(Y, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{A}')$ lokal biholomorph und somit biholomorph. Es folgt, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ dieselbe komplexe Struktur definieren. $\square$

2.3 Hochhebungen

Definition 2.21. Seien X, Y, Z topologische Räume, $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f: Z \rightarrow X$ stetig. Eine **Hochhebung** von f über die Überlagerung p ist dann eine stetige Abbildung $g: Z \rightarrow Y$ mit $f = p \circ g$, für die also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kommutiert.

Satz 2.22 (Eindeutigkeit der Hochhebung). Seien X, Y Hausdorff-Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung. Seien weiter Z ein nichtleerer zusammenhängender topologischer Raum und $f: Z \rightarrow X$ stetig. Für je zwei Hochhebungen $g, \tilde{g}: Z \rightarrow Y$ von f über p und ein $z_0 \in Z$ mit $g(z_0) = \tilde{g}(z_0)$ gilt dann schon $g = \tilde{g}$.

Beweis. Wir betrachten die Übereinstimmungsmenge

$$\tilde{U} := \{z \in Z : g(z) = \tilde{g}(z)\}$$

und werden zeigen, dass $\tilde{U}$ offen und abgeschlossen ist. Da Z zusammenhängend ist und $\tilde{U}$ wegen $g(z_0) = \tilde{g}(z_0)$ nicht leer ist, folgt so bereits der Satz.

Tatsächlich ist aber $\tilde{U}$ abgeschlossen,

denn: Im Hausdorff-Raum Y ist die Diagonale $\Delta \subseteq Y \times Y$ abgeschlossen und $\tilde{U}$ ist das Urbild von Δ unter der (stetigen) Abbildung $(g, \tilde{g}): Z \rightarrow Y \times Y$. $\#$

Wir zeigen nun, dass $\tilde{U}$ auch offen ist. Sei dafür $z \in \tilde{U}$ beliebig mit $g(z) = \tilde{g}(z) =: y$. Da die unverzweigte Überlagerung p nach Proposition 2.19 ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es eine offene Umgebung U' von y , die durch p homöomorph auf eine offene Umgebung

$U := p(U')$ von $p(y) = f(z)$ abgebildet wird. Da g und $\tilde{g}$ stetig sind, gibt es eine offene Umgebung U'' von z mit $g(U''), \tilde{g}(U'') \subseteq U'$. Wegen $p \circ g = f = p \circ \tilde{g}$ gilt

$$g|_{U''} = (p|_{U'})^{-1} \circ (f|_{U''}) = \tilde{g}|_{U''},$$

wobei $(p|_{U'})^{-1}: U \rightarrow U'$ die Umkehrabbildung des Homöomorphismus $p|_{U'}: U' \rightarrow U$ bezeichne. Hieraus folgt $U'' \subseteq \tilde{U}$, wegen der freien Wahl von z also, dass $\tilde{U}$ offen ist, und insgesamt schließlich der Satz. $\square$

Proposition 2.23. *Seien X, Y, Z Riemann'sche Flächen und $p: Y \rightarrow X$ eine holomorphe unverzweigte Überlagerung. Dann ist jede Hochhebung $g: Z \rightarrow Y$ einer holomorphen Abbildung $f: Z \rightarrow X$ wieder holomorph.*

Beweis. Wir betrachten einen beliebigen Punkt $z_0 \in Z$ und seine Bildpunkte

$$y_0 := g(z_0) \quad \text{und} \quad x_0 := p(y_0) = f(z_0).$$

Die unverzweigte Überlagerung p ist ein lokaler Homöomorphismus, es gibt also eine offene Umgebung $U' \subseteq Y$ von y_0 , für die $U := p(U') \subseteq X$ eine offene Umgebung von $x_0 = p(y_0)$ ist und $p|_{U'}: U' \rightarrow U$ ein Homöomorphismus. Da mit p auch $p|_{U'}$ holomorph ist, folgt mit dem Biholomorphiekriterium 1.44 die Biholomorphie von $p|_{U'}: U' \rightarrow U$. Insbesondere ist die lokale Umkehrabbildung $(p|_{U'})^{-1}: U \rightarrow U'$ holomorph.

Wegen der Stetigkeit der Hochhebung g in z_0 gibt es eine offene Umgebung $U'' \subseteq Z$ von z_0 mit $g(U'') \subseteq U'$. Wegen $f = p \circ g$ gilt dann auch $f(U'') \subseteq U$ und weiter

$$g|_{U''} = ((p|_{U'})^{-1})|_{f(U'')} \circ f|_{U''}.$$

Insbesondere ist g im Punkt $z_0 \in Z$ holomorph. $\square$

Direkt aus der Proposition folgt:

Korollar 2.24. *Seien X, Y, Z Riemann'sche Flächen und $p: Y \rightarrow X$ sowie $q: Z \rightarrow X$ holomorphe unverzweigte Überlagerungen. Dann ist jede spurtreue stetige Abbildung $h: Y \rightarrow Z$ als Hochhebung von p über q holomorph.*

Ein besonders interessanter Fall von Hochhebungen ist die Hochhebung von Kurven:

Proposition 2.25. *Seien X, Y Hausdorff-Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung. Seien weiter $x_0, x_1 \in X$ und $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = x_0$. Schließlich gebe es eine stetige Abbildung*

$$H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

mit $H(0, s) = x_0$ und $H(1, s) = x_1$ für alle $s, t \in [0, 1]$. Wir setzen

$$\gamma_s(t) := H(t, s).$$

Lässt sich jede Kurve $\gamma_s: [0, 1] \rightarrow X$ zu einer Kurve $\delta_s: [0, 1] \rightarrow Y$ mit Anfangspunkt y_0 hochheben, so haben δ_0 und δ_1 denselben Endpunkt und sind homotop.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$H': \begin{cases} [0, 1] \times [0, 1] & \rightarrow Y, \\ (t, s) & \mapsto \delta_s(t). \end{cases}$$

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, dass diese auf $[0, \varepsilon) \times [0, 1]$ stetig ist,

denn: Da die unverzweigte Überlagerung p ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es eine offene Umgebung U' von y_0 , die durch p homöomorph auf eine offene Umgebung $U := p(U')$ von $p(y_0) = x_0$ abgebildet wird. Sei $(p|_{U'})^{-1}: U \rightarrow U'$ die Umkehrabbildung. Aufgrund von $H(\{0\} \times [0, 1]) = \{x_0\}$ und der Stetigkeit von H gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $H([0, \varepsilon) \times [0, 1]) \subseteq U$. Wegen der in Satz 2.22 gezeigten Eindeutigkeit der Hochhebung der Kurven γ_s gilt

$$\delta_s|_{[0, \varepsilon)} = (p|_{U'})^{-1} \circ \gamma_s|_{[0, \varepsilon)} \quad \text{für alle } s \in [0, 1]$$

und insbesondere

$$H'(t, s) = ((p|_{U'})^{-1} \circ H)(t, s) \quad \text{für alle } (t, s) \in [0, \varepsilon) \times [0, 1].$$

Wegen der Stetigkeit von $(p|_{U'})^{-1}$ folgt hieraus die Behauptung. #

Tatsächlich ist H' sogar auf ganz $[0, 1] \times [0, 1]$ stetig,

denn: Nehmen wir an, die Abbildung H' besäße eine Unstetigkeitsstelle (t_0, s_1) in $[0, 1] \times [0, 1]$. Dann existierte auch das Infimum t_1 aller $t \in [0, 1]$, für die H' in (t, s_1) nicht stetig ist, und erfüllte nach unserer vorherigen Überlegung $t_1 \geq \varepsilon$.

Wir könnten nun $x := H(t_1, s_1)$ und $y := H'(t_1, s_1) = \delta_{s_1}(t_1)$ setzen. Da die unverzweigte Überlagerung p ein lokaler Homöomorphismus ist, gäbe es dann eine offene Umgebung U' von y , die durch p homöomorph auf eine offene Umgebung $U := p(U')$ von $p(y) = x$ abgebildet würde. Aufgrund der Stetigkeit von H gäbe es weiter ein $\varepsilon' > 0$ mit

$$H(I_{\varepsilon'}(t_1), I_{\varepsilon'}(s_1)) \subseteq U \quad \text{mit } I_{\varepsilon'}(t_1) \text{ bzw. } s_1 := U_{\varepsilon'}(t_1) \text{ bzw. } s_1 \cap [0, 1].$$

Insbesondere gälte $\gamma_{s_1}(I_{\varepsilon'}(t_1)) \subseteq U$, woraus wir

$$\delta_{s_1}|_{I_{\varepsilon'}(t_1)} = (p|_{U'})^{-1} \circ \gamma_{s_1}|_{I_{\varepsilon'}(t_1)}$$

erhielten. Wegen $t_1 \geq \varepsilon > 0$ gäbe es ein $t_2 \in I_{\varepsilon'}(t_1)$ mit $t_2 < t_1$. Für dieses folgte dann

$$H'(t_2, s_1) = \delta_{s_1}(t_2) \in U'.$$

Wegen der Stetigkeit von H' in (t_2, s_1) gäbe es daher ein $0 < \varepsilon'' \leq \varepsilon'$ mit

$$H'(t_2, s) = \delta_s(t_2) \in U' \quad \text{für alle } s \in I_{\varepsilon''}(s_1).$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Hochhebung 2.22 folgte daher

$$\delta_s|_{I_{\varepsilon'}(t_1)} = (p|_{U'})^{-1} \circ \gamma_s|_{I_{\varepsilon'}(t_1)} \quad \text{für alle } s \in I_{\varepsilon''}(s_1)$$

und also

$$H'(t, s) = ((p|_{U'})^{-1} \circ H)(t, s) \quad \text{für alle } (t, s) \in I_{\varepsilon'}(t_1) \times I_{\varepsilon''}(s_1).$$

Damit wäre aber H' in einer offenen Umgebung von (t_1, s_1) stetig, was aufgrund der Definition von t_1 nicht sein kann. Eine solche Unstetigkeitsstelle kann es also nicht geben und die Behauptung ist gezeigt. #

Aus $H = p \circ H'$ und $H(\{1\} \times [0, 1]) = \{x_1\}$ folgt $H'(\{1\} \times [0, 1]) \subseteq p^{-1}(x_1)$. Einerseits ist nun $p^{-1}(x_1)$ nach Definition einer Überlagerung eine diskrete Teilmenge des Hausdorff-Raums Y , andererseits ist $H'(\{1\} \times [0, 1])$ als Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung wieder zusammenhängend. Es folgt, dass $H'(\{1\} \times [0, 1])$ nur aus einem einzigen Punkt bestehen kann. Somit besitzen δ_0 und δ_1 denselben Endpunkt und sind homotop im Sinne von Definition 2.1. $\square$

2.4 Unverzweigte unbegrenzte Überlagerungen

Wir sind nun soweit, um denjenigen Spezialfall einer Überlagerung einzuführen, der in den meisten Lehrbüchern der Topologie als solche bezeichnet wird:

Definition 2.26. Eine Abbildung $p: Y \rightarrow X$ zwischen zwei topologischen Räumen X, Y heißt eine **unverzweigte unbegrenzte Überlagerung**, wenn es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U_x und – für eine geeignete Indexmenge J – paarweise disjunkte, offene Teilmengen $U'_{x,j} \subseteq Y$ gibt mit

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{j \in J} U'_{x,j},$$

$$p|_{U'_{x,j}}: U'_{x,j} \rightarrow U_x \text{ ist für alle } j \in J \text{ ein Homöomorphismus.}$$

Bemerkung 2.27. Jede unverzweigte unbegrenzte Überlagerung im Sinne von Definition 2.26 ist eine unverzweigte Überlagerung im Sinne von Definition 2.11,

denn: Sei $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung im Sinne von Definition 2.26. Dann ist $p \dots$

- $\dots$ stetig, da sich jede offene Teilmenge $O \subseteq X$ durch offene Umgebungen U_x wie in der Definition überdecken lässt und die Urbilder der offenen Mengen $O \cap U_x$ aufgrund der lokalen Homöomorphie sowie dann auch $p^{-1}(O)$ als deren Vereinigung wieder offen sind.
- $\dots$ offen, denn jede offene Teilmenge $O' \subseteq Y$ lässt sich durch offene Mengen $U'_{x,j}$ wie in der Definition überdecken. Die Bilder der Durchschnitte $O' \cap U'_{x,j}$ sind aufgrund der lokalen Homöomorphie wieder offen, genau wie deren Vereinigung $p(O')$.
- $\dots$ diskret, da sich die Urbilder unter p eines gegebenen $x \in X$ durch offene Mengen in Y trennen lassen.

Nach Definition 2.11 ist p insgesamt also eine Überlagerung. Als lokaler Homöomorphismus ist p nach Proposition 2.19 schließlich unverzweigt. #

Beispiel 2.28. (a) Die kanonische Einbettung $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ ist nach Bemerkung 2.17 eine unverzweigte Überlagerung, aber nicht unbegrenzt, da kein Punkt $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $|w_0| = 1$ eine Umgebung besitzt, wie sie in Definition 2.26 gefordert wird.

(b) Für ein beliebiges $k \geq 2$ ist

$$p_k: \begin{cases} \mathbb{C}^\times & \rightarrow \mathbb{C}^\times, \\ z & \mapsto z^k \end{cases}$$

nach Bemerkung 2.17 eine unverzweigte Überlagerung. Es ist p_k aber auch unbegrenzt,

denn: Für ein beliebiges $w_0 \in \mathbb{C}^\times$ gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}^\times$ mit $p_k(z_0) = w_0$. Da p_k als unverzweigte Überlagerung ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es offene Umgebungen U' von z_0 und U von w_0 derart, dass $p_k|_{U'}: U' \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Nun gilt $p_k^{-1}(U) = \bigcup_{j=0}^{k-1} \zeta^j \cdot U'$ für eine primitive k -te Einheitswurzel, wobei wir ohne Einschränkung annehmen können, die Mengen $\zeta^j \cdot U'$ seien paarweise disjunkt, und sonst U' kleiner wählen. Die Behauptung folgt, da offensichtlich für jedes j die Einschränkung $p_k|_{\zeta^j \cdot U'}$ ein Homöomorphismus ist. #

(c) Nach Beispiel 2.18 (a) ist die Abbildung $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ eine unverzweigte Überlagerung. Sie ist aber auch unbegrenzt,

denn: Seien $w_0 \in \mathbb{C}^\times$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z_0) = w_0$. Da $\exp$ als unverzweigte Überlagerung ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es offene Umgebungen U' von z_0 und U von w_0 derart, dass $\exp|_{U'}: U' \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Nun gilt $\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2\pi i n + U')$, wobei wir ohne Einschränkung annehmen können, die Mengen $2\pi i n + U'$ seien paarweise disjunkt, und sonst U' kleiner wählen. Die Behauptung folgt, da offensichtlich für jedes n die Einschränkung $\exp|_{2\pi i n + U'}$ ein Homöomorphismus ist. #

(d) Nach Beispiel 2.18 (b) ist für ein beliebiges Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ die kanonische Quotientenabbildung $\pi_\Lambda: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ eine unverzweigte Überlagerung. Analog zu (c) zeigt man, dass sie auch unbegrenzt ist.

Eine schöne Eigenschaft unverzweigter unbegrenzter Überlagerungen ist, dass sich über solche stets alle Kurven hochheben lassen. Das formalisieren wir wie folgt:

Definition 2.29. Seien X, Y topologische Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Wir sagen, p besitze die **Kurvenhochhebungseigenschaft**, wenn es zu jeder Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ und jedem $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = \gamma(0)$ eine Hochhebung $\delta: [0, 1] \rightarrow Y$ von γ mit $\delta(0) = y_0$ gibt.

Satz 2.30. Seien X, Y topologische Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Dann erfüllt p die Kurvenhochhebungseigenschaft.

Beweis. Seien $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ eine Kurve und $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = \gamma(0)$. Wegen der Kompaktheit von $[0, 1]$ gibt es eine Partition

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

für ein $n \in \mathbb{N}$

und offene Mengen $U_k \subseteq X$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subseteq U_k.$$

Hierbei können wir die U_k ohne Einschränkung so klein wählen, dass es wie in Definition 2.26 gefordert für jedes k derartige offene Mengen $U'_{k,j} \subseteq Y$ mit j aus einer geeigneten Indexmenge J_k gibt, dass

$$p^{-1}(U_k) = \bigsqcup_{j \in J_k} U'_{k,j},$$

$$p|_{U'_{k,j}}: U'_{k,j} \rightarrow U_k \quad \text{ist ein Homöomorphismus}$$

gilt.

Wir zeigen nun induktiv für jedes $k \in \{0, \dots, n\}$ die Existenz einer Hochhebung $\delta|_{[0, t_k]}: [0, t_k] \rightarrow Y$ mit $\delta(0) = y_0$. Der Induktionsanfang für $k = 0$ ist dabei trivial. Nehmen wir nun an, $\delta|_{[0, t_{k-1}]}: [0, t_{k-1}] \rightarrow Y$ mit $\delta(0) = y_0$ sei bereits konstruiert und es gelte $\delta(t_{k-1}) = y_{k-1}$. Wegen

$$p(y_{k-1}) = p(\delta(t_{k-1})) = \gamma(t_{k-1}) \in U_k$$

gibt es dann ein $j \in J_k$ mit $y_{k-1} \in U'_{k,j}$. Wir setzen

$$\delta|_{[t_{k-1}, t_k]} := (p|_{U'_{k,j}})^{-1} \circ \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}.$$

Auf diese Weise erhalten wir eine stetige Fortsetzung der Hochhebung δ auf das Intervall $[0, t_k]$. $\square$

Bemerkung 2.31. Sind in der Situation von Satz 2.30 die topologischen Räume X, Y beide Hausdorffsch, so ist die Hochhebung von γ über p mit Anfangspunkt y_0 nach Satz 2.22 eindeutig. Wir bezeichnen sie mit $L_{y_0}(p; \gamma)$ und schreiben $\mathcal{L}(p; \gamma)$ für die Menge aller Hochhebungen von γ über p .

Ist die Kurve γ geschlossen, so ist $L_{y_0}(p; \gamma)$ nicht notwendigerweise auch geschlossen,

denn: Nach Beispiel 2.28 (b) ist

$$p_2: \begin{cases} \mathbb{C}^\times & \rightarrow \mathbb{C}^\times, \\ z & \mapsto z^2 \end{cases}$$

eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung zwischen Hausdorff-Räumen. Für $x_0 = 1 = y_0$ gilt dann offensichtlich $p_2(y_0) = x_0$. Betrachten wir die durch $\gamma(t) := e^{2\pi it}$ gegebene geschlossene Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit Anfangs- und Endpunkt 1. Dann stimmt die durch $\delta(t) := e^{\pi it}$ gegebene Kurve $\delta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ offensichtlich mit der Hochhebung $L_1(p; \gamma)$ überein. Diese ist keine geschlossene Kurve: Ihr Anfangspunkt ist 1 und ihr Endpunkt -1 . $\#$

Aus Proposition 2.25 folgt jedoch, dass jede Hochhebung einer nullhomotopen geschlossenen Kurve wieder geschlossen und nullhomotop ist.

Aus der Eindeutigkeit der Kurvenhochhebung lässt sich folgern, dass unter einer unverzweigten unbegrenzten Überlagerung $p: Y \rightarrow X$ jeder Punkt in X gleich viele Urbilder hat, wenn Y wegzusammenhängend ist. Genauer gilt:

Satz 2.32. Seien X, Y Hausdorff-Räume, X wegzusammenhängend und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Zu gegebenem $x_0 \in X$ heißt die Urbildmenge $p^{-1}(x_0)$ die **Faser** von p im Punkt x_0 . Die Fasern von p sind alle gleichmächtig. Diese Mächtigkeit $B(p) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ nennen wir die **Blätterzahl** der Überlagerung p . Diese kann endlich oder unendlich sein.

Beweis. Seien $x_0, x_1 \in X$ beliebig. Da X als wegzusammenhängend vorausgesetzt war, gibt es dann eine Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 . Nach Bemerkung 2.31 ist dann die Zuordnung

$$\begin{aligned} p^{-1}(x_0) &\rightarrow \mathcal{L}(p; \gamma), \\ y_0 &\mapsto L_{y_0}(p; \gamma) \end{aligned}$$

bijektiv. Aufgrund der Eindeutigkeit der Hochhebung 2.22 ist aber auch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p; \gamma) &\rightarrow p^{-1}(x_1), \\ \delta &\mapsto \delta(1). \end{aligned}$$

bijektiv. Zusammengenommen erhalten wir mit der Zuordnung $y_0 \mapsto L_{y_0}(p; \gamma)(1)$ eine Bijektion zwischen den Fasern $p^{-1}(x_0)$ und $p^{-1}(x_1)$. Da x_0 und x_1 beliebig gewählt waren, zeigt dies den Satz. $\square$

Die im Beweis von Satz 2.32 konstruierte Bijektion zwischen den Fasern hängt von der Wahl der benutzten Kurve γ ab – eine kanonische Nummerierung der Blätter einer Überlagerung gibt es daher im Allgemeinen nicht.

Bemerkung 2.33. Seien speziell X, Y Riemann'sche Flächen und $p: Y \rightarrow X$ eine nichtkonstante eigentliche holomorphe Abbildung. Dann ist insbesondere X wegzusammenhängend und die Einschränkung

$$p|_{Y \setminus V_Z(p)}: (Y \setminus V_Z(p)) \rightarrow (X \setminus p(V_Z(p)))$$

nach Bemerkung 2.17 eine unverzweigte Überlagerung. Letztere ist aber auch unbegrenzt,

denn: Sei $x_0 \in X$ beliebig. Nach Lemma 1.56 ist p endlich, so dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene y_j mit $p^{-1}(x_0) = \{y_1, \dots, y_n\}$ gibt. Da p als unverzweigte Überlagerung ein lokaler Homöomorphismus ist, existiert zu jedem $j \in \{1, \dots, n\}$ eine offene Umgebung U'_j von y_j , die von p homöomorph auf eine offene Umgebung U_j von x_0 abgebildet wird. Ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, die U'_j seien disjunkt, und letztere sonst geeignet verkleinern. Dann ist $\bigcup_{j=1}^n U'_j$ eine offene Umgebung von $p^{-1}(x_0)$ und es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j$ mit $p^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U'_j$. Es folgt

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &= \bigsqcup_{j=1}^n (U'_j \cap p^{-1}(U)), \\ p|_{U'_j \cap p^{-1}(U)}: U'_j \cap p^{-1}(U) &\rightarrow U \quad \text{ist ein Homöomorphismus,} \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. $\#$

Es folgt, dass wir Satz 2.32 in dieser Situation anwenden können. Wir erhalten die Gleichmächtigkeit der Fasern von p in allen $x_0 \in X \setminus p(V_Z(p))$. Tatsächlich hatten wir in Proposition 1.57 bereits stärker

gezeigt, dass dies auf die Fasern von p in allen $x_0 \in X$ zutrifft, und die – in diesem Fall endliche – Blätterzahl der Einschränkung $p|_{Y \setminus V_Z(p)}$ den Grad der nichtkonstanten eigentlichen holomorphen Abbildung p genannt. Interpretieren wir eine nichtkonstante eigentliche holomorphe Abbildung daher wie in Beispiel 2.13 (b) als Überlagerung, so nennen wir in Anlehnung an Satz 2.32 ihren Grad auch ihre **Blätterzahl**.

Satz 2.34 (Existenz der Hochhebung). *Seien X, Y Hausdorff-Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Seien weiter Z ein nichtleerer einfach zusammenhängender, wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und $f: Z \rightarrow X$ stetig. Dann gibt es zu jeder Wahl von Punkten $z_0 \in Z$ und $y_0 \in Y$ mit $f(z_0) = p(y_0)$ eine eindeutige Hochhebung $L_{y_0, z_0}(p; f): Z \rightarrow Y$ von f mit $L_{y_0, z_0}(p; f)(z_0) = y_0$.*

Beweis. Sei $z \in Z$ ein beliebiger Punkt und $\beta_{(z)}: [0, 1] \rightarrow Z$ eine beliebige Kurve in Z von z_0 nach z . Dann ist $\gamma_{(z)} := f \circ \beta_{(z)}$ eine Kurve in X von $f(z_0)$ nach $f(z)$. Wir definieren nun die Abbildung

$$L_{y_0, z_0}(p; f): \begin{cases} Z & \rightarrow Y, \\ z & \mapsto L_{y_0}(p; \gamma_{(z)})(1). \end{cases}$$

Diese ist wohldefiniert,

denn: Da Z einfach zusammenhängend ist, sind je zwei Kurven $\beta_{(z)}, \tilde{\beta}_{(z)}: [0, 1] \rightarrow Z$ in Z von z_0 nach z homotop. Dasselbe trifft auf die induzierten Kurven $\gamma_{(z)} := f \circ \beta_{(z)}$ und $\tilde{\gamma}_{(z)} := f \circ \tilde{\beta}_{(z)}$ zu. Nach Proposition 2.25 haben somit die zwei Hochhebungen $L_{y_0}(p; \gamma_{(z)})$ bzw. $L_{y_0}(p; \tilde{\gamma}_{(z)})$ mit demselben Anfangspunkt auch den gleichen Endpunkt, so dass der Funktionswert $L_{y_0, z_0}(p; f)(z)$ nicht von der Wahl der Kurve $\beta_{(z)}$ abhängt. #

Weiter gilt für alle $z \in Z$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\beta_{(z)}(1)) = \gamma_{(z)}(1) = p(L_{y_0}(p; \gamma_{(z)})(1)) \\ &= p(L_{y_0, z_0}(p; f)(z)) = (p \circ L_{y_0, z_0}(p; f))(z). \end{aligned}$$

Es verbleibt zu zeigen, dass die Abbildung $L_{y_0, z_0}(p; f)$ stetig ist, dass es also für ein beliebiges $z \in Z$ und eine offene Umgebung $U' \subseteq Y$ von $y := L_{y_0, z_0}(p; f)(z)$ eine offene Umgebung $U'' \subseteq Z$ von z gibt mit $L_{y_0, z_0}(p; f)(U'') \subseteq U'$.²⁹

Wir fixieren also ein $z_1 \in Z$ und eine offene Umgebung $U' \subseteq Y$ von $y_1 := L_{y_0, z_0}(p; f)(z_1)$. Da die unverzweigte Überlagerung p ein lokaler Homöomorphismus ist, können wir nach eventueller Verkleinerung von U' annehmen, dass es eine offene Umgebung U von $p(y_1) = (p \circ L_{y_0, z_0}(p; f))(z_1) = f(z_1)$ gibt derart, dass die Einschränkung $p|_{U'}: U' \rightarrow U$ der Überlagerung p auf U' ein Homöomorphismus ist. Da f stetig und Z lokal wegzusammenhängend ist, gibt es außerdem eine wegzusammenhängende offene Umgebung $U'' \subseteq Z$ von z_1 mit $f(U'') \subseteq U$. Dieses U'' erfüllt wie verlangt $L_{y_0, z_0}(p; f)(U'') \subseteq U'$,

denn: Seien $z_2 \in U''$ ein beliebiger Punkt und $\beta: [0, 1] \rightarrow Z$ eine beliebige Kurve von z_1 nach z_2 , die ganz in U'' verläuft. Dann verläuft die über $\gamma = f \circ \beta$ induzierte Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ von

²⁹Wir nutzen hier aus, dass eine Abbildung $h: Z \rightarrow Y$ genau dann stetig ist, wenn sie in jedem $z \in Z$ stetig ist.

$f(z_1)$ nach $f(z_2)$ ganz in U und $\delta := (p|_{U'})^{-1} \circ \gamma$ ist eine Hochhebung von γ mit Anfangspunkt

$$(p|_{U'})^{-1}(f(z_1)) = ((p|_{U'})^{-1} \circ f)(z_1) = L_{y_0, z_0}(p; f)(z_1) = y_1$$

und verläuft ganz in U' . Es folgt, dass die zusammengesetzte Kurve $\delta_{(z_1)} \cdot \delta$ eine Hochhebung von $\gamma_{(z_1)} \cdot \gamma = f \circ (\beta_{(z_1)} \cdot \beta)$ mit Anfangspunkt y_0 ist. Es folgt

$$L_{y_0, z_0}(p; f)(z_2) = (\delta_{(z_1)} \cdot \delta)(1) = \delta(1) \in U'$$

und somit die Behauptung. #

□

Beispiel 2.35. Sei X eine einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche und $f \in \text{Hol}(X, \mathbb{C}^\times)$ nullstellenfrei. Wir wollen den Logarithmus von f bilden, suchen also ein $F \in \mathcal{O}(X)$ mit

$$\exp(F)(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Diese Bedingung bedeutet gerade, dass F Hochhebung von f bezüglich der nach Beispiel 2.28 (c) unverzweigten unbegrenzten Überlagerung $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ist. Für ein beliebiges $x_0 \in X$ und ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = f(x_0)$ gibt es nach Satz 2.34 eine eindeutige Hochhebung $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F(x_0) = z$. Nach Proposition 2.23 gilt $F \in \mathcal{O}(X)$. Jede weitere Lösung des Problems unterscheidet sich von F offensichtlich durch eine additive Konstante $2\pi i k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Ein funktionentheoretisch interessanter Spezialfall hiervon ergibt sich, wenn wir für f die kanonische Einbettung

$$\iota: \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{C}^\times, \\ z & \mapsto z \end{cases} \quad \text{mit einem einfach zusammenhängenden Gebiet } D \subset \mathbb{C}^\times$$

betrachten. Dann ist jede Hochhebung von ι über $\exp$ ein Zweig des komplexen Logarithmus Log auf D .

Beim Beweis von Satz 2.34 haben wir strenggenommen nicht benutzt, dass die Überlagerung p unbegrenzt ist, sondern nur die Unverzweigtheit sowie die Gültigkeit der Kurvenhochhebungseigenschaft eingesetzt. Das ermöglicht uns, den Satz für den Beweis des folgenden Resultats einzusetzen:

Satz 2.36. Seien X eine reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit, Y ein Hausdorff-Raum und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung mit der Kurvenhochhebungseigenschaft. Dann ist p unbegrenzt.

Beweis. Seien $x_0 \in X$ beliebig und y_j für j in einer Indexmenge J die Urbilder von x_0 unter p . Sei $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von x_0 , die homöomorph zu einer Kugel ist, und $f: U \rightarrow X$ die kanonische Einbettung. Nach Satz 2.34 existiert daher für jedes $j \in J$ die Hochhebung $L_{y_j, x_0}(p; f)$. Setzen wir $U'_j := L_{y_j, x_0}(p; f)^{-1}(U)$, so gilt nach eventueller Verkleinerung von U

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} U'_j,$$

$$p|_{U'_j}: U'_j \rightarrow U \quad \text{ist ein Homöomorphismus}$$

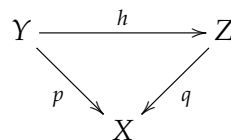
und der Satz folgt. □

2.5 Die universelle Überlagerung

Unter den unverzweigten unbegrenzten Überlagerungen einer gegebenen reellen (bzw. komplexen) Mannigfaltigkeit X gibt es eine „größte“, aus der man alle übrigen gewinnen kann. Diese heißt die universelle Überlagerung von X und hängt über die Gruppe der sogenannten Decktransformationen eng mit der Fundamentalgruppe von X zusammen.

Definition 2.37. Seien X, Y zusammenhängende topologische Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Letztere heißt eine **universelle Überlagerung** von X , wenn sie die folgende universelle Eigenschaft hat:

Zu jedem zusammenhängenden topologischen Raum Z , jeder unverzweigten unbegrenzten Überlagerung $q: Z \rightarrow X$ und jeder Wahl von Punkten $y_0 \in Y$ und $z_0 \in Z$ mit $p(y_0) = q(z_0)$ gibt es genau eine stetige spurtreue Abbildung $h: Y \rightarrow Z$ mit $h(y_0) = z_0$.



Bemerkung 2.38. Seien $p: Y \rightarrow X$ und $q: Z \rightarrow X$ zwei universelle Überlagerungen eines zusammenhängenden topologischen Raumes X . Dann gibt es einen spurtreuen Homöomorphismus $h: Y \rightarrow Z$,

denn: Nach Definition 2.37 gibt es zu jeder Wahl von Punkten $y_0 \in Y$ und $z_0 \in Z$ mit $p(y_0) = q(z_0)$ stetige spurtreue Abbildungen

$$\begin{aligned} h: Y &\rightarrow Z \quad \text{mit } h(y_0) = z_0, \\ \tilde{h}: Z &\rightarrow Y \quad \text{mit } \tilde{h}(z_0) = y_0. \end{aligned}$$

Die Hintereinanderausführungen $\tilde{h} \circ h$ und $h \circ \tilde{h}$ sind stetige spurtreue Abbildungen mit $(\tilde{h} \circ h)(y_0) = y_0$ und $(h \circ \tilde{h})(z_0) = z_0$. Offensichtlich ist aber auch die jeweilige Identität eine solche Abbildung, so dass mit der universellen Eigenschaft von p bzw. q bereits $\tilde{h} \circ h = \text{id}_Y$ und $h \circ \tilde{h} = \text{id}_Z$ folgt. Insgesamt haben wir so mit h einen spurtreuen Homöomorphismus zwischen Y und Z gefunden. $\#$

Wir identifizieren die universellen Überlagerungen von X über diese spurtreuen Homöomorphismen und sprechen, falls existent, etwas ungenau von **der** universellen Überlagerung von X .

Satz 2.39. Seien X, Y reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeiten und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Ist Y einfach zusammenhängend, so ist p bereits die universelle Überlagerung von X .

Beweis. Das folgt direkt aus Definition 2.37 und Satz 2.34. $\square$

Beispiel 2.40. Unmittelbar aus Satz 2.39, dem einfachen Zusammenhang von $\mathbb{C}$ sowie Beispiel 2.28 (c) und (d) erhalten wir

- (a) Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ist die universelle Überlagerung von $\mathbb{C}^\times$.
- (b) Für jedes Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ist die kanonische Quotientenabbildung $\pi_\Lambda: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ die universelle Überlagerung des Periodentorus $\mathbb{C}/\Lambda$.

Wir wollen nun zeigen, dass in der von uns studierten Situation stets eine universelle Überlagerung existiert:

Satz 2.41 (Existenz der universellen Überlagerung). *Sei X eine zusammenhängende reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit $\tilde{X}$ und eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$. Diese ist dann nach Satz 2.39 die universelle Überlagerung von X .*

Beweis. Sei $x_0 \in X$ fest gewählt. Für ein beliebiges $x \in X$ bezeichnen wir dann mit $\pi(X, x_0, x)$ die Menge der Homotopieklassen von Kurven von x_0 nach x in X und setzen

$$\tilde{X} := \{(x, c_x) : x \in X \text{ und } c_x \in \pi(X, x_0, x)\} \quad \text{und} \quad p: \begin{cases} \tilde{X} & \rightarrow X, \\ (x, c_x) & \mapsto x. \end{cases}$$

Wir führen nun auf $\tilde{X}$ eine Topologie ein, für die $\tilde{X}$ eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit und $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung wird.

Sei dafür $(x_1, c_{x_1}) \in \tilde{X}$ beliebig und sei $U_{x_1} \subseteq X$ eine offene, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Umgebung von x_1 .³⁰ Für ein beliebiges $x_2 \in U_{x_1}$ setzen wir nun

$$d_{x_2} = [\gamma \cdot \delta] \text{ mit } \gamma \in c_{x_1} \text{ und } \delta: [0, 1] \rightarrow U_{x_1} \text{ Kurve von } x_1 \text{ nach } x_2.$$

Da U_{x_1} einfach zusammenhängend ist, ist d_{x_2} unabhängig von der Wahl der Kurve δ und somit die Menge

$$[U_{x_1}, c_{x_1}] := \{(x_2, d_{x_2}) \in \tilde{X} : x_2 \in U_{x_1}\} \subseteq \tilde{X}$$

wohldefiniert. Das System $\mathcal{B}(\tilde{X})$ all solcher Mengen bildet die Basis einer Topologie auf $\tilde{X}$,

denn: Wir zeigen, dass $\mathcal{B}(\tilde{X})$ die Bedingungen des Basiskriteriums aus Fußnote 5 erfüllt: Bedingung (B_1) gilt, da für ein beliebiges $(x, c_x) \in \tilde{X}$ offensichtlich $(x, c_x) \in [U_x, c_x] \in \mathcal{B}(\tilde{X})$ erfüllt ist, so dass $\tilde{X}$ von den Mengen aus $\mathcal{B}(\tilde{X})$ überdeckt wird. Zum Beweis von Bedingung (B_2) betrachten wir beliebige Mengen $[U, c], [\tilde{U}, \tilde{c}] \in \mathcal{B}(\tilde{X})$ und einen beliebigen Punkt

$$(x, c_x) \in [U, c] \cap [\tilde{U}, \tilde{c}].$$

Dann gilt $x \in U \cap \tilde{U}$ und es gibt eine offene, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Umgebung $U_x \subseteq U \cap \tilde{U}$ von x . Wie man leicht einsieht, folgt dann

$$(x, c_x) \in [U_x, c_x] \subseteq [U, c] \cap [\tilde{U}, \tilde{c}].$$

³⁰Um eine solche Umgebung zu finden, schränken wir uns auf eine Karte ein, die x_1 enthält, und nutzen aus, dass diese homöomorph auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ abbildet.

Wir können den Durchschnitt $[U, c] \cap [\tilde{U}, \tilde{c}]$ also als die Vereinigung aller solcher Mengen $[U_x, c_x]$ schreiben und haben so Bedingung (B_2) gezeigt. #

Die Abbildung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus und nach Proposition 2.19 somit eine unverzweigte Überlagerung,

denn: Für ein beliebiges $[U, c] \in \mathcal{B}(\tilde{X})$ ist die Einschränkung $p|_{[U, c]}: [U, c] \rightarrow U$ offensichtlich homöomorph. #

Die unverzweigte Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ erfüllt die Kurvenhochhebungseigenschaft,

denn: Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ eine Kurve mit Anfangspunkt x_0 . Für $s \in [0, 1]$ sei $\gamma_s: [0, 1] \rightarrow X$ die durch $\gamma_s(t) := \gamma(st)$ definierte Kurve; diese durchläuft alle Punkte der Kurve γ , die zu den Parameterwerten $t \in [0, s]$ gehören. Sei weiter $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ eine geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt x_0 . Direkt aus der Definition der Topologie auf $\tilde{X}$ folgt dann, dass die Abbildung

$$\delta: \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \tilde{X}, \\ t & \mapsto (\gamma(t), [\tilde{\gamma} \cdot \gamma_t]) \end{cases} \quad (2.2)$$

stetig und eine Hochhebung von γ über p mit $\delta(0) = (x_0, [\tilde{\gamma}])$ ist. #

Nebenbei haben wir offensichtlich bereits gezeigt, dass $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist. Der Raum $\tilde{X}$ ist aber auch Hausdorff'sch,

denn: Da X als Hausdorff'sch vorausgesetzt war, genügt es zu zeigen, dass sich zwei unterschiedliche Punkte mit demselben p -Bild durch offene Umgebungen trennen lassen. Seien also $(x, c_x), (x, \tilde{c}_x) \in \tilde{X}$ mit $c_x \neq \tilde{c}_x$ gegeben. Sei weiter $U_x \subseteq X$ eine offene, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Umgebung von x . Dann gilt schon

$$[U_x, c_x] \cap [U_x, \tilde{c}_x] = \emptyset,$$

da es sonst ein Element (x_1, d_{x_1}) im Durchschnitt gäbe. Für dieses könnten wir eine Kurve $\delta: [0, 1] \rightarrow U_x$ von x nach x_1 auswählen. Für beliebige $\gamma \in c_x$ und $\tilde{\gamma} \in \tilde{c}_x$ gälte dann

$$d_{x_1} = [\gamma \cdot \delta] = [\tilde{\gamma} \cdot \delta]$$

und somit $c_x = \tilde{c}_x$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. #

Nach Satz 2.36 ist $p: \tilde{X} \rightarrow X$ somit eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Weiter ist $\tilde{X}$ als wegzusammenhängender Hausdorff-Raum auch zusammenhängend und kann leicht mit einem reellen (bzw. komplexen) Atlas ausgestattet werden. Es verbleibt zu zeigen, dass $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist. Dem ist aber so,

denn: Für einen beliebigen Punkt $x_0 \in X$ sei $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ eine geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt $(x_0, [\dot{\gamma}_{x_0}])$. Dann ist $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ eine geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt x_0 . Sei weiter

$$\delta: \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \tilde{X}, \\ t & \mapsto (\gamma(t), [\dot{\gamma}_{x_0} \cdot \gamma_t]) \end{cases}$$

die nach (2.2) existente Hochhebung von γ über p . Diese hat ebenfalls den Anfangspunkt $(x_0, [\dot{\gamma}_{x_0}])$ und mit der Eindeutigkeit der Hochhebung 2.22 folgt die Identität $\delta = \tilde{\gamma}$. Hieraus ergibt sich

$$(x_0, [\gamma]) = \delta(1) = \tilde{\gamma}(1) = (x_0, [\dot{\gamma}_{x_0}])$$

und somit, dass γ nullhomotop ist. Nach Bemerkung 2.31 ist dann auch $\tilde{\gamma}$ nullhomotop und es folgt die Behauptung. #

□

Bemerkung 2.42. Nach Satz 2.41 lässt sich insbesondere zu jeder Riemann'schen Fläche X die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ konstruieren. Nach Satz 2.20 ist diese auf natürliche Weise wieder eine Riemann'sche Fläche, wenn wir fordern, dass die zugehörige Überlagerungsabbildung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ holomorph ist.

Definition 2.43. Seien X, Y topologische Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann trägt offensichtlich die Menge

$$\text{Deck}(Y/X) := \text{Deck}(Y \xrightarrow{p} X) := \{\sigma: Y \rightarrow Y \text{ spurtreuer Homöomorphismus}\}$$

zusammen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung die Struktur einer Gruppe. Diese Gruppe nennen wir die **Decktransformationsgruppe** der Überlagerung p .

Bemerkung 2.44. Sei $p: Y \rightarrow X$ eine holomorphe unverzweigte Überlagerung Riemann'scher Flächen. Dann ist nach Korollar 2.24 jeder spurtreue Homöomorphismus $\sigma: Y \rightarrow Y$ holomorph und nach dem Biholomorphiekriterium 1.44 sogar biholomorph. Insgesamt ist also in dieser Situation

$$\text{Deck}(Y/X) = \{\sigma \in \text{Aut}(Y) : \sigma \text{ spurtreu}\}$$

eine Untergruppe der Automorphismengruppe der Riemann'schen Fläche Y .

Definition 2.45. Seien X, Y zusammenhängende Hausdorff-Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Existiert dann für jedes Paar von Punkten $y_0, y_1 \in Y$ mit $p(y_0) = p(y_1)$ eine – dann nach Satz 2.22 als Hochhebung von p eindeutige – Decktransformation $\sigma: Y \rightarrow Y$ mit $\sigma(y_0) = y_1$, so nennen wir p **GALOIS'sch**³¹ oder auch **normal**.

Beispiel 2.46. Nach Beispiel 2.28 (b) ist die Abbildung $p_k: \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ für jedes $k \geq 2$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Sie ist aber auch Galois'sch, denn für je zwei Punkte $z_0, z_1 \in \mathbb{C}^\times$ mit $p_k(z_0) = p_k(z_1)$ gibt es eine k -te Einheitswurzel ζ mit $z_1 = \zeta \cdot z_0$ und die Abbildung $z \mapsto \zeta \cdot z$ ist eine Decktransformation.

Satz 2.47. Sei X eine zusammenhängende reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit und $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ihre universelle Überlagerung. Dann ist p bereits Galois'sch und $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ ist isomorph zur Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$.

³¹Évariste Galois (1811–1832)

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass p Galois'sch ist, und betrachten dafür ein Paar von Punkten $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$. Nach Definition der universellen Überlagerung gibt es dann spurtreue stetige Abbildungen $f, g: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ und $g(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_0$. Folglich sind dann $f \circ g$ und $g \circ f$ spurtreue stetige Abbildungen von $\tilde{X}$ in sich selbst mit $(f \circ g)(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1$ und $(g \circ f)(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in der Definition der universellen Überlagerung folgt hiermit $f \circ g = \text{id}_{\tilde{X}} = g \circ f$. Die spurtreue stetige Abbildung f ist also ein Homöomorphismus und damit eine Decktransformation. Nach Definition 2.45 ist somit gezeigt, dass die Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ Galois'sch ist.

Es verbleibt nachzuweisen, dass $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ isomorph zu $\pi_1(X)$ ist. Dafür fixieren wir zunächst ein $x_0 \in X$ und ein $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$ und definieren eine Abbildung

$$\Phi: \text{Deck}(\tilde{X}/X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

wie folgt: Für ein $\sigma \in \text{Deck}(\tilde{X}/X)$ und eine Kurve γ in $\tilde{X}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ und Endpunkt $\sigma(\tilde{x}_0)$ hat die Kurve $p \circ \gamma$ in X Anfangs- und Endpunkt x_0 . Da $\tilde{X}$ einfach zusammenhängt, ist die Homotopieklasse von γ und somit auch diejenige von $p \circ \gamma$ eindeutig bestimmt und wir wählen letztere als den Wert von $\Phi(\sigma)$. Die so definierte Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus,

denn: Seien $\sigma, \tau \in \text{Deck}(\tilde{X}/X)$ und γ bzw. δ Kurven in $\tilde{X}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ und Endpunkt $\sigma(\tilde{x}_0)$ bzw. $\tau(\tilde{x}_0)$. Dann ist $\sigma \circ \delta$ eine Kurve mit Anfangspunkt $\sigma(\tilde{x}_0)$ und Endpunkt $(\sigma \circ \tau)(\tilde{x}_0)$. Es gilt $p \circ (\sigma \circ \delta) = p \circ \delta$. Die zusammengesetzte Kurve $\gamma \cdot (\sigma \circ \delta)$ hat Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ und Endpunkt $(\sigma \circ \tau)(\tilde{x}_0)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma \circ \tau) &= [p \circ (\gamma \cdot (\sigma \circ \delta))] = [p \circ \gamma] \cdot [p \circ (\sigma \circ \delta)] \\ &= [p \circ \gamma] \cdot [p \circ \delta] = \Phi(\sigma) \cdot \Phi(\tau). \end{aligned}$$

#

Der Gruppenhomomorphismus Φ ist injektiv,

denn: Seien $\sigma \in \text{Deck}(\tilde{X}/X)$ und γ eine Kurve in $\tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\sigma(\tilde{x}_0)$. Wir nehmen nun an, es gelte $\Phi(\sigma) = [\dot{\gamma}_{x_0}]$ und $p \circ \gamma$ sei also nullhomotop. Da γ eine Hochhebung von $p \circ \gamma$ ist, folgt mit Proposition 2.25, dass der Endpunkt $\sigma(\tilde{x}_0)$ von γ gleich dem Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ ist. Das bedeutet $\sigma = \text{id}_{\tilde{X}}$.

#

Der Gruppenhomomorphismus Φ ist surjektiv,

denn: Sei $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ und sei δ eine Hochhebung von γ nach $\tilde{X}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ und einem Endpunkt $\tilde{x}_1$. Dann gibt es ein $\sigma \in \text{Deck}(\tilde{X}/X)$ mit $\sigma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ und nach Konstruktion gilt für dieses $\Phi(\sigma) = [\gamma]$.

#

Insgesamt haben wir die Isomorphie von $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ und $\pi_1(X, x_0)$ gezeigt. $\square$

Wir können den Satz nutzen, um einige Fundamentalgruppen zu bestimmen:

Beispiel 2.48. (a) Nach Beispiel 2.40 (a) ist die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ die universelle Überlagerung von $\mathbb{C}^\times$. Für ein $n \in \mathbb{Z}$ betrachten wir zunächst die Translation

$$\tau_n: \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto z + 2\pi i n \end{cases}$$

um $2\pi in$. Wegen $\exp(\tau_n(z)) = \exp(z + 2\pi in) = \exp(z)$ ist diese eine Decktransformation. Sei nun umgekehrt σ eine beliebige Decktransformation, so gilt $\exp(\sigma(0)) = \exp(0) = 1$ und es existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\sigma(0) = 2\pi in$. Da auch $\tau_n(0) = 2\pi in$ gilt und $\exp$ nach Satz 2.47 Galois'sch ist, folgt bereits $\sigma = \tau_n$ und insgesamt also

$$\pi_1(\mathbb{C}^\times) \stackrel{2.47}{\cong} \text{Deck}(\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times) = \{\tau_n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

- (b) Nach Beispiel 2.40 (b) ist für ein beliebiges Gitter Λ die kanonische Quotientenabbildung $\pi_\Lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ die universelle Überlagerung des Periodentorus $\mathbb{C}/\Lambda$. Für ein beliebiges $\omega \in \Lambda$ betrachten wir die Translation

$$\tau_\omega : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto z + \omega \end{cases}$$

um ω . Genau wie in Teil (a) zeigt man dann

$$\pi_1(\mathbb{C}/\Lambda) \stackrel{2.47}{\cong} \text{Deck}(\mathbb{C} \xrightarrow{\pi_\Lambda} \mathbb{C}/\Lambda) = \{\tau_\omega : \omega \in \Lambda\} \cong \Lambda \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Aus den Überlegungen des Beispiels erhalten wir einen rein topologischen Beweis der folgenden Aussage, die man normalerweise im Kontext der Liouville'schen Sätze analytisch herleitet:

Korollar 2.49. Für kein Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ gibt es eine elliptische Funktion $f \in K(\Lambda)$ von Ordnung 1.

Beweis. Eine solche Funktion induzierte nach den Sätzen 1.34 und 1.38 eine holomorphe Abbildung $\mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, die den Wert ∞ nur einmal annimmt. Mit Bemerkung 2.33 ergäbe sich die Injektivität dieser Abbildung und mit dem Biholomorphiekriterium 1.44 ihre Homöomorphie. Hieraus folgte unmittelbar

$$\pi_1(\mathbb{C}/\Lambda) \cong \pi_1(\overline{\mathbb{C}})$$

und mit 2.7 sowie Beispiel 2.48 (b) also

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \{0\},$$

was nicht sein kann. □

In Abschnitt 2.7 werden wir beliebige Riemann'sche Flächen als Quotienten ihrer universellen Überlagerung nach ihrer Decktransformationsgruppe darstellen. Hierfür müssen wir zunächst studieren, wie sich Quotienten Riemann'scher Flächen bilden lassen. Dies geschieht in Abschnitt 2.6.

2.6 Diskontinuierliche Gruppenaktionen

In Abschnitt 1.1 haben wir gesehen, dass es mit den Gebieten geeignete Teilmengen Riemann'scher Flächen gibt, die wieder die Struktur einer Riemann'schen Fläche tragen. Das ist bislang die einzige Möglichkeit für uns, aus bekannten Riemann'schen Flächen neue zu gewinnen, und wirklich spannend sind die so erhaltenen neuen Flächen nicht. Das ändert sich, wenn wir stattdessen geeignete Quotienten Riemann'scher Flächen untersuchen. Diese erhalten wir, indem wir die Aktion geeigneter Untergruppen der in Abschnitt 1.2 eingeführten Automorphismengruppe aus der gegebenen Riemann'schen Fläche herausfaktorisieren:

Definition 2.50. Sei $G = (G, \star)$ eine Gruppe und X eine Menge. Man sagt dann, G **operiere** (von links) auf X ,³² falls es eine Abbildung

$$\circ : \begin{cases} G \times X & \rightarrow X, \\ (g, x) & \mapsto g \circ x \end{cases}$$

gibt mit

- (i) Das neutrale Element e_G von G erfüllt $e_G \circ x = x$ für alle $x \in X$.
- (ii) Es gilt $(g \star h) \circ x = g \circ (h \circ x)$ für alle $g, h \in G$ und alle $x \in X$.

Weiter nennt man

- $G_x := \{g \in G : g \circ x = x\}$ den **Stabilisator** von x in G ,
- $G \circ x := \{g \circ x : g \in G\}$ die **Bahn** von x unter G .

Durch $y \sim x : \iff y \in G \circ x$ ist eine Äquivalenzrelation auf X gegeben und man hat eine disjunkte Zerlegung

$$X = \bigsqcup_j (G \circ x_j),$$

wobei x_j ein Vertretersystem der verschiedenen Bahnen durchläuft. Gibt es dabei nur eine Bahn, so nennt man die Aktion von G auf X auch **transitiv**.

Definition 2.51. Sei G eine Gruppe, die via einer Abbildung $\circ$ wie in Definition 2.50 auf einem topologischen Raum X operiert. Diese Aktion heißt **diskontinuierlich**, wenn zu jedem Element von X eine offene Umgebung $U \subseteq X$ existiert, für die

$$\{g \in G : U \cap (g \circ U) \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Die Aktion von G heißt **frei**, wenn alle Elemente von X trivialen Stabilisator haben. Operiert G frei und diskontinuierlich, so sagen wir auch, G operiere **eigentlich diskontinuierlich**.

³²Um nicht mit der Verwendung des Wortes „Operation“ ungute Assoziationen zu wecken, werden wir im Folgenden stets von der **Aktion** der Gruppe G auf der Menge X sprechen, wenn G auf X operiert. Umgekehrt klingt es auch nicht besonders schön zu sagen, die Gruppe G „agiere“ auf X . Unsere Notation ist in diesem Fall also eine zusammengesetzte.

Beispiel 2.52. Seien X, Y Hausdorff-Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung. Dann operiert die Decktransformationsgruppe $\text{Deck}(Y/X)$ eigentlich diskontinuierlich auf Y ,

denn: Die Behauptung folgt offenbar, wenn wir zeigen können, dass es zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung $U' \subseteq Y$ gibt mit

$$\{\sigma \in \text{Deck}(Y/X) : U' \cap \sigma(U') \neq \emptyset\} = \{\text{id}_Y\}.$$

Sei dafür $\sigma \in \text{Deck}(Y/X)$ beliebig und $y_0 \in Y$ fest gewählt. Da die unverzweigte Überlagerung p nach Proposition 2.19 ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es eine offene Umgebung $U'_0 \subseteq Y$ von y_0 , so dass $p|_{U'_0}$ homöomorph auf sein Bild abbildet. Nehmen wir nun an, es gebe ein $y_1 \in U'_0 \cap \sigma(U'_0)$. Dann gelten $y_1, \sigma(y_1) \in U'_0$ und $p(y_1) = p(\sigma(y_1))$. Mit der Homöomorphie von $p|_{U'_0}$ folgt $y_1 = \sigma(y_1)$. Nun sind aber nach Voraussetzung sowohl σ als auch id_Y Hochhebungen von p über sich selbst. Nach Satz 2.22 stimmen diese dann überein und es gilt $\sigma = \text{id}_Y$, wie behauptet. #

Unser Ziel für diesen Abschnitt ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 2.53. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $G \subseteq \text{Aut}(X)$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe von X , die diskontinuierlich auf X operiert. Dann lässt sich der mit der Quotiententopologie³³ ausgestattete **Bahnenraum**

$$G \backslash X := \{G(x) := \{g(x) : g \in G\} : x \in X\}$$

derart mit der Struktur einer Riemann'schen Fläche ausstatten, dass die kanonische Projektion

$$\pi: \begin{cases} X & \rightarrow G \backslash X, \\ x & \mapsto G(x), \end{cases}$$

eine holomorphe Abbildung mit $G(x)\text{-ord}(\pi; x) = |G_x|$ für alle $x \in X$ ist.

In Vorbereitung des Beweises von Satz 2.53 leiten wir zunächst eine Reihe von Hilfsresultaten her:

Definition 2.54. Eine **topologische Gruppe** ist ein topologischer Raum mit einer Gruppenstruktur, so dass die Gruppenverknüpfung und die Inversenbildung stetig sind. Sei G eine topologische Gruppe, die via einer Abbildung $\circ$ wie in Definition 2.50 auf einem topologischen Raum X operiert. Diese Aktion heißt **stetig**, wenn $\circ$ stetig ist.

³³Seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und

$$p: \begin{cases} X & \twoheadrightarrow X/\sim, \\ x & \mapsto [x]_\sim := \{y \in X : y \sim x\} \end{cases}$$

die Projektionsabbildung. Dann ist durch

$$\tilde{\mathcal{O}} = \{U \subseteq X/\sim : p^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}.$$

die **Quotiententopologie** auf $X/\sim$ bezüglich p gegeben.

Lemma 2.55. *Seien X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe, die stetig auf X operiert. Dann ist die kanonische Projektion $\pi: X \rightarrow G \backslash X$ offen.*

Beweis. Operiere G auf X via einer Abbildung $\circ$ wie in Definition 2.50. Nach Definition der Quotiententopologie ist $\pi(U)$ für ein offenes $U \subseteq X$ genau dann offen, wenn

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} (g \circ U)$$

offen ist. Da die Aktion von G auf X stetig ist, ist für ein festes $g \in G$ die Abbildung

$$\lambda_g: \begin{cases} X & \rightarrow X, \\ x & \mapsto g \circ x \end{cases}$$

ein Homöomorphismus und insbesondere offen. Es ist daher für jedes $g \in G$ die Menge $g \circ U$ offen und somit auch $\pi^{-1}(\pi(U))$ als Vereinigung offener Mengen. $\square$

Lemma 2.56. *Seien X ein Hausdorff-Raum und G eine stetig und diskontinuierlich auf X operierende topologische Gruppe. Dann ist auch der Quotient $G \backslash X$ Hausdorff'sch.*

Beweis. Seien $x, y \in X$ mit $\pi(x) \neq \pi(y) \in G \backslash X$. Nach Lemma 2.55 genügt es zum Beweis der Hausdorff-Eigenschaft, offene Umgebungen $\tilde{U}_x$ von x und $\tilde{U}_y$ von y mit $\pi(\tilde{U}_x) \cap \pi(\tilde{U}_y) = \emptyset$ zu finden und nach Definition von π ist diese Bedingung gleichbedeutend mit

$$\tilde{U}_x \cap (g \circ \tilde{U}_y) = \emptyset \quad \text{für alle } g \in G. \quad (2.3)$$

Da G auf X diskontinuierlich operiert, gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y , so dass die Menge

$$\{g \in G : U_x \cap (g \circ U_y) \neq \emptyset\} =: \{g_1, \dots, g_n\}$$

endlich ist,

denn: Nach unserem Ansatz gilt $x \neq y$, so dass es im Hausdorff-Raum X disjunkte Umgebungen U_x von x und U_y von y gibt. Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, es gebe ein $g \in G$ mit $U_x \cap (g \circ U_y) \neq \emptyset$. Nach möglicher Verkleinerung beider Umgebungen lässt sich dies zu $U_x = g \circ U_y$ für ein $g \in G$ verschärfen. Da G auf X diskontinuierlich operiert, folgt die Behauptung nun mit Definition 2.51. $\#$

Wir wollen nun U_x und U_y so zu $\tilde{U}_x \subseteq U_x$ und $\tilde{U}_y \subseteq U_y$ verkleinern, dass auch diese endlich vielen problematischen Gruppenelemente wegfallen und (2.3) erfüllt ist. Das geht tatsächlich,

denn: Nach Voraussetzung gilt $G \circ x = \pi(x) \neq \pi(y) = G \circ y$ und also $x \neq g \circ y$ für alle $g \in G$. Da X Hausdorff'sch ist, existieren somit für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ Umgebungen

$$U_x^{(i)} \text{ von } x \text{ und } U_{g_i \circ y}^{(i)} \text{ von } g_i \circ y \text{ mit } U_x^{(i)} \cap U_{g_i \circ y}^{(i)} = \emptyset$$

und wir setzen

$$\tilde{U}_x := U_x \cap \bigcap_{i=1}^n U_x^{(i)} \quad \text{und} \quad \tilde{U}_y := U_y \cap \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(U_{g_i \circ y}^{(i)}).$$

Nach Konstruktion ist dann offensichtlich $\tilde{U}_x$ eine Umgebung von x und $\tilde{U}_y$ eine Umgebung von y und es gilt

$$\tilde{U}_x \cap (g \circ \tilde{U}_y) \subseteq \begin{cases} U_x \cap (g \circ U_y) = \emptyset & \text{für } g \in G \setminus \{g_1, \dots, g_n\}, \\ U_x^{(i)} \cap U_{g_i \circ y}^{(i)} = \emptyset & \text{für } g = g_i \text{ mit } i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

und somit die Behauptung. #

□

Lemma 2.57. *Seien X eine Riemann'sche Fläche und $G \subseteq \text{Aut}(X)$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe von X , die diskontinuierlich auf X operiert. Dann ist für jedes $x \in X$ der Stabilisator G_x endlich.*

Beweis. Das ergibt sich sofort mit

$$G_x \subseteq \{g \in G : U \cap g(U) \neq \emptyset\} \quad \text{für alle Umgebungen } U \text{ von } x$$

und der Voraussetzung, dass G auf X diskontinuierlich operiert. □

Lemma 2.58. *Seien X eine Riemann'sche Fläche und $G \subseteq \text{Aut}(X)$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe von X , die diskontinuierlich auf X operiert. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:*

- (a) *Jedes $x \in X$ besitzt eine G_x -invariante offene Umgebung U_x mit $U_x \cap g(U_x) = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus G_x$.*
- (b) *Die Umgebung U_x aus (a) kann so gewählt werden, dass die Abbildung*

$$\iota_x: \begin{cases} G_x \backslash U_x & \rightarrow G \backslash X, \\ G_x(x) & \mapsto G(x) \end{cases}$$

die Menge $G_x \backslash U_x$ homöomorph auf eine offene Menge in $G \backslash X$ abbildet.

Beweis. Da G auf X diskontinuierlich operiert, gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U}_x$ von x , für die die Menge

$$\{g \in G : \tilde{U}_x \cap g(\tilde{U}_x) \neq \emptyset\} \setminus G_x =: \{g_1, \dots, g_n\}$$

endlich ist. Nach Konstruktion gilt $x \neq g_i(x)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und, da X Hausdorff'sch ist, gibt es somit für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ offene Umgebungen

$$U_x^{(i)} \text{ von } x \text{ und } U_{g_i(x)}^{(i)} \text{ von } g_i(x) \text{ mit } U_x^{(i)} \cap U_{g_i(x)}^{(i)} = \emptyset.$$

Vermöge dieser Mengen konstruieren wir weitere offene Umgebungen von x :

$$\tilde{U}_x^{(i)} := \tilde{U}_x \cap U_x^{(i)} \cap g_i^{-1} \left(U_{g_i(x)}^{(i)} \right),$$

$$U_x := \bigcap_{g \in G_x} g \left(\bigcap_{i=1}^n \tilde{U}_x^{(i)} \right),$$

wobei die Offenheit von U_x mit der in Lemma 2.57 gezeigten Endlichkeit des Stabilisators G_x folgt. Nach Konstruktion gelten

$$g(U_x) = U_x \text{ für alle } g \in G_x \quad \text{und} \quad g(U_x) \cap U_x = \emptyset \text{ für alle } g \in G \setminus G_x,$$

so dass wir Behauptung (a) gezeigt haben.

Zum Beweis von Behauptung (b) zeigen wir zunächst die Injektivität von ι_x . Diese ist tatsächlich erfüllt,

denn: Für je zwei Elemente gilt $G(y) = G(z)$ und daher die Existenz eines $g \in G$ mit $y = g(z)$. Es folgt $U_x \cap g(U_x) \neq \emptyset$ und nach Konstruktion von U_x in (a) somit $g \in G_x$. Insgesamt erhalten wir $G_x(y) = G_x(z)$ und also die Injektivität von ι_x . #

Die Injektion ι_x ist aber auch stetig,

denn: Für die jeweiligen kanonischen Projektionen $\pi: X \rightarrow G \backslash X$ und $\pi_x: U_x \rightarrow G_x \backslash U_x$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & G \backslash X \\ \cup & & \uparrow \iota_x \\ U_x & \xrightarrow{\pi_x} & G_x \backslash U_x \end{array}$$

und die eingeschränkte Abbildung $\varphi_x := \pi|_{U_x} = \iota_x \circ \pi_x$ ist stetig. Für eine beliebige offene Menge $U \subseteq G \backslash X$ ist daher auch $\varphi_x^{-1}(U) = (\iota_x \circ \pi_x)^{-1}(U) = \pi_x^{-1}(\iota_x^{-1}(U))$ offen. Aus der Definition der Quotiententopologie auf $G_x \backslash U_x$ folgt daraus sofort die Offenheit von $\iota_x^{-1}(U)$ und somit die Behauptung. #

Dass ι_x auch offen ist, zeigt man auf ähnliche Weise. Insgesamt erhalten wir, dass ι_x die Menge $G_x \backslash U_x$ homöomorph auf ihr Bild in $G \backslash X$ abbildet, also Behauptung (b). $\square$

Lemma 2.59. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $G \subseteq \text{Aut}(X)$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe von X , die diskontinuierlich auf X operiert. Dann enthält die Menge der Punkte in X mit nichttrivialem Stabilisator in G keinen Häufungspunkt.

Beweis. Für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq X$ sei in diesem Beweis $M(A)$ die Menge der in A enthaltenen Punkte mit nichttrivialem Stabilisator in G . Enthielte $M(X)$ einen Häufungspunkt, so gäbe es ein $x \in X$ und eine gegen x konvergente Folge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $M(X) \setminus \{x\}$ mit paarweise verschiedenen Gliedern. Jedem m_n ließe sich dann ein $g_n \in G \setminus \{\text{id}_X\}$ mit $g_n(m_n) = m_n$ zuordnen.

Nach Teil (a) von Lemma 2.58 gibt es eine G_x -invariante Umgebung U_x von x mit $U_x \cap g(U_x) = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus G_x$. Da $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergierte, gäbe es daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $m_n \in U_x$ für alle $n \geq n_0$. Für alle diese n gälte somit nach Konstruktion der Folge $m_n \in U_x \cap g_n(U_x)$

und insbesondere $U_x \cap g_n(U_x) \neq \emptyset$. Dies wiederum implizierte nach Konstruktion von U_x , dass alle g_n mit $n \geq n_0$ in der nach Lemma 2.57 endlichen Menge G_x lägen. Da es andererseits unendlich viele, paarweise verschiedene Folgeglieder m_n mit $n \geq n_0$ gäbe, existierte nach dem Schubfachprinzip ein $g \in G_x \setminus \{\text{id}_X\}$, das unendlich viele m_n mit $n \geq n_0$ fixiert, und folglich auch eine Teilfolge $(m_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, deren Glieder sämtlich von diesem einen g fixiert würden. Als Teilfolge einer gegen x konvergenten Folge konvergierte auch $(m_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x .

Aufgrund der Stetigkeit von $g \in \text{Aut}(X)$ erhielten wir so $g(x) = x$. Insgesamt stimmte g auf der mit einem Häufungspunkt ausgestatteten Menge

$$\{m_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

mit der Identität id_X überein. Mit dem Identitätssatz 1.31 folgte $g = \text{id}_X$, was im Widerspruch dazu stünde, dass wir $g \in G_x \setminus \{\text{id}_X\}$ angenommen hatten. Unsere Annahme, $M(X)$ enthielte einen Häufungspunkt, ist also falsch und das Lemma bewiesen. $\square$

Korollar 2.60. *Seien X eine Riemann'sche Fläche und $G \subseteq \text{Aut}(X)$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe von X , die diskontinuierlich auf X operiert. Dann kann man in Lemma 2.58 in der dortigen Notation zusätzlich fordern, dass kein Punkt von U_x außer x selbst von einem nichttrivialen Element von G_x festgelassen wird.*

Beweis. In der Notation des Beweises von Lemma 2.59 enthält die Umgebung U_x eine offene Teilmenge U'_x mit $x \in U'_x$ und endlichem $M(U'_x)$,

denn: Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte von X mit $x \in U$ und sei $K_x \subseteq (U_x \cap U)$ eine Teilmenge, deren homöomorphes Bild $K_{\varphi(x)} := \varphi(K_x) \subseteq \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe von positivem Radius ist. Wäre $M(K_x)$ unendlich, so auch ihr homöomorphes Bild $\varphi(M(K_x))$. Wegen der Abgeschlossenheit von $K_{\varphi(x)}$ und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß enthielte dieses dann einen Häufungspunkt. Dann hätte aber auch $M(K_x)$ selbst einen Häufungspunkt, was nach Lemma 2.59 nicht möglich ist. Es ist also $M(K_x)$ endlich und insbesondere auch $M(\mathring{K}_x)$. Die Behauptung folgt nun mit $U'_x := \mathring{K}_x$. $\#$

Nach Entfernen dieser endlich vielen Punkte aus U_x haben wir die Forderung erfüllt. $\square$

Wir haben nun unsere Vorbereitungen abgeschlossen und können Satz 2.53 zeigen:

Beweis von Satz 2.53. Nach Lemma 2.56 ist der Quotientenraum $G \backslash X$ Hausdorff'sch. Da X als Riemann'sche Fläche zusammenhängt, die kanonische Projektion $\pi: X \rightarrow G \backslash X$ stetig ist und $\pi(X) = G \backslash X$ gilt, ist $G \backslash X$ auch zusammenhängend.

Wir konstruieren nun einen Atlas auf $G \backslash X$ und wählen dafür zunächst zu jedem $x \in X$ eine geeignete Umgebung U_x . In Hinsicht auf Lemma 2.58 interessiert uns hierbei die Ordnung $|G_x|$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $|G_x| = 1$. In diesem Fall folgt aus Teil (b) von Lemma 2.58 in der dortigen Notation unmittelbar die Existenz von offenen Umgebungen $x \in U_x \subseteq X$ und $G(x) \in U_{G(x)} \subseteq G \backslash X$, für die $\pi|_{U_x}: U_x \rightarrow U_{G(x)}$ ein Homöomorphismus ist. Wir können ohne Einschränkung annehmen,

U_x sei die Definitionsmenge einer Karte $\varphi_x: U_x \rightarrow V_x$ auf X und verkleinern sonst U_x geeignet. Die Hintereinanderausführung

$$\psi_{G(x)} := \varphi_x \circ \pi|_{U_x}^{-1}: U_{G(x)} \rightarrow V_x \quad (2.4)$$

ist als Verknüpfung von Homöomorphismen selbst ein Homöomorphismus und somit eine Karte auf $G \setminus X$. Derart definierte Karten nennen wir künftig auch **Karten vom ersten Typ**.

Fall 2: $|G_x| \geq 2$. Nach Teil (b) von Lemma 2.58 und Korollar 2.60 gibt es offene Umgebungen $x \in U_x \subseteq X$ und $G(x) \in U_{G(x)} \subseteq G \setminus X$, so dass die natürliche Abbildung

$$\iota_x: G_x \setminus U_x \rightarrow U_{G(x)}$$

ein Homöomorphismus ist und kein Punkt von U_x außer x selbst von einem nichttrivialen Element von G_x festgelassen wird. Es folgt, dass unter der kanonischen Projektion

$$\pi_x: U_x \rightarrow G_x \setminus U_x$$

jedes Element von $G_x \setminus U_x$ außer $\{G_x(x)\} = \{\{x\}\}$ genau $|G_x|$ Urbilder hat. Da $G_x \setminus U_x$ mit der Quotiententopologie ausgestattet ist, ist diese Projektion π_x zudem offen,

denn: Nach Definition der Quotiententopologie ist für eine beliebige offene Teilmenge $O \subseteq U_x$ das Bild $\pi_x(O) \subseteq G_x \setminus U_x$ genau dann offen, wenn sein Urbild $\pi_x^{-1}(O) = \bigcap_{g \in G_x} g(O)$ offen ist. Da G_x aber über Automorphismen auf U_x operiert, ist dies stets der Fall. #

Sei nun $\varphi_x: \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{V}_x$ eine Karte auf X mit $x \in \tilde{U}_x$ und $\varphi_x(x) = 0$. Wir können ohne Einschränkung $U_x \subseteq \tilde{U}_x$ annehmen und sonst U_x im Beweis von Lemma 2.58 geeignet kleiner wählen. Aufgrund der G_x -Invarianz von U_x erhalten wir so für alle $g \in G_x$ eine Funktion

$$\varphi_x^{(g)}: \begin{cases} U_x & \rightarrow \tilde{V}_x, \\ y & \mapsto \varphi_x(g(y)). \end{cases}$$

Diese ist als Hintereinanderausführung zweier injektiver, holomorpher Abbildungen selbst injektiv und holomorph und erfüllt so $0\text{-ord}(\varphi_x^{(g)}; x) = 1$. Die Produktfunktion

$$\varphi_x^{(G_x)}: \begin{cases} U_x & \rightarrow \mathbb{C}, \\ y & \mapsto \prod_{g \in G_x} \varphi_x^{(g)}(y) \end{cases}$$

ist wieder holomorph und erfüllt nach Konstruktion $0\text{-ord}(\varphi_x^{(G_x)}; x) = |G_x|$. Sie ist aber auch G_x -invariant und offen,

denn: Für ein beliebiges $\tilde{g} \in G_x$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_x^{(G_x)}(\tilde{g}(y)) &= \prod_{g \in G_x} \varphi_x^{(g)}(\tilde{g}(y)) = \prod_{g \in G_x} \varphi_x((g \circ \tilde{g})(y)) \\ &= \prod_{g \in G_x} \varphi_x(g(y)) = \prod_{g \in G_x} \varphi_x^{(g)}(y) = \varphi_x^{(G_x)}(y) \end{aligned}$$

und somit die G_x -Invarianz. Die Offenheit folgt mit dem Offenheitssatz 1.43, da wir ohne Einschränkung U_x als zusammenhängend annehmen können und $\varphi_x^{(G_x)}$ auf diesem nichtkonstant ist, was man bereits an $0\text{-ord}(\varphi_x^{(G_x)}; x) = |G_x|$ sieht. #

Wir erhalten so die Wohldefiniertheit der Abbildung

$$\psi_x^{(G_x)}: \begin{cases} G_x \setminus U_x & \rightarrow \mathbb{C}, \\ G_x(y) & \mapsto \varphi_x^{(G_x)}(y). \end{cases}$$

Diese ist stetig, offen und injektiv,

denn: Die Stetigkeit der Abbildung $\psi_x^{(G_x)}$ ergibt sich über die universelle Eigenschaft der Quotiententopologie aus derjenigen von $\varphi_x^{(G_x)}$, die Offenheit unmittelbar aus derjenigen von $\varphi_x^{(G_x)}$ und von π_x .

Zum Beweis der Injektivität betrachten wir zunächst zwei Punkte

$$G_x(y), G_x(z) \in (G_x \setminus U_x) \setminus \{G_x(x)\}$$

und nehmen an, es gelte

$$\varphi_x^{(G_x)}(y) = \psi_x^{(G_x)}(G_x(y)) = \psi_x^{(G_x)}(G_x(z)) = \varphi_x^{(G_x)}(z).$$

Da jedes Element von $G_x \setminus U_x$ außer $\{G_x(x)\}$ genau $|G_x|$ Urbilder unter π_x hat, gilt nun einerseits

$$|M_z| = |G_x| \quad \text{mit } M_z := \{w \in U_x : G_x(w) = G_x(z)\},$$

wegen $0\text{-ord}(\varphi_x^{(G_x)}; x) = |G_x|$, der Definition von U_x und $\varphi_x^{(G_x)}(z) \neq \varphi_x^{(G_x)}(x)$ andererseits

$$|N_z| = |G_x| \quad \text{mit } N_z := \{w \in U_x : \varphi_x^{(G_x)}(w) = \varphi_x^{(G_x)}(z)\}.$$

Aufgrund der Wohldefiniertheit von $\psi_x^{(G_x)}$ gilt aber $M_z \subseteq N_z$. Gälte nun $G_x(y) \neq G_x(z)$, so folgte im Widerspruch zu $|M_z| = |G_x| = |N_z|$ durch Einsetzen in die jeweiligen Definitionen $y \in N_z \setminus M_z$. Es ist daher $G_x(y) = G_x(z)$.

Es verbleibt, den Fall

$$0 = \varphi_x^{(G_x)}(x) = \psi_x^{(G_x)}(G_x(x)) = \psi_x^{(G_x)}(G_x(z)) = \varphi_x^{(G_x)}(z)$$

zu untersuchen. Nach Definition von $\varphi_x^{(G_x)}$ bedeutet dies aber

$$0 = \varphi_x^{(g)}(z) = \varphi_x(g(z)) \quad \text{für ein } g \in G_x$$

und mit der Injektivität von φ_x und g sowie $g(x) = x$ erhalten wir $x = z$ und somit insbesondere $G_x(x) = G_x(z)$.

Beide Fälle zusammen zeigen die geforderte Injektivität von $\psi_x^{(G_x)}$. #

Insgesamt erhalten wir die Homöomorphie von

$$\psi_x^{(G_x)}: G_x \setminus U_x \rightarrow \psi_x^{(G_x)}(G_x \setminus U_x) =: V_{G(x)} \subseteq \mathbb{C}$$

und wir können via

$$\psi_{G(x)} := \psi_x^{(G_x)} \circ \iota_x^{-1} : U_{G(x)} \rightarrow V_{G(x)}$$

eine Karte auf $G \setminus X$ definieren. Derart definierte Karten nennen wir künftig auch **Karten vom zweiten Typ**.

Offensichtlich gilt mit diesen Karten

$$G \setminus X = \bigcup_{G(x) \in G \setminus X} U_{G(x)},$$

so dass wir einen Atlas auf $G \setminus X$ gefunden haben. Da wir $G \setminus X$ mit der Quotiententopologie ausgestattet haben, erfüllt $G \setminus X$ zudem das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Es gilt nun, die biholomorphe Verträglichkeit der soeben konstruierten Karten nachzuweisen. Wir untersuchen die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten von Karten ersten und zweiten Typs gesondert:

Je zwei Karten $\psi_{G(x)}$ und $\psi_{G(y)}$ vom ersten Typ sind biholomorph verträglich,

denn: Das ist trivialerweise so, da die zur Definition von $\psi_{G(x)}$ bzw. $\psi_{G(y)}$ benutzten Karten φ_x bzw. φ_y biholomorph verträglich sind. #

Je zwei Karten $\psi_{G(x)}$ und $\psi_{G(y)}$ vom zweiten Typ sind biholomorph verträglich,

denn: Da nach Lemma 2.59 die Menge der Punkte in X mit nichttrivialem Stabilisator in G keinen Häufungspunkt besitzt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Definitionsbereiche von $\psi_{G(x)}$ und $\psi_{G(y)}$ disjunkt sind und sie ansonsten geeignet verkleinern. #

Je eine Karte $\psi_{G(x)}$ vom ersten Typ und eine Karte $\psi_{G(y)}$ vom zweiten Typ sind biholomorph verträglich,

denn: In der folgenden Argumentation benutzen wir die Notation aus der Konstruktion der Karten, ohne sie hier erneut einzuführen. Ohne Einschränkung können wir dann analog zur Argumentation für zwei Karten vom zweiten Typ zunächst $U_{G(x)} \cap U_{G(y)} \neq \emptyset$ annehmen. Unser Ziel ist nun der Nachweis der Holomorphie von

$$\psi_{G(y)} \circ \psi_{G(x)}^{-1} : \psi_{G(x)}(U_{G(x)} \cap U_{G(y)}) \rightarrow \psi_{G(y)}(U_{G(x)} \cap U_{G(y)}).$$

Nach Konstruktion der Karten $\psi_{G(x)}$ und $\psi_{G(y)}$ gilt für $z \in \psi_{G(x)}(U_{G(x)} \cap U_{G(y)})$ beliebig nun

$$\begin{aligned} (\psi_{G(y)} \circ \psi_{G(x)}^{-1})(z) &= (\psi_y^{(G_y)} \circ \iota_y^{-1} \circ \pi|_{U_x} \circ \varphi_x^{-1})(z) \\ &= (\psi_y^{(G_y)} \circ \iota_y^{-1})(G(\varphi_x^{-1}(z))) \\ &= \psi_y^{(G_y)}(G_y(\varphi_x^{-1}(z))) \\ &= \varphi_y^{(G_y)}(\varphi_x^{-1}(z)). \end{aligned}$$

Da φ_x eine Karte auf X und $\phi_y^{(G_y)}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge von X ist, ist die Verkettung $\phi_y^{(G_y)} \circ \varphi_x^{-1}$ wieder holomorph. Die Behauptung folgt, da z beliebig gewählt war. #

Insgesamt folgt, dass $G \setminus X$ zusammen mit der durch die Karten vom ersten und vom zweiten Typ gegebenen komplexen Struktur eine Riemann'sche Fläche ist.

Die Holomorphie von π folgt sofort aus der Definition der Karten.

Wir berechnen schließlich noch für ein beliebiges $x \in X$ die Vielfachheit, mit der π den Wert $G(x)$ in x annimmt. Dafür betrachten wir in einem beliebigen Punkt $G(x) \in G \setminus X$ eine wie in Fall 2 definierte Karte

$$\psi_{G(x)}: U_{G(x)} \rightarrow V_{G(x)} \quad \text{mit } G(x) \in U_{G(x)}$$

und beachten dabei, dass die Konstruktionsweise von Fall 2 auch für $|G_x| = 1$ anwendbar ist. Es gilt dann

$$\begin{aligned} (\psi_{G(x)} \circ \pi)(y) &= \psi_{G(x)}(G(y)) = \psi_x^{(G_x)}(\iota_x^{-1}(G(y))) \\ &= \psi_x^{(G_x)}(G_x(y)) = \varphi_x^{(G_x)}(y) \quad \text{für alle } y \in U_x \end{aligned}$$

und somit

$$G(x)\text{-ord}(\pi; x) = 0\text{-ord}(\psi_{G(x)} \circ \pi; x) = 0\text{-ord}(\varphi_x^{(G_x)}; x) = |G_x|.$$

□

2.7 Eine Klassifikation der Riemann'schen Flächen

Eine spannende Anwendung von Satz 2.53 ist, dass wir nun zeigen können, dass sich jede Riemann'sche Fläche als Quotient ihrer universellen Überlagerung nach ihrer Decktransformationsgruppe schreiben lässt:

Satz 2.61. *Sei X eine beliebige Riemann'sche Fläche und $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ihre universelle Überlagerung. Dann ist der Quotient $\text{Deck}(\tilde{X}/X) \backslash \tilde{X}$ von $\tilde{X}$ nach der zugehörigen Decktransformationsgruppe wieder eine Riemann'sche Fläche und als solche biholomorph äquivalent zu X selbst.*

Beweis. Nach Bemerkung 2.42 lässt sich $\tilde{X}$ auf natürliche Weise zu einer – nach Konstruktion einfach zusammenhängenden – Riemann'schen Fläche machen. Die Überlagerungsabbildung p ist dabei holomorph. Nach Bemerkung 2.44 und Beispiel 2.52 ist die Decktransformationsgruppe $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ in dieser Situation eine Untergruppe der Automorphismengruppe $\text{Aut}(\tilde{X})$, die eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{X}$ operiert. Wir können daher Satz 2.53 anwenden und erhalten, dass der Quotient $\text{Deck}(\tilde{X}/X) \backslash \tilde{X}$ eine Riemann'sche Fläche ist und die Projektion

$$\pi: \tilde{X} \rightarrow \text{Deck}(\tilde{X}/X) \backslash \tilde{X}$$

eine (nichtkonstante) holomorphe Abbildung. Letztere ist nach Beispiel 2.13 (b) eine Überlagerung, die aufgrund der Freiheit der Aktion der Decktransformationsgruppe keine Verzweigungspunkte aufweist und somit unverzweigt ist.

Die Bahnen der Aktion von $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ auf $\tilde{X}$ sind offensichtlich jeweils in Fasern enthalten. Die Überlagerungsabbildung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ist daher modulo der Aktion der Decktransformationsgruppe wohldefiniert. Versehen wir $\text{Deck}(\tilde{X}/X) \backslash \tilde{X}$ mit der Quotiententopologie, so ist die induzierte Abbildung

$$\bar{p}: \text{Deck}(\tilde{X}/X) \backslash \tilde{X} \rightarrow X$$

genau wie die unverzweigte Überlagerung p selbst nach Proposition 2.19 ein lokaler Homöomorphismus. Da $p: \tilde{X} \rightarrow X$ als universelle Überlagerung unverzweigt und unbegrenzt ist, erfüllt es nach Satz 2.30 die Kurvenhochhebungseigenschaft. Es folgt, dass $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ transitiv auf den Fasern operiert, so dass p offenkundig injektiv und also ein Homöomorphismus ist, für den nach Konstruktion das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{p} & \\ \text{Deck}(\tilde{X}/X) \backslash \tilde{X} & & \end{array}$$

kommutiert. Nach Proposition 2.19 ist die unverzweigte Überlagerung π ein lokaler Homöomorphismus und besitzt daher lokal eine Umkehrabbildung. Lokal ist also

$$\bar{p} = p \circ \pi^{-1}$$

als Verkettung holomorpher Funktionen selbst wieder holomorph. Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, ist $\bar{p}$ global ein holomorpher Homöomorphismus und nach dem Biholomorphiekriterium 1.44 somit biholomorph. $\square$

Qualitativ bedeutet Satz 2.61, dass jede Riemann'sche Fläche biholomorph äquivalent zu einem Quotienten $G \backslash Y$ einer einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche Y nach einer Untergruppe $G \subseteq \text{Aut}(Y)$ ist, die auf Y eigentlich diskontinuierlich operiert. Das wird insbesondere dadurch interessant, dass es bis auf biholomorphe Äquivalenz nur drei einfach zusammenhängende Riemann'sche Flächen gibt. Das ist der zuerst 1907 von KOEBE und POINCARÉ³⁴ bewiesene Große Riemann'sche Abbildungssatz, dessen Beweis aber leider zu umfangreich ist, um ihn an dieser Stelle vorzuführen:

Satz 2.62 (Großer Riemann'scher Abbildungssatz). *Jede einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche ist biholomorph äquivalent zu $\bar{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H} \cong \mathbb{E}$.*

Mit unseren Vorüberlegungen folgt hieraus sofort:

Korollar 2.63. *Jede Riemann'sche Fläche ist biholomorph äquivalent zu einem Quotienten $G \backslash Y$ mit*

³⁴Paul Koebe (1887–1945) und Jules Henri Poincaré (1854–1912)

- $Y \in \{\bar{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H} \cong \mathbb{E}\},$
- $G \subseteq \text{Aut}(Y)$ Untergruppe, die auf Y eigentlich diskontinuierlich operiert.

Um eine Klassifikation der Riemann'schen Flächen zu erhalten, gilt es also, die Untergruppen der Automorphismengruppen von $\bar{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ zu bestimmen und zu untersuchen, welche davon eigentlich diskontinuierlich operieren. Der Fall $Y = \mathbb{H} \cong \mathbb{E}$ ist dabei der weitaus reichhaltigste und wird von uns später in Kapitel 3 behandelt werden, wenn uns mehr Werkzeuge zur Verfügung stehen. Wir untersuchen nun die Fälle $Y = \bar{\mathbb{C}}$ sowie $Y = \mathbb{C}$. Es gilt zunächst:

Proposition 2.64. Für die Automorphismengruppen von $\bar{\mathbb{C}}$ und $\mathbb{C}$ gilt:

- (a) $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}}) = \{f : f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})\},$
- (b) $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{f : f(z) = az+b \text{ mit } a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}\}.$

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (b) und stellen dafür fest, dass jede ganze Funktion f aufgefasst als Funktion in $\bar{\mathbb{C}}$ in $z = \infty$ eine isolierte Singularität besitzt. Diese lässt sich für eine beliebige Karte $\varphi : U \rightarrow V$ mit $\infty \in U$ mit den Methoden der Funktionentheorie durch das Verhalten von $f \circ \varphi^{-1}$ in einer kleinen punktierten Umgebung von $\varphi(\infty)$ beschreiben; wir wählen für φ die Karte

$$\varphi_2 : \begin{cases} \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto \frac{1}{z} \end{cases}$$

aus (1.1) und untersuchen das Verhalten der holomorphen Funktion $\hat{f} := f \circ \varphi_2^{-1}$ in der Singularität $\varphi_2(\infty) = 0$. Im Fall $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ ist die so beschriebene Singularität in $z = \infty$ eine Polstelle,

denn: Wäre die Singularität hebbbar, so ließe sich f zu einer auf ganz $\bar{\mathbb{C}}$ holomorphen Funktion fortsetzen und wäre nach Korollar 1.53 konstant und somit im Widerspruch zu unserer Annahme nicht bijektiv.

Wäre die Singularität wesentlich, so läge nach dem Satz von Casorati-Weierstraß das Bild $\hat{f}(\dot{U}_\varepsilon(0))$ für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ dicht in $\mathbb{C}$. Für ein beliebiges Gebiet $D \subseteq \mathbb{C} \setminus U_\varepsilon(0)$ ist nach dem Satz von der Gebietstreue $\hat{f}(D) \subseteq \mathbb{C}$ wieder ein Gebiet und hätte somit nichtleeren Durchschnitt mit der dichten Teilmenge $\hat{f}(\dot{U}_\varepsilon(0)) \subseteq \mathbb{C}$. Da wir $D \cap \dot{U}_\varepsilon(0) = \emptyset$ vorausgesetzt hatten und $\hat{f}$ als Hintereinanderausführung von Bijektionen selbst bijektiv ist, kann dies aber nicht sein. #

Andererseits ist jede ganze Funktion f mit einer Polstelle in $z = \infty$ bereits durch ein nichtkonstantes Polynom gegeben,

denn: Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion, die nicht durch ein nichtkonstantes Polynom gegeben ist. Im Fall, dass f konstant ist, liegt in $z = \infty$ eine hebbare Singularität vor, im Fall, dass f nicht durch ein Polynom gegeben ist, hat

$$\hat{f}(z) := f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 a_{-n} z^n$$



in $z = 0$ eine wesentliche Singularität. Definitionsgemäß hat dann auch $f(z)$ an der Stelle $z = \infty$ eine wesentliche Singularität. #

Die invertierbaren Polynome in $\mathbb{C}[X]$ sind gerade diejenigen von der Gestalt

$$f(X) = aX + b \in \mathbb{C}[X] \quad \text{mit } a \neq 0,$$

da sich bei Hintereinanderausführung der Grad multipliziert. Die Proposition folgt. Behauptung (b) folgt.

Wir zeigen nun Behauptung (a). Nach Satz 1.34 ist die Menge der nichtkonstanten holomorphen Abbildungen von $\overline{\mathbb{C}}$ nach $\overline{\mathbb{C}}$ gerade die Menge der nichtkonstanten meromorphen Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$. Offensichtlich sind daher zunächst die in der Behauptung genannten rationalen Funktionen tatsächlich Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$. Wir müssen umgekehrt aber noch zeigen, dass jeder Automorphismus von dieser Gestalt ist. Als meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$ hat jeder Automorphismus $f \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ entweder einen Pol oder eine hebbare Singularität in $z = \infty$. Liegt ein Pol vor, so lässt sich f wegen seiner Bijektivität zu einem Automorphismus von $\mathbb{C}$ einschränken und ist nach (b) von der gewünschten Form. Liegt eine hebbare Singularität vor, so gibt es wegen der Bijektivität von f genau eine komplexe Zahl $z_0 \in \mathbb{C}$, in der f einen Pol hat. Es folgt, dass $f(\frac{1}{z-z_0})$ seine einzige Polstelle in $z = \infty$ hat. Mit den Überlegungen von gerade eben gilt also

$$f\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = az + b \quad \text{mit } a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}.$$

Nach der Substitution $z \mapsto z_0 + \frac{1}{z}$ erhalten wir so

$$f(z) = \frac{(az_0 + b)z + a}{z} \quad \text{mit } \begin{pmatrix} az_0 + b & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}),$$

so dass f auch in diesem Fall in der gewünschten Form vorliegt. $\square$

Wir untersuchen nun, welche Untergruppen der jeweiligen Automorphismengruppen eigentlich diskontinuierlich operieren, und beginnen mit den Untergruppen von $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$:

Proposition 2.65. $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ hat keine nichttrivialen Untergruppen, die frei operieren.

Beweis. Sei $f \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ durch

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für ein } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$$

gegeben. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt,

denn: Ist dann $c = 0$, so fixiert f offenbar $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$. Sei also nun $c \neq 0$. Dann ist weder ∞ noch $-\frac{d}{c}$ ein Fixpunkt von f . Betrachten wir also $z \notin \{-\frac{d}{c}, \infty\}$. Hier gilt

$$z_0 \text{ Fixpunkt von } f \iff \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0$$

$$\iff cz_0^2 + (d-a)z_0 - b = 0.$$

Diese Gleichung hat mindestens eine komplexe Lösung, so dass f auch in diesem Fall mindestens einen Fixpunkt besitzt. #

Jedes nichttriviale Element $f \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ liegt daher im Stabilisator mindestens eines Punktes $z \in \overline{\mathbb{C}}$ und es kann keine nichttriviale Untergruppe von $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ geben, die frei operiert. $\square$

Die einzige Riemann'sche Fläche, die sich als Quotient der Riemann'schen Zahlenkugel schreiben lässt, ist also $\overline{\mathbb{C}}$ selbst.

Um die infrage kommenden Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ systematisch zu studieren, holen wir ein wenig aus:

Definition 2.66. Eine Untergruppe U einer topologischen Gruppe G heißt **diskret**, wenn die induzierte Unterraumtopologie die **diskrete Topologie** ist, also für jedes $g \in U$ bereits $\{g\} \subseteq U$ eine offene Teilmenge ist.

Beispiel 2.67. Auf natürliche Weise sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die additiven Gruppen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ topologische Gruppen. Wir bestimmen nun die diskreten Untergruppen von $\mathbb{R}^n$. Zunächst stellen wir fest: In keiner diskreten Untergruppe $U \leq \mathbb{R}^n$ gibt es zwei Punkte $b_1, b_2 \in U$, die sich um einen irrationalen Faktor ξ unterscheiden,

denn: Nehmen wir an, es gälte $b_1 = \xi b_2$ mit irrationalem ξ . Jede irrationale Zahl lässt sich beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren. Es gäbe daher dann eine Folge $(\frac{p_v}{q_v})_{v \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit Grenzwert ξ . Es folgte, dass $(q_v b_1 - p_v b_2)_{v \in \mathbb{N}}$ eine Folge in U mit Grenzwert 0 wäre.³⁵ Das kann nicht sein, da U als diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}^n$ keinen Häufungspunkt enthält. #

Es folgt, dass in jeder diskreten Untergruppe $U \leq \mathbb{R}^n$ das Gruppenerzeugnis zweier Punkte $b_1, b_2 \in U$, die sich um einen reellen Faktor $\xi \in \mathbb{R}$ unterscheiden, zyklisch ist, dass es also ein $b \in U$ gibt mit $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle b \rangle$,

denn: Nach der vorherigen Überlegung gilt bereits $\xi \in \mathbb{Q}$. Schreiben wir $\xi = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden ganzen Zahlen p, q mit $q \neq 0$, so gilt mit dem Euklidischen Algorithmus

$$\langle b_1, b_2 \rangle = \langle \frac{p}{q} \cdot b_2, \frac{q}{q} \cdot b_2 \rangle = \langle \frac{1}{q} \cdot b_2 \rangle$$

³⁵Das Argument ist in Wirklichkeit etwas subtiler, da wir die Größenordnung von q_v kontrollieren müssen: Wir wählen $(\frac{p_v}{q_v})_{v \in \mathbb{N}}$ als die (hierfür optimale) Folge der Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von ξ . In der zugehörigen Theorie gibt es einen **Satz**, nach dem

$$|\xi - \frac{p_v}{q_v}| < \frac{1}{|q_v| \cdot |q_{v+1}|}$$

gilt. Hieraus folgt

$$|q_v b_1 - p_v b_2| < \frac{|q_v| \cdot |b_2|}{|q_v| \cdot |q_{v+1}|} < \frac{|b_2|}{v+1} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0.$$



wie behauptet. #

Wir erhalten, dass sich jede diskrete Untergruppe $U \leq \mathbb{R}^n$ als das Gruppenerzeugnis $\langle b_1, \dots, b_d \rangle$ einer $\mathbb{R}$ -linear unabhängigen Teilmenge $\{b_1, \dots, b_d\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $0 \leq d \leq n$ schreiben lässt. Umgekehrt sind auch alle auf diese Weise erhaltenen Untergruppen diskret,

denn: Da sich jede $\mathbb{R}$ -linear unabhängige Teilmenge $\{b_1, \dots, b_d\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $0 \leq d \leq n$ zu einer Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ vervollständigen lässt und die Diskretheit von $\langle b_1, \dots, b_d \rangle$ aus der von $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ folgt, genügt es, den Fall $d = n$ zu betrachten. Da die Matrix mit den Spalten $b_1, \dots, b_n$ nach Konstruktion in $GL_n(\mathbb{R})$ liegt, ist $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ ein homöomorphes Bild der diskreten Untergruppe $\mathbb{Z}^n$ und damit selbst diskret, was die Behauptung zeigt. #

Proposition 2.68. Die Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{C})$, die eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{C}$ operieren, sind in der Notation von Beispiel 2.48 (b) gegeben durch:

$$\begin{aligned} &\{\text{id}_{\mathbb{C}}\}, \\ &\langle \tau_{\omega} \rangle \quad \text{für ein } \omega \neq 0, \\ &\langle \tau_{\omega_1}, \tau_{\omega_2} \rangle \quad \text{für } \mathbb{R}\text{-linear unabhängige } \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Proposition 2.64 ist jeder Automorphismus $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ von der Form $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$. Offensichtlich gilt für solche Abbildungen

$$\{z \in \mathbb{C} : z \text{ Fixpunkt von } f\} = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\} = \begin{cases} \{\frac{b}{1-a}\} & \text{für } a \neq 1, \\ \emptyset & \text{für } a = 1. \end{cases}$$

Eine frei operierende Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ besteht also nur aus Translationen $f(z) = z + b$ mit $b \in \mathbb{C}$. Damit eine solche Untergruppe auch diskontinuierlich operiert, darf die Menge der vorkommenden Translationsvektoren b keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ aufweisen. Auf diese Weise lässt sich jede eigentlich diskontinuierlich operierende Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ natürlich mit einer diskreten Untergruppe von $\mathbb{C}$ identifizieren. Die Proposition folgt mit Beispiel 2.67 und, weil alle solchen Gruppen offensichtlich eigentlich diskontinuierlich operieren. □

Nach Proposition 2.68 gibt es genau drei Typen von Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{C})$, die eigentlich diskontinuierlich und frei auf $\mathbb{C}$ operieren. Zu diesen gehören die drei Typen von Riemann'schen Flächen, die sich als Quotient der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ schreiben lassen, nämlich

- Die triviale Gruppe. Hier ist der Quotient offenbar die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ selbst.
- Das Erzeugnis einer Translation τ_{ω} mit einem $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Quotienten können wir uns hier als die zu verschiedenen „Röhren“ zusammengerollte komplexe Ebene vorstellen, die allesamt homöomorph zur punktierten Ebene $\mathbb{C}^{\times}$ sind.
- Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$. Wir erhalten so die von uns bereits untersuchten Periodentori aus Definition 1.23.

Eine nette Anwendung der Erkenntnisse dieses Abschnitts ist die folgende Verschärfung des Satzes von Liouville:



Satz 2.69 (Kleiner Satz von PICARD³⁶). *Sei f eine ganze Funktion. Gibt es zwei komplexe Zahlen, die nicht im Bild von f liegen, so ist f konstant.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zwei komplexe Zahlen $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ mit

$$X := f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1\}.$$

Nach Korollar 2.63 ist X dann ein Quotient von $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ nach einer geeigneten Untergruppe der jeweiligen Automorphismengruppe. Andererseits ist X offensichtlich zu keinem der nach Proposition 2.65 bzw. Proposition 2.68 möglichen Quotienten von $\overline{\mathbb{C}}$ bzw. $\mathbb{C}$ biholomorph äquivalent, so dass X ein Quotient von $\mathbb{H} \cong \mathbb{E}$ nach einer geeigneten Untergruppe seiner Automorphismengruppe sein muss.

Im Beweis von Satz 2.61 hatten wir gesehen, dass es dann eine holomorphe Überlagerungsabbildung $p: \mathbb{E} \rightarrow X$ geben muss, die universelle Überlagerung von X . Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, lässt sich die ganze Funktion f nach Satz 2.34 und Proposition 2.23 über die holomorphe Überlagerung p zu einer ganzen Funktion $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}$ hochheben. Als beschränkte ganze Funktion ist h nach dem Satz von Liouville konstant. Andererseits erfüllt h als Hochhebung von f die Beziehung $f = p \circ h$, so dass auch f konstant sein muss. $\square$

2.8 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. *Beweisen Sie Lemma 2.3.*

Aufgabe 2.2. *Seien $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbeschränkte Überlagerung von Riemann'schen Flächen und $x_0 \in X$ ein Punkt mit Spur $p^{-1}(x_0)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

(a) *Durch*

$$m_p: \begin{cases} \pi_1(X, x_0) & \rightarrow \text{Aut}(p^{-1}(x_0)), \\ [\gamma] & \mapsto (y_0 \mapsto m_p([\gamma])(y_0) := L_{y_0}(p, \gamma)(1)) \end{cases}$$

*ist eine Aktion der Fundamentalgruppe auf $p^{-1}(x_0)$ gegeben. Diese ist transitiv und heißt die **Monodromie(-aktion)** von p auf $p^{-1}(x_0)$.*

(b) *Seien $x_1 \in X$ mit Spur $p^{-1}(x_1)$ und $\delta: [0, 1] \rightarrow X$ eine Kurve von x_0 nach x_1 . Dann gibt es eine Bijektion $\varphi: p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$, für die das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} [\gamma] & \in & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{m_p} & \text{Aut}(p^{-1}(x_0)) & \ni & \psi \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\delta^{-1} \cdot \gamma \cdot \delta] & \in & \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{m_p} & \text{Aut}(p^{-1}(x_1)) & \ni & \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

³⁶Charles Émile Picard (1856–1941)

kommutiert.

- (c) Für den Stabilisator eines $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ gilt $p^{-1}(x_0)_{y_0} = p_*(\pi_1(Y, y_0))$.
- (d) Ist $p^{-1}(x_0) = \{y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(d)}\}$ endlich, so definiert

$$\mathbf{m}_p: \begin{cases} \pi_1(X, x_0) & \rightarrow \mathcal{S}_d, \\ [\gamma] & \rightarrow (i \mapsto \mathbf{m}_p([\gamma])(i) := j, \text{ falls } \mathbf{m}_p([\gamma])(y_0^{(i)}) = y_0^{(j)}) \end{cases}$$

einen Gruppenhomomorphismus. Dieser ist – auch unabhängig von x_0 – bis auf Konjugation in $\mathcal{S}_d$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2.3. Sei $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeigen Sie mithilfe der Überlagerung $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$, dass

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}/\Lambda, 0), \\ (n_1, n_2) & \mapsto [t \mapsto t \cdot (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)] \end{cases}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Hinweis: Benutzen Sie zunächst Aufgabe 2.2, um einen Gruppenisomorphismus von $\pi_1(\mathbb{C}/\Lambda, 0) \rightarrow \Lambda$ zu finden.

Aufgabe 2.4. Seien X, Y zusammenhängende reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeiten, $q: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung und $h: \tilde{X} \rightarrow Y$ eine nach Definition der universellen Überlagerung existierende stetige spurtreue Abbildung. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

- (a) Die Abbildung h ist eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung und es gibt eine Untergruppe $G \subseteq \text{Deck}(\tilde{X}/X)$, für die je zwei Punkte $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ genau dann dasselbe h -Bild haben, wenn es ein $\sigma \in G$ mit $\sigma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ gibt.
- (b) Für die Gruppe G aus (a) gilt $G \cong \pi_1(Y)$.

Aufgabe 2.5. Seien Y eine Riemann'sche Fläche und $p: Y \rightarrow \mathbb{E}^\times := \mathbb{E} \setminus \{0\}$ eine holomorphe unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 2.4, dass dann Folgendes gilt:

- (a) Ist die Blätterzahl $B(p)$ von p unendlich, so gibt es eine konforme Abbildung $\varphi: Y \rightarrow H := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$ mit

$$p = \exp|_H \circ \varphi.$$

- (b) Nimmt die Blätterzahl $B(p)$ von p einen endlichen Wert $k \in \mathbb{N}$ an, so gibt es eine konforme Abbildung $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{E}^\times$ mit

$$p = p_k|_{\mathbb{E}^\times} \circ \varphi.$$

Aufgabe 2.6. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $f: X \rightarrow \mathbb{E}$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, die über $\mathbb{E}^\times$ unverzweigt ist. Dann gibt es eine natürliche Zahl k und eine biholomorphe Abbildung $\varphi: X \rightarrow \mathbb{E}$ mit

$$f = p_k|_{\mathbb{E}} \circ \varphi.$$

Aufgabe 2.7. Seien $p: Y \rightarrow X$ eine d -blättrige unverzweigte unbegrenzte Überlagerung zusammenhängender topologischer Räume, $x_0 \in X$ und $p^{-1}(x_0) = \{y_1, \dots, y_d\} \subseteq Y$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Es gibt ein $\sigma \in \text{Deck}(Y/X)$ mit $\sigma(y_i) = \begin{cases} y_{i+1} & \text{für } 1 \leq i < d, \\ y_1 & \text{für } i = d. \end{cases}$
- (ii) p ist Galois'sch und $\text{Deck}(Y/X)$ ist zyklisch.

Aufgabe 2.8. Seien X, Y zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Hausdorff-Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) p ist Galois'sch.
- (ii) Für alle $x_0 \in X$ operiert $\text{Deck}(Y \xrightarrow{p} X)$ transitiv auf $p^{-1}(x_0)$.
- (iii) Es gibt ein $x_0 \in X$, für das $\text{Deck}(Y \xrightarrow{p} X)$ transitiv auf $p^{-1}(x_0)$ operiert.
- (iv) Für alle $y_0 \in Y$ ist $p_*(\pi_1(Y; y_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X; p(y_0))$.
- (v) Es gibt ein $y_0 \in Y$, für das $p_*(\pi_1(Y; y_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X; p(y_0))$ ist.

Aufgabe 2.9. Seien X, Y zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Hausdorff-Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Für beliebige $x_0 \in X$ und $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ sei außerdem

$$N := \{[\gamma] \in \pi_1(X, x_0) : [\gamma] \cdot p_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\pi_1(Y, y_0)) \cdot [\gamma]\}$$

der Normalisator von $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ in $\pi_1(X, x_0)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Durch die Abbildungsvorschrift

$$\varphi: \begin{cases} N & \rightarrow \text{Deck}(Y/X), \\ [\gamma] & \mapsto (y \mapsto L_y(p, (p \circ \delta)^{-1} \cdot \gamma \cdot (p \circ \delta))(1)) \text{ mit } \delta: [0, 1] \rightarrow Y \\ & \text{Kurve von } y_0 \text{ nach } y \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus gegeben. Dieser ist surjektiv und hat Kern $p_*(\pi_1(Y, y_0))$.

- (b) Ist p Galois'sch und ist nach Aufgabe 2.8 also $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ ein Normalteiler, so gilt

$$\text{Deck}(Y/X) \cong \pi_1(X, x_0) / p_*(\pi_1(Y, y_0)).$$

Bemerkung: Als mögliche Folgerung dieser Aufgabe lässt sich eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen modulo spurtreuen Homöomorphismen von Überlagerungen von X und der Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen der Fundamentalgruppe von X herleiten.

Modulkurven

Das erste Ziel dieses Kapitels ist es, die in Kapitel 2 angegebene Klassifikation auch im Fall der Quotienten der komplexen oberen Halbebene $\mathbb{H}$ zu explizieren. Es stellt sich dabei heraus, dass sich die hierbei ja benötigten Automorphismen von $\mathbb{H}$ am besten als sogenannte Möbius-Transformationen darstellen lassen. Diese wurden erstmals in den 1820er-Jahren von ihrem Namensgeber AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790 - 1868) systematisch untersucht und werden bei uns in den Abschnitten 3.1, 3.2 und 3.3 eingeführt. In Abschnitt 3.5 schließen wir dann die Klassifikation der Riemann'schen Flächen durch Beschreibung der Quotienten der komplexen oberen Halbebene ab, um dann in Abschnitt 3.6 mit den Modulkurven arithmetisch interessante Spezialfälle genauer zu betrachten. Zuletzt beschreiben wir in Abschnitt 3.7 die meromorphen Funktionen auf Modulkurven und geben so einen ersten Ausblick in die Theorie der Modulformen.

3.1 Die Gruppe der Möbius-Transformationen

Für eine beliebige invertierbare komplexe (2×2) -Matrix

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \det(A) \neq 0\}$$

ist die *Möbius-Transformation* φ_M die rationale – und insbesondere meromorphe – Funktion

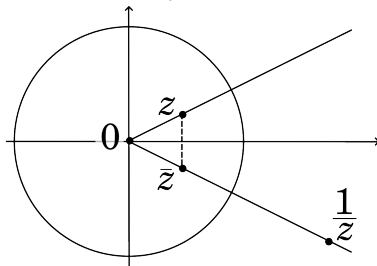
$$\varphi_M: \begin{cases} \overline{\mathbb{C}} & \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \\ z & \mapsto M\langle z \rangle := \frac{az+b}{cz+d}. \end{cases}$$

Offensichtlich ist φ_M im Fall $c = 0$ holomorph und hat für $c \neq 0$ als einzige Singularität einen Pol erster Ordnung in $z = -\frac{d}{c}$.

Beispiel 3.1. Wählen wir beispielsweise

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}),$$

so erhalten wir die Möbius-Transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$ mit einfachem Pol in $z = 0$.



Veranschaulichen können wir uns diese als Hintereinanderausführung der Spiegelung an der reellen Achse und der Inversion am Einheitskreis.

Nach Konstruktion gilt offensichtlich

$$\varphi_{\lambda M} = \varphi_M \quad \text{für alle } M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ und } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Es gibt insbesondere keinen Eins-zu-Eins-Zusammenhang zwischen Matrizen aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und Möbius-Transformationen.

Proposition 3.2. (a) Für alle $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt $\varphi_M \circ \varphi_N = \varphi_{MN}$.

(b) Für alle $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist φ_M bijektiv mit Umkehrabbildung $(\varphi_M)^{-1} = \varphi_{M^{-1}}$.

(c) Die Möbius-Transformationen φ_M mit $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe $\mathrm{Möb} := \mathrm{Möb}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$.

Beweis. Behauptung (b) folgt aus (a), wenn man dort M^{-1} für N einsetzt, und Behauptung (c) folgt aus (a) und (b),

denn: Die Assoziativität der Hintereinanderausführung folgt aus (a) und der Assoziativität der Matrizenmultiplikation. $\varphi_{I_2} = \mathrm{id}$ ist offensichtlich das neutrale Element. Nach (b) hat jede Möbius-Transformation schließlich ein Inverses. #

Behauptung (a) kann man schließlich direkt nachrechnen: Mit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

gilt nämlich

$$(\varphi_M \circ \varphi_N)(z) = \varphi_M \left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right) = \frac{a \cdot \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + b}{c \cdot \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a \cdot (a'z + b') + b \cdot (c'z + d')}{c \cdot (a'z + b') + d \cdot (c'z + d')} = \frac{(aa' + bc') \cdot z + (ab' + bd')}{(ca' + dc') \cdot z + (cb' + dd')} \\
&= \varphi_{MN}(z).
\end{aligned}$$

□

Die für die Klassifikation Riemann'scher Flächen gemäß Korollar 2.63 bedeutsamen Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$ lassen sich allesamt als Möbius-Transformationen φ_M mit geeigneten Matrizen $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ beschreiben. Da das Zentrum $\mathbb{C}^\times \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}$ von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ trivial operiert, bietet es sich zur Untersuchung der jeweiligen Automorphismengruppen also an, dieses herauszufaktorisieren und mit der entstehenden Faktorgruppe zu arbeiten. Wir definieren:

Definition 3.3. Für einen beliebigen kommutativen Ring mit Eins R und eine beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$\mathrm{PGL}_n(R) := \mathrm{GL}_n(R) / (R^\times \cdot \mathrm{id}_{R^n})$$

die *projektive lineare Gruppe* und

$$\mathrm{PSL}_n(R) := \mathrm{SL}_n(R) / ((R^\times \cdot \mathrm{id}_{R^n}) \cap \mathrm{SL}_n(R))$$

die *projektive spezielle lineare Gruppe*.

Hiermit erhalten wir nun folgende Beschreibungen für die uns interessierenden Automorphismengruppe:

Proposition 3.4. (a) $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{\varphi_M : M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\} = \mathrm{Möb}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$,

(b) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{\varphi_M : M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}\} \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})_\infty$,

(c) $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) = \{\varphi_M : M = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\}$,

(d) $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{\varphi_M : M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis. Die Behauptungen (a) und (b) haben wir bereits in Proposition 2.64 gezeigt.

Wir zeigen nun Behauptung (c). Seien $a, b \in \mathbb{C}$ beliebig mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Dann hat $\bar{b}z + \bar{a}$ keine Nullstelle in $\mathbb{E}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \right| \leq 1 &\iff |az + b|^2 \leq |\bar{b}z + \bar{a}|^2 \\
&\iff |a|^2 \cdot |z|^2 + |b|^2 \leq |b|^2 \cdot |z|^2 + |a|^2 \\
&\iff (|a|^2 - |b|^2) \cdot (|z|^2 - 1) \leq 0
\end{aligned}$$

$$\iff |z| \leq 1.$$

Die Möbius-Transformation $\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)}$ ist also eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{E}$. Auf ihre Umkehrabbildung $\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} \bar{a} & -b \\ -\bar{b} & a \end{smallmatrix}\right)}$ trifft wegen

$$|\bar{a}|^2 - |-b|^2 = |a|^2 - |b|^2 = 1$$

dasselbe zu; es gilt also $\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)} \in \text{Aut}(\mathbb{E})$. Andererseits ist jeder Automorphismus von $\mathbb{E}$ von diesem Typ,

denn: Für einen gegebenen Automorphismus $f \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ gibt es ein $z_0 \in \mathbb{E}$ mit $f(0) = z_0$. Andererseits gilt für

$$a := \frac{1}{\sqrt{1 + |z_0|^2}} \quad \text{und} \quad b := \frac{z_0}{\sqrt{1 + |z_0|^2}}$$

sowohl $|a|^2 - |b|^2 = 1$ als auch

$$\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)}(0) = \frac{b}{\bar{a}} = z_0.$$

Die Verkettung $f^{-1} \circ \varphi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)}$ ist also ein Automorphismus von $\mathbb{E}$, der die Null festlässt. Nach dem Lemma von SCHWARZ³⁷ gibt es somit eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und

$$(f^{-1} \circ \varphi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)})(z) = c^2 \cdot z = \varphi_{\left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & \bar{c} \end{smallmatrix}\right)}(z).$$

Es folgt $f = \varphi_{\left(\begin{smallmatrix} a\bar{c} & bc \\ \bar{b}c & \bar{a}\bar{c} \end{smallmatrix}\right)}$ und somit die Behauptung. #

Behauptung (d) folgt nun aus (c),

denn: Bekanntlich ist die CAYLEY-Transformation³⁸ $\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)}$ eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{E}$. Die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$ besteht also gerade aus den Konjugaten der Automorphismen von $\mathbb{E}$ unter der Cayley-Transformation. Andererseits liegt

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}(a+b) & \text{Im}(a-b) \\ -\text{Im}(a+b) & \text{Re}(a-b) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$$

stets in $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, denn die linke Seite liegt nach Konstruktion in $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ und die rechte hat reelle Koeffizienten. Behauptung (d) folgt, da wir auf diese Weise offensichtlich alle Matrizen aus $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ erreichen können. #

□

In den kommenden Abschnitten werden wir die Möbius-Transformationen genauer untersuchen, auch um die Automorphismengruppen besser zu verstehen. Da wir die Situation für die Automorphismen von $\bar{\mathbb{C}}$ und von $\mathbb{C}$ bereits untersucht haben, interessieren wir uns dabei natürlich besonders für die Gruppe $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ und ihre diskontinuierlich operierenden Untergruppen. Diese werden wir in Abschnitt 3.5 genauer beschreiben.

³⁸ Arthur Cayley (1821–1895)

3.2 Fixpunkte von Möbius-Transformationen

Definition 3.5. Ein Punkt $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ heißt **Fixpunkt** bezüglich einer Möbius-Transformation $\varphi_M \in \text{Möb}$, falls $\varphi_M(z_0) = z_0$ gilt.

Erste Beispiele sind:

Beispiel 3.6. (a) Für $M = I_2$ ist jeder Punkt Fixpunkt von φ_M .

(b) Für $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat φ_M genau einen Fixpunkt, nämlich $z_0 = \infty$.

(c) Für $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat φ_M genau zwei Fixpunkte, nämlich $z_0 = \infty$ und $z_1 = -1$.

Tatsächlich zeigt Beispiel 3.6 bereits alle vorkommenden Fälle:

Proposition 3.7. Jede von der Identität verschiedene Möbius-Transformation in Möb hat entweder genau einen oder genau zwei Fixpunkte.

Beweis. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $\varphi_M \neq \text{id}$. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

Fall 1: $c = 0$. Dann ist ∞ ein Fixpunkt von φ_M und wegen $d \neq 0$ können wir

$$\varphi_M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad \text{für alle } z \neq \infty$$

schreiben. Für $a = d$ hat dies keinen weiteren Fixpunkt,

denn: Für $b \neq 0$ ist dies klar, da wir so eine Translation um $\frac{b}{d} \neq 0$ erhalten. Andererseits kann nicht gleichzeitig $c = 0$, $a = d$ und $b = 0$ gelten, da sonst M als skalares Vielfaches der Einheitsmatrix trivial operierte, was wir in unserer Voraussetzung ausgeschlossen hatten. #

Nehmen wir also $a \neq d$ an. Dann gilt

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ Fixpunkt von } \varphi_M \iff \frac{a}{d} \cdot z_0 + \frac{b}{d} = z_0 \iff z_0 = \frac{b}{d-a},$$

so dass φ_M genau einen Fixpunkt in $\mathbb{C}$ besitzt. Insgesamt hat also φ_M im Fall $c = 0$ genau einen oder genau zwei Fixpunkte.

Fall 2: $c \neq 0$. Dann ist weder ∞ noch $-\frac{d}{c}$ ein Fixpunkt von φ_M . Ähnlich wie in Fall 1 gilt dann

$$\begin{aligned} z_0 \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \text{ Fixpunkt von } \varphi_M &\iff \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0 \\ &\iff cz_0^2 + (d-a) \cdot z_0 - b = 0 \\ &\iff z_0^2 + \frac{d-a}{c} \cdot z_0 - \frac{b}{c} = 0 \\ &\iff \left(z_0 + \frac{d-a}{2c}\right)^2 = \frac{b}{c} + \frac{(d-a)^2}{4c^2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat genau dann zwei komplexe Lösungen für $z_0 + \frac{d-a}{2c}$ und somit auch für z_0 , falls die rechte Seite ungleich Null ist. Ist andererseits die rechte Seite gleich Null, so ist offensichtlich $z_0 = -\frac{d-a}{2c}$ die einzige Lösung. Insgesamt hat also φ_M auch im Fall $c \neq 0$ genau einen oder genau zwei Fixpunkte. $\square$

Korollar 3.8. *Jede Möbius-Transformation in Möb ist durch die Angabe der Bilder dreier verschiedener Punkte aus $\overline{\mathbb{C}}$ eindeutig festgelegt.*

Beweis. Seien $\varphi, \psi \in \text{Möb}$ und $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\varphi(z_k) = \psi(z_k)$ für $k \in \{1, 2, 3\}$. Da Möb nach Proposition 3.2 eine Gruppe ist, gilt $\psi^{-1} \circ \varphi \in \text{Möb}$. Nach Konstruktion hat $\psi^{-1} \circ \varphi \in \text{Möb}$ die drei Fixpunkte z_1, z_2, z_3 und ist nach Proposition 3.7 also die Identität. Es folgt $\psi = \varphi$ und somit das Korollar. $\square$

An dieser Stelle ist die offensichtliche nächste Frage, ob es andersherum auch für vorgegebene Bilder von drei Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ immer eine Möbius-Transformation in Möb gibt, die diese annimmt. Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir ein wenig ausholen:

Proposition 3.9. *Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschiedene Punkte. Dann ist die Abbildung*

$$\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{(z - z_2) \cdot (z_1 - z_3)}{(z - z_3) \cdot (z_1 - z_2)} \quad \text{für } z \in \overline{\mathbb{C}}$$

die nach Korollar 3.8 eindeutige Möbius-Transformation mit

$$\begin{aligned} \text{DV}(z_1, z_1, z_2, z_3) &= 1, \\ \text{DV}(z_2, z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ \text{DV}(z_3, z_1, z_2, z_3) &= \infty. \end{aligned}$$

Für $z \notin \{z_1, z_2, z_3\}$ heißt die Zahl $\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$ das **(komplexe) Doppelverhältnis** der Punkte z, z_1, z_2, z_3 .³⁹

Beweis. Wir zeigen die Proposition nur im Fall $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Die Fälle, in denen einer der Punkte z_1, z_2, z_3 gleich ∞ ist, behandelt man genauso (siehe Übungsaufgabe 3.1). Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} z_1 - z_3 & -z_2 \cdot (z_1 - z_3) \\ z_1 - z_2 & -z_3 \cdot (z_1 - z_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Da nach Voraussetzung die Punkte z_1, z_2, z_3 paarweise verschieden sind, gilt

$$\det(M) = (z_1 - z_2) \cdot (z_1 - z_3) \cdot (z_2 - z_3) \neq 0$$

und somit $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$. Wegen

$$\frac{(z_1 - z_3) \cdot z - z_2 \cdot (z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2) \cdot z - z_3 \cdot (z_1 - z_2)} = \frac{(z - z_2) \cdot (z_1 - z_3)}{(z - z_3) \cdot (z_1 - z_2)} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}$$

³⁹Geometrisch gesprochen ist das Doppelverhältnis die Koordinate von z bezüglich der Basis (z_1, z_2, z_3) des eindimensionalen komplexen projektiven Raums $\overline{\mathbb{C}}$.

stimmt $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ in diesem Fall offensichtlich mit der Möbius-Transformation φ_M überein und erfüllt bereits nach Definition

$$DV(z_3, z_1, z_2, z_3) = \infty.$$

Durch Einsetzen in die Formel der Proposition sieht man zudem sofort

$$\begin{aligned} DV(z_1, z_1, z_2, z_3) &= \frac{(z_1 - z_2) \cdot (z_1 - z_3)}{(z_1 - z_3) \cdot (z_1 - z_2)} = 1, \\ DV(z_2, z_1, z_2, z_3) &= \frac{(z_2 - z_2) \cdot (z_1 - z_3)}{(z_2 - z_3) \cdot (z_1 - z_2)} = 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.10. Sind (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) jeweils Tripel paarweise verschiedener Punkte aus $\overline{\mathbb{C}}$, so gibt es genau ein $\varphi \in \text{Möb}$ mit

$$\varphi(z_k) = w_k \quad \text{für } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Beweis. Nach Proposition 3.9 gibt es durch Doppelverhältnisse definierte Möbius-Transformationen $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Möb}$ mit

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= 1, & \varphi_1(z_2) &= 0, & \varphi_1(z_3) &= \infty, \\ \varphi_2(w_1) &= 1, & \varphi_2(w_2) &= 0, & \varphi_2(w_3) &= \infty. \end{aligned}$$

Da Möb nach Proposition 3.2 eine Gruppe ist, folgt $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \in \text{Möb}$. Nach Konstruktion erfüllt diese Möbius-Transformation die verlangten Eigenschaften. Mit Korollar 3.8 folgt die Eindeutigkeit. □

Proposition 3.11 (Invarianz des Doppelverhältnisses). Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden, $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ein weiterer Punkt und $\varphi \in \text{Möb}$ beliebig. Dann gilt

$$DV(\varphi(z), \varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3)) = DV(z, z_1, z_2, z_3).$$

Beweis. Wie im Beweis von Korollar 3.10 eingesehen lässt sich jedes $\varphi \in \text{Möb}$ schreiben als $\varphi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ mit zwei durch Doppelverhältnisse gegebenen Möbius-Transformationen φ_1 und φ_2 , die

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= 1, & \varphi_1(z_2) &= 0, & \varphi_1(z_3) &= \infty, \\ \varphi_2(\varphi(z_1)) &= 1, & \varphi_2(\varphi(z_2)) &= 0, & \varphi_2(\varphi(z_3)) &= \infty \end{aligned}$$

erfüllen. Das ist äquivalent zu

$$\varphi_2(\varphi(z)) = \varphi_1(z),$$

was nach Einsetzen der Definitionen von φ_1 und φ_2 die Behauptung ergibt. □

3.3 Gruppenaktionen durch Möbius-Transformationen

Spannende Informationen über Möbius-Transformationen erhält man, wenn man sie danach klassifiziert, wie sie auf der Riemann'schen Zahlkugel $\overline{\mathbb{C}}$ operieren. Zunächst stellen wir fest: Die Gruppe $GL_2(\mathbb{C})$ operiert via Möbius-Transformationen

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{C}) \times \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \\ (M, z) &\mapsto \varphi_M(z) \end{aligned}$$

transitiv auf der Riemann'schen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$,

denn: Dass $GL_2(\mathbb{C})$ auf $\overline{\mathbb{C}}$ operiert, folgt mit Proposition 3.2 (a) und da die Einheitsmatrix offensichtlich trivial operiert. Die Transitivität folgt mit Korollar 3.10. #

Nach dem Satz über die JORDAN'sche Normalform⁴⁰ ist dabei jedes $M \in GL_2(\mathbb{C})$ zu einer der folgenden Matrizen konjugiert:

- (i) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$,
- (ii) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$,
- (iii) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}^\times$.

In Fall (i) ist hierbei die zugehörige Möbius-Transformation φ_M trivial. In Fall (ii) ist φ_M im Wesentlichen⁴¹ eine Translation

$$z \mapsto \begin{cases} z + \lambda^{-1} & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

und M heißt *parabolisch*. In Fall (iii) ist die Transformation im Wesentlichen eine Homothetie

$$z \mapsto \begin{cases} cz & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases} \quad \text{mit } c := \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$$

und M heißt *elliptisch*, falls $|c| = 1$, *hyperbolisch*, falls $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und *loxodromisch* sonst. Diese Bezeichnungen gelten nicht nur für die jeweilige Matrix M sondern auch für die zugehörige Möbius-Transformation φ_M .

Wir beschränken uns nun auf Matrizen aus $SL_2(\mathbb{C})$. Da das Zentrum $\mathbb{C} \cdot I_2$ ja trivial operiert, ist das keine starke Einschränkung. Die Elemente von $SL_2(\mathbb{C})$ – und mithin die zugehörigen Möbius-Transformationen – können wir dann über ihre Spur klassifizieren:⁴²

⁴⁰Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922)

⁴¹Bis auf den Beitrag der Konjugationsmatrizen: Möbius-Transformationen sind im Allgemeinen nicht konjugationsinvariant. Eine offensichtliche Ausnahme bildet Fall (i), in dem die betrachteten Matrizen im Zentrum liegen.

⁴²Das ist naheliegend, da die Spur einer Matrix bekanntlich konjugationsinvariant ist.

Proposition 3.12. Sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \setminus \{\pm I_2\}$. Dann gilt

$$M \text{ ist } \begin{cases} \text{parabolisch} & \iff \mathrm{Spur}(M) \in \{\pm 2\}, \\ \text{elliptisch} & \iff \mathrm{Spur}(M) \in \mathbb{R} \text{ und } |\mathrm{Spur}(M)| < 2, \\ \text{hyperbolisch} & \iff \mathrm{Spur}(M) \in \mathbb{R} \text{ und } |\mathrm{Spur}(M)| > 2, \\ \text{loxodromisch} & \iff \mathrm{Spur}(M) \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

Beweis. Wegen $\det(M) = 1$ und $M \notin \{\pm I_2\}$ ist die Jordan'sche Normalform von M von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C}^\times \setminus \{\pm 1\}.$$

Die erste Äquivalenz ist damit offensichtlich und wir müssen uns nur noch mit Matrizen beschäftigen, deren Normalform vom zweiten Typ ist.

Ist nun M elliptisch, so gilt für das zugehörige λ nach Definition $|\lambda|^2 = |\frac{\lambda}{\lambda^{-1}}| = 1$; es liegt also auf dem Einheitskreis. Mit $\lambda \notin \{\pm 1\}$ folgt

$$\mathrm{Spur}(M) = \lambda + \lambda^{-1} = \lambda + \bar{\lambda} = 2\mathrm{Re}(\lambda) \in (-2, 2) \subseteq \mathbb{R}.$$

Ist M hyperbolisch, so gilt für das zugehörige λ nach Definition $\lambda^2 = \frac{\lambda}{\lambda^{-1}} \in \mathbb{R}_{>0}$ und insbesondere $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es folgt

$$|\mathrm{Spur}(M)| = |\lambda| + |\lambda|^{-1} > 2 \iff |\lambda|^2 + 1 > 2|\lambda| \iff (|\lambda| - 1)^2 > 0.$$

Letztere Aussage ist korrekt wegen $\lambda \notin \{\pm 1\}$.

Sei nun umgekehrt M konjugiert zu $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ mit reeller Spur $\lambda + \lambda^{-1}$. Falls λ reell ist, muss M nach Definition hyperbolisch sein. Ist λ nicht reell, so folgt mit $\lambda^{-1} = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2}$ sofort $|\lambda| = 1$ und M ist elliptisch.

Nebenbei haben wir mit dem letzten Argument gezeigt, dass M nicht loxodromisch sein kann, wenn seine Spur reell ist. Die letzte Äquivalenz folgt, da die vier Bedingungen auf der rechten Seite sich paarweise gegenseitig ausschließen. $\square$

Wir interessieren uns im weiteren Verlauf vor allen Dingen für Matrizen mit reellen Einträgen. Für einen Unterring $R \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir daher die Untergruppe $\mathrm{GL}_2(R)^+ \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ durch

$$\mathrm{GL}_2(R)^+ := \{M \in \mathrm{GL}_2(R) : \det(M) > 0\}.$$

Die Untergruppeneigenschaft $\mathrm{GL}_2(R)^+ \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ begründet sich aus der Tatsache, dass $R^\times \cap (0, \infty)$ eine Untergruppe von $R^\times$ ist. Zu beachten ist, dass für einen Unterring $R \subseteq \mathbb{R}$ die Gruppe $\mathrm{SL}_2(R)$ natürlich eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(R)^+$ ist. Es gilt nun:

Proposition 3.13. (a) Die Gruppen $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operieren transitiv auf der **oberen Halbebene** $\mathbb{H}$.

(b) Die Gruppen $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operieren transitiv auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(c) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

(d) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{H}, \\ M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\mapsto M\langle i \rangle \end{aligned}$$

ist eine Bijektion von Mengen.⁴³

Beweis. Wegen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ reicht es aus zu zeigen, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ operiert. Als Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ operiert $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ auf der Riemann'schen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$, so dass es sogar genügt zu zeigen, dass für jedes $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und jedes $z \in \mathbb{H}$ der Bildpunkt $M\langle z \rangle$ wieder in $\mathbb{H}$ liegt. Das ist der Fall, denn in dieser Situation gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(M\langle z \rangle) &= \mathrm{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}\right) \\ &= \frac{\det(M) \cdot \mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Um die Transitivität der Gruppenaktion zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass es für alle $z = x + iy \in \mathbb{H}$ ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M\langle i \rangle = z$ gibt. Das ist der Fall, denn in dieser Situation gilt

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \langle i \rangle = \frac{\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = x + iy = z.$$

Da die Transitivität für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ wegen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ offensichtlich ist, haben wir somit insgesamt Behauptung (a) gezeigt.

Zum Beweis von Behauptung (b) stellen wir zunächst fest, dass Matrizen aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ wegen ihrer reellen Einträge offensichtlich Elemente aus $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wieder in diese Menge abbilden und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ – und also auch $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ – somit auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ operiert. Die Transitivität der Aktion folgt, da ein beliebiges $s \in \mathbb{R}$ von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ nach ∞ geschickt wird.

Wir zeigen nun Behauptung (c). Zum einen gilt für ein $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$$M\langle i \rangle = i \iff a = d \text{ und } b = -c.$$

Zum anderen folgt in dieser Situation aus $\det(M) = 1$ auch $a^2 + b^2 = 1$ und wir sind fertig.

Behauptung (d) ergibt sich schließlich wie folgt:

$$\mathbb{H} \stackrel{(a)}{\cong} \{ \{ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : M\langle i \rangle = z \} : z \in \mathbb{H} \} \stackrel{(c)}{=} \{ M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) : M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \}.$$

□

Nach Proposition 3.12 gibt es in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ keine loxodromischen Elemente. Die restlichen Typen lassen sich über die Fixpunkte der zugehörigen Möbius-Transformationen klassifizieren:

⁴³Versieht man $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$, so wird diese Bijektion sogar zu einem Homöomorphismus.

Proposition 3.14. Sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$. Dann gilt

$$M \text{ ist } \begin{cases} \text{parabolisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau einen Fixpunkt, und zwar in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ \text{elliptisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau zwei Fixpunkte, diese sind zueinander} \\ & \text{konjugiert und einer von ihnen liegt in } \mathbb{H}, \\ \text{hyperbolisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau zwei Fixpunkte, und zwar in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \end{cases}$$

Beweis. Nach Proposition 3.13 (a) gibt es zu jedem $z \in \mathbb{H}$ ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M\langle i \rangle = z$. Nach Teil (c) derselben Proposition gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_z &= M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \right\} \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} : \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \cdot M^{-1}. \end{aligned}$$

Der Stabilisator von z in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ besteht also ausschließlich aus Matrizen, die in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ konjugiert zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi)$$

sind. Mit der Ausnahme von $\pm I_2$ haben daher Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, die ein $z \in \mathbb{H}$ festlassen, je zwei verschiedene Eigenwerte von Betrag 1, sind definitionsgemäß also elliptisch.

Andererseits ist $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ auch der Stabilisator von $-i$, und mit $M\langle i \rangle = z$ gilt offensichtlich auch $M\langle -i \rangle = \bar{z}$. Ein Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, das ein $z \in \mathbb{H}$ stabilisiert, lässt also auch dessen komplex Konjugiertes $\bar{z} \in \overline{\mathbb{H}}$ fest.⁴⁴ Nach Proposition 3.7 hat jede nichttriviale Möbius-Transformation höchstens zwei Fixpunkte in $\overline{\mathbb{C}}$. Es folgt, dass jedes Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ höchstens ein $z \in \mathbb{H}$ stabilisieren kann.

Zusammengefasst: Wenn ein Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ein $z \in \mathbb{H}$ stabilisiert, dann ist es entweder $\pm I_2$ oder elliptisch. In letzterem Fall sind z und $\bar{z}$ die einzigen Fixpunkte.

Sei nun $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ nach Teil (b) von Proposition 3.13 transitiv auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ operiert, gibt es ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M\langle \infty \rangle = s$. Wie für die Stabilisatoren in der oberen Halbebene gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_s = M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_\infty \cdot M^{-1}. \quad (3.2)$$

Den Stabilisator von ∞ erhalten wir leicht, da bekanntlich genau die Matrizen mit $c = 0$ den Punkt ∞ fixieren. Es gilt also

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

⁴⁴ $\overline{\mathbb{H}}$ bezeichnet hier die untere Halbebene der komplexen Zahlen mit negativem Imaginärteil.

Ein Element von $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ mit mindestens einem Fixpunkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ hat demnach reelle Eigenwerte, ist also entweder parabolisch oder hyperbolisch. Eine parabolische Transformation hat als Konjugat einer Translation offensichtlich nur einen Fixpunkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, eine hyperbolische Transformation als Konjugat der Multiplikation mit einem $c \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ zwei.

Da die Zerlegung von $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ in elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente disjunkt ist, folgt die Proposition. $\square$

Definition 3.15. Sei $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ eine Untergruppe. Dann definieren wir

- (a) Ein Punkt $z \in \mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{H}} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ heißt ein **elliptischer Punkt** bezüglich Γ , wenn es ein elliptisches Element $M \in \Gamma$ gibt mit $M\langle z \rangle = z$.
- (b) Ein Punkt $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt ein **parabolischer Punkt** oder eine **Spitze** bezüglich Γ , wenn es ein parabolisches Element $M \in \Gamma$ gibt mit $M\langle s \rangle = s$.

Proposition 3.16. Sei $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ eine Untergruppe, und sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ein elliptischer bzw. parabolischer Punkt bezüglich Γ mit einem elliptischen bzw. parabolischen $M \in \Gamma$ mit $M\langle z \rangle = z$. Dann ist für alle $A \in \Gamma$ auch $A\langle z \rangle$ wieder elliptisch bzw. parabolisch.

Beweis. Mit M ist auch AMA^{-1} elliptisch bzw. parabolisch, und es gilt

$$(AMA^{-1})\langle A\langle z \rangle \rangle = A\langle z \rangle.$$

$\square$

Definition 3.17. Eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{H}$ heißt **Fundamentalebereich** für die Aktion einer Untergruppe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.

- (i) F ist abgeschlossen in $\mathbb{H}$ und hat ein zusammenhängendes Inneres.⁴⁵
- (ii) Jeder Punkt $z \in \mathbb{H}$ ist zu einem Punkt in F äquivalent.
- (iii) Je zwei verschiedene Punkte aus dem Inneren von F sind inäquivalent.

3.4 Kongruenzuntergruppen

Wir wollen in diesem Abschnitt die gegen Ende von Abschnitt 3.3 eingeführten Begriffe exemplarisch für die Aktion einer zahlentheoretisch besonders bedeutsamen Klasse von Gruppen, der **Kongruenzuntergruppen**, untersuchen und beginnen mit der Aktion der **vollen Modulgruppe** $SL_2(\mathbb{Z}) \subseteq SL_2(\mathbb{R})$:

Proposition 3.18. Die Menge der Spitzen bezüglich $SL_2(\mathbb{Z})$ ist durch $SL_2(\mathbb{Z})\langle \infty \rangle = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gegeben. Jedes parabolische Element von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist konjugiert zu einem Element in

$$SL_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

⁴⁵ $\mathbb{H}$ ist mit der Teilraumtopologie bezüglich $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ausgestattet.

Beweis. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ein beliebiges parabolisches Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Nach Proposition 3.14 hat dann φ_A genau einen Fixpunkt s . Ist $s \neq \infty$, so folgt sofort $c \neq 0$ ⁴⁶ und es gilt

$$s = A\langle s \rangle = \frac{as + b}{cs + d}.$$

Der Punkt s ist also eine Nullstelle des quadratischen Polynoms

$$\begin{aligned} cX^2 + (d - a)X - b &= cX^2 + (d - a) \cdot X + \frac{1 - ad}{c} \\ &= cX^2 + (d - a) \cdot X + \frac{(a + d)^2 - 4ad}{4c} \\ &= cX^2 + (d - a) \cdot X + \frac{(a - d)^2}{4c} \\ &= c \cdot \left(X - \frac{a - d}{2c} \right)^2 \end{aligned}$$

und somit in $\mathbb{Q}$. Es folgt, dass die Menge der Spitzen in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ enthalten ist.

Umgekehrt ist der Punkt ∞ tatsächlich eine Spitze bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = \infty \quad \text{und} \quad \text{Spur} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Ist weiter $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$, so finden wir mit dem Lemma von BÉZOUT⁴⁷ zwei ganze Zahlen u, t mit $pt - uq = 1$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} p & u \\ q & t \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} p & u \\ q & t \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = \frac{p}{q}.$$

Mit Proposition 3.16 ist dann auch $\frac{p}{q}$ eine Spitze, so dass wir insgesamt die Spitzenmenge zu $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ erkannt haben.

Die Behauptung über die parabolischen Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ folgt sofort, da jedes parabolische Element (genau) eine Spitze stabilisiert und die Stabilisatoren der Spitzen gerade die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Konjugate von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ sind. $\square$

Proposition 3.19. *Die Menge der elliptischen Punkte bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in $\mathbb{H}$ ist durch $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\langle i \rangle \cup \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\langle \varrho \rangle$ mit $\varrho = e^{2\pi i/3}$ gegeben.⁴⁸ Jedes elliptische Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist konjugiert zu einem Element in*

$$(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_i \cup \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\varrho) \setminus \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

⁴⁶Ist $c = 0$, so liegt A in

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : h \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Da parabolische Elemente genau einen Punkt aus $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ stabilisieren, folgt entgegen unserer Annahme $s = \infty$.

⁴⁷Étienne Bézout (1730–1783)

⁴⁸Da die elliptischen Punkte bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in $\overline{\mathbb{H}}$ jeweils komplex konjugiert zu denen in $\mathbb{H}$ sind, können wir uns darauf beschränken, letztere zu studieren.

Beweis. Nach Proposition 3.12 gilt für ein beliebiges elliptisches Element A von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ bereits $\mathrm{Spur}(A) \in \{-1, 0, 1\}$. Für das charakteristische Polynom von A folgt

$$\mathrm{charpoly}(A) = X^2 - \mathrm{Spur}(A)X + \det(A) \in \{X^2 + 1, X^2 \pm X + 1\}.$$

Man betrachtet die durch diese drei Möglichkeiten für das charakteristische Polynom gegebenen Fälle einzeln, wobei wir nur den Fall $\mathrm{charpoly}(A) = X^2 + 1$ untersuchen – die Fälle $\mathrm{charpoly}(A) = X^2 \pm X + 1$ zeigt man ganz ähnlich (*Übung!*). Es gilt nun $\det(A) = 1$ sowie $\mathrm{Spur}(A) = 0$. Wir zeigen, dass jede Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ mit $\det(A) = -a^2 - bc = 1$ konjugiert zu einer der Matrizen $\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Wir können dabei ohne Einschränkung annehmen, dass a von allen Zahlen $a + c\mathbb{Z}$ den kleinsten Absolutbetrag hat und also $|c| \geq 2 \cdot |a|$ gilt, und sonst

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ck & -2ak - ck^2 + b \\ c & -(a + ck) \end{pmatrix}.$$

betrachten. Ohne Einschränkung dürfen wir außerdem $|b| \leq |a|$ annehmen,

denn: Gilt nämlich $|b| > |a|$, so folgt

$$1 = \det(A) = -a^2 - bc \stackrel{-bc > 0}{=} -a^2 + |b| \cdot |c| \geq -a^2 + 2 \cdot |a| \cdot |b| > -a^2 + 2a^2 = a^2$$

und somit $a = 0$. Es folgt $A \in \{\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ und wir sind fertig. #

Es gibt daher eine Zahl $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, für die die Diagonaleinträge der zu A konjugierten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \varepsilon b & b \\ -2\varepsilon a + c - b & -(a + \varepsilon b) \end{pmatrix}.$$

einen echt kleineren Absolutbetrag haben als a . Ist dieser Betrag gleich Null, so ist die neue Matrix in $\{\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ enthalten, und wir sind fertig. Ansonsten wiederholen wir die gesamte Argumentation rekursiv mit der jeweils neu erhaltenen Matrix. Da der Absolutbetrag der Diagonaleinträge dabei in jedem Schritt echt kleiner wird, terminiert dieser Algorithmus, und die Behauptung über die elliptischen Elemente ist bewiesen.

Die Behauptung über die elliptischen Punkte erhalten wir, indem wir für jedes elliptische Element $M \cdot A \cdot M^{-1}$ die quadratische Gleichung $MAM^{-1}\langle z \rangle = z$ lösen. Wegen

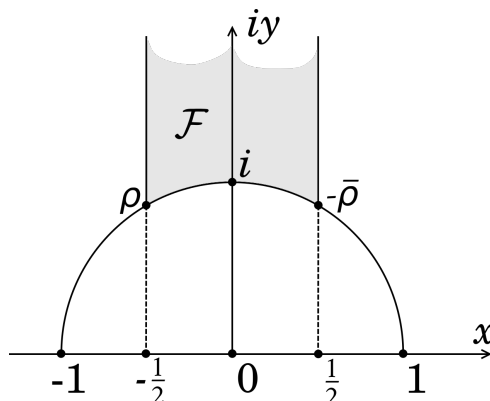
$$MAM^{-1}\langle M\langle z \rangle \rangle = M\langle z \rangle \iff A\langle z \rangle = z$$

genügt es dabei, die speziellen Matrizen aus der Aussage über die elliptischen Elemente zu betrachten. □

Satz 3.20. Die Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1 \text{ und } |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

ist ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ und wird auch als **Standardfundamentalbereich** bezeichnet.



Beweis. Wir müssen die drei Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 3.17 überprüfen. Bedingung (i), also die Abgeschlossenheit und der Zusammenhang des Inneren, ist klar.

Zum Beweis von Bedingung (ii) untersuchen wir zunächst die $SL_2(\mathbb{Z})$ -Bahnen in $\mathbb{H}$. Es gilt: Jede solche Bahn enthält Punkte maximalen Imaginärteils und diese sind charakterisiert durch

$$\begin{aligned} & \text{Im}(w) \text{ maximal in } SL_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle \\ \iff & |cw + d| \geq 1 \text{ für alle } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \text{ggT}(c, d) = 1, \end{aligned}$$

denn: Für ein festes $z \in \mathbb{H}$ definiert die Ungleichung $|cz + d| \leq 1$ ein Kompaktum in $\mathbb{R}^2$. Der Durchschnitt dieses Kompaktums mit dem Gitter $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$ ist endlich, so dass die Ungleichung nur endlich viele Lösungen $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ hat. Es gilt andererseits

$$|cz + d| \leq 1 \iff \text{(3.1)} \quad \text{Im}(M\langle z \rangle) \geq \text{Im}(z) \quad \text{für alle } M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Da der Imaginärteil von $M\langle z \rangle$ nur von der zweiten Zeile von M abhängt, gibt es innerhalb einer jeden Bahn Punkte maximalen Imaginärteils.

Sei nun $w \in SL_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Im}(w) \text{ maximal in } SL_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle & \iff \text{Im}(w) \geq \text{Im}(M\langle z \rangle) \text{ für alle } M \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ & \iff \text{Im}(w) \geq \text{Im}(M\langle w \rangle) \text{ für alle } M \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ & \iff \text{(3.1)} \quad |cw + d| \geq 1 \text{ für alle } \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Äquivalenz benutzt haben, dass w und z in derselben Bahn liegen. Die Behauptung folgt mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \implies ad - bc = \det(M) = 1 \implies \text{ggT}(c, d) = 1$$

und

$$(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } \text{ggT}(c, d) = 1$$

$\implies$ es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$ und also $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,

wobei sich die letzte Folgerung aus dem Lemma von Bézout ergibt. #

Für jedes solche w gibt es nun ein $b \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} \left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle w \rangle \right) &= \mathrm{Im}(w + b) = \mathrm{Im}(w), \\ \left| \mathrm{Re} \left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle w \rangle \right) \right| &= |\mathrm{Re}(w + b)| \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

so dass jeder Punkt $z \in \mathbb{H}$ zu einem Punkt in

$$\mathcal{F}' := \left\{ z \in \mathbb{H} : |cz + d| \geq 1 \text{ für alle } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \mathrm{ggT}(c, d) = 1 \text{ und } |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

äquivalent ist. Bedingung (ii) folgt, wenn wir $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ zeigen können. Dem ist so,

denn: Wegen $\mathrm{ggT}(1, 0) = 1$ ist offensichtlich $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Seien jetzt umgekehrt $z = x + iy \in \mathcal{F}$ und $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= (cx + d)^2 + c^2y^2 = c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2 \\ &= c^2|z|^2 + 2cd\mathrm{Re}(z) + d^2 \stackrel{z \in \mathcal{F}}{\geq} c^2 - |cd| + d^2 \\ &= |\max\{c, d\}|^2 - |\max\{c, d\}| \cdot |\min\{c, d\}| + |\min\{c, d\}|^2 \\ &\geq 1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung gilt, weil c und d nach Voraussetzung ganzzahlig und nicht beide Null sind. #

Es verbleibt Bedingung (iii) zu zeigen. Seien dafür z, w zwei Punkte aus dem Inneren von $\mathcal{F}$ mit $w = M\langle z \rangle$ für ein $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, es gelte

$$\mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Im}(w) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

und somit

$$|c| \cdot \mathrm{Im}(z) = |\mathrm{Im}(cz + d)| \leq |cz + d| \leq 1. \quad (3.3)$$

Nach Definition von $\mathcal{F}$ gilt $\mathrm{Im}(z) > \mathrm{Im}(\varrho) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nach (3.3) folgt daraus $|c| \leq 1$.

Fall 1: $|c| = 1$. Aus (3.3) erhalten wir sofort $|z \pm d| \leq 1$. Andererseits gilt

$$|z + \tilde{d}| > 1 \quad \text{für alle } (z + \tilde{d}) \in (\mathring{\mathcal{F}} + \tilde{d}) \text{ mit } \tilde{d} \in \mathbb{Z},$$

so dass der Fall $|c| = 1$ nicht eintreten kann.

Fall 2: $c = 0$. Wegen $\det(M) = ad = 1$ gilt dann $a = d \in \{\pm 1\}$ und somit

$$w = M\langle z \rangle = z \pm b.$$

Da z und w beide im Inneren von $\mathcal{F}$ liegen, folgt $b = 0$ und somit $w = z$.

Insgesamt folgt, dass z und w aus dem Inneren von $\mathcal{F}$ nur dann äquivalent sein können, wenn sie übereinstimmen. $\square$

Korollar 3.21. Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird erzeugt von

$$\begin{array}{ll} \text{der Stürzung} & S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{der Translation} & T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Jede ganzzahlige Matrix mit Determinante 1 lässt sich also als Wort in T, T^{-1} und $S = -S^{-1}$ schreiben.

Beweis. Seien $\langle S, T \rangle \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die von S und T erzeugte Untergruppe und $z \in \mathbb{H}$. Dann gibt es ein $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$ mit $\tilde{M}\langle z \rangle \in \mathcal{F}$,

denn: Genau wie im Beweis von Bedingung (ii) in Satz 3.20 sehen wir zunächst ein, dass jede $\langle S, T \rangle$ -Bahn in $\mathbb{H}$ Elemente maximalen Imaginärteils enthält, und wählen ein $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$, für das $\tilde{M}\langle z \rangle$ maximalen Imaginärteil hat. Weiter finden wir wieder eine ganze Zahl b mit

$$|\mathrm{Re}((T^b \tilde{M})\langle z \rangle)| \leq \frac{1}{2}.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass der Betrag von $w := (T^b \tilde{M})\langle z \rangle$ mindestens 1 ist. Nehmen wir dafür an, es gälte $|w| < 1$. Dann erhielten wir nach Anwendung von $S \in \langle S, T \rangle$

$$\mathrm{Im}(S\langle w \rangle) = \frac{\mathrm{Im}(w)}{|w|^2} > \mathrm{Im}(w),$$

was nicht sein kann, da ja der Imaginärteil von w als maximal in $\langle S, T \rangle\langle z \rangle$ gewählt war. $\#$

Wir wählen nun einen festen Punkt z_0 im Inneren von $\mathcal{F}$ und eine Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Nach der soeben gezeigten Behauptung gibt es dann ein $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$ mit $(\tilde{M}M)\langle z_0 \rangle \in \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ insbesondere Bedingung (iii) für Fundamentalbereiche erfüllt und z_0 im Inneren von $\mathcal{F}$ gewählt war, folgt $(\tilde{M}M)\langle z_0 \rangle = z_0$. Da es nach Proposition 3.19 und der Definition von $\mathcal{F}$ im Inneren von $\mathcal{F}$ keine elliptischen Punkte gibt, folgt $(\tilde{M}M) \in \{\pm I_2\}$ nach Proposition 3.14 und somit

$$M \in \langle -I_2, S, T \rangle \stackrel{S^2 = -I_2}{=} \langle S, T \rangle. \quad \square$$

Korollar 3.22. Für einen Punkt $z \in \mathcal{F}$ ist der Stabilisator in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gegeben durch

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_z = \begin{cases} \langle S \rangle & \text{für } z = i, \\ \langle ST \rangle & \text{für } z = \varrho, \\ \langle TS \rangle & \text{für } z = -\bar{\varrho}, \\ \langle -I_2 \rangle & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ordnung der erzeugenden Gruppenelemente ist hierbei 2 im Falle von $-I_2$, 4 im Falle von S und 6 im Falle von ST bzw. TS .

Beweis. Folgt direkt aus Proposition 3.19 und Satz 3.20. □

Wir führen nun mit den Kongruenzuntergruppen eine besonders wichtige Klasse von Untergruppen der vollen Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ ein:

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ wird durch die kanonische Projektion

$$\pi_N: \begin{cases} \mathbb{Z}^{2 \times 2} & \rightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2 \times 2}, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} a + N\mathbb{Z} & b + N\mathbb{Z} \\ c + N\mathbb{Z} & d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.4)$$

offensichtlich ein Gruppenhomomorphismus $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ mit Kern

$$\Gamma(N) := \{M \in SL_2(\mathbb{Z}) : M \equiv I_2 \pmod{N}\}$$

induziert. Nach Konstruktion ist $\Gamma(N)$ ein **Normalteiler**, es gilt also $M^{-1} \cdot \Gamma(N) \cdot M = \Gamma(N)$ für alle $M \in SL_2(\mathbb{Z})$. Es gilt sogar:

Proposition 3.23. *Der oben eingeführte Gruppenhomomorphismus $\pi_N: SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ist für jedes $N \in \mathbb{N}$ surjektiv und es gilt die Isomorphie von Gruppen*

$$SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N) \cong SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Beweis. Für $N = 1$ ist die Proposition klar, sei im Folgenden also $N > 1$. Wegen $\text{Kern}(\pi_N) = \Gamma(N)$ und nach dem Homomorphiesatz für Gruppen reicht es zum Beweis der Proposition aus, die Surjektivität von π_N zu zeigen. Dafür betrachten wir ein beliebiges

$$M = \begin{pmatrix} a + N\mathbb{Z} & b + N\mathbb{Z} \\ c + N\mathbb{Z} & d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Für dieses gilt $\text{ggT}(c, d, N) = 1$,

denn: Nach Voraussetzung ist $ad - bc + N\mathbb{Z} = 1 + N\mathbb{Z}$, also $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$ und schließlich $\text{ggT}(c, d) \equiv 1 \pmod{N}$. Hieraus folgt $\text{ggT}(\text{ggT}(c, d), N) = 1$ und somit die Behauptung. #

Daher existieren zueinander teilerfremde $\tilde{c} = c + sN$ und $\tilde{d} = d + tN$ mit $s, t \in \mathbb{Z}$,

denn: Im Fall $c \neq 0$ setzen wir $s = 0$ und finden mit dem Chinesischen Restsatz ein $t \in \mathbb{Z}$ mit

$$t \equiv \begin{cases} 1 \pmod{p} & \text{für } p \mid \text{ggT}(c, d), \\ 0 \pmod{p} & \text{für } p \nmid d, p \mid c. \end{cases}$$

Dann teilt einerseits jeder Primfaktor von $\text{ggT}(c, d)$ weder N noch t und daher auch nicht $\text{ggT}(c, d + tN)$. Andererseits ist jeder Primfaktor von c , der d nicht teilt, nach Konstruktion ein

Teiler von t und teilt somit ebenfalls nicht $\text{ggT}(c, d + tN)$. Das zeigt die Behauptung in diesem Fall. Im Fall $c = 0$ gilt $d \neq 0$ wegen $N > 1$ und wir können ein analoges Argument angeben. #

Zu M betrachten wir nun das Urbild

$$\tilde{M} := \begin{pmatrix} a + kN & b + lN \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$$

unter der kanonischen Projektion, wobei $k, l \in \mathbb{Z}$ zunächst noch beliebig sind. Wegen $a\tilde{d} - b\tilde{c} \equiv 1 \pmod{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$\det(\tilde{M}) = a\tilde{d} - b\tilde{c} + (k\tilde{d} - l\tilde{c})N = 1 + (m + k\tilde{d} - l\tilde{c})N.$$

Da $\tilde{c}$ und $\tilde{d}$ teilerfremd sind, können nun nach dem Lemma von Bézout k und l so gewählt werden, dass $m + k\tilde{d} - l\tilde{c} = 0$ und somit $\tilde{M} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt. Damit ist die Projektion in der Tat surjektiv. $\square$

Vermöge Proposition 3.23 und des Chinesischen Restsatzes lässt sich leicht

$$[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = |\text{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N^3 \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \quad (3.5)$$

nachweisen.

Definition 3.24. Die oben eingeführten Gruppen $\Gamma(N)$ für $N \in \mathbb{N}$ heißen die **Hauptkongruenzuntergruppen** von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, die eine Hauptkongruenzuntergruppe enthält, nennt man **Kongruenzuntergruppe** von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Beispiel 3.25. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sind

$$\begin{aligned} \Gamma_0(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}, \\ \Gamma_1(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\} \end{aligned}$$

Kongruenzuntergruppen.

Da es nach Definition 3.24 zu jeder Kongruenzuntergruppe Γ eine natürliche Zahl N mit

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gibt, lässt sich jede Linksnebenklasse aus $\Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ als Vereinigung von Linksnebenklassen aus der nach (3.5) endlichen Menge $\Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ schreiben und es gilt

$$[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] < \infty. \quad (3.6)$$

Beispiel 3.26. Für die speziellen Kongruenzuntergruppen aus Beispiel 3.25 gilt

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = N \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_1(N)] = N^2 \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Für jede Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$ und Matrizen $A_1, \dots, A_m \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} \cdot A_\mu \quad \text{mit } \bar{\Gamma} := \Gamma \cdot \{\pm I_2\} / \{\pm I_2\} \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}). \quad (3.7)$$

In Abhängigkeit davon, ob $-I_2 \in \Gamma$ gilt, ist dabei offensichtlich

$$\varepsilon \cdot [\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) : \bar{\Gamma}] = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] \quad \text{mit } \varepsilon \in \{1, 2\}.$$

Da die Kongruenzuntergruppen Teilmengen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sind, müssen auch die zugehörigen Mengen von elliptischen und parabolischen Elementen in den entsprechenden Mengen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ enthalten sein. Entsprechendes trifft dann nach Definition auch auf die elliptischen bzw. parabolischen Punkte zu. Tatsächlich stimmt die Menge der Spitzen bezüglich einer Kongruenzuntergruppe mit derjenigen bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ überein:

Proposition 3.27. Die Menge der Spitzen bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist durch $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gegeben.

Beweis. Die eine Inklusion ist klar: Jede Spitze bezüglich Γ ist nach Definition insbesondere eine Spitze bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und liegt somit nach Proposition 3.18 in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Wir wollen nun zeigen, dass umgekehrt auch jedes $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ tatsächlich eine Spitze bezüglich Γ ist. Da Γ eine Kongruenzuntergruppe ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, für das die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ in Γ enthalten ist. Mit derselben Argumentation wie gerade eben langt es dann zu zeigen, dass s von einem parabolischen Element aus $\Gamma(N)$ stabilisiert wird. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit $M\langle\infty\rangle = s$. Dann gilt

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - Nac & Na^2 \\ -Nc^2 & 1 + Nac \end{pmatrix} \in \Gamma(N),$$

wobei wir im letzten Schritt $ad - bc = \det(M) = 1$ verwendet haben. Die Behauptung folgt, da $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ den Punkt ∞ stabilisiert. $\square$

In Proposition 3.18 haben wir gezeigt, dass alle Spitzen in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ in derselben $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Bahn liegen. Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe Γ stimmt das nicht mehr: Hier kann die Menge der Spitzen in mehrere Γ -Bahnen zerfallen. Jede solche Γ -Bahn nennt man eine **Spitzenklasse** bezüglich Γ , die Menge der Spitzenklassen bezüglich Γ heißt $\mathrm{Cusps}(\Gamma)$. Es gilt:

Proposition 3.28. *Die Menge der Spitzenklassen in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist endlich.*

Beweis. Da der Index von Γ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ endlich ist, können wir in der Notation von (3.7)

$$\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \langle \infty \rangle = \bigcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} \langle A_\mu \langle \infty \rangle \rangle$$

schreiben. Offensichtlich enthält also die Menge $\{A_1 \langle \infty \rangle, \dots, A_m \langle \infty \rangle\}$ ein Vertretersystem der Spitzenklassen bezüglich Γ , und die Proposition ist gezeigt. $\square$

Bei den elliptischen Punkten kann verschiedenes passieren, bis dahin, dass es überhaupt keine mehr gibt. Das sieht man gut an dem folgenden Beispiel:

Beispiel 3.29. *Sei $N \neq 1$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es bezüglich $\Gamma(N)$ keine elliptischen Punkte, denn: Nach Proposition 3.19 sind alle elliptischen Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu einer der Matrizen*

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

konjugiert. Für $N > 1$ liegt keine dieser Matrizen in $\Gamma(N)$, denn sie sind modulo N nicht kongruent zur Einheitsmatrix I_2 . Die Behauptung folgt, da $\Gamma(N)$ als Normalteiler von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Konjugate seiner Elemente enthält. $\#$

In Analogie zu Proposition 3.28 gilt allerdings auch hier:

Proposition 3.30. *Die Menge der Γ -Äquivalenzklassen elliptischer Punkte in $\mathbb{H}$ bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist endlich.*

Genau wie im Fall der vollen Modulgruppe erwarten wir, dass auch für die Aktion einer Kongruenzuntergruppe auf $\mathbb{H}$ ein Fundamentalbereich existiert. Tatsächlich lässt sich ein solcher aus dem aus Satz 3.20 bekannten Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ gewinnen und es gilt:

Proposition 3.31. *Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es eine Zerlegung*

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} \cdot A_\mu \quad \text{mit } A_1, \dots, A_m \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ in $\bar{\Gamma}$ -Nebenklassen wie in (3.7) mit der Zusatzbedingung, dass

$$\mathcal{F}_\Gamma := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$$

ein zusammenhängendes Inneres hat. Die Menge $\mathcal{F}_\Gamma$ ist dann ein Fundamentalbereich der Aktion von Γ auf $\mathbb{H}$.

3.5 Fuchs'sche Gruppen

Wir sind nun in der Lage, die diskontinuierlich operierenden Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ zu bestimmen und die in Korollar 2.63 angestoßene Klassifizierung der Riemann'schen Flächen abzuschließen. Zunächst führen wir hierfür den Begriff der Fuchs'schen Gruppe ein:

Definition 3.32. Eine Untergruppe $G \subseteq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ heißt eine **Fuchs'sche Gruppe**,⁴⁹ wenn $G \cdot (\pm I_2)$ ausgestattet mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine diskrete Untergruppe von $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ ist.

Proposition 3.33. Die Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, die diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$ operieren, sind gerade die Fuchs'schen Gruppen. Eine solche Gruppe operiert genau dann eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$, wenn sie keine elliptischen Elemente besitzt.

Beweis. Sei zunächst $G \subseteq \text{Aut}(\mathbb{H})$ eine Untergruppe, die diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$ operiert. Wäre $G \cdot (\pm I_2)$ nicht diskret, so gäbe es eine Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(G \cdot (\pm I_2)) \setminus \{I_2\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = I_2$.⁵⁰ Nach Voraussetzung liegen z und w isoliert in ihrer jeweiligen G -Bahn. Wegen der Konvergenz der Folge bedeutete dies

$$M_n \langle z \rangle = z \text{ und } M_n \langle w \rangle = w \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach den Propositionen 3.4 und 3.14 ist die Identität der einzige Automorphismus von $\mathbb{H}$, der zwei Fixpunkte hat. Es folgte darum $M_n = -I_2$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, was im Widerspruch zu $\lim_{n \in \mathbb{N}} M_n = I_2$ steht. G muss also eine Fuchs'sche Gruppe sein.

Sei umgekehrt $G \subseteq \text{Aut}(\mathbb{H})$ eine Fuchs'sche Gruppe. Wir wollen zeigen, dass G auf $\mathbb{H}$ diskontinuierlich operiert. Tatsächlich ist für ein beliebiges Kompaktum $K \subseteq \mathbb{H}$ die Menge

$$E := \{M \in (G \cdot (\pm I_2)) : M \langle K \rangle \cap K \neq \emptyset\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

beschränkt,

denn: Da K kompakt ist, gibt es ein reelles $r > 0$ mit

$$\frac{1}{r} \leq \text{Im}(z) \leq r \quad \text{und} \quad |z| \leq r \quad \text{für alle } z \in K.$$

Sei nun $z = x + iy \in K$ und sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (G \cdot (\pm I_2)) \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{R})$$

eine Matrix mit $M \langle z \rangle \in K$. Dann gilt

$$|cz + d|^2 = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Im}(M \langle z \rangle)} \leq r^2 \quad \text{und} \quad |az + b| = |cz + d| \cdot |M \langle z \rangle| \leq r^2.$$

⁴⁹Immanuel Lazarus Fuchs (1833–1902), wirkte an der Universität Heidelberg

⁵⁰Nach Definition gäbe es zunächst einen Häufungspunkt in G , der sich ohne Einschränkung als Grenzwert einer solchen Folge schreiben ließe. Da G eine topologische Gruppe ist, könnten wir dann diese Folge mit dem Inversen ihres Grenzwertes durchmultiplizieren und erhielten so die Behauptung.

Wegen $|cz + d|^2 = (cx + d)^2 + c^2y^2$ folgt $|c| \cdot y \leq r$ und analog $|a| \cdot y \leq r^2$. Mit $y \geq \frac{1}{r}$ erhalten wir also

$$|c| \leq r^2 \quad \text{und} \quad |a| \leq r^3.$$

Hieraus folgen wiederum

$$|d| \leq |cz + d| + |c| \cdot |z| \leq r + r^2 \cdot r \quad \text{und} \quad |b| \leq |az + b| + |a| \cdot |z| \leq r^2 + r^3 \cdot r$$

und insgesamt die Behauptung. #

Da G Fuchs'sch und somit $G \cdot (\pm I_2)$ diskret ist, folgt die Endlichkeit von E . Wählen wir als Kompaktum K nun speziell den Abschluss einer beschränkten offenen Umgebung U zu einem gegebenen Punkt $z \in \mathbb{H}$, folgt die Endlichkeit von

$$\{M \in G : M\langle U \rangle \cap U \neq \emptyset\} \cong \{M \in (G \cdot (\pm I_2)) : M\langle U \rangle \cap U \neq \emptyset\}$$

und somit, dass G auf $\mathbb{H}$ diskontinuierlich operiert.

Es verbleibt zu untersuchen, welche Fuchs'schen Gruppen frei und somit eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$ operieren. Nach Definition ist dies der Fall, wenn es in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ keine Fixpunkte unter der Aktion der betreffenden Gruppe gibt. Nach Proposition 3.14 operieren daher genau diejenigen Fuchs'schen Gruppen eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$, die keine elliptischen Elemente enthalten. □

Beispiel 3.34. (a) *Offensichtlich ist jede beliebige Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Setzen wir daher wieder*

$$\bar{\Gamma} := \Gamma \cdot \{\pm I_2\} / \{\pm I_2\},$$

so ist $\bar{\Gamma}$ eine Fuchs'sche Gruppe und operiert nach Proposition 3.33 diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$.

(b) *Nach Beispiel 3.29 besitzen die Hauptkongruenzuntergruppen $\Gamma(N)$ mit $N > 1$ keine elliptischen Elemente. Nach Proposition 3.33 operiert daher die zugehörige Fuchs'sche Gruppe $\bar{\Gamma}(N)$ eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$.*

Aus Satz 2.53 und Proposition 3.33 folgt nun:

Korollar 3.35. *Für jede beliebige Fuchs'sche Gruppe $G \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ trägt der Quotient*

$$Y(G) := G \backslash \mathbb{H}$$

die Struktur einer Riemann'schen Fläche.

3.6 Der Begriff der Modulkurve

Wir interessieren uns für die in Abschnitt 3.5 als Quotient der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ nach der Aktion einer Fuchs'schen Gruppe $G \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ gefundenen Riemann'schen Flächen $Y(G)$ im Weiteren nur im Spezialfall $G = \bar{\Gamma}$ für eine Kongruenzuntergruppe Γ und schreiben hier künftig auch einfacher $Y(\Gamma)$ statt $Y(\bar{\Gamma})$. In diesem Fall lässt sich die Fläche anschaulich mit einem Fundamentalbereich in $\mathbb{H}$ bezüglich der Aktion von Γ identifizieren, der über die Gruppenaktion längs seines Randes mit sich selbst verklebt ist. Hierbei verbleiben die Spitzenklassen bezüglich Γ als Punktierungen außerhalb von $Y(\Gamma)$. Wir nennen $Y(\Gamma)$ auch eine *nichtkompakte Modulkurve*.

Durch Hinzunahme der – nach Proposition 3.28 endlichen – Menge $\mathrm{Cusps}(\Gamma)$ der Spitzenklassen bezüglich Γ lässt sich die nichtkompakte Modulkurve kompaktifizieren, was den Umgang mit ihr erleichtert. Diese Kompaktifizierung führen wir nun durch und nutzen dabei aus, dass nach Proposition 3.27 die Menge der Spitzen bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe stets durch $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gegeben ist. Wir schreiben

$$\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

für die *erweiterte obere Halbebene*. Im Rest dieses Abschnitts zeigen wir nun mit den Methoden von Abschnitt 2.6, dass der Quotient

$$X(\Gamma) := (\Gamma \backslash \mathbb{H}) \cup (\Gamma \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})) = Y(\Gamma) \cup \mathrm{Cusps}(\Gamma)$$

die Struktur einer kompakten Riemann'schen Fläche trägt, und nennen $X(\Gamma)$ eine *kompakte Modulkurve*. Für alle $N \in \mathbb{N}$ schreiben wir dabei kurz:

$$\begin{aligned} Y(N) &:= Y(\Gamma(N)), & X(N) &:= X(\Gamma(N)), \\ Y_0(N) &:= Y(\Gamma_0(N)), & X_0(N) &:= X(\Gamma_0(N)), \\ Y_1(N) &:= Y(\Gamma_1(N)), & X_1(N) &:= X(\Gamma_1(N)). \end{aligned}$$

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass sich die kompakten Modulkurven $X(\Gamma)$ im Gegensatz zu den nichtkompakten Modulkurven $Y(\Gamma)$ nicht mehr kanonisch in die Klassifikation aus Korollar 2.63 einfügen, da sie kein Quotient von $\bar{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ sind und erst mit einem solchen identifiziert werden müssen.

Wir versehen nun zunächst die erweiterte obere Halbebene $\mathbb{H}^*$ mit einer Topologie, indem wir die (Hausdorff'sche) Standardtopologie auf $\mathbb{H}$ fortsetzen. Wir wählen dafür als Umgebungsbasis im Punkt ∞ die Menge aller

$$U'_\varepsilon(\infty) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{\infty\} \quad \text{mit } \varepsilon > 0$$

und als Umgebungsbasis in einem beliebigen $s \in \mathbb{Q}$ die Menge aller

$$M \langle U'_\varepsilon(\infty) \rangle \quad \text{mit } \varepsilon > 0 \text{ und } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ mit } M \langle \infty \rangle = s.$$

Lemma 3.36. *Die erweiterte obere Halbebene $\mathbb{H}^*$ zusammen mit der oben eingeführten Topologie ist ein Hausdorff-Raum.*

Beweis. Offensichtlich folgt das Lemma, wenn wir zeigen können, dass die Elemente der oben eingeführten Umgebungsbasen der Punkte $s \in \mathbb{Q}$ gerade durch diejenigen offenen Kreisscheiben in $\mathbb{H}$ gegeben sind, die die reelle Achse im jeweils gegebenen Punkt s berühren.

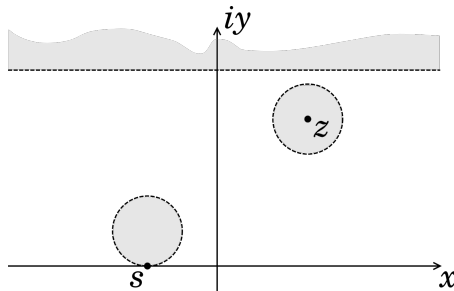


Abbildung 3.1: Je ein Element der Umgebungsbasen von $z \in \mathbb{H}$, ∞ und $s \in \mathbb{Q}$.

Man kann elementar nachweisen, dass Möbius-Transformationen die Menge der Kreise und Geraden in $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich selbst abbilden. Offensichtlich enthält für alle M mit $M\langle\infty\rangle = s \in \mathbb{Q}$ und alle $\epsilon > 0$ das φ_M -Bild von

$$g_\epsilon \cup \{\infty\} \quad \text{mit } g_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = \frac{1}{\epsilon}\} \quad (3.8)$$

den Punkt ∞ nicht und ist somit ein Kreis $k_{\epsilon,s}$ durch s . Nach Proposition 3.4 gilt $\varphi_M \in \text{Aut}(\mathbb{H})$. Da die Menge $U'_\epsilon(\infty) \setminus \{\infty\}$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{H} \setminus g_\epsilon$ ist, ist ihr φ_M -Bild daher eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{H} \setminus k_{\epsilon,s}$, also entweder das Innere oder das Äußere des Kreises $k_{\epsilon,s}$ in $\mathbb{H}$. Da die Imaginärteile von Punkten aus diesem Bild nach oben durch ϵ beschränkt sind, muss das φ_M -Bild das Kreisinnere sein und das Lemma folgt. $\square$

Lemma 3.37. Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert $\bar{\Gamma}$ via Möbius-Transformationen stetig auf $\mathbb{H}^*$ und die kanonische Projektion

$$\pi: \mathbb{H}^* \rightarrow X(\Gamma)$$

ist offen.

Beweis. Offensichtlich genügt es, das Lemma für die Aktion von $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ zu zeigen. Letztere operiert bekanntlich über Möbius-Transformationen sowohl auf $\mathbb{H}$ als auch auf $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ und somit insgesamt auf der erweiterten oberen Halbebene $\mathbb{H}^*$. Diese Aktion auf $\mathbb{H}^*$ ist stetig,

denn: Für ein beliebiges $M \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ gilt es, die Stetigkeit der Abbildung

$$\lambda_M: \begin{cases} \mathbb{H}^* & \rightarrow \mathbb{H}^*, \\ z & \mapsto M\langle z \rangle \end{cases}$$

zu zeigen. Wegen $\varphi_M \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ genügt der Nachweis der Stetigkeit in den Spitzen und wegen der Transitivität der Aktion von $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ auf der Spitzenmenge sogar der Nachweis, dass es für

jedes Element $U'(M\langle\infty\rangle)$ der Umgebungsbasis von $M\langle\infty\rangle$ ein Element $U'_\varepsilon(\infty)$ der Umgebungsbasis von ∞ mit $M\langle U'_\varepsilon(\infty)\rangle \subseteq U'(M\langle\infty\rangle)$ gibt. Letzteres folgt direkt aus unserer Definition der Topologie auf $\mathbb{H}^*$. #

Die Offenheit der kanonischen Projektion π folgt nun aus Lemma 2.55. $\square$

In Analogie zu Abschnitt 2.6 würden wir jetzt gerne zeigen, dass eine beliebige Kongruenzuntergruppe Γ diskontinuierlich auf der erweiterten oberen Halbebene operiert, um dann mit Lemma 2.56 zu folgern, dass der Quotient $X(\Gamma)$ Hausdorff'sch ist. Dieser Ansatz ist jedoch nicht möglich, da für jede Spitze $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ der Stabilisator Γ_s unendlich viele Elemente hat und Γ somit nicht diskontinuierlich auf $\mathbb{H}^*$ operiert. Wir müssen also etwas vorsichtiger argumentieren:

Lemma 3.38. *Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe Γ gelten die folgenden beiden Aussagen:*

(a) *Zu jeder Spitze s von Γ gibt es eine Umgebung $U'(s)$ von s in $\mathbb{H}^*$ mit*

$$\bar{\Gamma}_s = \{M \in \bar{\Gamma} : M\langle U'(s)\rangle \cap U'(s) \neq \emptyset\}.$$

(b) *Zu jeder Spitze s und jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{H}$ gibt es eine Umgebung $U'(s)$ von s in $\mathbb{H}^*$ mit $U'(s) \cap M\langle K\rangle = \emptyset$ für alle $M \in \bar{\Gamma}$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $s = \infty$. Für die Umgebung $U'_1(\infty)$ gilt dann einerseits

$$M\langle U'_1(\infty)\rangle = U'_1(\infty) \quad \text{für } M \in \bar{\Gamma}_\infty.$$

Andererseits gilt für jedes $M \in \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_\infty$ und jedes $z \in U'_1(\infty) \setminus \{\infty\}$ die Abschätzung $\text{Im}(M\langle z\rangle) < 1$ und mit $M\langle\infty\rangle = s \in \mathbb{Q}$ folgt

$$M\langle U'_1(\infty)\rangle \cap U'_1(\infty) = \emptyset \quad \text{für } M \in \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_\infty.$$

Insgesamt folgt Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) sei wieder ohne Einschränkung $s = \infty$. Wir betrachten ein beliebiges Kompaktum $K \subseteq \mathbb{H}$ mit natürlichen Zahlen $A, B \in \mathbb{N}$, welche

$$\frac{1}{A} < \text{Im}(z) < B \quad \text{für alle } z \in K$$

erfüllen. Für einen beliebigen Punkt $z \in K$ gilt dann

$$\begin{aligned} \text{Im}(M\langle z\rangle) &= \text{Im}(z) < B && \text{für } M \in \bar{\Gamma}_\infty, \\ \text{Im}(M\langle z\rangle) &= \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} < \frac{\text{Im}(z)}{c^2 \cdot \text{Im}(z)^2} < \frac{A}{c^2} < A && \text{für } M \in \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_\infty \end{aligned}$$

und also

$$U'_{(\max\{A,B\})^{-1}}(\infty) \cap M\langle K\rangle = \emptyset \quad \text{für alle } M \in \bar{\Gamma}.$$

Das zeigt Behauptung (b). $\square$

Proposition 3.39. *Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe Γ ist $X(\Gamma)$ ein kompakter Hausdorff-Raum.*

Beweis. Wegen Korollar 3.35 und $X(\Gamma) = Y(\Gamma) \cup \text{Cusps}(\Gamma)$ genügt es zum Nachweis der Hausdorff-Eigenschaft zu zeigen, dass sich eine gegebene Spitzenklasse bezüglich Γ sowohl von Γ -Äquivalenzklassen von Punkten in $\mathbb{H}$ als auch von anderen Spitzenklassen trennen lässt.

Ersteres erhalten wir direkt aus Lemma 3.38 (b), da hierdurch in diesem Fall Bedingung (2.3) im Beweis von Lemma 2.56 nachgewiesen ist und wir wie im Beweis dort aus der – hier durch Lemma 3.37 gegebenen – Offenheit der kanonischen Projektion folgern können, dass sich die gegebene Spitzenklasse von der Γ -Äquivalenzklasse eines beliebigen Punktes in $\mathbb{H}$ durch offene Mengen in $X(\Gamma)$ trennen lässt.

Es verbleibt zu zeigen, dass wir die Äquivalenzklassen zweier Γ -inäquivalenter Spitzen s und t trennen können. Hierbei setzen wir ohne Einschränkung $t = \infty$. Nach Lemma 3.38 (b) gibt es eine Umgebung $U'(s)$ von s mit $K_\varepsilon \cap \Gamma\langle U'(s) \rangle = \emptyset$ für ein geeignetes Kompaktum

$$K_\varepsilon := \{z \in g_\varepsilon : 0 \leq \text{Re}(z) \leq |h_\Gamma(\infty)|\} \quad \text{mit } \varepsilon > 0 \text{ und } g_\varepsilon \text{ wie in (3.8),}$$

wobei $h_\Gamma(\infty)$ die kleinste natürliche Zahl mit $T^{h_\Gamma(\infty)} \in \Gamma$ sei. Ohne Einschränkung sei dabei $U'(s)$ ein Element der von uns gewählten Umgebungsbasis von s und somit eine offene Kreisscheibe, welche die reelle Achse in s berührt. Es folgt

$$U'_\varepsilon(\infty) \cap \Gamma\langle U'(s) \rangle = \emptyset,$$

denn: Wäre dem nicht so, gäbe es ein $M \in \Gamma$ mit

$$U'_\varepsilon(\infty) \cap M\langle U'(s) \rangle \neq \emptyset.$$

Wegen $M\langle s \rangle \neq t = \infty$ ist $M\langle U'(s) \rangle$ eine zur reellen Achse tangentielle Kreisscheibe und es folgte

$$g_\varepsilon \cap M\langle U'(s) \rangle \neq \emptyset.$$

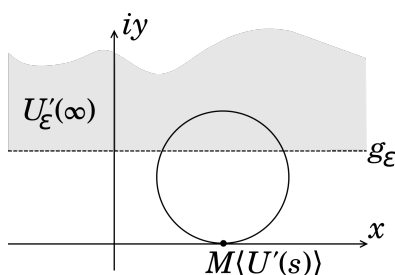


Abbildung 3.2: Mit der Halbebene $U'_\varepsilon(\infty)$ trifft die Kreisscheibe $M\langle U'(s) \rangle$ auch deren Rand g_ε .

Wegen $g_\varepsilon = \bigcup_{\tilde{M} \in \Gamma_\infty} \tilde{M}\langle K_\varepsilon \rangle$ gäbe es dann im Widerspruch zur Wahl von $U'(s)$ ein $\tilde{M} \in \Gamma_\infty$ mit

$$K_\varepsilon \cap \tilde{M}^{-1}M\langle U'(s) \rangle \neq \emptyset.$$

#

Wir haben somit Bedingung (2.3) im Beweis von Lemma 2.56 nachgewiesen und folgern wie im dortigen Beweis aus der – hier durch Lemma 3.37 gegebenen – Offenheit der kanonischen Projektion, dass sich die zu s und ∞ gehörigen Spitzenklassen bezüglich Γ durch offene Umgebungen in $X(\Gamma)$ trennen lassen.

Es verbleibt die Kompaktheit von $X(\Gamma)$ zu zeigen. Hierfür stellen wir zunächst fest, dass $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$ kompakt ist. Dem ist tatsächlich so,

denn: Jede offene Überdeckung von $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$ enthält eine Umgebung $U'(\infty)$ von ∞ und diese nach Definition der Topologie auf $\mathbb{H}^*$ eine Umgebung vom Typ $U'_\varepsilon(\infty)$ mit einem $\varepsilon > 0$. Die offensichtlich kompakte Menge $(\mathcal{F} \cup \{\infty\}) \setminus U'_\varepsilon(\infty)$ wird durch eine endliche Teilüberdeckung der ursprünglichen Überdeckung von $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$ überdeckt. Die Kompaktheit von $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$ folgt, weil wir durch Hinzunahme von $U'(\infty)$ zu dieser endlichen Teilüberdeckung eine endliche Teilüberdeckung unserer beliebigen offenen Überdeckung von $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$ gefunden haben. #

Nach Lemma 3.37 operiert $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ via Möbius-Transformationen auf $\mathbb{H}^*$, so dass mit $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$ auch jede der Mengen $M\langle\mathcal{F} \cup \{\infty\}\rangle$ mit einem $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ kompakt ist. Durchlaufen daher die Matrizen A_μ mit $\mu \in \{1, \dots, m\}$ ein Vertretersystem von $\bar{\Gamma}$ in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ wie in (3.7), so ist die endliche Vereinigung kompakter Mengen

$$\mathcal{F}_\Gamma^* := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \cup \{\infty\} \rangle$$

selbst wieder kompakt und hat unter der stetigen Projektion $\pi: \mathbb{H}^* \rightarrow X(\Gamma)$ ein kompaktes Bild. Die Kompaktheit von $X(\Gamma)$ folgt, wenn wir zeigen können, dass die Einschränkung $\pi|_{\mathcal{F}_\Gamma^*}$ von π auf $\mathcal{F}_\Gamma^*$ surjektiv ist. Dem ist aber so, da einerseits $\mathcal{F}_\Gamma = \mathcal{F}_\Gamma^* \cap \mathbb{H}$ nach Proposition 3.31 ein Vertretersystem für die Aktion von Γ auf $\mathbb{H}$ enthält und andererseits die Menge $\{A_1\langle\infty\rangle, \dots, A_m\langle\infty\rangle\}$ nach Proposition 3.28 ein Vertretersystem von Cusps Γ umfasst. $\square$

Wir geben nun einen Atlas auf $X(\Gamma)$ an und zeigen:

Satz 3.40. *Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe Γ trägt die Modulkurve $X(\Gamma)$ die Struktur einer kompakten Riemann'schen Fläche.*

Beweis. Nach Korollar 1.14 und Proposition 3.39 genügt es, einen beliebigen eindimensionalen komplexen Atlas auf $X(\Gamma)$ anzugeben, um zu zeigen, dass $X(\Gamma)$ eine kompakte eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist. Wegen $X(\Gamma) = Y(\Gamma) \cup \mathrm{Cusps}(\Gamma)$ und, da $Y(\Gamma)$ nach Korollar 3.35 eine Riemann'sche Fläche ist, reicht es dafür aus, einen Atlas von $Y(\Gamma)$ um Karten in einer fest gewählten Umgebung einer jeden Spitzenklasse in $\mathrm{Cusps}(\Gamma)$ zu ergänzen.

In Analogie zum Beweis von Satz 2.53 gehen wir wie folgt vor: Nach Lemma 3.38 (a) gibt es für jedes $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ eine offene Umgebung $U'(s) \subseteq \mathbb{H}^*$ mit

$$\Gamma_s = \{M \in \Gamma : M\langle U'(s) \rangle \cap U'(s) \neq \emptyset\},$$

so dass durch

$$U_{\Gamma\langle s \rangle} := \Gamma_s \backslash U'(s) = \{\Gamma_s \langle z \rangle : z \in U'(s)\} \subseteq X(\Gamma)$$

eine offene Umgebung von $\pi(s)$ in $X(\Gamma)$ gegeben ist. Auf dieser Umgebung definieren wir für ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle s \rangle = \infty$ die Karte

$$\psi_{\Gamma\langle s \rangle} := e \circ \lambda_{\tilde{h}_{\Gamma}(s)^{-1}} \circ \varphi_M \circ \pi|_{U'(s)}^{-1} : \begin{cases} U_{\Gamma\langle s \rangle} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ \Gamma_s \langle z \rangle & \mapsto e^{2\pi i M \langle z \rangle / \tilde{h}_{\Gamma}(s)}, \end{cases} \quad (3.9)$$

wobei $\lambda_{\tilde{h}_{\Gamma}(s)^{-1}}$ die Multiplikation mit $\tilde{h}_{\Gamma}(s)^{-1}$ bezeichne⁵¹ und e die Zuordnung $e: z \mapsto e^{2\pi iz}$. Nach Konstruktion ist diese ein wohldefinierter Homöomorphismus auf eine geeignete offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und hängt nicht von der Wahl von M ab. In Anlehnung an den Beweis von Satz 2.53 nennen wir derartig definierte Karten ab sofort auch **Karten vom dritten Typ**.

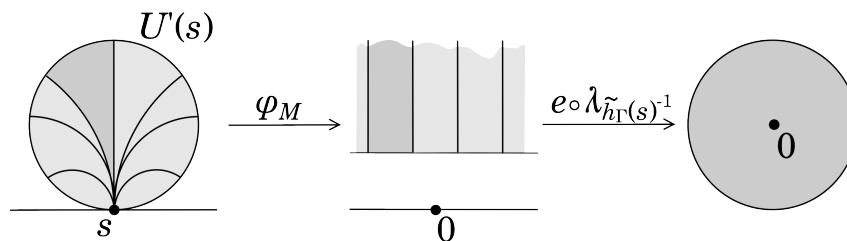


Abbildung 3.3: Der dunkte Bereich symbolisiert ein Vertretersystem modulo Γ_s .

Wir haben nun gezeigt, dass $X(\Gamma)$ eine kompakte eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist. Diese Mannigfaltigkeit ist aber auch zusammenhängend,

denn: Wäre $X(\Gamma)$ nicht zusammenhängend, so gäbe es offene Teilmengen $U_1, U_2 \subseteq X(\Gamma)$ mit

$$X(\Gamma) = U_1 \sqcup U_2 \quad \text{und somit} \quad \mathbb{H}^* = \pi^{-1}(U_1) \sqcup \pi^{-1}(U_2).$$

Wegen der Stetigkeit der Projektion $\pi: \mathbb{H}^* \rightarrow X(\Gamma)$ ist letzteres eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{H}^*$ in offene Teilmengen, die es nicht geben darf, weil $\mathbb{H}^*$ als offensichtlich wegzusammenhängende Menge auch zusammenhängend ist. #

Zum Beweis, dass $X(\Gamma)$ eine Riemann'sche Fläche ist, verbleibt die Biholomorphie des von uns konstruierten Atlases zu zeigen. Es gilt:

- Da $Y(\Gamma)$ eine Riemann'sche Fläche ist, sind Karten vom ersten bzw. zweiten Typ biholomorph verträglich mit Karten vom ersten bzw. zweiten Typ.
- Da nach den Propositionen 3.30 und 3.28 die Mengen der Γ -Äquivalenzklassen bezüglich Γ elliptischer bzw. parabolischer Punkte in $\mathbb{H}^*$ beide endlich sind, können wir ohne

⁵¹Die Zahl $\tilde{h}_{\Gamma}(s)$ bezeichnet die sogenannte **Breite** der Spitze s bezüglich der Gruppe $\bar{\Gamma}$. Um sie zu bestimmen, wählt man eine beliebige Matrix $M \in \bar{\Gamma}$ mit $M\langle \infty \rangle = s$ und definiert $\tilde{h}_{\Gamma}(s)$ als die kleinste natürliche Zahl h , für die T^h in $M^{-1} \cdot \bar{\Gamma}_s \cdot M$ enthalten ist.

Einschränkung annehmen, dass die Definitionsbereiche der zugehörigen Karten auf $X(\Gamma)$ disjunkt sind und sie ansonsten geeignet verkleinern. Da die Γ -Äquivalenzklassen bezüglich Γ elliptischer Punkte in $\mathbb{H}$ genau diejenigen Punkte sind, um die wir Karten vom zweiten Typ konstruiert haben, und die Spitzenklassen bezüglich Γ genau diejenigen Punkte sind, um die wir Karten vom dritten Typ konstruiert haben, müssen wir daher die biholomorphe Verträglichkeit von Karten vom zweiten Typ mit Karten vom dritten Typ nicht eigens überprüfen. Analoges gilt für die biholomorphe Verträglichkeit von Karten vom dritten Typ untereinander.

- Zum Nachweis der biholomorphen Verträglichkeit von Karten vom ersten Typ mit Karten vom dritten Typ betrachten wir mit $\psi_{\Gamma\langle z \rangle}$ für ein $z \in \mathbb{H}$ mit $|\Gamma_z| = \{\pm I_2\}$ eine Karte vom ersten Typ und mit $\psi_{\Gamma\langle s \rangle}$ für eine Spitze s eine Karte vom dritten Typ. Dann gilt in der jeweils bei der Konstruktion verwendeten Notation auf $\psi_{\Gamma\langle z \rangle}(U'(s) \cap U_z)$

$$\begin{aligned}\psi_{\Gamma\langle s \rangle} \circ \psi_{\Gamma\langle z \rangle}^{-1} &= e \circ \lambda_{\tilde{h}_{\Gamma}(s)^{-1}} \circ \varphi_M \circ \pi|_{U'(s)}^{-1} \circ \pi|_{U_z} \circ \varphi_z^{-1} \\ &= e \circ \lambda_{\tilde{h}_{\Gamma}(s)^{-1}} \circ \varphi_M,\end{aligned}$$

wobei wir ausnutzen, dass φ_z die Identität ist und sich die Terme mit π wegheben. Die Behauptung folgt, da

$$e \circ \lambda_{\tilde{h}_{\Gamma}(s)^{-1}} \circ \varphi_M: w \mapsto e^{2\pi i M\langle w \rangle / \tilde{h}_{\Gamma}(s)}$$

offensichtlich biholomorph ist.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass $X(\Gamma)$ tatsächlich eine kompakte Riemann'sche Fläche ist. $\square$

Wir werden die kompakten Modulkurven in Abschnitt 4.8 noch einmal genauer betrachten und mit dem Geschlecht eine topologische Invariante von ihnen bestimmen.

3.7 Modulfunktionen

Abschließend für dieses Kapitel untersuchen wir in diesem Abschnitt die meromorphen bzw. holomorphen Funktionen auf den in Abschnitt 3.6 eingeführten Modulkurven $Y(\Gamma)$ und $X(\Gamma)$ für Kongruenzuntergruppen Γ . Wir beginnen mit den nichtkompakten Modulkurven:

Proposition 3.41. *Seien Γ eine Kongruenzuntergruppe und $\pi: \mathbb{H} \rightarrow Y(\Gamma)$ die kanonische Projektion. Dann induziert die Zuordnung $\pi^*: \bar{f} \mapsto \bar{f} \circ \pi$ die folgenden $\mathbb{C}$ -Algebrenisomorphismen:*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(Y(\Gamma)) &\cong \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{H}) : f(A\langle z \rangle) = f(z) \text{ für alle } A \in \Gamma\}, \\ \mathcal{O}(Y(\Gamma)) &\cong \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{H}) : f(A\langle z \rangle) = f(z) \text{ für alle } A \in \Gamma\}.\end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen nur die Behauptung für die holomorphen Funktionen; der Beweis für die meromorphen Funktionen funktioniert sehr ähnlich. Zunächst induziert π^* offensichtlich einen $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{O}(Y(\Gamma))$ nach $\mathcal{O}(\mathbb{H})$. Da jede Funktion $\bar{f} \circ \pi$ im Bild von π^* konstruktionsbedingt $(\bar{f} \circ \pi)(A\langle z \rangle) = (\bar{f} \circ \pi)(z)$ erfüllt, erhalten wir so eine Abbildung von $\mathcal{O}(Y(\Gamma))$ in die rechte Seite der Behauptung, die wir wieder π^* nennen. Aufgrund der

Nichtkonstanz von π ist diese injektiv. Die Proposition folgt, wenn wir auch die Surjektivität von π^* zeigen können. Sei dafür $f \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ invariant unter Möbius-Transformationen φ_A mit $A \in \Gamma$. Dann können wir durch $\bar{f} \circ \pi := f$ wohldefiniert eine Funktion $\bar{f}: Y(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ angeben. Es gilt zu zeigen, dass $\bar{f}$ holomorph und somit ein Urbild von f unter π^* ist. Dem ist aber so,

denn: Nach Satz 2.53 ist π eine holomorphe Abbildung mit $\pi(z_0)\text{-ord}(\pi; z_0) = |\bar{\Gamma}_{z_0}|$ für alle $z_0 \in \mathbb{H}$. Nach Satz 1.40 gibt es daher für jedes $z_0 \in \mathbb{H}$ biholomorphe Karten $\varphi: U \rightarrow V$ von $\mathbb{H}$ und $\psi: \pi(U) \rightarrow V'$ von $Y(\Gamma)$ mit $\varphi(z_0) = 0 = \psi(\pi(z_0))$, so dass für die Abbildung

$$\Pi := \psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}: \begin{cases} V & \rightarrow V', \\ q & \mapsto q^{|\bar{\Gamma}_{z_0}|} \end{cases}$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ & \downarrow \pi & & & \downarrow \Pi \\ z & \downarrow & \pi(U) & \xrightarrow{\psi} & V' \\ \pi(z) & & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} q \\ \downarrow \\ q^{|\bar{\Gamma}_{z_0}|} \end{array}$$

kommutiert. Daher und aufgrund der Möbius-Invarianz von f erfüllt die holomorphe Funktion

$$(f \circ \varphi^{-1})(e^{\frac{2\pi i k}{|\bar{\Gamma}_{z_0}|}} \cdot q) = (f \circ \varphi^{-1})(q) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

und besitzt daher eine Laurent-Entwicklung der Form

$$(f \circ \varphi^{-1})(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (q^{|\bar{\Gamma}_{z_0}|})^n.$$

Deren Laurent-Koeffizienten definieren eine holomorphe Funktion

$$g(q) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n,$$

für die wir unter Ausnutzung der Kommutativität des Diagramms

$$(\bar{f} \circ \pi) \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} = g \circ \Pi = g \circ (\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1})$$

erhalten. Hieraus folgt $\bar{f} = g \circ \psi$ und somit die Holomorphie von $\bar{f}$ auf U . #

Es folgt die Surjektivität von π^* und somit die Proposition. □

Da es auf der kompakten Modulkurve $X(\Gamma)$ nach Korollar 1.53 keine nichtkonstanten holomorphen Funktionen gibt, untersuchen wir dort nur die meromorphen Funktionen und führen dafür einen neuen Begriff ein:

Definition 3.42. Sei $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ eine Spitze bezüglich einer Kongruenzuntergruppe Γ und sei $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle s \rangle = \infty$ beliebig. Dann heißt eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ **meromorph in der Spitze** s , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, für das die folgenden Bedingungen gelten:

- (i) Die Funktion f ist eingeschränkt auf die punktierte Umgebung $M^{-1}\langle U'_\varepsilon(\infty) \rangle \setminus \{s\}$ von s holomorph.
- (ii) Es gibt ein $m \in \mathbb{Z}$ derart, dass es zu jedem $\delta \in (0, \varepsilon)$ ein C_δ gibt mit

$$|f(M\langle z \rangle)| \leq C_\delta \cdot e^{-2\pi m \cdot \text{Im}(M\langle z \rangle)/\tilde{h}_\Gamma(s)} \quad \text{für alle } z \in M^{-1}\langle U'_{\varepsilon-\delta}(\infty) \rangle \setminus \{s\}.$$

Proposition 3.43. Seien Γ eine Kongruenzuntergruppe und $\pi: \mathbb{H}^* \rightarrow X(\Gamma)$ die kanonische Projektion. Dann induziert die Zuordnung $\pi^*|_{\mathbb{H}}: \bar{f} \mapsto (\bar{f} \circ \pi)|_{\mathbb{H}}$ einen $\mathbb{C}$ -Algebrenisomorphismus

$$\mathcal{M}(X(\Gamma)) \cong \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{H}) : f(A\langle z \rangle) = f(z) \text{ für alle } A \in \Gamma \text{ und } f \text{ ist meromorph in allen Spitzen}\}.$$

Die Funktionen auf der rechten Seite heißen auch die **Modulfunktionen** bezüglich Γ .

Beweis. Zunächst lässt sich jedes $\bar{f} \in \mathcal{M}(X(\Gamma))$ auf $Y(\Gamma)$ einschränken. Nach Proposition 3.41 erfüllt dann $\pi^*|_{\mathbb{H}}(\bar{f}) = \pi^*(\bar{f}|_{Y(\Gamma)}) \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ die Invarianzeigenschaft

$$\pi^*|_{\mathbb{H}}(\bar{f})(A\langle z \rangle) = \pi^*|_{\mathbb{H}}(\bar{f})(z) \quad \text{für alle } A \in \Gamma.$$

Wir erhalten so einen injektiven $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus $\pi^*|_{\mathbb{H}}$ von $\mathcal{M}(X(\Gamma))$ in die rechte Seite von Proposition 3.41. Tatsächlich ist das Bild von $\pi^*|_{\mathbb{H}}$ sogar in der Menge der Modulfunktionen bezüglich Γ enthalten,

denn: Seien dafür $\bar{f} \in \mathcal{M}(X(\Gamma))$, $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ eine beliebige Spitze, $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit $M\langle s \rangle = \infty$ und

$$\psi := \psi_{\Gamma\langle s \rangle}: U_{\Gamma\langle s \rangle} \rightarrow \mathbb{C}$$

eine beliebige Karte um $\pi(s)$ vom dritten Typ. Dann ist $\bar{f} \circ \psi^{-1}$ auf einer ausreichend kleinen punktierten Kreisscheibe $\dot{U}$ um $\psi(\pi(s))$ holomorph und $\psi^{-1}(\dot{U})$ ist eine punktierte Umgebung von $\pi(s)$, auf der $\bar{f}$ holomorph ist. Da die Topologie von $\mathbb{H}^*$ Hausdorff'sch ist und die bezüglich Γ elliptischen Punkte in $\mathbb{H}$ diskret liegen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass kein solcher Punkt im Urbild von $\psi^{-1}(\dot{U})$ unter π enthalten ist. Nach Bemerkung 2.17 ist dann die Einschränkung von π auf dieses Urbild eine unverzweigte Überlagerung, nach Proposition 2.19 ein lokaler Homöomorphismus und nach dem Biholomorphiekriterium 1.44 somit in einer punktierten Umgebung $U'_\varepsilon(s) \setminus \{s\}$ von s auf $\mathbb{H}^*$ biholomorph. Zusammen mit der Holomorphie von $\bar{f}$ ergibt sich die Holomorphie von $\pi^*|_{\mathbb{H}}(\bar{f})$ in einer kleinen punktierten Umgebung von s und insbesondere Eigenschaft (i) aus Definition 3.42.

$$\begin{array}{ccc} U'(s) \setminus \{s\} & \subseteq & \mathbb{H} \\ \pi \downarrow & & \searrow \pi^*|_{\mathbb{H}}(\bar{f}) \\ U_{\Gamma\langle s \rangle} \setminus \{\pi(s)\} & \subseteq & Y(\Gamma) \xrightarrow{\bar{f}|_{Y(\Gamma)}} \overline{\mathbb{C}} \\ \psi \downarrow & & \\ \mathbb{C} & & \end{array}$$

Auf jeder punktierten Kreisscheibe $\dot{U} \subseteq \mathbb{C}$ wie oben lässt sich $\bar{f} \circ \psi^{-1}$ in eine Laurent-Reihe vom Typ $\sum_{n=m}^{\infty} a_n q^n$ entwickeln, wobei $m \in \mathbb{Z}$ die Null- bzw. Polstellenordnung von $\bar{f} \circ \psi^{-1}$ im Entwicklungspunkt bezeichnet. Nach Konstruktion von ψ in (3.9) übersetzt sich dies in die Reihendarstellung

$$\pi^*(\bar{f})(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n M(z)}{h_{\Gamma}(s)}}$$

in einer kleinen punktierten Umgebung von s . Aus dieser Darstellung lässt sich leicht Eigenschaft (ii) aus Definition 3.42 ablesen. #

Da die Modulfunktionen offensichtlich eine $\mathbb{C}$ -Unteralgebra der rechten Seite von Proposition 3.41 bilden, folgt die Proposition nun, wenn wir auch die Surjektivität von $\pi^*|_{\mathbb{H}}$ zeigen können. Sei dafür f eine Modulfunktion bezüglich Γ . Nach Proposition 3.41 gibt es dann ein $\bar{f} \in \mathcal{M}(Y(\Gamma))$ mit $\pi^*(\bar{f}) = f$. Dieses lässt sich zu einer Funktion $\bar{f} \in \mathcal{M}(X(\Gamma))$ mit $\pi^*|_{\mathbb{H}}(\bar{f}) = f$ fortsetzen,

denn: Sei dafür wieder $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ eine beliebige Spitze und $U'(s)$ eine offene Umgebung von s , für die $\psi: U_{\Gamma\langle s \rangle} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U_{\Gamma\langle s \rangle} = \Gamma_s \setminus U'(s)$ eine Karte um $\pi(s)$ vom dritten Typ ist. Nach Voraussetzung ist f in s meromorph und wir können nach Definition 3.42 ohne Einschränkung annehmen, f sei in $U'(s) \setminus \{s\}$ holomorph und erfülle die Wachstumsbedingungen aus Definition 3.42 (ii). Mit dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 1.28 folgt, dass sich

$$f \cdot e^{-\frac{2\pi i m M(z)}{h_{\Gamma}(s)}}$$

holomorph auf ganz $U'(s)$ fortsetzen lässt, wenn $m \in \mathbb{Z}$ die Null- bzw. Polstellenordnung von f in s bezeichnet. Nach Definition von ψ liefert dies eine Laurent-Reihe vom Typ $\sum_{n=m}^{\infty} a_n q^n$ für $\bar{f} \circ \psi^{-1}$ und damit die Meromorphie von $\bar{f}$ in $\pi(s)$ und damit insgesamt auf ganz $X(\Gamma)$. #

□

3.8 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Beenden Sie den Beweis von Proposition 3.9.

Aufgabe 3.2. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sowie φ eine Möbius-Transformation mit $\varphi(z_1) = 0$ und $\varphi(z_2) = \infty$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) φ ist von der Form

$$\varphi(z) = c \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Die Urbilder unter φ der Geraden durch $z = 0$ sind verallgemeinerte Kreise durch z_1 und z_2 .

Aufgabe 3.3. Sei $s \in \mathbb{C}$ und sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein hyperbolisches Element mit $M\langle s \rangle = s$. Zeigen Sie, dass dann bereits $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt.

Aufgabe 3.4. Seien $M, M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ mit $MM' = M'M$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist M parabolisch, so auch M' .
- (b) Gilt $M\langle z \rangle = z$ für ein $z \in \overline{\mathbb{C}}$, so auch $M'\langle z \rangle = z$.

Aufgabe 3.5. Zeigen Sie, dass für $N \in \mathbb{N}$ und $p \nmid N$ prim durch

$$\Gamma := \Gamma_1(N) \cap \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}^{-1} \cdot \Gamma_1(N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \right)$$

eine Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gegeben ist.

Aufgabe 3.6. Sei N eine natürliche Zahl. In dieser Aufgabe bestimmen wir den Index der Gruppe $\Gamma_0(N)$ in der vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Hierfür betrachten wir zunächst die Menge

$$P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} c + N\mathbb{Z} \\ d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 : \text{es gibt } a + N\mathbb{Z}, b + N\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \right. \\ \left. \text{mit } (a + N\mathbb{Z})(d + N\mathbb{Z}) - (b + N\mathbb{Z})(c + N\mathbb{Z}) = 1 + N\mathbb{Z} \right\}$$

und lassen die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ via Skalarmultiplikation darauf operieren. Diese Aktion definiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, deren Klassen durch die Bahnen

$$(c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z}) := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \cdot \begin{pmatrix} c + N\mathbb{Z} \\ d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \begin{pmatrix} c + N\mathbb{Z} \\ d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$$

gegeben sind. Für die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen schreiben wir

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) := P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) / \sim.$$

Zeigen Sie nun die folgenden Aussagen:

- (a) Die Abbildung

$$\pi_0: \begin{cases} \Gamma_0(N) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \\ \Gamma_0(N) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto (c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z}) \end{cases}$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

- (b) Es gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{(c+N\mathbb{Z}:d+N\mathbb{Z}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})} \Gamma_0(N) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei c, d so gewählt seien, dass $(c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z})$ ein Vertretersystem von $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ durchlaufe und a, b zu jeder Vorgabe von c, d beliebig so gewählt seien, dass $ad - bc = 1$ erfüllt ist.

- (c) Eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **schwach multiplikativ**, wenn

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(a, b) = 1$$

gilt. Stimmen zwei schwach multiplikative Funktionen auf allen Primpotenzen überein, so sind sie bereits identisch.

- (d) Für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl r gilt schließlich

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{j=0}^{p^r-1} \Gamma_0(p^r) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix} \sqcup \bigsqcup_{j=0}^{p^{r-1}-1} \Gamma_0(p^r) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & pj \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Es folgt

$$[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = |\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Aufgabe 3.7. Zeigen Sie

$$\text{Cusps}(\Gamma_0(2)) = \{\Gamma_0(2)\langle\infty\rangle, \Gamma_0(2)\langle 0 \rangle\}.$$

Hinweis: Benutzen Sie (3.10).

Aufgabe 3.8. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass

$$\Gamma_0(2)\langle \frac{1+i}{2} \rangle$$

die einzige Klasse bezüglich $\Gamma_0(2)$ elliptischer Punkte ist. Zeigen Sie dafür die folgenden Aussagen:

- (a) Die Menge

$$\left\{ i, \varrho, -\bar{\varrho}, \frac{1+i}{2}, \frac{1-\bar{\varrho}}{3} \right\}$$

enthält ein Vertretersystem der Klassen bezüglich $\Gamma_0(2)$ elliptischer Elemente.

Hinweis: Benutzen Sie (3.10).

- (b) Für jeden dieser Punkte gilt es nun zu untersuchen, ob es ein elliptisches Element $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ gibt, das diesen fixiert. Wir stellen zunächst fest: Für jedes solche elliptische Element sind a, b ungerade und es gilt $d = -a$.
- (c) Zeigen Sie, dass die Punkte $i, \varrho, -\bar{\varrho}, \frac{1-\bar{\varrho}}{3}$ jeweils von keinem elliptischen Element von $\Gamma_0(2)$ fixiert werden, und geben Sie ein elliptisches Element von $\Gamma_0(2)$ an, das $\frac{1+i}{2}$ fixiert.

Aufgabe 3.9. Zeigen Sie für eine natürliche Zahl N die folgenden Aussagen:

- (a) Ist $N > 3$, so gibt es keine bezüglich $\Gamma_1(N)$ elliptischen Punkte in $\mathbb{H}$.
- (b) Ist N durch eine Primzahl p mit $p \equiv -1 \pmod{12}$ teilbar, so gibt es keine bezüglich $\Gamma_0(N)$ elliptischen Punkte in $\mathbb{H}$.

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für $N = p \equiv -1 \pmod{12}$.

Aufgabe 3.10. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Menge $\mathcal{M}(X(1))$ der Modulfunktionen auf $X(1)$ mit dem Körper der rationalen Funktionen $\mathbb{C}(j)$ in der in Aufgabe 1.11 eingeführten j -Invariante $j(\tau)$ übereinstimmt. Zeigen Sie dafür die folgenden Aussagen:

- (a) Die j -Invariante $j(\tau)$ induziert via $j = (J \circ \pi)|_{\mathbb{H}}$ eine Modulfunktion $J \in \mathcal{M}(X(1))$, wobei $\pi: \mathbb{H}^* \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^* = X(1)$ die kanonische Projektion bezeichnet.

Hinweis: Sie dürfen an dieser Stelle und in den weiteren Aufgabenteilen verwenden, dass sich die Diskriminante $\Delta(\tau)$ als 1-periodische Funktion in eine Fourier-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ entwickeln lässt und dabei $a_0 = 0$ sowie $a_1 \neq 0$ gilt. Um letzteres zu zeigen, muss man die Fourier-Reihen der Eisenstein-Reihen G_k kontrollieren, was nicht sehr schwer, aber für uns hier zu aufwändig ist.

- (b) Für ein beliebiges $0 \neq f \in \mathcal{M}(X(1))$ gilt

$$\sum_z \frac{0\text{-ord}(f; z) - \infty\text{-ord}(f; z)}{|\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}_z|} = 1,$$

wobei z ein Vertretersystem modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ der Nullstellen von f in $\mathbb{H}$ durchläuft.

Hinweis: Das funktioniert mit einem ähnlichen Integral wie im Beweis des **Satzes vom Null- und Polstellen zählenden Integral**: Genauer bestimmt man den Wert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

auf zwei Weisen, wobei γ den einfach positiv durchlaufenen Rand von $\mathcal{F}_c := \{z \in \mathcal{F} : \text{Im}(z) \leq c\}$ bezeichnet, der um kleine Kreisebögen um die Punkte $\rho, i, -\bar{\rho}$ und um mögliche Nullstellen auf dem Bild von γ angepasst wurde. Einmal geschieht dies mit dem Residuensatz und einmal durch direktes Ausrechnen aller Teilintegrale.

- (c) Die Modulfunktion J ist injektiv und gibt mit Aufgabe 1.12 somit eine biholomorphe Äquivalenz zwischen der Modulkurve $X(1)$ und der Riemann'schen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$.
- (d) Folgern Sie $\mathcal{M}(X(1)) = \mathbb{C}(j)$ und benutzen Sie dafür Aufgabe 1.6.



Differentialformen

Nachdem wir in den bisherigen Kapiteln Riemann'sche Flächen und Abbildungen zwischen diesen studiert haben, werden wir in diesem Kapitel Differentialformen auf Riemann'schen Flächen einführen, um klassisch analytische Ideen behandeln zu können. Um dabei konsistent mit Kartenwechseln umgehen zu können, führen wir in Abschnitt 4.1 zunächst den Begriff der Garbe ein. Vermittels Garbenkohomologie führen wir das Geschlecht einer kompakten Riemann'schen Fläche als eine topologische Invariante ein, leiten den Satz von Riemann-Roch⁵² her und geben abschließend mit seiner Hilfe eine Formel für das Geschlecht von Modulkurven an.

4.1 Garben

In der Funktionentheorie hat man es häufig mit Funktionen in wechselnden Definitionsbereichen zu tun. Der Begriff der Garbe gibt einen geeigneten formalen Rahmen zur Behandlung dieser Situation:

Definition 4.1. Eine **Prägarbe** abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ ist ein Paar $(\mathcal{F}, \varrho)$ aus

- einer Familie $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{O}}$ abelscher Gruppen,
- einer Familie $\varrho = (\varrho_{\tilde{U}}^U)_{\tilde{U} \subseteq U \in \mathcal{O}}$ von **Beschränkungshomomorphismen** genannten Gruppenhomomorphismen $\varrho_{\tilde{U}}^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\tilde{U})$

mit den Eigenschaften

- (i) $\varrho_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ für alle $U \in \mathcal{O}$,
- (ii) $\varrho_{\tilde{\tilde{U}}}^{\tilde{U}} \circ \varrho_{\tilde{U}}^U = \varrho_{\tilde{U}}^U$ für alle $\tilde{\tilde{U}} \subseteq \tilde{U} \subseteq U \in \mathcal{O}$.

⁵²Gustav Adolph Roch (1839–1866)

Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ heißen **(lokale) Schnitte** von $\mathcal{F}$ über U , die Elemente von $\mathcal{F}(X)$ **globale Schnitte**. Statt $(\mathcal{F}, \varrho)$ schreiben wir oft einfacher $\mathcal{F}$ für die Prägarbe und notieren die Beschränkungs-homomorphismen als $f|_{\tilde{U}} := \varrho_{\tilde{U}}^U(f)$ für alle $\tilde{U} \subseteq U \in \mathcal{O}$ und alle Schnitte $f \in \mathcal{F}(U)$.

Analog zu Definition 4.1 lassen sich auch Prägarben von Mengen, Vektorräumen, Ringen, usw. definieren.

Beispiel 4.2. Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{C}(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Wählen wir dann für alle Paare $\tilde{U} \subseteq U$ offener Teilmengen von X als Beschränkungsabbildung $\varrho_{\tilde{U}}^U: \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{U})$ die übliche Einschränkung $f \mapsto f|_{\tilde{U}}$ stetiger Funktionen, so ist $(\mathcal{C}, \varrho)$ eine Prägarbe von Vektorräumen auf X .

Definition 4.3. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt eine **Garbe**, wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jede Familie offener Teilmengen $U_i \subseteq U$ mit i aus einer Indexmenge I und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ die folgenden **Garbenaxiome** erfüllt sind:

(G₁) Für je zwei $f, g \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle $i \in I$ gilt bereits $f = g$.

(G₂) Für jede Familie $(f_i)_{i \in I}$ mit $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ und der Bedingung

$$f_i|_{(U_i \cap U_j)} = f_j|_{(U_i \cap U_j)} \quad \text{für alle } i, j \in I$$

gibt es ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Bemerkung 4.4. (a) Das Element f , das nach (G₂) existiert, ist nach (G₁) eindeutig bestimmt.

(b) Anwendung von (G₁) und (G₂) auf den Fall $U = \emptyset = \bigcup_{i \in I} U_i$ ergibt, dass $\mathcal{F}(\emptyset)$ genau ein Element besitzt.

Beispiel 4.5. (a) Für jeden topologischen Raum X ist die Prägarbe $\mathcal{C}$ aus Beispiel 4.2 eine Garbe. Die Gültigkeit der Garbenaxiome ist dabei trivial.

(b) Sei X eine Riemann'sche Fläche und sei $\mathcal{O}(U)$ der Ring der auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ holomorphen Funktionen. Wählen wir dann für alle Paare $\tilde{U} \subseteq U$ offener Teilmengen von X als Beschränkungsabbildung die übliche Einschränkung $f \mapsto f|_{\tilde{U}}$ holomorpher Funktionen, so ist $\mathcal{O}$ wie in (a) eine Garbe, die **Garbe der holomorphen Funktionen** auf X . Analog ist die **Garbe $\mathcal{M}$ der meromorphen Funktionen** auf X definiert.

(c) Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ sei $\mathcal{C}^\infty(U)$ die $\mathbb{C}$ -Algebra der glatten, also beliebig oft total reell differenzierbaren Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Allgemeiner heißt für eine offene Teilmenge U einer Riemann'schen Fläche X eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ **glatt**, falls es für jede Karte $\varphi: U' \rightarrow V'$ von U eine – dann eindeutige – Funktion $g \in \mathcal{C}^\infty(V')$ mit $f = g \circ \varphi$ gibt. Setzen wir nun $\mathcal{C}^\infty(U)$ als die $\mathbb{C}$ -Algebra der glatten Funktionen auf U , so definiert

$$\mathcal{C}^\infty: U \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$$

eine Garbe auf X , die **Garbe der glatten Funktionen**.

- (d) Seien X ein topologischer Raum und G eine nichttriviale abelsche Gruppe. Dann ist auf X wie folgt eine Prägarbe $\mathcal{G}$ definiert: Für eine nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ gelte $\mathcal{G}(U) := G$ und es sei weiter $\mathcal{G}(\emptyset) := 0$. Besitzt X nun zwei disjunkte nichtleere offene Teilmengen U_1, U_2 , so ist $\mathcal{G}$ keine Garbe,

denn: Seien $g_1 \neq g_2 \in G$ zwei voneinander verschiedene Elemente. Wegen $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist dann $g_1|_{(U_1 \cap U_2)} = g_2|_{(U_1 \cap U_2)}$, es gibt aber kein $g \in \mathcal{G}(U_1 \cup U_2) = G$ mit $g|_{U_1} = g_1$ und $g|_{U_2} = g_2$. Somit ist das zweite Garbenaxiom (G_2) verletzt. $\#$

- (e) Wir können die Prägarbe $\mathcal{G}$ aus (d) leicht zu einer Garbe $\tilde{\mathcal{G}}$ abändern. Dafür sei $\tilde{\mathcal{G}}(U)$ für jede offene Menge $U \subseteq X$ die abelsche Gruppe aller lokalkonstanten Abbildungen $g: U \rightarrow G$ – für jede nichtleere, zusammenhängende offene Teilmenge $U \subseteq X$ gilt dann offensichtlich $\tilde{\mathcal{G}}(U) = G$. Für $\tilde{U} \subseteq U$ sei weiter $\tilde{\mathcal{G}}(U) \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}(\tilde{U})$ die übliche Einschränkungsabbildung. Man sieht leicht, dass $\tilde{\mathcal{G}}$ dann eine Garbe auf X ist. Wir nennen sie die **Garbe der lokalkonstanten Funktionen mit Werten in G** und schreiben kurz $\tilde{\mathcal{G}} =: G$.

Definition 4.6. Seien nun $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf einem topologischen Raum X und $x_0 \in X$ ein Punkt. Für zwei offene Umgebungen $U_1, U_2 \subseteq X$ von x_0 sowie Elemente $f \in \mathcal{F}(U_1)$ und $g \in \mathcal{F}(U_2)$ sagen wir dann, es gelte $f \stackrel{x_0}{\sim} g$, wenn es eine offene Menge $x_0 \in \tilde{U} \subseteq U_1 \cap U_2$ mit $f|_{\tilde{U}} = g|_{\tilde{U}}$ gibt. Man prüft leicht nach, dass durch $\stackrel{x_0}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf der formal disjunkten Vereinigung

$$\bigsqcup_{x_0 \in U \text{ offen}} \mathcal{F}(U)$$

gegeben ist. Die Menge der Äquivalenzklassen

$$\mathcal{F}_{x_0} := \varinjlim_{x_0 \in U \text{ offen}} \mathcal{F}(U) := \left(\bigsqcup_{x_0 \in U \text{ offen}} \mathcal{F}(U) \right) / \stackrel{x_0}{\sim}$$

heißt dann der **Halm** von $\mathcal{F}$ im Punkt x_0 . Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen (bzw. Vektorräumen, Ringen), so ist auch $\mathcal{F}_{x_0}$ eine abelsche Gruppe (bzw. ein Vektorraum, Ring).

Definition 4.7. In der Situation von Definition 4.6 betrachten wir eine feste offene Umgebung U von x_0 und definieren

$$\varrho_{x_0}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{x_0}$$

als die Abbildung, die jedem Element $f \in \mathcal{F}(U)$ seine Äquivalenzklasse modulo $\stackrel{x_0}{\sim}$ zuweist. Das Bild $\varrho_{x_0}(f)$ von f unter dieser Abbildung heißt dann der **Keim** von f in x_0 .

Beispiel 4.8. Seien $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Dann wird ein **holomorpher Funktionskeim** $\varphi \in \mathcal{O}_{z_0}$ durch eine holomorphe Funktion in einer offenen Umgebung von z_0 repräsentiert und lässt sich also in eine Taylor-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit positivem Konvergenzradius entwickeln. Zwei holomorphe Funktionen in Umgebungen von z_0 bestimmen genau dann denselben Keim in z_0 , wenn sie dieselbe Taylor-Entwicklung um z_0 besitzen – insbesondere ist für einen gegebenen Funktionskeim $\varphi \in \mathcal{O}_{z_0}$ der Funktionswert $\varphi(z_0) \in \mathbb{C}$ unabhängig vom Repräsentanten. Es besteht somit ein Isomorphismus zwischen dem Halm $\mathcal{O}_{z_0}$ und dem Ring der konvergenten Potenzreihen um z_0 mit komplexen Koeffizienten. Analog ist der Ring $\mathcal{M}_{x_0}$ der meromorphen Funktionskeime in x_0 isomorph zum Ring der konvergenten Laurent-Reihen

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

um z_0 mit komplexen Koeffizienten und endlichem Hauptteil.

Unmittelbar aus dem Garbenaxiom (G_1) erhalten wir nun:

Lemma 4.9. Seien $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Ein Schnitt $f \in \mathcal{F}(U)$ ist genau dann gleich Null, wenn alle Keime $\varrho_x(f) \in \mathcal{F}_x$ mit $x \in U$ verschwinden.

Für einen topologischen Raum X und eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X schreiben wir

$$|\mathcal{F}| := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

für die disjunkte Vereinigung der Halme. Wir führen jetzt auf $|\mathcal{F}|$ eine Topologie ein:

Proposition 4.10. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe über einem topologischen Raum X . Dann ist das System $\mathcal{B}$ aller Mengen

$$[U, f] := \{\varrho_{x_0}(f) : x_0 \in U\} \subseteq |\mathcal{F}| \quad \text{mit } U \subseteq X \text{ offen und } f \in \mathcal{F}(U)$$

die Basis einer Topologie auf $|\mathcal{F}|$. Weiter ist die Projektion

$$p: |\mathcal{F}| \rightarrow X,$$

die jedem $\varphi \in \mathcal{F}_{x_0}$ das zugehörige x_0 zuordnet, eine unverzweigte Überlagerung. Wir nennen in dieser Situation $|\mathcal{F}|$ den $\mathcal{F}$ zugeordneten Überlagerungsraum.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{B}$ die Bedingungen des Basiskriteriums aus Fußnote 5 erfüllt: Bedingung (B_1) gilt, da offensichtlich jedes Element $\varphi \in |\mathcal{F}|$ in mindestens einem $[U, f]$ enthalten ist. Zum Beweis von Bedingung (B_2) betrachten wir beliebige Mengen $[U_0, f_0], [U_1, f_1] \in \mathcal{B}$ und ein beliebiges Element $\varphi \in [U_0, f_0] \cap [U_1, f_1]$. Dann ist $p(\varphi) \in U_0 \cap U_1$ und es gilt $\varphi = \varrho_{p(\varphi)}(f_0) = \varrho_{p(\varphi)}(f_1)$. Somit existiert eine offene Umgebung $U \subseteq U_0 \cap U_1$ von $p(\varphi)$ mit $f_0|_U = f_1|_U =: g$ und es gilt $\varphi \in [U, g] \subseteq [U_0, f_0] \cap [U_1, f_1]$.

Um zu zeigen, dass p eine unverzweigte Überlagerung ist, reicht es nach Proposition 2.19 aus, nachzuweisen, dass p ein lokaler Homöomorphismus ist. Für ein beliebiges $\varphi \in |\mathcal{F}|$ gibt es ein $[U, f] \in \mathcal{B}$ mit $\varphi \in [U, f]$. Dann ist $[U, f]$ eine offene Umgebung von φ und U eine offene Umgebung von $p(\varphi)$. Die Abbildung $p|_{[U, f]}: [U, f] \rightarrow U$ ist bijektiv und – wie sofort aus den Definitionen folgt – stetig und offen. $\square$

Definition 4.11. Wir sagen, eine Prägarbe $\mathcal{F}$ über einem topologischen Raum X **genügt dem Identitätssatz**, wenn folgendes gilt: Ist $U \subseteq X$ ein Gebiet und sind $f, g \in \mathcal{F}(U)$ Elemente, deren Keime $\varrho_{x_0}(f)$ und $\varrho_{x_0}(g)$ für einen Punkt $x_0 \in U$ übereinstimmen, so gilt $f = g$.

Beispiel 4.12. Wie man anhand des Identitätssatzes 1.31 leicht einsieht, genügen die Garben $\mathcal{O}$ und $\mathcal{M}$ der holomorphen bzw. meromorphen Funktionen auf einer Riemann'schen Fläche dem Identitätssatz.

Proposition 4.13. Seien X ein lokal zusammenhängender Hausdorff-Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X , die dem Identitätssatz genügt. Dann ist der topologische Raum $|\mathcal{F}|$ ebenfalls Hausdorff'sch.

Beweis. Wir müssen je zwei voneinander verschiedene Elemente $\varphi_0, \varphi_1 \in |\mathcal{F}|$ durch offene Umgebungen voneinander trennen. Hierbei unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: $p(\varphi_0) =: x_0 \neq x_1 := p(\varphi_1)$. Da X Hausdorff'sch ist, gibt es disjunkte offene Umgebungen U_0 von x_0 und U_1 von x_1 in X . Dann sind auch die offenen Umgebungen $p^{-1}(U_0)$ von φ_0 und $p^{-1}(U_1)$ von φ_1 wieder disjunkt.

Fall 2: $p(\varphi_0) = p(\varphi_1) =: x$. Die Keime $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{F}_x$ seien durch Elemente $f_0 \in \mathcal{F}(U_0)$ bzw. $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ für geeignete offene Umgebungen $U_0, U_1 \subseteq X$ von x repräsentiert. Für eine beliebige offene Umgebung $U \subseteq U_0 \cap U_1$ ist $[U, f_0|_U]$ bzw. $[U, f_1|_U]$ eine offene Umgebung von φ_0 bzw. φ_1 . Gäbe es nun ein

$$\psi \in [U, f_0|_U] \cap [U, f_1|_U],$$

so gälte

$$\psi = \varrho_{p(\psi)}(f_0) = \varrho_{p(\psi)}(f_1)$$

und mit dem Identitätssatz gälte $f_0|_U = f_1|_U$. Im Widerspruch zu unserer Voraussetzung folgte $\varphi_0 = \varphi_1$, so dass $[U, f_0|_U]$ und $[U, f_1|_U]$ disjunkt sind. $\square$

4.2 Meromorphe Differentialformen auf Riemann'schen Flächen

Für einen Punkt a auf einer Riemann'schen Fläche X sei $\mathcal{C}_a^\infty$ der zugehörige Halm der in Beispiel 4.5 (c) eingeführten Garbe $\mathcal{C}^\infty$ der glatten Funktionen. Für eine beliebige Koordinatenumgebung (U, z) von a mit $z = x + iy$ sind dann auf naheliegende Weise über die partiellen Ableitungen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ auch partielle Ableitungsoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$$

definiert.⁵³ Betrachten wir nun den $\mathbb{C}$ -Untervektorraum

$$\mathfrak{m}_a := \{f \in \mathcal{C}_a^\infty : f(a) = 0\}.$$

Wir sagen, ein Keim $\varphi \in \mathfrak{m}_a$ **verschwindet in zweiter Ordnung**, wenn er einen Vertreter φ besitzt, der in einer Koordinatenumgebung (U, z) von a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a) = 0$$

erfüllt, und schreiben $\mathfrak{m}_a^2 \subseteq \mathfrak{m}_a$ für den $\mathbb{C}$ -Untervektorraum der Keime, die in zweiter Ordnung verschwinden. Wir definieren:

Definition 4.14. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $a \in X$. Dann heißt der Quotientenraum $T_a^* := \mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2$ der **Kotangententialraum** von X in a . Für jede offene Umgebung U von a und jedes $f \in C^\infty(U)$ liegt

$$d_a f := (f - f(a)) \bmod \mathfrak{m}_a^2$$

im Kotangententialraum T_a^* und heißt das **Differential** von f in a .

Proposition 4.15. Seien X eine Riemann'sche Fläche, $a \in X$ und (U, z) eine Koordinatenumgebung von a mit $z = x + iy$. Dann sind $\{d_a x, d_a y\}$ und $\{d_a z, d_a \bar{z}\}$ jeweils $\mathbb{C}$ -Basen des Kotangententialraums T_a^* . Für eine beliebige Umgebung $U' \subseteq U$ von a und ein beliebiges $f \in C^\infty(U)$ gilt

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot d_a y = \frac{\partial f}{\partial z}(a) \cdot d_a z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) \cdot d_a \bar{z}.$$

Beweis. Wir zeigen lediglich, dass $\{d_a x, d_a y\}$ eine $\mathbb{C}$ -Basis von T_a^* ist; die entsprechende Behauptung für $\{d_a z, d_a \bar{z}\}$ zeigt man analog. Tatsächlich erzeugen $d_a x$ und $d_a y$ ganz T_a^* ,

denn: Sei $t \in T_a^*$ beliebig und sei $\varphi \in \mathfrak{m}_a$ ein Vertreter von t . Dann können wir φ in eine Taylor-Reihe

$$\varphi = c_1 \cdot (x - x(a)) + c_2 \cdot (y - y(a)) + \psi \quad \text{mit } c_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a), c_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a) \text{ und einem } \psi \in \mathfrak{m}_a^2$$

entwickeln und die Behauptung folgt bereits, wenn wir modulo $\mathfrak{m}_a^2$ rechnen. #

Zudem sind $d_a x$ und $d_a y$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$,

denn: Sei $c_1 \cdot d_a x + c_2 \cdot d_a y = 0$ eine $\mathbb{C}$ -Linearkombination der Null. Definitionsgemäß gilt dann

$$c_1 \cdot (x - x(a)) + c_2 \cdot (y - y(a)) \in \mathfrak{m}_a^2.$$

Durch Bilden der partiellen Ableitungen dieses Ausdrucks nach x und y erhalten wir $c_1 = c_2 = 0$. #

Insgesamt haben wir gezeigt, dass $\{d_a x, d_a y\}$ eine $\mathbb{C}$ -Basis von T_a^* ist. Die behauptete Formel haben wir zudem mit der Herleitung der Taylor-Reihe im Beweis, dass $d_a x$ und $d_a y$ ganz T_a^* erzeugen, bereits mitbewiesen. □

⁵³Hierbei sind die WIRTINGER-Ableitungen⁵⁴ $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ bekanntlich auf einem offenen $U \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ definiert als

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

und es gilt $\mathcal{O}(U) = \text{Kern}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$. Diese Zusammenhänge übersetzen sich lokal auf Riemann'sche Flächen.

⁵⁴Wilhelm Wirtinger (1865–1945)

Seien nun (U, z) und (U', z') zwei Koordinatenumgebungen eines Punktes a auf einer Riemann'schen Fläche X . Dann gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial z'}{\partial z}(a) &=: c \in \mathbb{C}^\times & \text{und} & \quad \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}(a) = \bar{c}, \\ \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}(a) &= 0, \text{ da } z' \text{ holomorph ist,} & \text{und} & \quad \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z}(a) = 0. \end{aligned}$$

In dieser Notation erhalten wir

$$d_a z' = c \cdot d_a z \quad \text{und} \quad d_a \bar{z}' = \bar{c} \cdot d_a \bar{z}.$$

Es folgt, dass die von $d_a z$ und $d_a \bar{z}$ aufgespannten, eindimensionalen Untervektorräume

$$\begin{aligned} T_a^{1,0} &:= \mathbb{C} \cdot d_a z, \\ T_a^{0,1} &:= \mathbb{C} \cdot d_a \bar{z} \end{aligned}$$

von T_a^* von der Kartenwahl unabhängig sind. Nach Proposition 4.15 gilt dann $T_a^* = T_a^{1,0} \oplus T_a^{0,1}$ und für ein beliebiges $d_a f \in T_a^*$ mit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ schreiben wir

$$d_a(f) = d_a^{1,0} f + d_a^{0,1} f \quad \text{mit } d_a^{1,0} f \in T_a^{1,0}, d_a^{0,1} f \in T_a^{0,1}.$$

Es gilt dann

$$d_a^{1,0} f = \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z \quad \text{und} \quad d_a^{0,1} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a \bar{z}.$$

Hiermit und mit der Produktregel der partiellen Differentiation auf $\mathbb{C}$ folgt leicht

$$d_a(fg) = f(a) \cdot d_a g + g(a) \cdot d_a f \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{C}^\infty(U). \quad (4.1)$$

Definition 4.16. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann heißt eine Abbildung

$$\omega: U \rightarrow \bigcup_{a \in U} T_a^* \quad \text{mit } \omega(a) \in T_a^* \text{ für alle } a \in U$$

eine **1-Form** auf U . Ist dabei $\omega(a)$ in $T_a^{1,0}$ bzw. $T_a^{0,1}$ für alle $a \in U$, so heißt ω vom Typ $(1,0)$ bzw. $(0,1)$.

Beispiel 4.17. Seien X eine Riemann'sche Fläche und (U, z) mit $z = x + iy$ eine Karte von X . Dann gilt:

- (a) Jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ induziert via $df: a \mapsto d_a f$ eine 1-Form.
- (b) Für jede 1-Form ω auf U und jede Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist $f \cdot \omega: a \mapsto f(a) \cdot \omega(a)$ wieder eine 1-Form auf U .
- (c) Für jede 1-Form auf U gibt es (nicht notwendigerweise stetige) Funktionen $f, g, \varphi, \psi: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\omega = f \cdot dx + g \cdot dy \quad \text{und} \quad \omega = \varphi \cdot dz + \psi \cdot d\bar{z}.$$

Definition 4.18. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Eine 1-Form ω auf U heißt

- **differenzierbar**, wenn bezüglich jeder Karte (U', z) auf $U \cap U'$ gilt:

$$\omega = f \cdot dz + g \cdot d\bar{z} \quad \text{mit } f, g \in C^\infty(U \cap U').$$

- **holomorph**, wenn bezüglich jeder Karte (U', z) auf $U \cap U'$ gilt:

$$\omega = f \cdot dz \quad \text{mit } f \in \mathcal{O}(U \cap U').$$

Wir schreiben $\mathcal{E}^1(U)$ bzw. $\Omega^1(U)$ für den $\mathbb{C}$ -Vektorraum der differenzierbaren bzw. holomorphen 1-Formen auf U . Diese Vektorräume bilden zusammen mit den üblichen Beschränkungsabbildungen die **Garbe der differenzierbaren 1-Formen** $\mathcal{E}^1$ bzw. die **Garbe der holomorphen 1-Formen** Ω^1 auf X . Durch Betrachten der jeweilig passenden Untervektorräume erhalten wir die Garben $\mathcal{E}^{1,0}$ bzw. $\mathcal{E}^{0,1}$ der differenzierbaren 1-Formen vom Typ $(1,0)$ bzw. $(0,1)$.

Definition 4.19. Seien X eine Riemann'sche Fläche, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, $a \in U$ und $\omega \in \Omega(U \setminus \{a\})$. Sei weiter (U, z) eine Koordinatenumgebung von a mit $z(a) = 0$. Dann lässt sich ω in $U \setminus \{a\}$ als $\omega = f dz$ mit $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ darstellen. Sei schließlich

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

die Laurent-Entwicklung von f um a bezüglich der Variablen z . Wir sagen

$$\omega \text{ hat in } a \begin{cases} \text{eine hebbare Singularität,} & \text{falls } a_n = 0 \text{ für alle } n < 0, \\ \text{einen Pol der Ordnung } m \in \mathbb{N}, & \text{falls } a_{-m} \neq 0 \text{ und } a_n = 0 \text{ für alle } n < -m, \\ \text{eine wesentliche Singularität,} & \text{falls es unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a_{-n} \neq 0 \text{ gibt.} \end{cases}$$

Der Koeffizient a_{-1} heißt das **Residuum** $\text{res}_{z=a} \omega$ von ω in a .

In Übungsaufgabe 4.1 zeigen wir, dass das Residuum unabhängig von der Wahl der Karte (U', z) ist.

Definition 4.20. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Eine 1-Form ω auf U heißt **meromorph**, falls es eine offene Teilmenge $U' \subseteq U$ gibt mit

- (i) $\omega \in \Omega^1(U')$,
- (ii) $U \setminus U'$ besteht aus isolierten Punkten,
- (iii) ω hat in jedem $a \in U \setminus U'$ einen Pol.

Die meromorphe 1-Form ω lässt sich dann auf U in der Form $f dz$ mit einem $f \in \mathcal{M}(U)$ schreiben. Den $\mathbb{C}$ -Vektorraum der meromorphen 1-Formen auf U nennen wir $\mathcal{M}^1(U)$. Zusammen mit den üblichen Beschränkungsabbildungen erhalten wir so die **Garbe der meromorphen 1-Formen** auf X .

In Verallgemeinerung unseres bisherigen Vorgehens in diesem Abschnitt führen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Begriff der n -Form ein. Hierfür erinnern wir zunächst an:

Definition 4.21. Sei V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Dann ist auch $\bigwedge^n V$ ein Vektorraum; seine Elemente sind endliche Summen von Elementen der Form $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$ mit $v_1, \dots, v_n \in V$. Hierbei gelten für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ die Rechenregeln

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \dots \wedge (\lambda v_i + \tilde{v}_i) \wedge \dots \wedge v_n &= \lambda \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_n) + v_1 \wedge \dots \wedge \tilde{v}_i \wedge \dots \wedge v_n, \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n &= - (v_1 \wedge \dots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_n). \end{aligned}$$

Ist durch $b_1, \dots, b_d$ eine Basis von V gegeben, so bilden die Elemente $b_{i_1} \wedge b_{i_2} \wedge \dots \wedge b_{i_n}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ eine Basis von $\bigwedge^n V$. Durch diese Eigenschaften ist $\bigwedge^n V$ vollständig charakterisiert.

Beispiel 4.22. Seien X eine Riemann'sche Fläche, $a \in X$ und (U, z) eine Koordinatenumgebung von a mit $z = x + iy$. Nach Proposition 4.15 sind dann sowohl $\{d_a x, d_a y\}$ als auch $\{d_a z, d_a \bar{z}\}$ Basen des (somit zweidimensionalen) Kotangententialraums T_a^* von X in a . Nach Definition 4.21 gilt dann:

- $\bigwedge^2 T_a^*$ ist eindimensional und sowohl $d_a x \wedge d_a y$ als auch $d_a z \wedge d_a \bar{z} = -2i \cdot (d_a x \wedge d_a y)$ ist eine Basis.
- $\bigwedge^n T_a^* = 0$ für alle $n > 2$.

Definition 4.23. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann heißt eine Abbildung

$$\omega: U \rightarrow \bigcup_{a \in U} \bigwedge^2 T_a^* \quad \text{mit } \omega(a) \in \bigwedge^2 T_a^* \text{ für alle } a \in U$$

eine **2-Form** auf U . Eine 2-Form ω heißt **differenzierbar**, wenn bezüglich jeder Karte (U', z) auf $U \cap U'$ gilt:

$$\omega = f \cdot (dz \wedge d\bar{z}) \quad \text{mit } f \in C^\infty(U \cap U'),$$

womit wir

$$\omega(a) = f(a) \cdot (d_a z \wedge d_a \bar{z}) \quad \text{für alle } a \in U$$

meinen. Wir schreiben $\mathcal{E}^2(U)$ für den $\mathbb{C}$ -Vektorraum der differenzierbaren 2-Formen auf U . Diese Vektorräume bilden zusammen mit den üblichen Beschränkungsabbildungen die **Garbe der differenzierbaren 2-Formen** $\mathcal{E}^2$ auf X .

Beispiel 4.24. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge.

- Für $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^1(U)$ ist durch $(\omega_1 \wedge \omega_2)(a) := \omega_1(a) \wedge \omega_2(a)$ für alle $a \in U$ eine 2-Form $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathcal{E}^2(U)$ definiert.
- Für $f \in C^\infty(U)$, $\omega \in \mathcal{E}^2(U)$ ist durch $(f\omega)(a) := f(a)\omega(a)$ für alle $a \in U$ eine 2-Form $f\omega \in \mathcal{E}^2(U)$ definiert.

Definition 4.25. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Jede 1-Form $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ lässt sich schreiben als

$$\omega = \sum_k f_k dg_k \quad \text{mit } f_k, g_k \in C^\infty(U), \quad (4.2)$$

wobei die uns vertrauteste Variante $\omega = f_1 dz + f_2 d\bar{z}$ mit einer lokalen Koordinate z ist. Wir setzen

$$d\omega := \sum_k df_k \wedge dg_k.$$

In Übungsaufgabe 4.2 zeigen wir, dass unsere Definition von $d\omega$ insofern wohldefiniert ist, dass sie nicht von der Wahl der Darstellung in (4.2) abhängt.

Proposition 4.26. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Seien weiter $f \in C^\infty(U)$ und $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

- (i) $ddf = 0$.
- (ii) $df\omega = df \wedge \omega + f d\omega$.

Beweis. Diese Rechenregeln folgen unmittelbar aus der Definition. Schreiben wir $\omega = g \cdot dz + h \cdot d\bar{z}$ mit $f, g \in C^\infty(U \cap U')$ bezüglich einer beliebigen Karte (U', z) , so gilt genauer:

$$\begin{aligned} ddf &\stackrel{4.25}{=} d(1 \cdot df) = d1 \wedge df \stackrel{4.14}{=} 0, \\ df\omega &= d(fg \cdot dz + fh \cdot d\bar{z}) \stackrel{4.25}{=} (d(fg) \wedge dz) + (d(fh) \wedge d\bar{z}) \\ &\stackrel{(4.1)}{=} ((f dg + g df) \wedge dz) + ((f dh + h df) \wedge d\bar{z}) \\ &\stackrel{4.21}{=} df \wedge (g dz + h d\bar{z}) + f \cdot (dg \wedge dz + dh \wedge d\bar{z}) \\ &= df \wedge \omega + f d\omega. \end{aligned}$$

□

Satz 4.27. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann gilt $d\omega = 0$ für jede holomorphe 1-Form $\omega \in \Omega^1(U)$ und jede 1-Form $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(U)$ mit $d\omega = 0$ ist holomorph.

Beweis. Jedes $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(U)$ lässt sich bezüglich einer beliebigen Karte (U', z) auf $U \cap U'$ schreiben als $\omega = f dz$ mit einem glatten f . Für die Ableitung gilt dort dann

$$d\omega = df \wedge dz \stackrel{4.15}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot (dz \wedge d\bar{z}).$$

Es ist also $d\omega = 0$ gleichbedeutend zu $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

□

4.3 Integration von Differentialformen

Seien X eine Riemann'sche Fläche und $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$. Sei weiter γ eine **stückweise glatte** Kurve auf X , also eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, für die es eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ des Intervalls $[0, 1]$ gibt sowie für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ Karten (U_k, z_k) mit $z_k = x_k + iy_k$ derart, dass gilt:

- $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subseteq U_k$,
- die Funktionen $x_k \circ \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ sowie $y_k \circ \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ sind glatt.

In jedem U_k gilt $\omega = f_k dx_k + g_k dy_k$ mit $f_k, g_k \in \mathcal{C}^\infty(U_k)$ und wir definieren das **Integral von ω über die Kurve γ** als

$$\int_{\gamma} \omega := \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(\gamma(t)) \cdot \frac{dx_k(\gamma(t))}{dt} + g_k(\gamma(t)) \cdot \frac{dy_k(\gamma(t))}{dt} \right) dt.$$

Man kann leicht nachprüfen, dass diese Definition unabhängig von den Wahlen der Partition des Intervalls und der Karten ist.

Proposition 4.28. Seien X eine Riemann'sche Fläche, $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ eine stückweise glatte Kurve und $F \in \mathcal{C}^\infty(X)$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} dF = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

Beweis. Nach Proposition 4.15 gilt in der obigen Notation

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_k} \cdot dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k} \cdot dy_k$$

und es ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dF &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(\gamma(t)) \cdot \frac{dx_k(\gamma(t))}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y_k}(\gamma(t)) \cdot \frac{dy_k(\gamma(t))}{dt} \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \left(F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1})) \right) \\ &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)). \end{aligned}$$

□

Definition 4.29. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$. Gilt dann $\omega = dF$ für eine glatte Funktion $F \in \mathcal{C}^\infty(X)$, so heißt F eine (**glatte**) **Stammfunktion** von ω .

Bemerkung 4.30. (a) Die Stammfunktion einer 1-Form wie in Definition 4.29 ist nicht eindeutig bestimmt: Für eine Stammfunktion F von ω und ein $c \in \mathbb{C}$ ist offensichtlich auch $F + c$ eine Stammfunktion von ω . Umgekehrt unterscheiden sich je zwei Stammfunktionen F_1, F_2 von ω um eine Konstante, denn aus $d(F_1 - F_2) = 0$ folgt mit Proposition 4.28 bereits die Konstanz von $F_1 - F_2$.

(b) Nach Proposition 4.26 gilt für jede 1-Form ω mit Stammfunktion bereits $d\omega = 0$.

Im Fall einer offenen Kreisscheibe $U = U_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert bekanntlich für jedes $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ mit $d\omega = 0$ eine glatte Stammfunktion – besonders leicht lässt sich das etwa für holomorphes ω einsehen,

denn: Sei $\omega = f dz$ mit einem $f \in \mathcal{O}(U)$. Letzteres hat eine Taylor-Entwicklung der Form $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit komplexen Koeffizienten a_n . Durch

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

wird dann eine Funktion $F \in \mathcal{O}(U)$ mit $dF = \omega$ definiert. #

Die allgemeine Aussage zeigen wir in Übungsaufgabe 4.3. Im Gegensatz zu der so gegebenen lokalen Existenz glatter Stammfunktionen existieren globale Stammfunktionen differenzierbarer 1-Formen ω mit $d\omega = 0$ im Allgemeinen nur als mehrdeutige Funktionen wie in Bemerkung 2.14:

Satz 4.31. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ mit $d\omega = 0$. Dann existiert eine zusammenhängende unverzweigte unbegrenzte Überlagerung $p: \hat{X} \rightarrow X$ und eine Stammfunktion $\hat{F} \in C^\infty(\hat{X})$ des Rücktransports $p^*\omega$.

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Garbe der glatten Stammfunktionen von ω , wobei $\mathcal{F}(U)$ für ein offenes $U \subseteq X$ aus allen $F \in C^\infty(U)$ mit $dF = \omega$ besteht. Die Garbe $\mathcal{F}$ genügt dem Identitätssatz, denn für ein Gebiet $U \subseteq X$ unterscheiden sich je zwei Funktionen $F, G \in \mathcal{F}(U)$ nur um eine Konstante. Nach Proposition 4.13 ist daher der zugeordnete Überlagerungsraum $|\mathcal{F}|$ Hausdorff'sch. Weiter ist die nach Proposition 4.10 unverzweigte Überlagerung $p: |\mathcal{F}| \rightarrow X$ auch unbegrenzt,

denn: Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es nach Übungsaufgabe 4.3 eine zusammenhängende offene Umgebung U und eine Stammfunktion $F \in \mathcal{F}(U)$ von ω . Nach Bemerkung 4.30 (a) unterscheiden sich zwei solcher Stammfunktionen jeweils um eine additive Konstante und es folgt

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{c \in \mathbb{C}} [U, F + c],$$

wobei sämtliche Abbildungen $p|_{[U, F+c]}: [U, F+c] \rightarrow U$ Homöomorphismen sind. #

Für eine beliebige Zusammenhangskomponente $\hat{X} \subseteq |\mathcal{F}|$ ist dann auch $p|_{\hat{X}}$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Da $\hat{X}$ eine Menge von Funktionskeimen ist, ist durch $\hat{F}(\varphi) := \varphi(p(\varphi))$ auf natürliche Weise eine Funktion $\hat{F}: \hat{X} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert. Diese ist nach Konstruktion eine Stammfunktion von $p^*\omega$. □

Korollar 4.32. Seien X eine Riemann'sche Fläche, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ihre universelle Überlagerung und $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ mit $d\omega = 0$. Dann existiert eine Stammfunktion $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{X})$ des Rücktransports $p^*\omega$.

Beweis. Sei $q: \hat{X} \rightarrow X$ die nach Satz 4.31 existente Überlagerung und $\hat{F} \in \mathcal{C}^\infty(\hat{X})$ die zugehörige glatte Stammfunktion von $q^*\omega$. Da $p: \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung ist, gibt es eine spurtreue holomorphe Abbildung $h: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$. Sei $\tilde{F} := h^*\hat{F} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{X})$. Dann ist $\tilde{F}$ eine glatte Stammfunktion von $h^*(q^*\omega) = p^*\omega$. $\square$

Nach Satz 2.39 ist insbesondere jede einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche X ihre eigene universelle Überlagerung. Nach Korollar 4.32 hat dann jedes $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ mit $d\omega = 0$ eine Stammfunktion in $\mathcal{C}^\infty(X)$.

Satz 4.33. Seien X eine Riemann'sche Fläche, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ihre universelle Überlagerung, $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ mit $d\omega = 0$ und $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{X})$ eine Stammfunktion des Rücktransports $p^*\omega$. Ist dann $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ eine stückweise glatte Kurve und $\delta: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ eine Hochhebung von γ , so gilt

$$\int_{\gamma} \omega = \tilde{F}(\delta(1)) - \tilde{F}(\delta(0)).$$

Dies ist unabhängig sowohl von der Wahl der Stammfunktion $\tilde{F}$ von $p^*\omega$ als auch von der Wahl der Hochhebung δ von γ .

Beweis. Definitionsgemäß gilt für jede stückweise glatte Kurve $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ und jede differenzierbare 1-Form $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$

$$\int_{\tilde{\gamma}} p^*\omega = \int_{p \circ \tilde{\gamma}} \omega.$$

Die Formel im Satz folgt somit unmittelbar aus Proposition 4.28.

Die Unabhängigkeit von der Wahl der Stammfunktion ergibt sich daraus, dass sich je zwei Stammfunktionen nur um eine additive Konstante unterscheiden, die bei der Differenzbildung wegfällt. Um die Unabhängigkeit von der Wahl der Hochhebung zu zeigen, betrachten wir zwei beliebige Hochhebungen δ_0 und δ_1 von γ . Da die universelle Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ nach Satz 2.47 Galois'sch ist, gibt es dann eine Decktransformation $\sigma \in \text{Deck}(\tilde{X}/X)$ mit $\delta_1 = \sigma \circ \delta_0$ und aufgrund von $p \circ \sigma = p$ gilt $\sigma^*(p^*\omega) = p^*\omega$. Es folgt, dass mit $\tilde{F}$ auch $\sigma^*\tilde{F}$ eine Stammfunktion von $p^*\omega$ ist und es somit ein $c \in \mathbb{C}$ mit $\sigma^*\tilde{F} - \tilde{F} \equiv c$ gibt. Wir erhalten

$$\tilde{F}(\delta_1(1)) - \tilde{F}(\delta_1(0)) = \sigma^*\tilde{F}(\delta_0(1)) - \sigma^*\tilde{F}(\delta_0(0)) = \tilde{F}(\delta_0(1)) - \tilde{F}(\delta_0(0))$$

und somit die gewünschte Unabhängigkeit. $\square$

Satz 4.34 (Homotopieversion des Cauchy'schen Integralsatzes auf Riemann'schen Flächen). Seien X eine Riemann'sche Fläche und $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ mit $d\omega = 0$. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

(a) Für je zwei $x_0, x_1 \in X$ und je zwei homotope Kurven $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 gilt

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

(b) Für je zwei frei homotope geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ gilt

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst Behauptung (a). Sei dafür $p: \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung und seien $\delta_0, \delta_1: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ Hochhebungen von γ_0, γ_1 mit demselben Anfangspunkt. Nach Proposition 2.25 haben δ_0 und δ_1 dann auch denselben Endpunkt und die Behauptung folgt aus Satz 4.33.

Zum Beweis von Behauptung (b) seien x_0 bzw. x_1 der Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ_0 bzw. der Kurve γ_1 . Nach Definition von freier Homotopie gibt es dann eine Kurve δ von x_0 nach x_1 derart, dass γ_0 zu $\delta \cdot \gamma_1 \cdot \delta^-$ homotop ist, und es gilt

$$\int_{\gamma_0} \omega \stackrel{(a)}{=} \int_{\delta \cdot \gamma_1 \cdot \delta^-} \omega = \int_{\delta} \omega + \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\delta} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

und somit die Behauptung. $\square$

Unser nächstes Ziel ist es nun, eine Version des Residuensatzes auf Riemann'schen Flächen herzuleiten. Dies tun wir vermöge der Integration über 2-Formen, wie wir sie nun einführen:

Dabei erinnern wir zunächst an die Situation in der komplexen Ebene. Für eine 2-Form $\omega \in \mathcal{E}^2(V)$ auf einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{C}$ können wir bekanntlich

$$\omega = f \cdot (dx \wedge dy) = \frac{i}{2} \cdot f \cdot (dz \wedge d\bar{z}) \quad \text{mit einem } f \in \mathcal{C}^\infty(V)$$

schreiben. Wir setzen voraus, dass f außerhalb einer kompakten Teilmenge von V verschwindet und definieren

$$\iint_V \omega := \iint_V f(x, y) dx dy,$$

wobei wir die rechte Seite als gewöhnliches Doppelintegral verstehen. Sind nun $\tilde{V} \subseteq \mathbb{C}$ eine weitere offene Teilmenge und $\psi: \tilde{V} \rightarrow V$ biholomorph mit einer Zerlegung $\psi = u + iv$ in Real- und Imaginärteil, so gilt nach den CAUCHY-Riemann'schen Differentialgleichungen⁵⁵

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = |\psi'|^2$$

für die Funktionaldeterminante von ψ . Es folgt die Transformationsformel

$$\iint_V f dx dy = \iint_{\tilde{V}} (f \circ \psi) |\psi'|^2 dx dy.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \psi^*(dz \wedge d\bar{z}) &= d\psi \wedge d\bar{\psi} = (\psi' dz) \wedge (\bar{\psi}' d\bar{z}) = |\psi'|^2 \cdot (dz \wedge d\bar{z}) \\ \implies \psi^* \omega &= \frac{i}{2} \cdot (f \circ \psi) |\psi'|^2 dx dy \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$\iint_V \omega = \iint_{\tilde{V}} \psi^* \omega. \quad (4.3)$$

Wir definieren nun Integrale über 2-Formen auf beliebigen Riemann'schen Flächen:

Definition 4.35. Der **Träger** einer Differentialform ω auf X ist die abgeschlossene Menge

$$\text{Supp}(\omega) := \overline{\{x_0 \in X : \omega(x_0) \neq 0\}}.$$

Analog ist auch der Träger $\text{Supp}(f)$ einer Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ definiert.

Definition 4.36. Seien X eine Riemann'sche Fläche, $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte auf X und $\omega \in \mathcal{E}^2(X)$ eine Differentialform, deren Träger kompakt und in U enthalten ist. Dann ist $(\varphi^{-1})^* \omega$ eine Differentialform mit kompaktem Träger auf $V \subseteq \mathbb{C}$ und wir setzen

$$\iint_X \omega := \iint_U \omega := \iint_V (\varphi^{-1})^* \omega.$$

Bemerkung 4.37. In Definition 4.36 ist das Integral unabhängig von der Wahl der Karte und somit wohldefiniert,

denn: Sei $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine weitere Karte mit $\text{Supp}(\omega) \subseteq \tilde{U}$. Da wir sonst zum Durchschnitt übergehen können, dürfen wir ohne Einschränkung $\tilde{U} = U$ annehmen. Dann ist

$$\psi := \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \tilde{V} \rightarrow V$$

biholomorph. Aufgrund von

$$(\tilde{\varphi}^{-1})^* \omega = (\varphi^{-1} \circ \psi)^* \omega = \psi^*((\varphi^{-1})^* \omega)$$

und (4.3) gilt dann

$$\iint_{\tilde{V}} (\tilde{\varphi}^{-1})^* \omega = \iint_V (\varphi^{-1})^* \omega$$

und somit die behauptete Unabhängigkeit. #

Definition 4.38. Seien X eine Riemann'sche Fläche, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Karten $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ von X und $\omega \in \mathcal{E}^2(X)$ eine Differentialform mit kompaktem Träger. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine n -elementige Teilmenge $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ mit

$$\text{Supp}(\omega) \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}.$$

Man kann zeigen, dass es dann auf X eine $\mathcal{U}$ untergeordnete **Partition der Eins** gibt, und genauer Funktionen $f_{i_k} \in C^\infty(X)$ mit

$$\text{Supp}(f_{i_k}) \subseteq U_{i_k} \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n\},$$

$$\sum_{k=1}^n f_{i_k}(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \text{Supp}(\omega).$$

Für diese ist $f_{i_k}\omega$ eine Differentialform mit $\text{Supp}(f_{i_k}\omega) \subseteq U_{i_k}$ und es gilt

$$\omega = \sum_{k=1}^n f_{i_k}\omega.$$

Wir definieren schließlich

$$\iint_X \omega := \sum_{k=1}^n \iint_{U_{i_k}} f_{i_k}\omega,$$

wobei die rechte Seite wie in Definition 4.36 zu verstehen ist. Man überlegt sich leicht, dass auch diese Definition unabhängig von der Wahl der Karten und der Wahl der Funktionen f_{i_k} ist.

Um nun den Residuensatz zeigen zu können, benötigen wir noch ein Resultat, das Integrale über 2-Formen mit solchen über 1-Formen in Beziehung setzt. Nur für den uns interessierenden speziellen Fall zeigen wir:

Lemma 4.39 (Satz von STOKES⁵⁶). Seien $0 \in U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ eine differenzierbare Differentialform. Dann gelten für alle $0 < r < R < \infty$ mit $U_r^R \subseteq U$ bzw. für $U_R \subseteq U$ die folgenden Aussagen:

$$(a) \quad \iint_{U_r^R} d\omega = \int_{|z|=R} \omega - \int_{|z|=r} \omega,$$

$$(b) \quad \iint_{U_R} d\omega = \int_{|z|=R} \omega.$$

Beweis. Da Behauptung (b) durch Grenzübergang $r \rightarrow 0$ unmittelbar aus Behauptung (a) folgt, reicht uns im Weiteren ein Beweis von letzterer aus. Hierbei können wir bekanntlich $\omega = f dx + g dy$ mit geeigneten $f, g \in C^\infty(U)$ schreiben. Tatsächlich dürfen wir ohne Einschränkung sogar annehmen, es gelte $\omega = g dy$ und somit $d\omega = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot (dx \wedge dy)$,

denn: Der Fall $\omega = f dx$ lässt sich über die Koordinatentransformation $(x, y) \mapsto (y, -x)$ mit Funktionaldeterminante 1 auf diesen Fall zurückführen. Beide Fälle additiv zusammengekommen zeigen dann die allgemeine Aussage. #

In Polarkoordinaten $z = \varrho \cdot e^{i\varphi}$ und also $x = \varrho \cdot \cos \varphi$ sowie $y = \varrho \sin \varphi$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Mit $\tilde{g}(\varrho, \varphi) := g(\varrho \cdot e^{i\varphi})$ erhalten wir so

$$\iint_{U_r^R} d\omega = \iint_{r < |z| < R} \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = \iint_{\substack{r < \varrho < R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \left(\cos \varphi \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi} \right) \varrho d\varrho d\varphi$$

⁵⁶Sir George Gabriel Stokes, 1. Baronet PRS (1819–1903)

$$= \iint_{\substack{r < \varrho < R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \tilde{g}) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \tilde{g}) \right) d\varrho d\varphi.$$

Für jedes feste $\varrho \in (r, R)$ gilt nun

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \tilde{g}) d\varphi = (\sin \varphi \cdot \tilde{g}(\varrho, \varphi)) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \iint_{U_r^R} d\omega &= \int_0^{2\pi} \cos \varphi \left(\int_r^R \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \tilde{g}) d\varrho \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot R \cdot \tilde{g}(R, \varphi) d\varphi - \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot r \cdot \tilde{g}(r, \varphi) d\varphi \\ &= \int_{|z|=R} g dy - \int_{|z|=r} g dy \\ &= \int_{|z|=R} \omega - \int_{|z|=r} \omega. \end{aligned}$$

□

Satz 4.40. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ eine Differentialform mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\iint_X d\omega = 0.$$

Beweis. Wie in Definition 4.38 lässt sich ω in eine Summe $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_n$ von Differentialformen zerlegen, deren Träger jeweils vollständig in einer Karte enthalten sind. Auf diese Weise können wir ohne Einschränkung annehmen, es gelte $X = \mathbb{C}$. Aufgrund der Kompaktheit von $\text{Supp}(\omega)$ gibt es dann ein $R > 0$ mit $\text{Supp}(\omega) \subseteq U_R(0)$ und wir erhalten

$$\iint_{\mathbb{C}} d\omega = \iint_{U_R} d\omega \stackrel{4.39}{=} \int_{|z|=R} \omega = \int_{|z|=R} 0 = 0.$$

□

Satz 4.41 (Residuensatz). Seien X eine Riemann'sche Fläche und $x_1, \dots, x_n \in X$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $\omega \in \Omega^1(X \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ die Formel

$$\sum_{k=1}^n \text{res}_{x_k}(\omega) = 0.$$

Beweis. Die n Punkte $x_1, \dots, x_n \in X$ lassen sich durch offene Umgebungen U_k mit $k \in \{1, \dots, n\}$ trennen, wobei wir ohne Einschränkung annehmen dürfen, diese seien Koordinatenumgebungen

$$(U_k, z_k) \quad \text{mit } z_k(U_k) = \mathbb{D} \text{ und } z_k(x_k) = 0,$$

und sonst jeweils mit einer geeigneten Karte von X schneiden. Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ wählen wir weiters eine Funktion $f_k \in \mathcal{C}^\infty(X)$ mit kompaktem Träger $\text{Supp}(f_k) \subseteq U_k$ und mit $f_k|_{U'_k} \equiv 1$ für eine geeignete offene Umgebung $U'_k \subseteq U_k$ von x_k . Wir setzen

$$g := 1 - (f_1 + \dots + f_n). \quad (4.4)$$

Dann gilt $g|_{U'_k} = 0$ für alle k , so dass sich die Differentialform $g\omega$ durch Null in die Punkte x_k fortsetzen und insgesamt als Element von $\mathcal{E}^1(X)$ auffassen lässt. Nach Satz 4.40 gilt daher

$$\iint_X d(g\omega) = 0.$$

Da ω holomorph ist, haben wir zudem

$$d(g\omega) + \sum_{k=1}^n d(f_k\omega) \stackrel{(4.4)}{=} d\omega = 0 \quad \text{auf } X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$$

und zusammengekommen

$$\sum_{k=1}^n \iint_X d(f_k\omega) = 0.$$

Der Satz ist daher bewiesen, wenn wir

$$\iint_X d(f_k\omega) = -2\pi i \text{res}_{x_k}(\omega) \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n\}$$

zeigen können. Das wollen wir nun tun: In $U'_k \setminus \{x_k\}$ gilt $f_k\omega = \omega$, so dass wir dort $d(f_k\omega) = 0$ erhalten. Wir können also $d(f_k\omega)$ als ein Element von $\mathcal{E}^2(X)$ auffassen, dessen Träger eine kompakte Teilmenge von $U_k \setminus \{x_k\}$ ist. Via z_k können wir U_k mit der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ identifizieren. Es gibt dann Radii $0 < r < R < 1$ mit

$$\text{Supp}(f_k) \subseteq \{|z_k| < R\} \quad \text{und} \quad f_k|_{\{|z_k| < r\}} \equiv 1$$

und es gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} \iint_X d(f_k\omega) &= \iint_{r \leq |z_k| \leq R} d(f_k\omega) \stackrel{4.39}{=} \int_{|z_k|=R} f_k\omega - \int_{|z_k|=r} f_k\omega \\ &= - \int_{|z_k|=r} f_k\omega = -2\pi i \text{res}_{x_k}(\omega), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit nach dem bekannten Residuensatz in der komplexen Ebene gilt. $\square$

Mit dem Residuensatz 4.41 folgt unmittelbar ein neuer Beweis von Korollar 1.58. Außerdem erhalten wir als Spezialfall:

Korollar 4.42 (Zweiter Liouville'scher Satz). *Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann hat eine elliptische Funktion $f \in K(\Lambda)$ stets nur endlich viele Pole modulo Λ und die Summe über die Residuen in diesen Polen verschwindet.*⁵⁷

⁵⁷Natürlich besitzt f in je zwei Polstellen, die sich um ein $\omega \in \Lambda$ unterscheiden, dieselben Residuen.

Beweis. Das Korollar folgt aus dem Residuensatz 4.41, wenn wir dort für X den Periodentorus $\mathbb{C}/\Lambda$ und für die Punkte $x_0, \dots, x_n$ die Polstellen der nach Satz 1.38 durch f induzierten meromorphen Funktion $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ wählen. Dass die Anzahl dieser Polstellen stets endlich ist, liegt daran, dass $\mathbb{C}/\Lambda$ nach Lemma 1.24 kompakt ist. $\square$

Der Zweite Liouville'sche Satz 4.42 liefert sofort einen neuen Beweis für Korollar 2.49.

4.4 Garbenkohomologie

Ziel dieses Abschnitts ist die Definition des Begriffs der Kohomologiegruppen $H^1(X; \mathcal{F})$ für Garben $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X . Diese Kohomologiegruppen spielen bei unseren weiteren Untersuchungen Riemann'scher Flächen eine zentrale Rolle.

Definition 4.43. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , also eine Familie offener Teilmengen $U_i \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Für $q \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$C^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q})$$

zusammen mit der komponentenweisen Addition die **Gruppe der (Čech-) q -Koketten**⁵⁸ von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{U}$. Eine q -Kokette aus $C^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ist also eine Familie

$$(f_{i_0 i_1 \dots i_q})_{i_0, i_1, \dots, i_q \in I} \quad \text{mit } f_{i_0 i_1 \dots i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q}).$$

Um uns Schreibarbeit zu sparen, werden wir künftig oft kürzer $(f_{i_0 i_1 \dots i_q})$ statt $(f_{i_0 i_1 \dots i_q})_{i_0, i_1, \dots, i_q \in I}$ schreiben.

Definition 4.44. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann definieren wir die **Ableitungsoperatoren**

$$\delta^0: C^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}),$$

$$\delta^1: C^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow C^2(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

wie folgt: Für $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ sei

$$\delta^0((f_i)) = (g_{ij}) \quad \text{mit } g_{ij} := f_j|_{U_i \cap U_j} - f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j - f_i \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

und für $(f_{ij})_{i, j \in I} \in C^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ sei

$$\delta^1((f_{ij})) = (g_{ijk}) \quad \text{mit } g_{ijk} := f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Man überprüft leicht, dass δ^0 und δ^1 Gruppenhomomorphismen sind. Wir setzen:

⁵⁸Eduard Čech (1893–1960)

Definition 4.45. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} Z^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) &:= \text{Kern}(\delta^0) && \text{Gruppe der 0-Kozykel,} \\ Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) &:= \text{Kern}(\delta^1) && \text{Gruppe der 1-Kozykel,} \\ B^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) &:= \text{Bild}(\delta^0) && \text{Gruppe der 1-Koränder.} \end{aligned}$$

Definitionsgemäß ist eine 1-Kokette (f_{ij}) genau dann ein 1-Kozykel, wenn er für alle $i, j, k \in I$ die **Kozykelbedingung**

$$f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \quad \text{auf } U_i \cap U_j \cap U_k$$

erfüllt. Insbesondere gilt für einen 1-Kozykel stets $f_{ii} = 0$ und $f_{ij} = -f_{ji}$ für alle $i, j \in I$.

Lemma 4.46. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann definieren wir die **0-te (Čech-)Kohomologiegruppe** von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{U}$ durch

$$H^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := Z^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

Diese Gruppe ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{U}$. Tatsächlich gilt

$$H^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

Wir sprechen daher auch von der **0-ten Garbenkohomologiegruppe** $H^0(X; \mathcal{F})$ von X mit Koeffizienten in der Garbe $\mathcal{F}$.

Beweis. Definitionsgemäß liegt eine 0-Kokette $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ genau dann in $\text{Kern}(\delta^0)$, wenn

$$f_i|_{(U_i \cap U_j)} = f_j|_{(U_i \cap U_j)} \quad \text{für alle } i, j \in I$$

gilt. Nach (G_2) gibt es dann ein (eindeutiges) $f \in \mathcal{F}(X)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$. Wir erhalten so einen natürlichen Gruppenisomorphismus $H^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$ und haben das Lemma gezeigt. $\square$

Lemma 4.47. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann gilt $\delta^1 \circ \delta^0 = 0$ oder äquivalent

$$B^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \subseteq Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

Die somit wohldefinierte Faktorgruppe

$$H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) / B^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

heißt die **1-te (Čech-)Kohomologiegruppe** von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{U}$.

Beweis. Für $(g_{ij}) \in B^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ gilt $\delta^1((g_{ij})) = (h_{ijk})$ mit

$$h_{ijk} = g_{jk} - g_{ik} + g_{ij} = (f_k - f_j) - (f_k - f_i) + (f_j - f_i) = 0.$$

$\square$

Bemerkung 4.48. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Man kann nun für alle $q \in \mathbb{N}$ derart Ableitungsoperatoren

$$\delta^q: C^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

definieren, dass stets $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$ gilt. Analog zum Vorgehen in Lemma 4.47 erhält man dann die q -ten (*Čech*-)Kohomologiegruppen via

$$\begin{aligned} Z^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) &:= \text{Kern}(\delta^q) \text{ und } B^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := \text{Bild}(\delta^{q-1}), \\ H^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) &:= Z^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) / B^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Für unsere Zwecke reichen die oben bereits eingeführten Kohomologiegruppen zu $q = 0, 1$ aus.

Die Gruppe $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ hängt unangenehmerweise von der Überdeckung $\mathcal{U}$ ab. Um auch hier etwas zu erhalten, das nur von X und $\mathcal{F}$ abhängt, gehen wir zu immer feiner werdenden Überdeckungen über und bilden den Limes. Dies führen wir nun durch:

Definition 4.49. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ sowie $\mathcal{V} := (V_j)_{j \in J}$ offene Überdeckungen von X . Wir sagen, $\mathcal{V}$ sei **feiner** als $\mathcal{U}$ und schreiben $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, wenn es eine **Verfeinerungsabbildung** $\tau: J \rightarrow I$ zwischen den Indexmengen gibt, für die $V_j \subseteq U_{\tau(j)}$ für alle $j \in J$ gilt.

Ist in diesem Setting $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, so bildet

$$t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}: \begin{cases} Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) & \rightarrow Z^1(\mathcal{V}; \mathcal{F}), \\ (f_{ij}) & \mapsto (g_{kl}) \end{cases} \text{ mit } g_{kl} := f_{\tau(k)\tau(l)}|_{V_k \cap V_l} \text{ für alle } k, l \in J$$

Koränder auf Koränder ab und induziert somit eine Abbildung

$$t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}: H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}; \mathcal{F}).$$

Proposition 4.50. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ sowie $\mathcal{V} := (V_j)_{j \in J}$ offene Überdeckungen von X . Dann ist die in Definition 4.49 eingeführte Abbildung

$$t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}: H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}; \mathcal{F})$$

unabhängig von der Wahl der Verfeinerungsabbildung τ und injektiv.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Unabhängigkeit von der Wahl von τ und betrachten dafür eine weitere Verfeinerungsabbildung $\tilde{\tau}: J \rightarrow I$. Für ein $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ seien

$$\begin{aligned} g_{kl} &:= f_{\tau(k)\tau(l)}|_{(V_k \cap V_l)} & \text{für alle } k, l \in J, \\ \tilde{g}_{kl} &:= f_{\tilde{\tau}(k)\tilde{\tau}(l)}|_{(V_k \cap V_l)} & \text{für alle } k, l \in J. \end{aligned}$$

Für ein beliebiges $k \in J$ setzen wir nun

$$h_k := f_{\tau(k)\tilde{\tau}(k)}|_{V_k} \in \mathcal{F}(V_k),$$

wobei wir $V_k \subseteq U_{\tau(k)} \cap U_{\tilde{\tau}(k)}$ beachten. Auf $V_k \cap V_l$ gilt dann

$$\begin{aligned} g_{kl} - \tilde{g}_{kl} &= f_{\tau(k)\tau(l)} - f_{\tilde{\tau}(k)\tilde{\tau}(l)} \\ &= f_{\tau(k)\tau(l)} + f_{\tau(l)\tilde{\tau}(k)} - f_{\tau(l)\tilde{\tau}(k)} - f_{\tilde{\tau}(k)\tilde{\tau}(l)} \\ &= f_{\tau(k)\tilde{\tau}(k)} - f_{\tau(l)\tilde{\tau}(l)} = h_k - h_l. \end{aligned}$$

Die Kozykel (g_{kl}) und $(\tilde{g}_{kl})$ aus $Z^1(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ unterscheiden sich also nur um einen Korand, so dass der Wert von $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ nicht von der Wahl von τ abhängt.

Nun zeigen wir die Injektivität. Sei dafür $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ so gewählt, dass $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}((f_{ij}))$ in $B^1(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ liegt. Die Injektivität folgt, wenn wir zeigen können, dass dann bereits $(f_{ij}) \in B^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ gilt. Nach Voraussetzung gibt es zunächst ein (g_k) mit $g_k \in \mathcal{F}(V_k)$ für alle $k \in J$ und

$$f_{\tau(k)\tau(l)} = g_k - g_l \quad \text{auf } V_k \cap V_l \text{ für alle } k, l \in J.$$

Sei nun $i \in I$ beliebig. Dann gilt auf $U_i \cap V_k \cap V_l$ die Identität

$$g_k - g_l = f_{\tau(k)\tau(l)} = f_{\tau(k)i} + f_{i\tau(l)} = f_{i\tau(l)} - f_{i\tau(k)}$$

und somit auch

$$f_{i\tau(k)} + g_k = f_{i\tau(l)} + g_l.$$

Durch Anwenden von (G_2) auf die Familie $(U_i \cap V_k)_{k \in J}$ offener Mengen erhalten wir ein $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit

$$h_i = f_{i\tau(k)} + g_k \quad \text{auf } U_i \cap V_k.$$

Seien nun $i, j \in I$ beliebig. Dann gilt auf $U_i \cap U_j \cap V_k$ die Identität

$$f_{ij} = f_{i\tau(k)} + f_{\tau(k)j} = f_{i\tau(k)} + g_k - f_{j\tau(k)} - g_k = h_i - h_j.$$

Da $k \in J$ für diesen Zweck beliebig gewählt war, gilt diese nach (G_1) sogar auf ganz $U_i \cap U_j$, so dass tatsächlich $(f_{ij}) \in B^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ gilt. $\square$

Nach Proposition 4.50 gilt

$$t_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} \circ t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = t_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}$$

für je drei Überdeckungen $\mathcal{W} < \mathcal{V} < \mathcal{U}$ von X . Wie bei der Definition 4.6 von Halmen können wir daher definieren:

Definition 4.51. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X . Für zwei offene Überdeckungen $\mathcal{U}$ und $\tilde{\mathcal{U}}$ von X sowie Elemente $\xi \in H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ und $\eta \in H^1(\tilde{\mathcal{U}}; \mathcal{F})$ sagen wir dann, es gelte $\xi \sim \eta$, wenn es eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von X mit $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ und $\mathcal{V} < \tilde{\mathcal{U}}$ sowie $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(\xi) = t_{\mathcal{V}}^{\tilde{\mathcal{U}}}(\eta)$ gibt. Man prüft leicht nach, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der formal disjunkten Vereinigung

$$\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

gegeben ist. Die Menge der Äquivalenzklassen

$$H^1(X; \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := \left(\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \right) / \sim$$

heißt dann die **1-te Garbenkohomologiegruppe** von X mit Koeffizienten in der Garbe $\mathcal{F}$. Hierbei ist die Verknüpfung elementweise definiert: Für zwei Elemente $\xi \in H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ und $\eta \in H^1(\tilde{\mathcal{U}}; \mathcal{F})$ mit offenen Überdeckungen $\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}$ von X setzen wir $\xi + \eta$ als die Klasse von $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(\xi) + t_{\mathcal{V}}^{\tilde{\mathcal{U}}}(\eta)$, wobei $\mathcal{V}$ eine beliebige gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{U}$ und $\tilde{\mathcal{U}}$ sei. Zu zeigen, dass $H^1(X; \mathcal{F})$ so tatsächlich eine abelsche Gruppe wird, ist eine Übungsaufgabe.

Bemerkung 4.52. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X .

(a) Nach Proposition 4.50 ist für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ die kanonische Abbildung

$$H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X; \mathcal{F})$$

injektiv. Insbesondere gilt

$$H^1(X; \mathcal{F}) = 0 \iff H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = 0 \text{ für alle offenen Überdeckungen } \mathcal{U}.$$

(b) Die 1-te Garbenkohomologiegruppe $H^1(X; \mathcal{F})$ lässt sich etwas abstrakter auch als erste Rechtsableitung des globalen Schnittfunktors definieren, was als Konzept weiter trägt. Unsere Definition über die Čech-Kohomologie hat aber den Vorteil, einfacher zugänglich zu sein und sich besser für konkrete Berechnungen zu eignen.

Beispiel 4.53. Sei X ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Dann gelten

$$(a) \quad H^1(X; \mathbb{C}) = 0,$$

$$(b) \quad H^1(X; \mathbb{Z}) = 0,$$

wobei $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{Z}$ die in Beispiel 4.5 (e) definierte Garbe der lokalkonstanten Funktionen mit Werten in den jeweiligen Zahlbereichen bezeichne,

denn: Seien $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbb{C})$. Wegen $Z^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}) \subseteq Z^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}^\infty)$ und, da $H^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}^\infty) = 0$ nach Übungsaufgabe 4.4 gilt, gibt es dann eine Kokette $(g_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}; \mathbb{C}^\infty)$ mit

$$f_{ij} = g_i - g_j \text{ auf } U_i \cap U_j.$$

Aufgrund der Lokalkonstanz gilt $df_{ij} = 0$ und somit auch $dg_i = dg_j$ auf $U_i \cap U_j$. Mit (G_2) folgt hieraus die Existenz einer globalen Differentialform $\omega \in C^\infty(X)$ mit $\omega|_{U_i} = dg_i$. Nach Proposition 4.26 gilt $ddg_i = 0$ für alle i und somit $d\omega = 0$. Da X einfach zusammenhängend ist, gibt es daher nach unseren Überlegungen im Anschluss an Korollar 4.32 eine glatte Stammfunktion $g \in C^\infty(X)$ mit $dg = \omega$. Wir setzen nun

$$f_i := g_i - g|_{U_i}$$

Aufgrund von

$$df_i = dg_i - dg = \omega - \omega = 0$$

ist f_i lokalkonstant auf U_i und es gilt also $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}; \mathbb{C})$. In $U_i \cap U_j$ gilt

$$f_{ij} = g_i - g_j = (g_i - g) - (g_j - g) = f_i - f_j.$$

Es folgt $(f_{ij}) \in B^1(\mathcal{U}; \mathbb{C})$ und somit insgesamt **(a)**.

Zum Beweis von **(b)** betrachten wir eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X und ein Kozykel $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z})$. Nach **(a)** gibt es dann eine Kokette $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}; \mathbb{C})$ mit

$$f_{ij} = f_i - f_j \quad \text{auf } U_i \cap U_j.$$

Aufgrund von $e^{2\pi i f_{ij}} = 0$ gilt dann $e^{2\pi i f_i} = e^{2\pi i f_j}$ auf $U_i \cap U_j$. Da X zusammenhängt, gibt es somit eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ mit

$$e^{2\pi i f_i} = e^{2\pi i c} \quad \text{für alle } i \in I.$$

Setzen wir nun

$$g_i := f_i - c \quad \text{für alle } i \in I,$$

so ist g_i nach Konstruktion ganzzahlig und also $(g_i) \in C^0(\mathcal{U}; \mathbb{Z})$. Außerdem gilt

$$f_{ij} = f_i - f_j = (f_i - c) - (f_j - c) = g_i - g_j,$$

so dass der Kozykel (f_{ij}) in $B^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z})$ liegt und also **(b)** gilt. #

Der nächste Satz zeigt, dass man unter Umständen bei der Berechnung von $H^1(X; \mathcal{F})$ mit einer einzigen offenen Überdeckung auskommt:

Satz 4.54 (Satz von LERAY⁵⁹). Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X mit $H^1(U_i; \mathcal{F}) = 0$ für alle $i \in I$. Dann gilt

$$H^1(X; \mathcal{F}) \cong H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

Eine solche Überdeckung $\mathcal{U}$ nennen wir eine **Leray-Überdeckung** erster Ordnung bezüglich $\mathcal{F}$.

Beweis. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine Leray-Überdeckung. Zum Beweis des Satzes reicht es aus, zu zeigen, dass dann für jede beliebige Verfeinerung $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J} < \mathcal{U}$ die nach Proposition 4.50 injektive Abbildung

$$t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}: H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}; \mathcal{F})$$

⁵⁹Jean Leray (1906–1998)

ein Isomorphismus ist. Zum Nachweis der Surjektivität dieser Abbildung müssen wir für jeden gegebenen Kozykel $(g_{kl}) \in Z^1(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ einen Kozykel $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ finden mit

$$(f_{\tau(k)\tau(l)}) - (g_{kl}) \in B^1(\mathcal{V}; \mathcal{F}),$$

wobei $\tau: J \rightarrow I$ eine beliebige, aber fest gewählte Verfeinerungsabbildung sei. Einen solchen gibt es aber,

denn: Die Familie $U_i \cap \mathcal{V} := (U_i \cap V_j)_{j \in J}$ ist eine offene Überdeckung von U_i . Nach Voraussetzung ist $H^1(U_i \cap \mathcal{V}; \mathcal{F}) = 0$, so dass es $h_{ik} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_k)$ gibt mit

$$g_{kl} = h_{ik} - h_{il} \quad \text{auf } U_i \cap V_k \cap V_l.$$

Hieraus folgt

$$h_{jk} - h_{ik} = h_{jl} - h_{il} \quad \text{auf } U_i \cap U_j \cap V_k \cap V_l,$$

so dass nach (G_2) Elemente $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ existieren mit

$$f_{ij} = h_{jk} - h_{ik} \quad \text{auf } U_i \cap U_j \cap V_k.$$

Es ist klar, dass (f_{ij}) die Kozykelbedingung erfüllt und somit in $Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ liegt. Wir setzen $\tilde{h}_k := h_{\tau(k)k}|_{V_k} \in \mathcal{F}(V_k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_{\tau(k)\tau(l)} - g_{kl} &= (h_{\tau(l)k} - h_{\tau(k)k}) - (h_{\tau(l)l} - h_{\tau(k)l}) \\ &= h_{\tau(l)l} - h_{\tau(k)k} \\ &= \tilde{h}_l - \tilde{h}_k \end{aligned} \quad \text{auf } V_k \cap V_l$$

und somit die Behauptung. #

□

Beispiel 4.55. In der Notation von Beispiel 4.53 gelten

$$H^1(\mathbb{C}^\times; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \quad \text{und} \quad H^1(\mathbb{C}^\times; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

denn: Wir zeigen die Behauptung nur für die lokalkonstante Garbe $\mathbb{Z}$, da die Argumentation für $\mathbb{C}$ genauso funktioniert. Wir überdecken $\mathbb{C}^\times$ mit den geschlitzten Ebenen

$$U_1 := \mathbb{C}_- = \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}_{<0} \quad \text{und} \quad U_2 := \mathbb{C}_+ := \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}_{<0}.$$

Da diese bekanntlich Sterngebiete und also einfach zusammenhängend sind, erfüllt $\mathcal{U} := (U_1, U_2)$ nach Beispiel 4.53 bezüglich der lokalkonstanten Garbe $\mathbb{Z}$ die Bedingungen

$$H^1(U_1; \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{und} \quad H^1(U_2; \mathbb{Z}) = 0$$

einer Leray-Überdeckung und nach dem Satz von Leray 4.54 folgt

$$H^1(\mathbb{C}^\times; \mathbb{Z}) \cong H^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z}).$$

Aufgrund der Kozykelbedingung ist jeder Kozykel $(a_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z})$ alternierend und erfüllt also $a_{ii} = 0$ sowie $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$. Folglich ist (a_{ij}) bereits vollständig durch a_{12} bestimmt und es gilt

$$Z^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) = C^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

wobei die letzte Kongruenz daher rührt, dass der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ mit der oberen und der unteren komplexen Halbebene in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt. Da U_1 und U_2 beide zusammenhängen, gilt weiter $\mathbb{Z}(U_1) \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}(U_2)$ und also

$$C^0(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Der Ableitungsoperator δ^0 ist dann hinsichtlich dieser Isomorphismen durch

$$\delta^0: \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \\ (b_1, b_2) & \mapsto (b_2 - b_1, b_2 - b_1) \end{cases}$$

gegeben und es folgt

$$B^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) = \text{Bild}(\delta^0) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a_1 = a_2\}.$$

Die Behauptung ergibt sich nun durch Quotientenbildung

$$H^1(\mathbb{C}^\times; \mathbb{Z}) \cong H^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) = Z^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) / B^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}.$$

#

Mit einigem Aufwand kann man zeigen, dass für jede kompakte Riemann'sche Fläche X der Vektorraum $H^1(X; \mathcal{O})$ stets endlichdimensional ist. Dies ermöglicht die folgende Festlegung:

Definition 4.56. Für eine kompakte Riemann'sche Fläche X heißt

$$g(X) := \dim(H^1(X; \mathcal{O}))$$

das **Geschlecht** von X .

Nach Übungsaufgabe 4.5 hat beispielsweise die Riemann'sche Zahlenkugel $\bar{\mathbb{C}}$ Geschlecht $g(\bar{\mathbb{C}}) = 0$.

4.5 Die exakte Kohomologiesequenz

Definition 4.57. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben abelscher Gruppen über einem topologischen Raum X . Dann ist ein **Garbenhomomorphismus** $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ eine Familie von Gruppenhomomorphismen

$$\varphi_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \quad \text{für offene } U \subseteq X,$$

die mit den Beschränkungsabbildungen verträglich sind, was bedeutet, dass für jedes Paar offener Mengen $U, \tilde{U} \subseteq X$ mit $\tilde{U} \subseteq U$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \varrho_{\tilde{U}}^U \downarrow & & \downarrow \varrho_{\tilde{U}}^U \\ \mathcal{F}(\tilde{U}) & \xrightarrow{\varphi_{\tilde{U}}} & \mathcal{G}(\tilde{U}) \end{array}$$

kommutiert. Sind alle φ_U Isomorphismen, so heißt φ ein **Garbenisomorphismus**.

Analog definiert man Garbenhomomorphismen zwischen Garben von Vektorräumen.

Beispiel 4.58. Sei X eine Riemann'sche Fläche. Dann gilt:

- (a) Seien $\mathcal{C}^\infty$ die Garbe der glatten Funktionen auf X und $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2$ die Garbe der differenzierbaren 1-Formen bzw. 2-Formen auf X . Dann liefert die jeweilige Ableitung Garbenhomomorphismen $d: \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{E}^1$ und $d: \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2$.
- (b) Die natürlichen Inklusionen $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty, \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}, \Omega \hookrightarrow \mathcal{E}^1, \dots$ sind Garbenhomomorphismen.

Definition 4.59. Sei $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Garbenhomomorphismus auf einem topologischen Raum X . Für eine beliebige offene Teilmenge $U \subseteq X$ sei weiter

$$\mathcal{K}(U) := \text{Kern}(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U))$$

Die Familie der $\mathcal{K}(U)$ bildet – wie man leicht überprüft – zusammen mit den von $\mathcal{F}$ geerbten Beschränkungsabbildungen wieder eine Garbe, die der **Kern** von φ heißt und $\text{Kern}(\varphi)$ geschrieben wird.

Beispiel 4.60. Nach Satz 4.27 gilt $\Omega^1 = \text{Kern}(\mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2)$.

Die entsprechende Konstruktion für das Bild anstelle des Kerns liefert eine Prägarbe, die im Allgemeinen keine Garbe ist.

Definition 4.61. Ein Garbenhomomorphismus $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X gibt für jedes $x \in X$ einen Homomorphismus der Halme $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$. Eine Sequenz von Garbenhomomorphismen

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

heißt **exakt**, wenn für jedes $x \in X$ die Sequenz

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x$$

exakt ist und also $\text{Kern}(\psi_x) = \text{Bild}(\varphi_x)$ gilt. Eine Sequenz von Garbenhomomorphismen

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathcal{F}_n \quad \text{für ein } n \geq 3$$

heißt **exakt**, wenn für alle $1 \leq k \leq n - 2$ die Sequenzen

$$\mathcal{F}_k \xrightarrow{\varphi_k} \mathcal{F}_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} \mathcal{F}_{k+2}$$

exakt sind. Ein Garbenhomomorphismus $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ heißt ein

- **Monomorphismus**, falls $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ exakt ist,
- **Epimorphismus**, falls $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \rightarrow 0$ exakt ist.

Beispiel 4.62. Die Sequenz von Garbenhomomorphismen

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \rightarrow 0$$

ist exakt,

denn: Konstruktionsgemäß ist die Garbe $\mathbb{C}$ der lokalkonstanten Funktionen in $\mathcal{O}$ enthalten. Da sich je zwei verschiedene Stammfunktionen einer Differentialform gerade um eine Konstante unterscheiden, gilt auch Exaktheit bei $\mathcal{O}$. Es verbleibt zu zeigen, dass $d: \mathcal{O} \rightarrow \Omega^1$ ein Epimorphismus ist. Das folgt daraus, dass nach Übungsaufgabe 4.3 lokal jede holomorphe Differentialform ω mit $d\omega = 0$ eine Stammfunktion hat. #

Lemma 4.63. Für eine exakte Sequenz von Garbenhomomorphismen

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

auf einem topologischen Raum X und für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist auch die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$$

exakt.

Beweis. Zunächst ist φ_U injektiv,

denn: Sei $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(f) = 0$. Da $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ für jedes $x \in U$ injektiv ist, gibt es zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq U$ mit $f|_{U_x} \equiv 0$. Mit (G_1) folgt daraus $f \equiv 0$. #

Es gilt aber auch $\text{Kern}(\psi_U) = \text{Bild}(\varphi_U)$,

denn: Seien zunächst $f \in \mathcal{F}(U)$ und $g := \varphi_U(f)$. Da für jedes $x \in U$ die Sequenz der Halme $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ exakt ist, besitzt jeder Punkt $x \in U$ eine Umgebung $U_x \subseteq U$ mit $\psi(g)|_{U_x} \equiv 0$. Mit (G_1) folgt daraus $\psi(g) \equiv 0$ und damit die Inklusion $\text{Kern}(\psi_U) \supseteq \text{Bild}(\varphi_U)$.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion geben wir uns ein Element $g \in \mathcal{G}(U)$ mit $\psi(g) \equiv 0$ vor. Nun gilt $\text{Kern}(\psi_x) = \text{Bild}(\varphi_x)$ für alle $x \in U$, so dass es eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von U und Elemente $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\varphi_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$ für alle $i \in I$ gibt. Nach Konstruktion ist dann $\varphi_{U_i \cap U_j}(f_i - f_j) = 0$ und mit der bereits gezeigten Injektivität von $\varphi_{U_i \cap U_j}$ folgt $f_i = f_j$ auf $U_i \cap U_j$. Nach (G_2) gibt es somit ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$. Aus $\varphi_U(f)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(f) = g|_{U_i}$ folgt nun mit (G_1) , angewandt auf die Garbe $\mathcal{G}$, die Identität $\varphi(f) = g$ und insgesamt die Inklusion $\text{Kern}(\psi_U) \subseteq \text{Bild}(\varphi_U)$. #

□

Die entsprechende Aussage für kurze exakte Sequenzen $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$ von Garbenhomomorphismen gilt nicht, da aus der Epimorphie von ψ nicht allgemein die Surjektivität aller zugehörigen ψ_U folgt.

Ein Garbenhomomorphismus $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X induziert Homomorphismen

$$\begin{aligned}\varphi^0: H^0(X; \mathcal{F}) &\rightarrow H^0(X; \mathcal{G}), \\ \varphi^1: H^1(X; \mathcal{F}) &\rightarrow H^1(X; \mathcal{G}),\end{aligned}\tag{4.5}$$

wobei φ^0 identisch mit der Abbildung $\varphi_X: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ ist und φ^1 wie folgt gegeben ist: Für eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X definieren wir die Abbildung

$$\varphi_{\mathcal{U}}: \begin{cases} C^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) & \rightarrow C^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}), \\ (f_{ij}) & \mapsto (\varphi(f_{ij})). \end{cases}$$

Diese ordnet Kozykeln Kozykel und Korändern Koränder zu, so dass wir einen Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}_{\mathcal{U}}: H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$$

erhalten. Die Familie aller $\tilde{\varphi}_{\mathcal{U}}$, wobei $\mathcal{U}$ alle offenen Überdeckungen von X durchläuft, induziert schließlich den Homomorphismus φ^1 .

Ist nun sogar eine kurze exakte Sequenz von Garbenhomomorphismen auf X

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

gegeben, so definieren wir zusätzlich einen **Verbindungshomomorphismus**

$$\delta: H^0(X; \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X; \mathcal{F})\tag{4.6}$$

wie folgt: Sei

$$h \in H^0(X; \mathcal{H}) = \mathcal{H}(X).$$

Da alle Homomorphismen $\psi_x: \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ surjektiv sind, gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X und eine Kokette $(g_i) \in C^0(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ mit

$$\psi(g_i) = h|_{U_i} \quad \text{für alle } i \in I.$$

Auf $U_i \cap U_j$ gilt daher $\psi(g_j - g_i) = 0$ und nach Lemma 4.63 gibt es ein $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ mit

$$\varphi(f_{ij}) = g_j - g_i.\tag{4.7}$$

Auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ gilt $\varphi(f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}) = 0$ und wegen Lemma 4.63 folgt $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$, also

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

Wir nehmen nun für $\delta(h) \in H^1(X; \mathcal{F})$ die durch (f_{ij}) repräsentierte Kohomologieklass. Man kann leicht nachweisen, dass dies von den verschiedenen Wahlmöglichkeiten im Zuge dieser Konstruktion unabhängig ist.

Satz 4.64. Seien X ein topologischer Raum und

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Garbenhomomorphismen auf X . Dann ist auch die induzierte Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^0} H^0(X; \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^0} H^0(X; \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^1(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^1} H^1(X; \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^1} H^1(X; \mathcal{H})$$

von Kohomologiegruppen exakt.

Beweis. Die Exaktheit an den Stellen $H^0(X; \mathcal{F})$ und $H^0(X; \mathcal{G})$ gilt nach Lemma 4.63.

Weiter gilt bei $H^0(X; \mathcal{H})$ Exaktheit,

denn: Sei zunächst $h = \psi^0(g)$ für ein $g \in H^0(X; \mathcal{G})$. In der Konstruktion von $\delta(h)$ können wir dann $g_i = g|_{U_i}$ wählen. Dies ergibt $f_{ij} = 0$ und also $\delta(h) = 0$. Wir haben somit $\text{Bild}(\psi^0) \subseteq \text{Kern}(\delta)$ gezeigt.

Sei nun umgekehrt $h \in \text{Kern}(\delta)$. Nach Konstruktion wird $\delta(h)$ durch den Kozykel $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ repräsentiert und wegen $\delta(h) = 0$ gibt es eine Kokette $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ mit $f_{ij} = f_j - f_i$ auf $U_i \cap U_j$. Setzen wir nun $\tilde{g}_i := g_i - \varphi^0(f_i)$, so folgt wegen $\varphi(f_{ij}) = g_j - g_i$ bereits $\tilde{g}_j = \tilde{g}_i$ auf $U_i \cap U_j$. Die $\tilde{g}_i$ setzen sich also zu einem globalen Element $g \in H^0(X; \mathcal{G})$ zusammen. Auf U_i erfüllt dieses

$$\psi(g) = \psi(\tilde{g}_i) = \psi(g_i - \varphi(f_i)) = \psi(g_i) = h$$

und es folgt $h \in \text{Bild}(\psi^0)$. #

Die Sequenz ist auch bei $H^1(X; \mathcal{F})$ exakt,

denn: Aufgrund von (4.7) gilt zunächst $\text{Bild}(\delta) \subseteq \text{Kern}(\varphi^1)$.

Sei umgekehrt $\xi \in \text{Kern}(\varphi^1)$ durch den Kozykel $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ repräsentiert. Wegen $\varphi^1(\xi) = 0$ gibt es dann eine Kokette $(g_i) \in C^0(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ mit $\varphi(f_{ij}) = g_j - g_i$ auf $U_i \cap U_j$. Daraus folgt

$$0 = \psi(\varphi(f_{ij})) = \psi(g_j) - \psi(g_i)$$

auf $U_i \cap U_j$, so dass es ein $h \in \mathcal{H}(X) = H^0(X; \mathcal{H})$ mit $h|_{U_i} = \psi(g_i)$ gibt. Nach Konstruktion ist dann $\delta(h) = \xi$ und also $\xi \in \text{Bild}(\delta)$. #

Schließlich gilt Exaktheit bei $H^1(X; \mathcal{G})$,

denn: Zunächst ist

$$\mathcal{F}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}(U_i \cap U_j)$$

nach Lemma 4.63 exakt, woraus bereits $\text{Bild}(\varphi^1) \subseteq \text{Kern}(\psi^1)$ folgt.

Sei umgekehrt $\eta \in \text{Kern}(\psi^1)$ durch den Kozykel $(g_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ repräsentiert. Wegen $\psi^1(\eta) = 0$ gibt es dann eine Kokette $(h_i) \in C^0(\mathcal{U}; \mathcal{H})$ mit $\psi(g_{ij}) = h_j - h_i$ auf $U_i \cap U_j$. Zu jedem $x \in X$ wählen wir ein $i_x \in I$ mit $x \in U_{i_x}$. Da $\psi_x: \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ surjektiv ist, gibt es eine offene Umgebung $V_x \subseteq U_{i_x}$ von x und ein Element $g_x \in \mathcal{G}(V_x)$ mit $\psi(g_x) = h_{i_x}|_{V_x}$. Seien $\mathcal{V} := (V_x)_{x \in X}$ und

$\tilde{g}_{xy} := g_{i_x i_y}|_{V_x \cap V_y}$. Dann ist $\tilde{g}_{xy} \in Z^1(\mathcal{V}; \mathcal{G})$ ein Kozykel, der ebenfalls die Kohomologieklassse η repräsentiert. Der Kozykel $(\tilde{g}_{xy})$ mit $\tilde{\tilde{g}}_{xy} := \tilde{g}_{xy} - g_y + g_x$ ist zu $(\tilde{g}_{xy})$ kohomolog und es gilt $\psi(\tilde{\tilde{g}}_{xy}) = 0$, es existiert also ein $f_{xy} \in \mathcal{F}(V_x \cap V_y)$ mit $\varphi(f_{xy}) = \tilde{\tilde{g}}_{xy}$. Da

$$\varphi: \mathcal{F}(V_x \cap V_y \cap V_z) \rightarrow \mathcal{G}(V_x \cap V_y \cap V_z)$$

nach Lemma 4.63 injektiv ist, gilt $f_{xy} \in Z^1(\mathcal{V}; \mathcal{F})$, und für die Kohomologieklassse $\xi \in H^1(X; \mathcal{F})$ von (f_{xy}) gilt $\varphi^1(\xi) = \eta$. Es folgt $\text{Kern}(\psi^1) \subseteq \text{Bild}(\varphi^1)$. #

Insgesamt haben wir nun den Satz bewiesen. $\square$

4.6 Der Satz von Riemann-Roch

Der Satz von Riemann-Roch 4.73 ist zentral für die Theorie der kompakten Riemann'schen Flächen. Grob gesprochen bemisst er die Anzahl linear unabhängiger meromorpher Funktionen mit vorgegebenem Polstellenverhalten. Ein wichtiges Hilfsmittel hierbei sind die Divisoren, die wir nun als nächstes einführen:

Definition 4.65. Ein *Divisor* auf einer Riemann'schen Fläche X ist eine Abbildung

$$D: X \rightarrow \mathbb{Z}$$

mit der Eigenschaft, dass für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ nur endlich viele Punkte $x_0 \in X$ mit $D(x_0) \neq 0$ existieren. Zusammen mit der punktweisen Addition bildet die Menge der Divisoren auf X eine abelsche Gruppe, die wir mit $\text{Div}(X)$ bezeichnen. Diese Gruppe ist bezüglich der Relation

$$D \leq D' \quad :\Longleftrightarrow \quad D(x_0) \leq D'(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in X$$

partiell angeordnet.

Divisoren lassen sich verwenden, um Null- und Polstellen meromorpher Funktionen und Differentialformen auf einer gegebenen offenen Teilmenge U einer Riemann'schen Fläche X zu kodieren und leichter handhabbar zu machen. Für ein $f \in \mathcal{M}(U)$ und ein $a \in U$ setzen wir dafür zunächst

$$\text{ord}_a(f) := \begin{cases} 0\text{-ord}(f; a) - \infty\text{-ord}(f; a) & \text{für } f \not\equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } a, \\ \infty & \text{für } f \equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } a, \end{cases}$$

wobei wir die Null- und Polstellenordnungen in einer geeigneten punktierten Umgebung von a in U auslesen. Für ein $\omega \in \mathcal{M}^1(U)$ und ein $a \in U$ wählen wir eine Koordinatenumgebung (U', z) von a und schreiben $\omega = f dz$ auf $U \cap U'$ mit einer meromorphen Funktion f . Wir setzen dann

$$\text{ord}_a(\omega) := \text{ord}_a(f).$$

Definition 4.66. Sei X eine Riemann'sche Fläche. Dann sagen wir:

- Sei $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ eine nichttriviale meromorphe Funktion. Dann ist durch $a \mapsto \text{ord}_a(f)$ ein Divisor $(f) \in \text{Div}(X)$ definiert, der **Divisor von f** . Jeder Divisor, der sich so erhalten lässt, heißt ein **Hauptdivisor**. Zwei Divisoren $D, D' \in \text{Div}(X)$ heißen **äquivalent**, wenn ihre Differenz $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.
- Sei $\omega \in \mathcal{M}^1(X) \setminus \{0\}$ eine nichttriviale meromorphe 1-Form. Dann ist durch $a \mapsto \text{ord}_a(\omega)$ ein Divisor $(\omega) \in \text{Div}(X)$ definiert, der **Divisor von ω** . Jeder Divisor, der sich so erhalten lässt, heißt ein **kanonischer Divisor**.

Bemerkung 4.67. Sei X eine Riemann'sche Fläche. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle $f, g \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ und $\omega \in \mathcal{M}^1(X) \setminus \{0\}$ gelten die folgenden, leicht zu verifizierenden Rechenregeln:

$$(fg) = (f) + (g), \quad (f\omega) = (f) + (\omega) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{f}\right) = -(f).$$

- (b) Je zwei kanonische Divisoren sind zueinander äquivalent, denn zu je zwei $\omega, \omega' \in \mathcal{M}^1(X) \setminus \{0\}$ gibt es ein $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ mit $\omega' = f\omega$ und also mit

$$(\omega') \stackrel{(a)}{=} (f) + (\omega).$$

Definition 4.68. Sei X eine kompakte Riemann'sche Fläche. Dann gibt es für jeden Divisor $D \in \text{Div}(X)$ nur endlich viele Punkte $x_0 \in X$ mit $D(x_0) \neq 0$. Die Abbildung

$$\deg: \begin{cases} \text{Div}(X) & \rightarrow \mathbb{Z}, \\ D & \mapsto \sum_{x_0 \in X} D(x_0) \end{cases}$$

ist somit wohldefiniert und außerdem offensichtlich ein Gruppenhomomorphismus. Wir nennen $\deg(D)$ den **Grad** eines Divisors $D \in \text{Div}(X)$.

Für einen Hauptdivisor (f) mit $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ gilt $\deg(f) = 0$, da f als nichttriviale eigentliche meromorphe Funktion nach Korollar 1.58 mit Vielfachheiten gerechnet genauso viele Null- wie Polstellen hat. Es folgt, dass äquivalente Divisoren stets denselben Grad besitzen.

Definition 4.69. Seien X eine Riemann'sche Fläche und $D \in \text{Div}(X)$. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ sei weiter

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) : \text{ord}_a(f) \geq -D(a) \text{ für alle } a \in U\}.$$

Dann trägt $\mathcal{O}_D$ zusammen mit den üblichen Beschränkungsabbildungen die Struktur einer Garbe. Für den Nulldivisor $D = 0$ gilt dabei speziell $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$.

Sind $D, D' \in \text{Div}(X)$ zwei äquivalente Divisoren, so sind die Garben $\mathcal{O}_D$ und $\mathcal{O}_{D'}$ isomorph,

denn: Sei $g \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ mit $D - D' = (g)$. Dann ist der durch Multiplikation mit g induzierte Garbenhomomorphismus

$$\begin{cases} \mathcal{O}_D & \rightarrow \mathcal{O}_{D'}, \\ f & \mapsto fg \end{cases}$$

ein Isomorphismus. #

Proposition 4.70. Seien X eine kompakte Riemann'sche Fläche und $D \in \text{Div}(X)$ ein Divisor mit $\deg(D) < 0$. Dann gilt

$$H^0(X; \mathcal{O}_D) = 0.$$

Beweis. Angenommen, es gäbe ein nichttriviales $f \in H^0(X; \mathcal{O}_D)$. Dann gälte

$$(f) \geq -D,$$

also

$$\deg(f) \geq -\deg(D) > 0,$$

im Widerspruch zu $\deg(f) = 0$. □

Seien $D \leq D'$ zwei Divisoren auf einer Riemann'schen Fläche X . Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ gilt dann $\mathcal{O}_D(U) \subseteq \mathcal{O}_{D'}(U)$ und wir erhalten einen natürlichen injektiven Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D'}$.

Wir betrachten ein $x \in X$, eine Koordinatenumgebung (U, z) von x mit $z(x) = 0$ sowie $k := D(x)$ und $k' := D'(x)$. Dann besteht der Halm $\mathcal{O}_{D,x}$ aus allen meromorphen Funktionskeimen φ in x mit Laurent-Entwicklung der Form

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit } a_n \in \mathbb{C} \text{ und } a_{-k} \neq 0.$$

Entsprechendes gilt für $\mathcal{O}_{D',x}$. Der Quotient $\mathcal{O}_{D',x} / \mathcal{O}_{D,x}$ ist somit ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Dimension $k' - k$, in dem – bei gegebener lokaler Koordinate z – jedes Element eindeutig als eine Summe

$$\sum_{n=-k'}^{-k-1} a_n z^n \quad \text{mit } a_n \in \mathbb{C} \text{ und } a_{-k'} \neq 0$$

geschrieben werden kann. Wir definieren dann die Garbe $\mathcal{H}_{D'}^D$ durch

$$\mathcal{H}_{D'}^D(U) := \prod_{x \in U} \mathcal{O}_{D',x} / \mathcal{O}_{D,x} \quad \text{für offene } U \subseteq X$$

und den natürlichen Beschränkungsabbildungen. Die Garbenaxiome sind dann trivialerweise erfüllt.

Für jedes offene $U \subseteq X$ mit $D'|_U = D|_U$ gilt trivialerweise $\mathcal{H}_{D'}^D(U) = 0$. Hieraus folgt

$$\mathcal{H}_{D',x}^D = 0 \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } D'(x) = D(x).$$

Allgemein gilt

$$\mathcal{H}_{D',x}^D = \mathcal{O}_{D',x} / \mathcal{O}_{D,x}.$$

Wir erhalten einen surjektiven Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_{D'} \rightarrow \mathcal{H}_{D'}^D$ mit Kern $\mathcal{O}_D$ und insgesamt also die exakte Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D'} \rightarrow \mathcal{H}_{D'}^D \rightarrow 0. \quad (4.8)$$

Lemma 4.71. *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt*

$$H^1(X; \mathcal{H}_{D'}^D) = 0.$$

Ist X speziell kompakt, so gilt außerdem

$$\dim H^0(X; \mathcal{H}_{D'}^D) = \deg(D') - \deg(D).$$

Beweis. Die Menge M aller Punkte $x \in X$ mit $D'(x) \neq D(x)$ ist offensichtlich abgeschlossen und diskret. Sei nun $\xi \in H^1(X; \mathcal{H}_{D'}^D)$ eine Kohomologieklass, die von einem Kozykel aus $Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{H}_{D'}^D)$ repräsentiert wird, wobei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist. Die Überdeckung $\mathcal{U}$ besitzt eine Verfeinerung $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ derart, dass jedes V_i höchstens einen Punkt aus M enthält. Für $i \neq j$ ist dann $\mathcal{H}_{D'}^D(V_i \cap V_j) = 0$ und es folgt $Z^1(\text{cal } \mathcal{V}; \mathcal{H}_{D'}^D) = 0$. Hieraus folgt $\xi = 0$ und somit die erste Behauptung.

Ist nun X speziell kompakt, so ist M endlich und es gilt

$$\dim H^0(X; \mathcal{H}_{D'}^D) = \dim \prod_{x \in M} \mathcal{O}_{D',x} / \mathcal{O}_{D,x} = \sum_{x \in M} (D'(x) - D(x)) = \deg(D') - \deg(D).$$

□

Die exakte Kohomologiesequenz gemäß Satz 4.64 zur exakten Sequenz (4.8) von Garben liefert nun:

Korollar 4.72. *Für je zwei Divisoren $D' \leq D$ auf einer kompakten Riemann'schen Fläche X hat man die exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow H^0(X; \mathcal{O}_D) \rightarrow H^0(X; \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow H^0(X; \mathcal{H}_{D'}^D) \rightarrow H^1(X; \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X; \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow 0.$$

Setzen wir in der Situation von Korollar 4.72

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{D'}^D &:= \text{Bild}(H^0(X; \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow H^0(X; \mathcal{H}_{D'}^D)), \\ \mathcal{W}_{D'}^D &:= H^0(X; \mathcal{H}_{D'}^D) / \mathcal{V}_{D'}^D, \end{aligned}$$

so gilt

$$\dim(\mathcal{V}_{D'}^D) + \dim(\mathcal{W}_{D'D}) = \deg(D') - \deg(D) \quad (4.9)$$

und die Sequenz im Korollar spaltet sich auf in die zwei exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X; \mathcal{O}_D) &\rightarrow H^0(X; \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow \mathcal{V}_{D'}^D \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{W}_{D'}^D &\rightarrow H^1(X; \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X; \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow 0; \end{aligned} \quad (4.10)$$

insbesondere sind alle vorkommenden Vektorräume endlichdimensional. Wir haben nun alle Werkzeuge zusammen, um den Satz von Riemann-Roch zu beweisen:

Satz 4.73 (Satz von Riemann-Roch). *Seien X eine kompakte Riemann'sche Fläche von Geschlecht $g(X)$ und $D \in \text{Div}(X)$. Dann sind $H^0(X; \mathcal{O}_D)$ und $H^1(X; \mathcal{O}_D)$ endlichdimensionale $\mathbb{C}$ -Vektorräume und es gilt*

$$\dim(H^0(X; \mathcal{O}_D)) - \dim(H^1(X; \mathcal{O}_D)) = 1 - g(X) + \deg(D).$$

Beweis. Der Satz gilt für den Divisor $D = 0$,

denn: Nach Korollar 1.53 besteht $H^0(X; \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X)$ nur aus den konstanten Funktionen und es gilt $\dim(H^0(X; \mathcal{O})) = 1$. Nach Definition ist weiter $\dim(H^1(X; \mathcal{O})) = g(X)$, so dass die Behauptung mit $\deg(D) = 0$ folgt. #

Seien nun $D \leq D'$ zwei Divisoren auf X , so gilt nach (4.10)

$$\begin{aligned} \dim(H^0(X; \mathcal{O}_{D'})) &= \dim(H^0(X; \mathcal{O}_D)) + \dim(\mathcal{V}_{D'}^D), \\ \dim(H^1(X; \mathcal{O}_D)) &= \dim(H^1(X; \mathcal{O}_{D'})) + \dim(\mathcal{W}_{D'}^D). \end{aligned}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen und mit (4.9) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\dim(H^0(X; \mathcal{O}_{D'})) - \dim(H^1(X; \mathcal{O}_{D'})) - \deg(D') \\ &= \dim(H^0(X; \mathcal{O}_D)) - \dim(H^1(X; \mathcal{O}_D)) - \deg(D). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass der Satz genau dann für D' gilt, wenn er für D gilt. Da der Satz für $D = 0$ gilt, folgt so die Gültigkeit für alle $D' \geq 0$. Für einen beliebigen Divisor D gibt es aber stets einen Divisor $D' \geq 0$ mit $D \leq D'$, so dass wir mit demselben Argument den Satz in voller Allgemeinheit gezeigt haben. □

4.7 Die Formel von Riemann-Hurwitz

Satz 4.74. *Sei X eine kompakte Riemann'sche Fläche von Geschlecht $g(X)$. Dann gilt für den Divisor einer nichtverschwindenden meromorphen 1-Form $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ die Formel*

$$\deg(\omega) = 2g(X) - 2.$$

Beweis. Nach dem Satz von Riemann-Roch 4.73 gilt

$$\dim H^0(X; \mathcal{O}_{(\omega)}) - \dim H^1(X; \mathcal{O}_{(\omega)}) = 1 - g(X) + \deg(\omega).$$

Nun definiert aber nach Definition des Divisors einer meromorphen Differentialform die Multiplikation mit ω einen Garbenisomorphismus

$$\mathcal{O}_{(\omega)} \cong \Omega^1.$$

Mit diesem erhalten wir

$$1 - g(X) + \deg(\omega) = \dim H^0(X; \Omega^1) - \dim H^1(X; \Omega^1).$$

Mit dem SERRE'schen Dualitätssatz⁶⁰ wird dies zu

$$\begin{aligned} 1 - g(X) + \deg(\omega) &= \dim H^1(X; \mathcal{O})^* - \dim H^0(X; \mathcal{O})^* \\ &= \dim H^1(X; \mathcal{O}) - \dim H^0(X; \mathcal{O}) \\ &= g(X) - \dim \mathcal{O}(X) \\ &\stackrel{1.53}{=} g(X) - 1 \end{aligned}$$

und somit den Satz. □

Satz 4.75 (Formel von Riemann-HURWITZ⁶¹). Seien X, Y kompakte Riemann'sche Flächen und $f: X \rightarrow Y$ für ein $n \in \mathbb{N}$ eine n -blättrige holomorphe Überlagerung mit Gesamtverzweigungsordnung v_f . Dann gilt die folgende Beziehung zwischen den Geschlechtern von X und Y :

$$g(X) = \frac{v_f}{2} + n \cdot (g(Y) - 1) + 1.$$

Beweis. Sei ω eine nichtverschwindende meromorphe Differentialform auf Y . Nach Satz 4.74 gilt dann

$$\deg(\omega) = 2g(Y) - 2 \quad \text{und} \quad \deg(f^*\omega) = 2g(X) - 2. \quad (4.11)$$

Seien weiter $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Nach Satz 1.40 gibt es dann Koordinatenumgebungen (U, z) von x_0 bzw. (U', z') von y_0 mit $z(x_0) = 0$ und $z'(y_0) = 0$ derart, dass sich f bezüglich dieser Koordinaten als $z' = z^k$ mit $k = y_0\text{-ord}(f; x_0)$ schreiben lässt. Ist $\omega = g(z') dz'$ für alle $z' \in U'$, so gilt

$$f^*\omega = g(z^k) dz^k = k z^{k-1} g(z^k) dz \quad \text{für alle } z \in U$$

und somit

$$\text{ord}_{x_0}(f^*\omega) = (y_0\text{-ord}(f; x_0) - 1) + y_0\text{-ord}(f; x_0) \cdot \text{ord}_{y_0}(\omega).$$

⁶⁰Jean-Pierre Serre (*1926). Der Dualitätssatz liefert auf einer kompakten Riemann'schen Fläche X eine Isomorphie zwischen $H^0(X; \Omega^1)$ und dem Dualraum von $H^1(X; \mathcal{O})$. Sein Beweis liegt nicht allzu weit entfernt und verwendet Mittag-Leffler-Verteilungen von Differentialformen sowie deren Residuen.

⁶¹Adolf Hurwitz (1859–1919)

Mit Proposition 1.57 und Bemerkung 2.33 folgt hieraus durch Aufsummieren über die Faser von y_0

$$\sum_{x_0 \in f^{-1}(y_0)} \text{ord}_{x_0}(f^*\omega) = \sum_{x_0 \in f^{-1}(y_0)} (y_0\text{-ord}(f; x_0) - 1) + n \cdot \text{ord}_{y_0}(\omega).$$

Summieren wir weiter über ganz X , so erhalten wir mit Definition 1.48

$$\deg(f^*\omega) = \sum_{y_0 \in Y} \sum_{x_0 \in f^{-1}(y_0)} \text{ord}_{x_0}(f^*\omega) = v_f + n \cdot \sum_{y_0 \in Y} \text{ord}_{y_0}(\omega) = v_f + n \cdot \deg(\omega).$$

Die Formel von Riemann-Hurwitz folgt nun mit (4.11). $\square$

4.8 Die Geschlechtsformel

Aus der Formel von Riemann-Hurwitz 4.75 lässt sich eine geschlossene Formel für das Geschlecht der in Abschnitt 3.6 eingeführten Riemann'schen Flächen $X(\Gamma)$ für Kongruenzuntergruppen Γ herleiten:

Satz 4.76 (Geschlechtsformel). *Sei $\Gamma \subseteq \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe mit $\mu := [\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) : \bar{\Gamma}]$ und v_2 bzw. v_3 die Anzahl der $\bar{\Gamma}$ -Äquivalenzklassen elliptischer Punkte von Ordnung 2 bzw. 3. Sei weiter v_∞ die Anzahl der Spitzenklassen bezüglich $\bar{\Gamma}$. Dann ist das Geschlecht von $X(\Gamma)$ gegeben durch*

$$g(X(\Gamma)) = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{v_2}{4} - \frac{v_3}{3} - \frac{v_\infty}{2}.$$

Beweis. Da es nach Proposition 3.31 einen Fundamentalbereich von $\bar{\Gamma}$ gibt, der sich aus μ Kopien des Standardfundamentalbereichs $\mathcal{F}$ von $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ zusammensetzt, hat die kanonische Projektion $f: X(\Gamma) \rightarrow X(1)$ als holomorphe Abbildung Grad $\mu_f = \mu$. Weiter kommutiert offensichtlich das folgende Diagramm kanonischer Projektionen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^* & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{H}^*}} & \mathbb{H}^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ X(\Gamma) & \xrightarrow{f} & X(1) \end{array}$$

Wir nutzen dies nun aus, um das Verzweigungsverhalten von f zu studieren. Dafür betrachten wir ein $z \in \mathbb{H}^*$, sein Bild $P := \pi_1(z)$ sowie dessen (endlich viele) Urbilder $\{Q_1, \dots, Q_h\} := f^{-1}(P)$ und wählen schließlich für alle $i = 1, \dots, h$ zunächst ein $w_i \in \mathbb{H}^*$ mit $Q_i = \pi(w_i)$ und dann ein $A_i \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $w_i = A_i \langle z \rangle$. In dieser Situation gilt

$$P\text{-ord}(f; Q_i) = [\text{PSL}_2(\mathbb{Z})_{w_i} : \bar{\Gamma}_{w_i}] = [\text{PSL}_2(\mathbb{Z})_z : (A_i^{-1} \cdot \bar{\Gamma} \cdot A_i) \cap \text{PSL}_2(\mathbb{Z})_z], \quad (4.12)$$

denn: Die erste Gleichheit der ersten Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition der Vielfachheit, mit der die Abbildung f den Punkt Q_i im Punkt P annimmt. Andererseits gilt

$$\text{PSL}_2(\mathbb{Z})_{w_i} = A_i \cdot \text{PSL}_2(\mathbb{Z})_z \cdot A_i^{-1} \quad \text{und} \quad \bar{\Gamma}_{w_i} = \bar{\Gamma} \cap A_i \cdot \text{PSL}_2(\mathbb{Z})_z \cdot A_i^{-1},$$

woraus die zweite Gleichheit folgt. #

Wir bestimmen nun die Gesamtverzweigungsordnung der Überlagerung $f: X(\Gamma) \rightarrow X(1)$. Offensichtlich reicht es dafür aus, die Verzweigungspunkte zu studieren. Für alle $Q \in X(\Gamma)$, die über $\pi_1(\varrho) = \pi_1(e^{\frac{2\pi i}{3}})$ liegen, gilt nach (4.12)

$$\pi_1(\varrho)\text{-ord}(f; Q) \mid |\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_\varrho| \stackrel{3.22}{=} 3.$$

Nach unseren Überlegungen eingangs des Beweises gilt zudem

$$\mu = \mu_f = \sum_{Q \text{ über } \pi_1(\varrho)} \pi_1(\varrho)\text{-ord}(f; Q). \quad (4.13)$$

Die Anzahl der Q mit $\pi_1(\varrho)\text{-ord}(f; Q) = 1$ ist ν_3 , so dass $\mu = \nu_3 + 3\nu'_3$ gilt, wobei die Anzahl aller Q über $\pi_1(\varrho)$ durch $\nu_3 + \nu'_3$ gegeben sei. Es folgt

$$\sum_{Q \text{ über } \pi_1(\varrho)} (\pi_1(\varrho)\text{-ord}(f; Q) - 1) = \mu - (\nu_3 + \nu'_3) = 2\nu'_3 = 2 \cdot \frac{\mu - \nu_3}{3}$$

und analog

$$\begin{aligned} \sum_{Q \text{ über } \pi_1(i)} (\pi_1(i)\text{-ord}(f; Q) - 1) &= \frac{\mu - \nu_2}{2}, \\ \sum_{Q \text{ über } \pi_1(\infty)} (\pi_1(\infty)\text{-ord}(f; Q) - 1) &= \mu - \nu_\infty. \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\nu_f = 2 \cdot \frac{\mu - \nu_3}{3} + \frac{\mu - \nu_2}{2} + (\mu - \nu_\infty) = \frac{13\mu}{6} - \frac{2\nu_3}{3} - \frac{\nu_2}{2} - \nu_\infty.$$

Andererseits hat $X(1)$ nach den Übungsaufgaben 3.10 und 4.5 Geschlecht 0. Setzen wir dies alles in die Formel von Riemann-Hurwitz 4.75 ein, so erhalten wir

$$g(X(\Gamma)) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13\mu}{6} - \frac{2\nu_3}{3} - \frac{\nu_2}{2} - \nu_\infty \right) - \mu + 1 = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_\infty}{2}$$

und somit die behauptete Geschlechtsformel. □

Beispiel 4.77. Im Fall $\bar{\Gamma} = \overline{\Gamma(N)}$ mit $N > 1$ haben wir $\nu_2 = \nu_3 = 0$ und $\nu_\infty = \frac{\mu}{N}$. Die Formel für das Geschlecht von $X(N)$ lautet demnach

$$g(X(N)) = 1 + \frac{\mu}{N} \cdot \frac{N-6}{12} \stackrel{(3.5)}{=} \begin{cases} 1 + \frac{N^2 \cdot (N-6)}{24} \cdot \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) & \text{für } N > 2, \\ 0 & \text{für } N = 2, \end{cases}$$

denn: Nach Beispiel 3.29 gibt es für $N > 1$ keine elliptischen Punkte bezüglich $\Gamma(N)$. Hieraus folgt sofort $\nu_2 = \nu_3 = 0$. Wir bestimmen nun noch ν_∞ . In der Notation des Beweises der Geschlechtsformel 4.76 gilt

$$\mu \stackrel{(4.13)}{=} \mu_f = \sum_{Q \text{ über } \pi_1(\infty)} \pi_1(\infty)\text{-ord}(\pi_N; Q)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(4.12)}{=} \sum_{Q \text{ über } \pi_1(\infty)} [\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_\infty : (A_Q^{-1} \cdot \overline{\Gamma(N)} \cdot A_Q) \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_\infty] \\
& = \nu_\infty \cdot [\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_\infty : \overline{\Gamma(N)}_\infty],
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass $\Gamma(N)$ nach Abschnitt 3.4 ein Normalteiler der vollen Modulgruppe ist. Nach Proposition 3.18 ist andererseits jede Spitze $\Gamma(1)$ -äquivalent zu ∞ und wir haben

$$\begin{aligned}
\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_\infty &= \langle T \rangle, \\
\overline{\Gamma(N)}_\infty &= \overline{\Gamma(N)} \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \langle T^N \rangle.
\end{aligned}$$

Es folgt $[\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_\infty : \overline{\Gamma(N)}_\infty] = N$ und somit $\nu_\infty = \frac{\mu}{N}$. #

Für die Familien $X_0(N)$ und $X_1(N)$ lassen sich auf analoge Weise Geschlechtsformeln herleiten, wobei hier die Bestimmung der Größen μ , ν_2 , ν_3 und ν_∞ mehr Mühe macht.

4.9 Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass das Residuum $\mathrm{res}_{z=a} \omega$ in der Situation von Definition 4.19 unabhängig von der Wahl der Karte (U', z) ist. Hierfür überprüfen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Seien U'' eine offene Umgebung von a und $g \in \mathcal{O}(U'' \setminus \{a\})$. Dann ist unabhängig von der Karte $\mathrm{res}_a dg = 0$.
- (b) Ist U'' eine offene Umgebung von a und $h \in \mathcal{O}(U'')$ eine holomorphe Funktion, die in a eine einfache Nullstelle hat, so gilt unabhängig von der Karte $\mathrm{res}_a(h^{-1} dh) = 1$.

Wir hatten uns im Spezialfall $X = \overline{\mathbb{C}}$ bereits in Aufgabe 1.9 mit dieser Frage auseinandergesetzt.

Aufgabe 4.2. Die Definition von $d\omega$ in Definition 4.25 hängt nicht von der Wahl der Darstellung in (4.2) ab.

Aufgabe 4.3. Seien $U = U_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ mit einem $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ mit $d\omega = 0$ gegeben. Dann gibt es $f, g \in C^\infty(U)$ mit

$$\omega = f dx + g dy,$$

wobei x, y die kanonischen reellen Koordinatenfunktionen von $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ sind. Dann ist durch

$$F(x, y) := \int_0^1 (f(tx, ty)x + g(tx, ty)y) dt \quad \text{für alle } (x, y) \in U$$

eine glatte Stammfunktion von ω auf U gegeben.

Aufgabe 4.4. Für eine beliebige Riemann'sche Fläche X gilt $H^1(X; \mathbb{C}^\infty) = 0$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass es auf X zu jeder Überdeckung eine dieser untergeordnete Partition der Eins gibt, vgl. Definition 4.38.

Aufgabe 4.5. In dieser Aufgabe bestimmen wir das Geschlecht der Riemann'schen Zahlenkugel. Zeigen Sie dafür die folgenden Aussagen:

- (a) Für jede Funktion $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit kompaktem Träger existiert das Integral

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \cdot \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

und definiert eine Funktion $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.

- (b) Durch ein geschicktes Ausschöpfungsverfahren kann man in Verallgemeinerung von (a) zeigen, dass es zu jeder Funktion $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ eine Funktion $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ gibt. Setzt man dies unbewiesen voraus, so folgt mit Aufgabe 4.4 bereits

$$H^1(\mathbb{C}; \mathcal{O}) = 0.$$

- (c) Nach (b) und dem Satz von Leray 4.54 gilt

$$g(\overline{\mathbb{C}}) = 0.$$

Aufgabe 4.6. Seien X eine kompakte Riemann'sche Fläche von Geschlecht g und $x_0 \in X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Es gibt eine nichtkonstante meromorphe Funktion f auf X , die in x_0 einen Pol der Ordnung $\leq g + 1$ hat und sonst holomorph ist.
- (b) Es gibt eine holomorphe Überlagerungsabbildung $p: X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mit höchstens $g + 1$ Blättern.
- (c) Jede kompakte Riemann'sche Fläche von Geschlecht Null ist biholomorph äquivalent zur Riemann'schen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$.