Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2025

Vorlesungsskript

Dr. Hendrik Kasten und Dr. Denis Vogel

3. Juni 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Analytische Geometrie **3**
1.1 Affine Räume . . . 3
1.2 Affine Abbildungen . . . 14
1.3 Affine Koordinaten . . . 20
1.4 Euklidische Räume . . . 29
1.5 Polytope . . . 42
1.6 Projektive Geometrie . . . 51
1.7 Übungsaufgaben . . . 69

2 Inzidenzgeometrie **75**
2.1 Inzidenzebenen . . . 75
2.2 Affine Ebenen . . . 78
2.3 Übungsaufgaben . . . 80

3 Hilbertebenen **82**
3.1 Die Anordnungsaxiome . . . 82
3.2 Die Kongruenzaxiome für Strecken . . . 88
3.3 Die Kongruenzaxiome für Winkel . . . 90
3.4 Ergänzungswinkel, Gegenwinkel und rechte Winkel . . . 97
3.5 Orthogonalität und Parallelität . . . 99
3.6 Der Kongruenzsatz für Dreiecke . . . 104
3.7 Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende . . . 108
3.8 Innen- und Außenwinkel im Dreieck . . . 111
3.9 In- und Umkreis . . . 115
3.10 Übungsaufgaben . . . 119

4 Euklidische Geometrie **122**
4.1 Das Vollständigkeitsaxiom . . . 122
4.2 Euklidische Ebenen . . . 124
4.3 Kreise . . . 126
4.4 Die Inversion am Kreis . . . 136
4.5 Übungsaufgaben . . . 141

5 Nichteuklidische Geometrie **143**
5.1 Das Poincaré'sche Kreismodell 143

KAPITEL 1

Analytische Geometrie

Nach heutigem Sprachgebrauch versteht man unter der ***Analytischen Geometrie*** den Teil der Geometrie, der mit Hilfsmitteln der Linearen Algebra betrieben wird. Verwendung von höherer Algebra führt zur ***Algebraischen Geometrie***; in der ***Differentialgeometrie*** werden geometrische Objekte mit den Methoden der Analysis untersucht.

In den Abschnitten 1.1 und 1.2 führen wir zunächst affine Räume und Abbildungen zwischen ihnen ein und untersuchen diese Objekte. In Abschnitt 1.3 zeigen wir mithilfe affiner Koordinaten und insbesondere des Teilverhältnisses einige klassische Resultate der affinen Geometrie, wie etwa den Strahlensatz. In Abschnitt 1.4 befassen wir uns mit euklidischen Räumen und entwickeln für diese die Anfänge einer Dreiecksgeometrie. Schließlich vertiefen wir in Abschnitt 1.5 mit den Polytopen exemplarisch ein Thema der dreidimensionalen reellen euklidischen Geometrie.

Im Abschnitt 1.6 untersuchen wir projektive Räume und den Zusammenhang zwischen diesen und den zuvor eingeführten affinen Räumen. Exemplarisch zeigen wir in Form des Satzes von Desargues einen klassischen Schnittpunktsatz.

1.1 Affine Räume

Geometrie im Kontext von Anfängervorlesungen zur Linearen Algebra wird typischerweise innerhalb von Vektorräumen studiert. Da jeder Vektorraum mit einem ausgezeichneten Element, dem Nullelement, ausgestattet ist, ist damit von vorneherein ein Ursprung festgelegt. Im geometrischen Kontext ist es jedoch häufig erforderlich, Räume ohne festen Ursprung zu betrachten, in denen also alle Punkte gleichberechtigt sind. Man stelle sich etwa eine Schreibtischoberfläche als ideale Ebene vor, die sich bis ins Unendliche erstreckt. Hier gibt es keinen ausgezeichneten Punkt – Ursprung und Koordinatensysteme sollten, wenn sie überhaupt notwendig sind, der geometrischen Fragestellung angepasst werden. Formal lässt sich dieser Anforderung mit dem Konzept des affinen Raumes begegnen. Hier ordnet man je zwei Punkten

einen Verbindungsvektor zu, für den man über Axiome sinnvolle Eigenschaften einfordert. Genauer definieren wir wie folgt:

Definition 1.1. *Ein **affiner Raum** über einem Körper K ist ein Tripel $(X, T(X), \tau)$ aus*

- *einer nichtleeren Menge X, deren Elemente wir **Punkte** nennen,*
- *einem K-Vektorraum $T(X)$, dem **Translationsvektorraum**, dessen Elemente wir **Vektoren** nennen,*
- *einer Abbildung $\tau\colon X \times X \to T(X)$, die je zwei Punkten $A, B \in X$ einen **Verbindungsvektor** $t_{AB} := \tau(A, B) \in T(X)$ zuordnet, so dass das **Abtragbarkeitsaxiom***

  (A) *Für jeden Punkt $A \in X$ und jeden Vektor $v \in T(X)$ existiert genau ein Punkt $B \in X$ mit $v = t_{AB}$.*

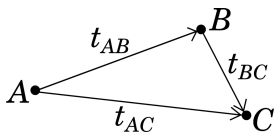
  *und das **Dreiecksaxiom***

  (D) *Für alle Punkte $A, B, C \in X$ ist $t_{AB} + t_{BC} = t_{AC}$.*

  gelten.

*Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen soll auch die leere Menge – ohne Angabe von $T(X)$ und τ – ein affiner Raum sein. Für „Sei $(X, T(X), \tau)$ ein affiner Raum über einem Körper K." schreiben wir künftig auch kurz „**(aff. Raum)**".*

Stellen wir uns Verbindungsvektoren als Pfeile vor, können wir das Dreiecksaxiom schön visualisieren:



Wir verwenden bewusst die Bezeichnung t_{AB} anstelle der häufig anzutreffenden Bezeichnung $\overrightarrow{AB}$ für Verbindungsvektoren: Wir wollen ausschließlich mit den obigen Axiomen und den im weiteren Verlauf daraus abgeleiteten Resultaten arbeiten und der Gefahr vorbeugen, dass wir unbewusst Eigenschaften verwenden, die uns möglicherweise aus anderem Kontext bekannt sind und die für affine Räume im Allgemeinen eventuell gar nicht erfüllt sind. So gibt es etwa in allgemeinen affinen Räumen keinen Längen- oder Winkelbegriff.

Direkt aus der Definition ergeben sich die folgenden Eigenschaften eines affinen Raumes $(X, T(X), \tau)$:

- Für alle $A \in X$ gilt $t_{AA} = 0$, denn wegen (D) gilt $t_{AA} + t_{AA} = t_{AA}$.
- Für alle $A, B \in X$ gilt $t_{BA} = -t_{AB}$, denn wegen (D) ist $t_{AB} + t_{BA} = t_{AA} = 0$.
- Für alle $B \in X$ und alle $v \in T(X)$ existiert genau ein $A \in X$ mit $v = t_{AB}$, denn wegen (A) gibt es für alle $B \in X$ und alle $v \in T(X)$ genau ein $A \in X$ mit $-v = t_{BA}$, also mit $v = t_{AB}$.

- Für alle $A \in X$ erhalten wir so eine nach (A) bijektive Abbildung

$$\eta_A \colon \begin{cases} X & \to T(X), \\ P & \mapsto t_{AP}. \end{cases}$$

  Diese bildet den Punkt A auf das Nullelement im Vektorraum $T(X)$ ab. Wählen wir einen festen Punkt $O \in X$ aus, einen sogenannten ***Ursprung***, so heißt für ein $P \in X$ der Vektor $\eta_O(P) = t_{OP} \in T(X)$ der – offensichtlich von O abhängige – ***Ortsvektor*** von P bezüglich O. Man beachte, dass alle Punkte von X gleichberechtigt sind: Jeder Punkt kann als Ursprung gewählt werden.

Definition 1.2 (aff. Raum). *Die **Dimension** von $(X, T(X), \tau)$ ist durch $\dim_K T(X)$ gegeben und wird mit $\dim_K X$ bzw. $\dim X$ bezeichnet. Die leere Menge erhält die Dimension -1. Speziell heißt ein affiner Raum X*

- *eine **affine Ebene**, wenn $\dim X = 2$ gilt,*
- *eine **affine Gerade**, wenn $\dim X = 1$ gilt.*

Beispiel 1.3. *Ist V ein Vektorraum über dem Körper K und setzen wir*

$$\tau_V \colon \begin{cases} V \times V & \to V, \\ (A, B) & \mapsto t_{AB} := B - A, \end{cases}$$

so ist (V, V, τ_V) ein affiner Raum,

denn: Das Abtragbarkeitsaxiom (A) ist erfüllt, denn für $A \in V$ und $v \in V$ ist $B = v + A$ offenbar das eindeutig bestimmte $B \in V$ mit $v = t_{AB} = B - A$ und das Dreiecksaxiom (D) gilt wegen $t_{AB} + t_{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = t_{AC}$ für alle $A, B, C \in V$. #

*Wir nennen (V, V, τ_V) den zum Vektorraum V **assoziierten affinen Raum**. Hier können Elemente aus V sowohl als Punkte als auch als Vektoren aufgefasst werden. Bei Wahl des Nullelements von V als Ursprung stimmt der Ortsvektor jedes Punktes P aus V mit P selbst überein. Der zum Standardvektorraum K^n mit $n \in \mathbb{N}_0$ assoziierte affine Raum heißt der **affine Standardraum** $\mathbb{A}^n(K)$ von Dimension n.*[1]

Wir werden später sehen, dass jeder nichtleere affine Raum $(X, T(X), \tau)$ nach Wahl eines Punktes kanonisch isomorph zu einem affinen Raum der Form (V, V, τ_V) ist, nämlich zu $(T(X), T(X), \tau_{T(X)})$.

Beispiel 1.4. *Für*

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\},$$

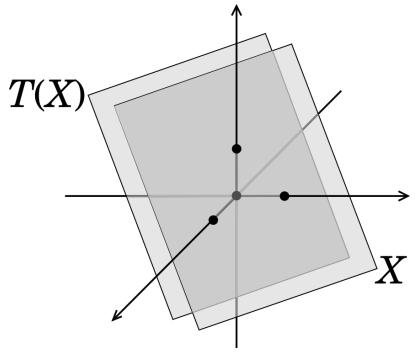
[1] In diesem Skript ist Null keine natürliche Zahl; wir schreiben stets $\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$ und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$T(X) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

ist die Abbildung

$$\tau\colon \begin{cases} X \times X & \to T(X), \\ (A, B) & \mapsto B - A \end{cases}$$

wohldefiniert und $(X, T(X), \tau)$ *ist ein affiner Raum. Die Gültigkeit der Axiome ergibt sich analog zu Beispiel 1.3. Wegen* $\dim T(X) = 2$ *handelt es sich bei* $(X, T(X), \tau)$ *um eine affine Ebene, was mit unserer Anschauung übereinstimmt:*



Weiter erhalten wir

$$\eta_O\colon \begin{cases} X & \to T(X), \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \textit{für die Wahl } O := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ist $(X, T(X), \tau)$ ein affiner Raum, so erhalten wir für jedes $v \in T(X)$ eine Abbildung

$$\tau_v\colon \begin{cases} X & \to X, \\ A & \mapsto \eta_A^{-1}(v), \end{cases}$$

die sogenannte ***Translation*** um v, die einen Punkt A auf den eindeutig bestimmten Punkt B mit $t_{AB} = v$ abbildet. Diese hat die folgenden Eigenschaften:

- τ_v ist bijektiv, denn für alle $B \in X$ existiert genau ein $A \in X$ mit $v = t_{AB}$.
- Es ist $\tau_0 = \mathrm{id}$, denn wegen $t_{AA} = 0$ ist $\tau_0(A) = A$ für alle $A \in X$.
- Für alle $v, w \in T(X)$ gilt $\tau_{v+w} = \tau_v \circ \tau_w$,

  denn: Für alle $A \in X$ ist $\tau_v(\tau_w(A))$ der eindeutig bestimmte Punkt $C \in X$ mit $v = t_{BC}$, wobei B der eindeutig bestimmte Punkt aus X mit $w = t_{AB}$ ist. Es folgt $v + w = t_{BC} + t_{AB} = t_{AC}$, also $C = \tau_{v+w}(A)$ und somit $\tau_v(\tau_w(A)) = \tau_{v+w}(A)$. #

Algebraisch formuliert ist durch die Abbildung

$$\begin{aligned} T(X) \times X &\to X, \\ (v, A) &\mapsto \tau_v(A) \end{aligned}$$

eine Aktion der additiven Gruppe von $T(X)$ auf X gegeben. Diese ist scharf transitiv, da offensichtlich für je zwei Punkte $A, B \in X$ genau ein $v \in T(X)$ mit $\tau_v(A) = B$ und also mit $t_{AB} = v$ existiert. Umgekehrt kann man zeigen, dass man zu jeder scharf transitiven Aktion der additiven Gruppe eines Vektorraums $T(X)$ auf einer Menge X auf natürliche Weise einen affinen Raum erhält, für den die obige Aktion mit der gegebenen übereinstimmt. Dies liefert eine alternative Charakterisierung affiner Räume, die in der Literatur recht verbreitet ist.

Von nun an vereinfachen wir die Bezeichnungen ein wenig und schreiben anstelle des Tripels $(X, T(X), \tau)$ oft einfach nur X.

Definition 1.5 (aff. Raum). *Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt ein **affiner Unterraum** von X, wenn entweder Y leer ist oder es ein $P \in Y$ gibt, für das*

$$T_P(Y) := \{t_{PA} \in T(X) : A \in Y\}$$

ein Untervektorraum von $T(X)$ ist.

Proposition 1.6 (aff. Raum). *Sei $Y \subseteq X$ ein nichtleerer affiner Unterraum. Dann ist für jedes $P \in Y$ die Menge $T_P(Y)$ ein Untervektorraum von $T(X)$ und es gilt $T_P(Y) = T_Q(Y)$ für je zwei $P, Q \in Y$. Wir schreiben daher*

$$T(Y) := T_P(Y) \quad \textit{für ein beliebiges } P \in Y.$$

Der affine Unterraum Y ist auf natürliche Weise selbst ein affiner Raum mit Translationsvektorraum $T(Y)$.

Beweis. Nach Definition 1.5 gibt es ein $P \in Y$, für das $T(Y) = T_P(Y)$ ein Untervektorraum von $T(X)$ ist. Es reicht daher aus, für alle $Q \in Y$ die Gleichheit $T_Q(Y) = T_P(Y)$ zu zeigen. Für ein beliebiges $Q \in Y$ gilt

$$t_{QA} \overset{(D)}{=} t_{QP} + t_{PA} \quad \text{für alle } A \in Y$$

und somit wegen $t_{QP} = -t_{PQ} \in T_P(Y)$ tatsächlich

$$T_Q(Y) = t_{QP} + T_P(Y) = T_P(Y).$$

Um zu sehen, dass Y ein affiner Raum ist, bemerken wir, dass für $A, B \in Y$ stets $t_{AB} \in T_A(Y) = T(Y)$ ist, so dass sich $\tau\colon X \times X \to T(X)$ zu einer Abbildung $Y \times Y \to T(Y)$ einschränkt. Das Dreiecksaxiom (D) ist offensichtlich weiterhin erfüllt. Ist weiter $A \in Y$ und $v \in T(Y)$, so existiert wegen des Abtragbarkeitsaxioms (A) in X ein eindeutig bestimmtes $B \in X$ mit $v = t_{AB}$. Wegen $v \in T(Y) = T_A(Y)$ gilt $v = t_{AC}$ für ein $C \in Y$ und deshalb $B = C \in Y$. Das Abtragbarkeitsaxiom (A) gilt also auch in Y. □

Beispiel 1.7. *Seien V ein Vektorraum über einem Körper K und X der zu V assoziierte affine Raum. Ist $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum, dann ist Y entweder leer oder es existiert ein $P \in Y$, für das*

$$T_P(Y) = \{t_{PA} : A \in Y\} = \{A - P : A \in Y\}$$

ein Untervektorraum von V ist. Damit sind die nichtleeren affinen Unterräume von X gerade die Mengen der Form

$$P + U \quad \text{mit } P \in V,\ U \subseteq V \text{ Untervektorraum.}$$

Dies sind genau die affinen Unterräume von V, wie sie typischerweise auch in Vorlesungen zur Linearen Algebra definiert werden. Im Fall der affinen Standardräume $\mathbb{A}^n(K)$, also für $V = K^n$, sind diese gerade die Lösungsräume linearer Gleichungssysteme: Zu jedem affinen Unterraum $Y \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ und ein $b \in K^m$ mit

$$Y = \text{Lös}(A, b) := \{x \in K^n : Ax = b\};$$

ein Beweis findet sich etwa in der verlinkten Folgerung 15.9. Der zu nichtleerem Y gehörige Translationsvektorraum $T(Y)$ ist hierbei gerade die Lösungsmenge des zum entsprechenden linearen Gleichungssystem gehörigen homogenen linearen Gleichungssystems; es gilt also $T(Y) = \text{Lös}(A, 0)$. Zur Wiederholung sei dieses Quiz empfohlen.

Definition 1.8 (aff. Raum). *Die **Dimension** eines nichtleeren affinen Unterraums $Y \subseteq X$ ist durch $\dim_K T(Y)$ gegeben und wird mit $\dim_K Y$ bzw. $\dim Y$ bezeichnet. Sie ist wohldefiniert nach Proposition 1.6. Der leere affine Unterraum erhält wieder die Dimension -1. Speziell heißt ein affiner Unterraum $Y \subseteq X$*

- *eine **(affine) Hyperebene** in X, wenn $\dim Y = \dim X - 1$ gilt,*
- *eine **(affine) Ebene** in X, wenn $\dim Y = 2$ gilt,*
- *eine **(affine) Gerade** in X, wenn $\dim Y = 1$ gilt.*

Geraden in affinen Räumen werden wir meist mit kleinen Buchstaben bezeichnen.

Beispiel 1.9. *Der affine Raum X aus Beispiel 1.4 ist nach Beispiel 1.7 selbst ein affiner Unterraum des $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, und zwar als affine Ebene eine Hyperebene. In X ist beispielsweise durch*

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 + x_3 = 1 \right\} = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

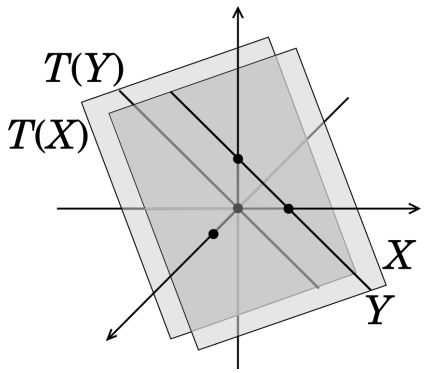
ein affiner Unterraum gegeben, wovon wir uns direkt mit der Definition affiner Unteräume überzeugen: So gilt etwa

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Y$$

und also

$$\begin{aligned} T_P(Y) &= \{t_{PA} : A \in Y\} = \{A - P : A \in Y\} \\ &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 + x_3 = 1\} \\ &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \end{aligned}$$

was offenbar ein Untervektorraum von $T(X)$ ist. Dieses Resultat für $T(Y) = T_P(Y)$ ist im Hinblick auf die Ausführungen in Beispiel 1.7 natürlich wenig überraschend.



Der affine Unterraum Y ist eine affine Gerade und als solche eine Hyperebene in X, jedoch natürlich nicht in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

Proposition 1.10 (aff. Raum). *Sei $(Y_i)_{i\in I}$ eine Familie affiner Unterräume von X. Dann gilt:*

(a) *$Y := \bigcap_{i\in I} Y_i$ ist wieder ein affiner Unterraum von X. Ist $Y \neq \varnothing$, dann ist $T(Y) = \bigcap_{i\in I} T(Y_i)$.*

(b) *Der Durchschnitt aller affinen Unterräume $Y \subseteq X$ mit $\bigcup_{i\in I} Y_i \subseteq Y$ heißt der **Verbindungsraum** $\bigvee_{i\in I} Y_i$ und ist wieder ein affiner Unterraum von X. Im Fall $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir auch $\bigvee_{i\in I} Y_i = Y_1 \vee Y_2 \vee \ldots \vee Y_n$.*

Beweis. Im Beweis von Behauptung (a) dürfen wir ohne Einschränkung $Y \neq \emptyset$ annehmen, da sonst nichts zu zeigen ist. Dann ist für einen beliebigen Punkt $P \in Y$

$$T_P(Y) = \{t_{PA} \in T(X) : A \in \bigcap_{i\in I} Y_i\} = \bigcap_{i\in I} \{t_{PA} \in T(X) : A \in Y_i\} = \bigcap_{i\in I} T(Y_i) \tag{1.1}$$

als Durchschnitt von Untervektorräumen von $T(X)$ selbst wieder ein Untervektorraum von $T(X)$. Damit ist Behauptung (a) gezeigt. Aussage (b) ergibt sich sofort aus Aussage (a). □

Der Verbindungsraum $\bigvee_{i \in I} Y_i$ ist offenbar der kleinste affine Unterraum von X, der sämtliche Y_i enthält.

Definition 1.11 (aff. Raum). *Für Punkte $A, B \in X$ mit $A \neq B$ setzen wir*

$$\overleftrightarrow{AB} := \{A\} \vee \{B\}$$

*und nennen dies die **Verbindungsgerade** von A und B.*

Proposition 1.12 (aff. Raum). *Für $A, B \in X$ mit $A \neq B$ gilt*

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{AB} &= \{\tau_v(A) : v \in \langle t_{AB} \rangle\}, \\ T(\overleftrightarrow{AB}) &= \langle t_{AB} \rangle. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\overleftrightarrow{AB}$ tatsächlich eine Gerade.

Beweis. Das ist eine Übungsaufgabe. □

Ist X der zu einem Vektorraum V assoziierte affine Raum, so ist $\tau_v(A) = A + v$ und deshalb $\overleftrightarrow{AB} = A + \langle B - A \rangle$.

Proposition 1.13 (aff. Raum). *Seien $Y_1, Y_2 \subseteq X$ nichtleere affine Unterräume von X. Dann gilt*

$$T(Y_1 \vee Y_2) = \begin{cases} T(Y_1) + T(Y_2) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \big(T(Y_1) + T(Y_2)\big) \oplus T(\overleftrightarrow{P_1 P_2}) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, \end{cases}$$

wobei P_1, P_2 beliebige Punkte aus Y_1 bzw. Y_2 sind.

Beweis. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

Fall 1: $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2), \tag{1.2}$$

denn: Für einen beliebigen, fest gewählten Punkt $P \in Y_1 \cap Y_2$ gilt nach Proposition 1.6

$$\begin{aligned} T(Y_1) \cup T(Y_2) &= \{t_{PA} \in T(X) : A \in Y_1\} \cup \{t_{PA} \in T(X) : A \in Y_2\} \\ &= \{t_{PA} \in T(X) : A \in Y_1 \cup Y_2\} \\ &\subseteq \{t_{PA} \in T(X) : A \in Y_1 \vee Y_2\} \\ &= T(Y_1 \vee Y_2). \end{aligned}$$

Da mit einer beliebigen Teilmenge eines gegebenen Vektorraums auch deren lineare Hülle in diesem Vektorraum enthalten ist, folgt

$$T(Y_1) + T(Y_2) \subseteq T(Y_1 \vee Y_2).$$

Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir

$$Y := \{\tau_v(P) : v \in T(Y_1) + T(Y_2)\} \subseteq X.$$

Das ist ein affiner Unterraum von X mit $T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2)$, denn es ist $P = \tau_0(P) \in Y$ und

$$T_P(Y) = \{t_{PA} : A \in Y\} = \{t_{P\tau_v(P)} : v \in T(Y_1) + T(Y_2)\} = T(Y_1) + T(Y_2),$$

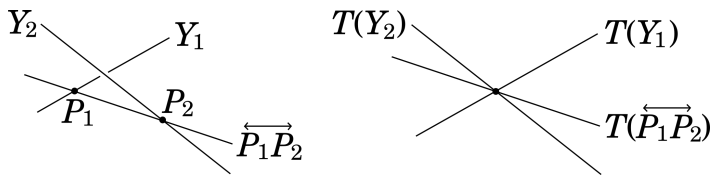
wobei wir $t_{P\tau_v(P)} = v$ verwendet haben. Wegen $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ ist auch $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$ und es folgt

$$T(Y_1 \vee Y_2) \subseteq T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

#

Fall 2: $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$**.** Seien $P_1 \in Y_1$ und $P_2 \in Y_2$. Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = \big(T(Y_1) + T(Y_2)\big) \oplus T(\overleftrightarrow{P_1P_2}), \tag{1.3}$$



denn: Aus $\overleftrightarrow{P_1P_2} \subseteq Y_1 \vee Y_2$ folgt

$$\begin{aligned} T(Y_1 \vee Y_2) &= T\big(Y_1 \vee \overleftrightarrow{P_1P_2} \vee Y_2\big) \overset{(1.2)}{=} T(Y_1) + T\big(\overleftrightarrow{P_1P_2} \vee Y_2\big) \overset{(1.2)}{=} T(Y_1) + T(\overleftrightarrow{P_1P_2}) + T(Y_2) \\ &= \big(T(Y_1) + T(Y_2)\big) + T(\overleftrightarrow{P_1P_2}). \end{aligned}$$

Es verbleibt, die Direktheit der Summe ganz rechts zu zeigen. Hierfür genügt es einzusehen, dass der Erzeuger $t_{P_1P_2}$ von $T(\overleftrightarrow{P_1P_2})$ nicht in $T(Y_1) + T(Y_2)$ liegt. Wäre dies aber der Fall, so gäbe es nach Proposition 1.6 je einen Punkt $Q_1 \in Y_1$ und $Q_2 \in Y_2$ mit

$$t_{P_1P_2} = t_{P_1Q_1} - t_{P_2Q_2}.$$

Aus

$$t_{Q_1Q_2} = t_{Q_1P_1} + t_{P_1P_2} + t_{P_2Q_2} = t_{Q_1P_1} + (t_{P_1Q_1} - t_{P_2Q_2}) + t_{P_2Q_2} = 0$$

folgte dann $Q_1 = Q_2$ und also $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. #

□

Satz 1.14 (aff. Raum). *Es gelte* $\mathrm{char}(K) \neq 2$. *Für je zwei affine Unterräume*

$$Y_1, Y_2 \subseteq X \quad \textit{mit} \quad Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \textit{ und } \nexists P \in X \textit{ mit } Y_1 = Y_2 = \{P\}$$

gilt dann

$$Y_1 \vee Y_2 = \bigcup_{\substack{P_1 \neq P_2 \\ P_1 \in Y_1,\, P_2 \in Y_2}} \overleftrightarrow{P_1 P_2}.$$

Der Verbindungsraum von Y_1 und Y_2 ist also die Vereinigung der Verbindungsgeraden zwischen Punkten in Y_1 und Punkten in Y_2.

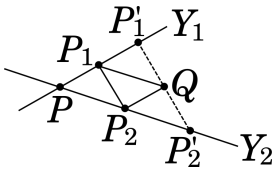
Beweis. Da für beliebige voneinander verschiedene $P_1 \in Y_1$ und $P_2 \in Y_2$ die Verbindungsgerade $\overleftrightarrow{P_1 P_2} = \{P_1\} \vee \{P_2\}$ im affinen Unterraum $Y_1 \vee Y_2$ enthalten ist, ist die rechte Seite der Behauptung in der linken Seite enthalten.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion wählen wir einen beliebigen Punkt $P \in Y_1 \cap Y_2$. Ist $Q \in Y_1 \vee Y_2$, so gilt $t_{PQ} \in T(Y_1 \vee Y_2)$ und es gibt nach Proposition 1.13 je einen Punkt $P_1 \in Y_1$ und $P_2 \in Y_2$ mit

$$t_{PQ} = t_{PP_1} + t_{PP_2}.$$

Ohne Einschränkung sind dabei die Punkte P, P_1, P_2 paarweise verschieden,

denn: Ist $P = P_1 \neq P_2$, so ist $Q \in \overleftrightarrow{P_1 P_2}$, ebenso für $P = P_2 \neq P_1$. Im Fall $P_1 = P_2 \neq P$ ist $t_{PQ} = 2t_{PP_2}$ und deshalb $Q \in \overleftrightarrow{PP_2}$. Im Fall $P = P_1 = P_2$ ist $t_{PQ} = 0$, also $P = Q$. Nach Voraussetzung enthält jedoch einer der beiden Räume Y_1, Y_2 einen von P verschiedenen Punkt R, es ist also $Q \in \overleftrightarrow{PR}$ und somit in der rechten Seite enthalten. #



Wir setzen

$$P_1' := (2t_{PP_1})(P) \in Y_1, \quad P_2' := (2t_{PP_2})(P) \in Y_2.$$

Wäre $P_1' = P_2'$, dann folgte $2t_{PP_1} = 2t_{PP_2}$ und wegen $\mathrm{char}(K) \neq 2$ schließlich $P_1 = P_2$, was einen Widerspruch darstellt. Es gilt also $P_1' \neq P_2'$ und

$$t_{P_1' P_2'} = t_{PP_2'} - t_{PP_1'} = 2t_{PP_2} - 2t_{PP_1} = 2t_{P_1 P_2}$$

sowie

$$\begin{aligned} t_{P_1' Q} &= t_{P_1' P} + t_{PQ} = -t_{PP_1'} + t_{PQ} = -2t_{PP_1} + t_{PQ} \\ &= -2t_{PP_1} + (t_{PP_1} + t_{PP_2}) = t_{P_1 P} + t_{PP_2} = t_{P_1 P_2}. \end{aligned}$$

Es folgt $t_{P_1' Q} = \frac{1}{2} t_{P_1' P_2'}$ und also $Q \in \overleftrightarrow{P_1' P_2'}$ wegen Proposition 1.12. □

In Analogie zur Dimensionsformel für Untervektorräume geben wir nun auch im Kontext affiner Unterräume eine derartige Formel an:

Satz 1.15 (Dimensionsformel für affine Unterräume, **aff. Raum**). *Seien $Y_1, Y_2 \subseteq X$ zwei nichtleere affine Unterräume. Dann gilt*

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \begin{cases} \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(Y_1 \cap Y_2) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Beweis. Mit der Dimensionsformel für Untervektorräume gilt

$$\begin{aligned}
\dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\
&\overset{(1.2),(1.3)}{=} \begin{cases} \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim\big((T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(\overleftrightarrow{P_1P_2})\big) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, P_1 \in Y_1, P_2 \in Y_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} \\
&\overset{(1.1)}{=} \begin{cases} \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(Y_1 \cap Y_2) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Definition 1.16 (aff. Raum). *Zwei nichtleere affine Unterräume $Y_1, Y_2 \subseteq X$ heißen*

- ***parallel**, in Zeichen $Y_1 \parallel Y_2$, wenn $T(Y_1) \subseteq T(Y_2)$ oder $T(Y_2) \subseteq T(Y_1)$ gilt.*
- ***windschief**, wenn sie nicht parallel sind und leeren Durchschnitt haben.*

Bemerkung 1.17 (aff. Raum). *Ist von zwei nichtleeren affinen Unterräumen $Y_1, Y_2 \subseteq X$ einer eine Hyperebene, so sind Y_1, Y_2 nicht windschief,*

denn: Ohne Einschränkung sei Y_1 eine Hyperebene und $Y_2 \neq X$. Wären $Y_1, Y_2 \subseteq X$ windschief, so gälte nach der Dimensionsformel 1.15

$$\begin{aligned}
\dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 \\
&> (\dim X - 1) + \dim Y_2 - \dim Y_2 + 1 \\
&= \dim X.
\end{aligned}$$

Das kann nicht sein, da $Y_1 \vee Y_2$ ein affiner Unterraum von X ist. #

Insbesondere gibt es in der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(K)$ keine zwei windschiefen Geraden: Je zwei Geraden $g, h \subseteq \mathbb{A}^2(K)$ sind also parallel oder haben nichtleeren Durchschnitt.

Bemerkung 1.18 (aff. Raum). *Die Aussage von Satz 1.14 wird falsch, wenn wir die Voraussetzung $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ weglassen,*

denn: Betrachten wir die beiden windschiefen Geraden

$$Y_1 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \textit{und} \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Nach der Dimensionsformel 1.15 gilt einerseits

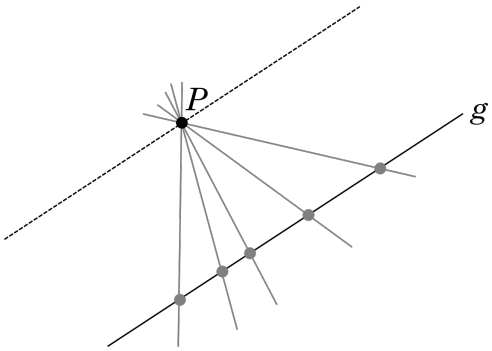
$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - 0 + 1 = 3$$

und somit $Y_1 \vee Y_2 = \mathbb{R}^3$. Andererseits kann man durch Aufstellen einer allgemeinen Geradengleichung leicht überprüfen, dass etwa der Punkt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

auf keiner Verbindungsgerade $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ mit $P_1 \in Y_1$ und $P_2 \in Y_2$ liegt. #

Es lässt sich bereits im $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ein Gegenbeispiel finden: In der Abbildung ist der Verbindungsraum des Punktes P und der Geraden g der ganze $\mathbb{R}^2$, die gestrichelte Gerade liegt mit Ausnahme des Punktes P jedoch nicht in der Vereinigung der Verbindungsgeraden.



1.2 Affine Abbildungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Abbildungen zwischen affinen Räumen. Wir gehen dabei stillschweigend davon aus, dass die beteiligten Räume nichtleer sind.

Definition 1.19 (aff. Raum). *Sei $(Y, T(Y), \sigma)$ ein affiner Raum über dem Körper K. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ heißt **affine Abbildung**, wenn es eine lineare Abbildung $T(\varphi)\colon T(X) \to T(Y)$ mit*

$$t_{\varphi(A)\varphi(B)} = T(\varphi)(t_{AB}) \quad \textit{für alle } A, B \in X \tag{1.4}$$

und also mit $\sigma(\varphi(A), \varphi(B)) = T(\varphi)\big(\tau(A, B)\big)$ gibt.[2] *Eine bijektive affine Abbildung heißt auch eine **Affinität** oder ein **Isomorphismus affiner Räume**.*

[2] Die Notation $T(\varphi)$ ist dadurch gerechtfertigt, dass $T(\varphi)$ nach (1.4) bereits eindeutig durch φ festgelegt ist.

Beispiel 1.20 (aff. Raum). *Für ein gegebenes $v \in T(X)$ ist die bereits in Abschnitt 1.1 eingeführte Translation $\tau_v \colon X \to X$ eine Affinität mit $T(\tau_v) = \mathrm{id}_{T(X)}$,*

denn: Zunächst gilt

$$\begin{aligned} t_{\tau_v(A)\tau_v(B)} &= t_{\tau_v(A)A} + t_{AB} + t_{B\tau_v(B)} \\ &= -v + t_{AB} + v = t_{AB} \quad \text{für alle } A, B \in X, \end{aligned}$$

so dass τ_v eine affine Abbildung mit $T(\tau_v) = \mathrm{id}_{T(X)}$ ist. Aufgrund der bekannten Bijektivität ist τ_v dabei sogar eine Affinität. #

Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen affinen Abbildungen und linearen Abbildungen zwischen den zugehörigen Translationsvektorräumen, den wir in den folgenden beiden Propositionen untersuchen werden:

Proposition 1.21 (aff. Raum). *Seien $(Y, T(Y), \sigma)$ ein affiner Raum über dem Körper K und $\varphi \colon X \to Y$ eine Abbildung. Für $O \in X$ setzen wir*

$$\Phi_O \colon \begin{cases} T(X) & \to T(Y), \\ t_{OA} & \mapsto t_{\varphi(O)\varphi(A)}. \end{cases}$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) *φ ist affin.*

(ii) *Für jeden Punkt $O \in X$ ist Φ_O linear.*

(iii) *Es gibt einen Punkt O in X, so dass Φ_O linear ist.*

In diesem Fall ist $\Phi_O = T(\varphi)$, insbesondere ist Φ_O unabhängig von der Wahl von O.

Beweis. Die Implikation „(i)$\Longrightarrow$(ii)“ ergibt sich direkt aus Definition 1.19 und die Implikation „(ii)$\Longrightarrow$(iii)“ ist trivial. Es verbleibt der Nachweis von „(iii)$\Longrightarrow$(i)“: Für beliebige Punkte $A, B \in X$ gilt aber

$$\Phi_O(t_{AB}) = \Phi_O(t_{OB} - t_{OA}) = \Phi_O(t_{OB}) - \Phi_O(t_{OA}) = t_{\varphi(O)\varphi(B)} - t_{\varphi(O)\varphi(A)} = t_{\varphi(A)\varphi(B)}$$

und die Proposition folgt direkt aus Definition 1.19. □

Satz 1.22 (aff. Raum). *Sei $(Y, T(Y), \sigma)$ ein affiner Raum über dem Körper K. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $\Phi \colon T(X) \to T(Y)$ und jedem Paar (O, O') mit $O \in X$ und $O' \in Y$ genau eine affine Abbildung*

$$\varphi \colon X \to Y \quad \text{mit } \varphi(O) = O' \text{ und } T(\varphi) = \Phi.$$

Beweis. Zum Nachweis der Existenz definieren wir φ über die Beziehung $t_{O'\varphi(P)} = \Phi(t_{OP})$ für $P \in X$. Es ist dann

$$t_{O'\varphi(O)} = \Phi(t_{OO}) = \Phi(0) = 0$$

und somit $\varphi(O) = O'$. Darüber hinaus ist

$$\Phi_O(t_{OP}) = t_{\varphi(O)\varphi(P)} = t_{O'\varphi(P)} = \Phi(t_{OP})$$

und also $\Phi_O = \Phi$ linear. Nach Proposition 1.21 ist φ affin. Für den Nachweis der Eindeutigkeit von φ bemerken wir, dass aus $T(\varphi) = \Phi$ und $\varphi(O) = O'$ sofort

$$t_{O'\varphi(P)} = t_{\varphi(O)\varphi(P)} = T(\varphi)(t_{OP}) = \Phi(t_{OP}) \quad \text{für alle } P \in X$$

folgt, was φ eindeutig festlegt. □

Korollar 1.23 (aff. Raum). *Sei $O \in X$ fest gewählt. Dann existiert in den zu $T(X)$ assoziierten affinen Raum $(T(X), T(X), \tau_{T(X)})$ eine eindeutig bestimmte Affinität $\varphi\colon X \to T(X)$ mit $\varphi(O) = 0$ und $T(\varphi) = \mathrm{id}$, nämlich $\varphi = \eta_O$. Das heißt, dass X nach Wahl eines Ursprungs kanonisch isomorph zu dem zu $T(X)$ assoziierten affinen Raum ist.*

Korollar 1.24 (aff. Raum). *Seien V und W zwei K-Vektorräume und (V, V, τ_V) bzw. (W, W, τ_W) die jeweiligen assoziierten affinen Räume. Weiter seien $O \in V, O' \in W$ und $\Phi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann existiert genau eine affine Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit $\varphi(O) = O'$ und $T(\varphi) = \Phi$. Diese ist gegeben durch*

$$\varphi(A) = \Phi(A) + O' - \Phi(O) \quad \textit{für alle } A \in V.$$

Jede affine Abbildung φ von V nach W mit $\varphi(O) = O'$ ist von dieser Form mit $\Phi = T(\varphi)$.

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit von φ folgen direkt aus Satz 1.22. Für $A \in V$ ist

$$\varphi(A) - O' = t_{O'\varphi(A)} = \Phi(t_{OA}) = \Phi(A - O) = \Phi(A) - \Phi(O).$$

□

Beispiel 1.25. *Als Spezialfall von Korollar 1.24 erhalten wir, dass es zu jedem $M \in K^{n\times n}$ und zu jedem $P \in K^n$ genau eine affine Abbildung*

$$\varphi_{M,P}\colon K^n \to K^n \quad \textit{mit } \varphi_{M,P}(0) = P \textit{ und } T(\varphi_{M,P})(A) = MA \textit{ für alle } A \in K^n$$

gibt. Offensichtlich sind hierdurch alle affinen Abbildungen $\varphi\colon K^n \to K^n$ mit $\varphi(0) = P$ beschrieben und es gilt

$$\varphi_{M,P}(A) = MA + P \quad \textit{für alle } A \in K^n.$$

Im Fall $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist $\varphi_{M,P}$ eine Affinität und die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\varphi_{M,P}^{-1}(A) = M^{-1}A - M^{-1}P \quad \textit{für alle } A \in K^n.$$

Wir werden in Proposition 1.26 mit den Parallelprojektionen eine weitere Klasse affiner Abbildungen einführen, müssen vorher aber noch ein wenig ausholen. Sei also $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum eines gegebenen affinen Raumes X und sei $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit

$$T(X) = W \oplus T(Y). \tag{1.5}$$

Setzen wir

$$W(P) := \{A \in X : t_{PA} \in W\} \tag{1.6}$$

für einen beliebigen vorgegeben Punkt $P \in X$, dann ist $W(P)$ ein affiner Unterraum von X mit $P \in W(P)$ und $T(W(P)) = W$, denn $T_P(W(P)) = \{t_{PA} : A \in W(P)\} = W$. Insbesondere gilt $W(P) \parallel W(Q)$ für beliebige $P, Q \in X$. Für ein beliebiges $P \in X$ gilt nun

$$\dim(W(P) \cap Y) = 0,$$

denn: Gälte $W(P) \cap Y = \emptyset$, so folgte nach der Dimensionsformel 1.15

$$\begin{aligned}\dim(W(P) \vee Y) &= \dim W(P) + \dim Y - \dim\big(T(W(P)) \cap T(Y)\big) + 1\\ &= \dim W + \dim T(Y) - \dim(W \cap T(Y)) + 1\\ &\overset{(1.5)}{=} \dim X + 1,\end{aligned}$$

was nicht sein kann, da $W(P) \vee Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum ist. Daher gilt $W(P) \cap Y \neq \emptyset$ und

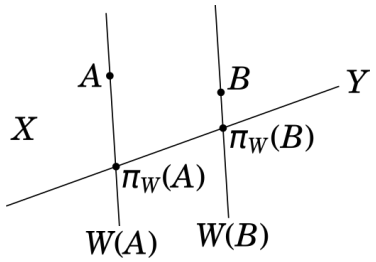
$$\begin{aligned}\dim(W(P) \cap Y) &= \dim\big(T(W(P) \cap Y)\big)\\ &\overset{(1.1)}{=} \dim\big(T(W(P)) \cap T(Y)\big)\\ &= \dim(W \cap T(Y))\\ &\overset{(1.5)}{=} 0.\end{aligned}$$

#

Proposition 1.26 (aff. Raum). *Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum und sei $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit $T(X) = W \oplus T(Y)$. Dann ist die Abbildung*

$$\pi_W := \pi_W^{X,Y} : \begin{cases} X & \to Y, \\ P & \mapsto \pi_W(P) \end{cases} \quad \textit{mit } \{\pi_W(P)\} := W(P) \cap Y \textit{ und } W(P) := \{A \in X : t_{PA} \in W\}$$

affin und erfüllt $\pi_W^{X,Y}|_Y = \mathrm{id}_Y$; insbesondere ist $\pi_W^{X,Y}$ surjektiv. Wir nennen π_W die ***Parallelprojektion*** *längs W.*



Beweis. Nach unseren Vorüberlegungen ist π_W wohldefiniert. Um nachzuweisen, dass π_W eine affine Abbildung ist, betrachten wir zwei Punkte $A, B \in X$. Dann gilt

$$t_{AB} = t_{A\pi_W(A)} + t_{\pi_W(A)\pi_W(B)} + t_{\pi_W(B)B} = (t_{A\pi_W(A)} - t_{B\pi_W(B)}) + t_{\pi_W(A)\pi_W(B)}.$$

Offensichtlich liegt der erste Summand rechts in W und der zweite in $T(Y)$. Wegen der Direktheit der Summation in (1.5) ist diese Zerlegung eindeutig. Über die Zuordnung

$$t_{AB} \mapsto t_{\pi_W(A)\pi_W(B)}$$

ist daher eine Abbildung $T(\pi_W)\colon T(X) \to T(Y)$ definiert. Nach Konstruktion ist diese gerade die kanonische Projektion von $T(X)$ auf $T(Y)$ und insbesondere linear. Das zeigt, dass π_W eine affine Abbildung ist.

Schließlich gilt für ein beliebiges $P \in Y$

$$\{\pi_W(P)\} = W(P) \cap Y = \{A \in Y : t_{PA} \in W\} = \{P\},$$

was unmittelbar $\pi_W^{X,Y}|_Y = \mathrm{id}_Y$ zeigt. □

Wir haben jetzt einige Beispiele affiner Abbildungen kennengelernt. In Proposition 1.30 werden wir zeigen, dass nicht jede Abbildung zwischen zwei affinen Räumen affin ist, indem wir eine geometrische Eigenschaft affiner Abbildungen herleiten, die offenkundig nicht allgemeingültig ist. Vorher müssen wir noch einige Begriffe einführen:

Definition 1.27 (aff. Raum). *Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **kollinear**, falls es eine Gerade $g \subseteq X$ mit $M \subseteq g$ gibt.*

Definition 1.28 (aff. Raum). *Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl und seien $A_1, \ldots, A_n$ nicht kollineare und paarweise verschiedene Punkte, die in einer gemeinsamen Ebene $E \subseteq X$ liegen. Dann heißt das (geordnete) n-Tupel*

$$\Pi A_1 \ldots A_n := (A_1, \ldots, A_n)$$

*das **n-Eck** mit den **Eckpunkten** $A_1, \ldots, A_n$. Im wichtigen Spezialfall eines **Dreiecks** schreiben wir für $\Pi A_1 A_2 A_3$ auch $\triangle A_1 A_2 A_3$.*

*Drei Eckpunkte $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$ von $\Pi A_1 \ldots A_n$ heißen **aufeinanderfolgend**, falls*

$$i_1 \equiv i_2 - 1 \equiv i_3 - 2 \bmod (n)$$

*gilt. Das n-Eck $\Pi A_1 \ldots A_n$ heißt **entartet**, falls es drei aufeinanderfolgende Eckpunkte gibt, die kollinear sind, und ansonsten **nicht entartet**.*

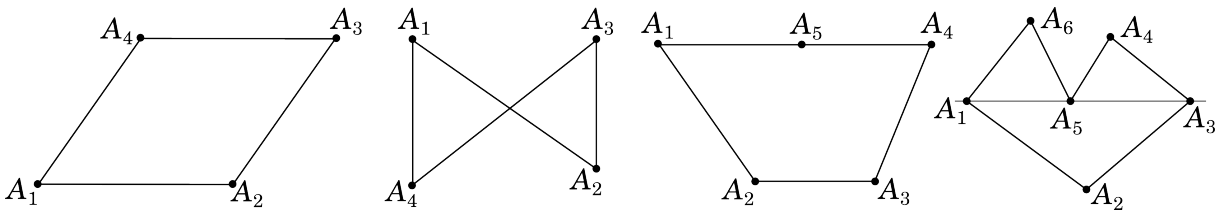


Abbildung 1.1: Nur das dritte n-Eck ist entartet.

Definition 1.29 (aff. Raum). *Ein nicht entartetes Viereck $\Pi ABCD$ heißt ein **Parallelogramm**, falls $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ und $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ gilt.*

In der folgenden Proposition 1.30 zeigen wir nun, dass affine Abbildungen cum grano salis Parallelogramme auf Parallelogramme abbilden:

Proposition 1.30 (aff. Raum). *Seien $(Y, T(Y), \sigma)$ ein affiner Raum über dem Körper K, $\varphi\colon X \to Y$ eine affine Abbildung und $\Pi ABCD$ ein Parallelogramm in X. Sind die Bildpunkte $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ paarweise verschieden und nicht kollinear, so ist dann*

$$\varphi(\Pi ABCD) = \Pi\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)$$

wieder ein Parallelogramm.

Beweis. Nach Definition 1.19 gibt es eine lineare Abbildung $T(\varphi)\colon T(X) \to T(Y)$ mit (1.4). Für je vier Punkte $A, B, C, D \in X$ gilt daher

$$t_{AB} = t_{CD} \quad \Longrightarrow \quad t_{\varphi(A)\varphi(B)} = t_{\varphi(C)\varphi(D)}.$$

Gelten $A \neq B$, $C \neq D$, $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ und $\varphi(C) \neq \varphi(D)$, so folgt hieraus

$$T(\overleftrightarrow{AB}) = T(\overleftrightarrow{CD}) \quad \Longrightarrow \quad T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) = T(\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}). \tag{1.7}$$

Für ein beliebiges Parallelogramm $\Pi ABCD$ gilt nach den Definitionen 1.16 und 1.29

$$T(\overleftrightarrow{AB}) = T(\overleftrightarrow{CD}) \quad \text{und} \quad T(\overleftrightarrow{AD}) = T(\overleftrightarrow{BC}).$$

Unter der Voraussetzung, dass $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)$ paarweise verschieden sind, erhalten wir daraus mit (1.7)

$$T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) = T(\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \quad \text{und} \quad T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(D)}) = T(\overleftrightarrow{\varphi(B)\varphi(C)}) \tag{1.8}$$

und also

$$\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \parallel \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} \quad \text{und} \quad \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(D)} \parallel \overleftrightarrow{\varphi(B)\varphi(C)}. \tag{1.9}$$

Sind $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)$ zusätzlich nicht kollinear, so gilt

$$\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \cap \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} = \emptyset, \tag{1.10}$$

denn: Wäre dem nicht so, gälte einerseits nach der Dimensionsformel 1.15

$$\begin{aligned} &\dim\big(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}\big) \\ = \; &\dim \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} + \dim \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} - \dim\big(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \cap \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}\big) \\ = \; &2 \end{aligned}$$

und andererseits wegen der Parallelität der Geraden

$$\begin{aligned}
&\dim\big(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}\big)\\
=\ &\dim T\big(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}\big)\\
\overset{(1.2)}{=}\ &\dim\big(T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) + T(\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)})\big)\\
\overset{(1.8)}{=}\ &1.
\end{aligned}$$

Das kann nicht sein. #

Wenden wir nun die Dimensionsformel 1.15 an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\dim\big(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}\big)\\
=\ &\dim \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} + \dim \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} - \dim\big(T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) \cap T(\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)})\big) + 1\\
\overset{(1.8)}{=}\ &1 + 1 - 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Die Geraden $\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$ und $\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}$ und insbesondere die vier Punkte $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ liegen also in einer gemeinsamen Ebene. Es folgt, dass unter diesen Voraussetzungen $\Pi\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)$ ein Viereck, nach (1.10) nicht ausgeartet und nach (1.9) sogar ein Parallelogramm ist. □

1.3 Affine Koordinaten

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf nichtleere endlichdimensionale affine Räume.

Definition 1.31 (aff. Raum). *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Ein $(n+1)$-Tupel $(A_0, \ldots, A_n)$ von Punkten in X heißt **affin unabhängig** bzw. eine **affine Basis** von X, wenn das n-Tupel $(t_{A_0A_1}, \ldots, t_{A_0A_n})$ in $T(X)$ linear unabhängig bzw. eine Basis ist.*

Beispiel 1.32 (aff. Raum). *Ist $O \in X$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $T(X)$, so ist offensichtlich durch*

$$(O, \tau_{v_1}(O), \ldots, \tau_{v_n}(O))$$

eine affine Basis von X gegeben. Ist insbesondere V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ und $O \in V$, so ist

$$(O, O + v_1, \ldots, O + v_n)$$

eine affine Basis von (V, V, τ_V). Im Fall $V = K^n$ mit der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ und $O = 0$ ist

$$(0, E_1, \ldots, E_n) \quad \text{mit } E_i := \tau_{e_i}(0) = 0 + e_i = e_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

*eine affine Basis von $\mathbb{A}^n(K)$, die **affine Standardbasis**.*

Beispiel 1.32 zeigt insbesondere, dass jeder (nichtleere endlichdimensionale) affine Raum X eine affine Basis hat. Jede affine Basis von X besteht aus $\dim(X) + 1$ Elementen.

Beispiel 1.33 (aff. Raum). *Für den affinen Unterraum*

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$$

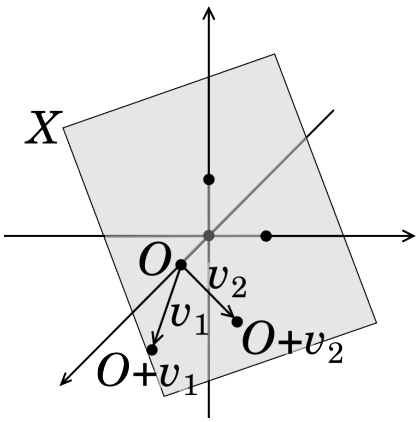
aus Beispiel 1.4 wählen wir

$$T(X) = \langle v_1, v_2 \rangle \text{ mit } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad O = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$(O, \tau_{v_1}(O), \tau_{v_2}(O)) = (O, O + v_1, O + v_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine affine Basis von X.



Bemerkung 1.34 (aff. Raum). *Die Definition der affinen Unabhängigkeit hängt nicht von der Reihenfolge der Punkte ab; genauer gilt*

$$(A_0, \ldots, A_n) \text{ affin unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad (A_{\sigma(0)}, \ldots, A_{\sigma(n)}) \text{ affin unabhängig für alle } \sigma \in \hat{\mathcal{S}}_n,$$

wobei $\hat{\mathcal{S}}_n$ die Menge der bijektiven Selbstabbildungen der Menge $\{0, \ldots, n\}$ bezeichnet,

denn: Da die linke Seite sofort aus der rechten folgt und die lineare Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren nicht von deren Reihenfolge abhängt, reicht es aus zu zeigen, dass unter Annahme der linken Seite für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Menge

$$\{t_{A_i A_j} : j \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{i\}\}$$

linear unabhängig ist. Dem ist so, denn für alle $\lambda_j \in K$ mit $j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j t_{A_i A_j} \implies \quad & 0 = -\lambda_0 t_{A_0 A_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j (t_{A_i A_0} + t_{A_0 A_j}) \\ \implies \quad & 0 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j t_{A_0 A_j} - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \right) t_{A_0 A_i} \\ \overset{\text{linke Seite}}{\implies} \quad & \lambda_j = 0 \text{ für alle } j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

#

Satz 1.35 (aff. Raum). *Seien $(A_0, \dots, A_n)$ eine affine Basis von X, Y ein affiner Raum über K und $B_0, \dots, B_n$ beliebige Punkte in Y. Dann gibt es genau eine affine Abbildung*

$$\varphi \colon X \to Y \quad \text{mit } \varphi(A_i) = B_i \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Weiter gilt:

(a) $\varphi(X) = \bigvee_{i=0}^{n} \{B_i\}$.

(b) φ *injektiv* $\iff (B_0, \dots, B_n)$ *ist affin unabhängig.*

(c) φ *bijektiv* $\iff (B_0, \dots, B_n)$ *ist affine Basis von Y.*

Beweis. Nach Satz 15.1 aus der Linearen Algebra gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\Phi \colon T(X) \to T(Y) \quad \text{mit } \Phi(t_{A_0 A_i}) = t_{B_0 B_i} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Nach Satz 1.22 gibt es daher genau eine affine Abbildung

$$\varphi \colon X \to Y \quad \text{mit } \varphi(A_0) = B_0 \text{ und } T(\varphi) = \Phi.$$

Es folgt $t_{B_0 \varphi(A_i)} = \Phi(t_{A_0 A_i}) = t_{B_0 B_i}$ und somit $\varphi(A_i) = B_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dies zeigt die Existenzaussage. Ist ψ eine weitere affine Abbildung mit $\psi(A_i) = B_i$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$, dann ist $T(\psi)(t_{A_0 A_i}) = t_{B_0 B_i}$ für $i = 1, \dots, n$ und deshalb $T(\psi) = \Phi$. Die Eindeutigkeitsaussage aus Satz 1.22 liefert dann $\psi = \varphi$. Die Behauptungen (a), (b) und (c) folgen nun recht einfach mit Übungsaufgabe 1.5. □

Definition 1.36 (aff. Raum). *Sei $\mathcal{B} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ eine affine Basis von X. Nach Satz 1.35 gibt es dann genau eine Affinität $\eta_{\mathcal{B}} \colon X \to K^n$ mit*

$$\eta_{\mathcal{B}}(A_0) = 0, \eta_{\mathcal{B}}(A_1) = E_1, \dots, \eta_{\mathcal{B}}(A_n) = E_n,$$

wobei $(0, E_1, \ldots, E_n)$ die in Beispiel 1.32 eingeführte affine Standardbasis von $\mathbb{A}^n(K)$ bezeichne. Diese heißt das ***affine Koordinatensystem*** *von X zur affinen Basis $\mathcal{B}$. Für jeden Punkt $P \in X$ nennen wir*

$$\eta_{\mathcal{B}}(P) =: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

den ***Koordinatenvektor*** *von P bezüglich der affinen Basis $(A_0, \ldots, A_n)$. Die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ heißen die* ***Koordinaten*** *von P bezüglich $(A_0, \ldots, A_n)$.*

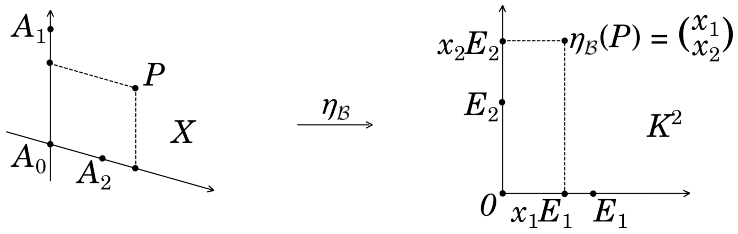


Abbildung 1.2: Affine Koordinatensysteme lassen sich über beliebigen Körpern definieren. Diese Abbildung dient zur Veranschaulichung der Situation in angeordneten Körpern wie $\mathbb{R}$. Über nicht angeordneten Körpern – etwa über $\mathbb{C}$ – ist eine Visualisierung schwieriger. Dieser Hinweis gilt gleichermaßen für die folgenden Abbildungen.

Durch Wahl einer affinen Basis von X erhalten wir über das zugehörige affine Koordinatensystem einen Isomorphismus affiner Räume zwischen X und $\mathbb{A}^n(K)$ mit $n = \dim X$. Ist $\eta\colon X \to K^n$ irgendeine Affinität, so ist $\eta = \eta_{\mathcal{B}}$ für $\mathcal{B} = \big(\eta^{-1}(0), \eta^{-1}(E_1), \ldots, \eta^{-1}(E_n)\big)$.

Proposition 1.37 (aff. Raum). *Sind $\mathcal{B} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ eine affine Basis von X und $P \in X$, so stimmt*

$$\eta_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit dem Koordinatenvektor des Vektors $t_{A_0P} \in T(X)$ bezüglich der Basis $(t_{A_0A_1}, \ldots, t_{A_0A_n})$ von $T(X)$ überein, es gilt also

$$t_{A_0P} = x_1 t_{A_0A_1} + \ldots + x_n t_{A_0A_n}.$$

Beweis. Es gibt eindeutig bestimmte $y_1, \ldots, y_n \in K$ mit $t_{A_0P} = y_1 t_{A_0A_1} + \ldots + y_n t_{A_0A_n}$. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{B}}(P) &= t_{0\eta_{\mathcal{B}}(P)} = t_{\eta_{\mathcal{B}}(A_0)\eta_{\mathcal{B}}(P)} = T(\eta_{\mathcal{B}})(t_{A_0P}) = y_1 T(\eta_{\mathcal{B}})(t_{A_0A_1}) + \ldots + y_n T(\eta_{\mathcal{B}})(t_{A_0A_n}) \\ &= y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

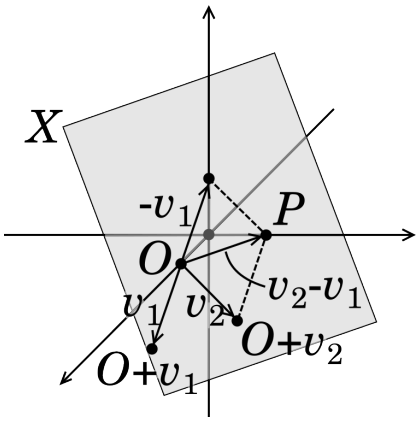
□

Beispiel 1.38. *Wir setzen Beispiel 1.33 fort. Dort haben wir* $\mathcal{B} := (O, O + v_1, O + v_2)$ *als affine Basis von* X *erkannt. In dieser Situation gilt*

$$\eta_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{für den Punkt } P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn es ist

$$P - O = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot v_1 + v_2.$$



Proposition 1.39 (aff. Raum). *Sei* $\mathcal{B} = (A_0, \ldots, A_n)$ *eine affine Basis von* X *mit zugehörigem affinem Koordinatensystem* $\eta_{\mathcal{B}} \colon X \to K^n$. *Weiter seien* $P_0, \ldots, P_m \in X$ *und* $Y = \{P_0\} \vee \ldots \vee \{P_m\}$. *Dann ist*

$$\eta_{\mathcal{B}}(Y) = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \eta_{\mathcal{B}}(P_i) : \lambda_i \in K, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Insbesondere gilt für $X = \mathbb{A}^n(K)$

$$\{P_0\} \vee \ldots \vee \{P_m\} = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i P_i : \lambda_i \in K, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \right\},$$

der Verbindungsraum der Punkte $P_0, \ldots, P_m$ *stimmt also mit der Menge der sogenannten* ***Affinkombinationen*** *von* $P_0, \ldots, P_m$ *überein.*

Beweis. Es ist $T(Y) = \langle t_{P_0P_1}, \ldots, t_{P_0P_m} \rangle$. Für einen beliebigen Punkt $Q \in X$ gilt dann

$$\begin{aligned} Q \in Y &\iff t_{P_0Q} \in T(Y) \\ &\iff \text{es gibt } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K \text{ mit } t_{P_0Q} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i t_{P_0P_i} \end{aligned}$$

$$\iff \text{es gibt } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \text{ mit } T(\eta_{\mathcal{B}})(t_{P_0Q}) = T(\eta_{\mathcal{B}}) \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i t_{P_0P_i} \right)$$

$$\iff \text{es gibt } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \text{ mit } \eta_{\mathcal{B}}(Q) - \eta_{\mathcal{B}}(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(\eta_{\mathcal{B}}(P_i) - \eta_{\mathcal{B}}(P_0)\big)$$

$$\iff \text{es gibt } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \text{ mit } \eta_{\mathcal{B}}(Q) = \underbrace{\big(1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\big)}_{=:\lambda_0} \cdot \eta_{\mathcal{B}}(P_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_{\mathcal{B}}(P_i).$$

□

Insbesondere gilt in $\mathbb{A}^n(K)$ für die Verbindungsgerade zweier Punkte P, Q:

$$\overleftrightarrow{PQ} = \{P\} \vee \{Q\} = \{\lambda \cdot P + (1-\lambda) \cdot Q : \lambda \in K\}.$$

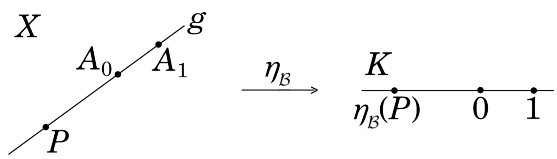
Ein wichtiger Grundbegriff der affinen Geometrie ist das Teilverhältnis:

Definition 1.40 (aff. Raum). *Seien $g \subseteq X$ eine Gerade und $A_0, A_1, P \in g$ Punkte mit $A_0 \neq A_1$. Dann ist $\mathcal{B} = (A_0, A_1)$ eine affine Basis von g. Die Koordinate $\eta_{\mathcal{B}}(P) \in K$ von P bezüglich (A_0, A_1) heißt das* ***Teilverhältnis*** $\mathrm{TV}(A_0, A_1, P)$ *von A_0, A_1, P. Offensichtlich gilt*

$$t_{A_0P} = \mathrm{TV}(A_0, A_1, P) \cdot t_{A_0A_1}. \tag{1.11}$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{TV}(A_0, A_1, A_0) = 0 \quad \textit{und} \quad \mathrm{TV}(A_0, A_1, A_1) = 1.$$



Bemerkung 1.41. *Sei K ein beliebiger Körper und seien*

$$A_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \in K^n$$

drei kollineare Punkte mit $A_0 \neq A_1$, so dass es insbesondere ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_i^{(0)} \neq x_i^{(1)}$ gibt. Dann gilt

$$\mathrm{TV}(A_0, A_1, P) = \frac{y_i - x_i^{(0)}}{x_i^{(1)} - x_i^{(0)}},$$

denn: Nach (1.11) gilt in der vorliegenden Situation

$$\begin{pmatrix} y_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n - x_n^{(0)} \end{pmatrix} = P - A_0 = \mathrm{TV}(A_0, A_1, P) \cdot (A_1 - A_0) = \mathrm{TV}(A_0, A_1, P) \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} - x_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung erhalten wir durch Auslesen der i-ten Zeile. #

Proposition 1.42 (aff. Raum). *Das Teilverhältnis ist eine affine Invariante. Genauer gilt für einen affinen Raum Y über K, eine affine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ und kollineare Punkte $A_0, A_1, P \in X$ mit $\varphi(A_0) \neq \varphi(A_1)$*[3]

$$\mathrm{TV}\big(\varphi(A_0), \varphi(A_1), \varphi(P)\big) = \mathrm{TV}(A_0, A_1, P).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} t_{\varphi(A_0)\varphi(P)} &= \mathrm{TV}\big(\varphi(A_0), \varphi(A_1), \varphi(P)\big) \cdot t_{\varphi(A_0)\varphi(A_1)} = \mathrm{TV}\big(\varphi(A_0), \varphi(A_1), \varphi(P)\big) \cdot T(\varphi)(t_{A_0A_1}) \\ &\shortparallel \\ T(\varphi)(t_{A_0P}) &= T(\varphi)\big(\mathrm{TV}(A_0, A_1, P) t_{A_0A_1}\big) = \mathrm{TV}(A_0, A_1, P) \cdot T(\varphi)(t_{A_0A_1}). \end{aligned}$$

Wegen $\varphi(A_0) \neq \varphi(A_1)$ ist $T(\varphi)(t_{A_0A_1}) \neq 0$ und die Behauptung folgt. □

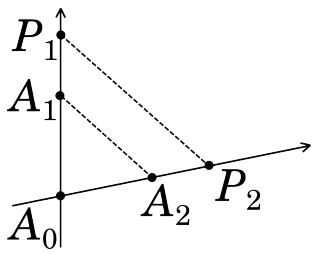
Wir zeigen nun exemplarisch einige klassische Sätze der affinen Geometrie:

Satz 1.43 (Strahlensatz, **aff. Raum**). *Seien $A_0, A_1, A_2 \in X$ affin unabhängig und seien $P_1 \in \overleftrightarrow{A_0A_1}$ und $P_2 \in \overleftrightarrow{A_0A_2}$ von A_0 verschieden. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\overleftrightarrow{P_1P_2} \parallel \overleftrightarrow{A_1A_2}$,

(ii) $\mathrm{TV}(A_0, A_1, P_1) = \mathrm{TV}(A_0, A_2, P_2)$,

(iii) $t_{P_1P_2} = \mathrm{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{A_1A_2}$.



Beweis. Gelte zunächst Aussage (i). Wir betrachten die von A_0, A_1, A_2 aufgespannte Ebene $Y := \{A_0\} \vee \{A_1\} \vee \{A_2\} \subseteq X$. Nach zweifacher Anwendung von Proposition 1.13 erhalten wir für diese

$$T(Y) = \langle t_{A_0A_1} \rangle \oplus W \quad \text{mit } W := \langle t_{A_1A_2} \rangle$$

[3] Ist speziell φ eine Affinität, so gilt für $A_0 \neq A_1$ stets auch $\varphi(A_0) \neq \varphi(A_1)$. Eine Affinität lässt also alle möglichen Teilverhältnisse fest.

und gemäß (1.6) zudem

$$\begin{aligned} W(A_1) &= \{A \in Y : t_{A_1A} \in \langle t_{A_1A_2}\rangle\} = \overleftrightarrow{A_1A_2}, \\ W(P_1) &= \{A \in Y : t_{P_1A} \in \langle t_{A_1A_2}\rangle\} \overset{\text{(i)}}{=} \{A \in Y : t_{P_1A} \in \langle t_{P_1P_2}\rangle\} = \overleftrightarrow{P_1P_2}. \end{aligned}$$

Für die Parallelprojektion $\pi_W := \pi_W^{Y,\overleftrightarrow{A_0A_2}}$ gilt nach Proposition 1.26 daher

$$\begin{aligned} &\pi_W(A_0) = A_0, \\ &\{\pi_W(A_1)\} = W(A_1) \cap \overleftrightarrow{A_0A_2} = \overleftrightarrow{A_1A_2} \cap \overleftrightarrow{A_0A_2} = \{A_2\}, \\ &\{\pi_W(P_1)\} = W(P_1) \cap \overleftrightarrow{A_0A_2} = \overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \overleftrightarrow{A_0A_2} = \{P_2\} \end{aligned}$$

und mit Proposition 1.42 folgt

$$\mathrm{TV}(A_0, A_2, P_2) = \mathrm{TV}\big(\pi_W(A_0), \pi_W(A_1), \pi_W(P_1)\big) = \mathrm{TV}(A_0, A_1, P_1).$$

Das ist Aussage (ii).

Gelte nun Aussage (ii). Dann folgt sofort

$$\begin{aligned} t_{P_1P_2} &= t_{P_1A_0} + t_{A_0P_2} \\ &= \mathrm{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{A_1A_0} + \mathrm{TV}(A_0, A_2, P_2) \cdot t_{A_0A_2} \\ &= \mathrm{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{A_1A_2} \end{aligned}$$

und somit Aussage (iii).

Dass schließlich Aussage (iii) auch Aussage (i) impliziert, ist trivial. □

Bemerkung 1.44 (aff. Raum). *Der Gedanke hinter der Implikation „(ii)$\Longrightarrow$(iii)“ im Beweis des Strahlensatzes 1.43 lässt sich noch verschärfen: Ist $\varphi\colon Y \to Y$ die nach Satz 1.35 eindeutig bestimmte Affinität mit*

$$\varphi(A_0) = A_0, \quad \varphi(A_1) = P_1, \quad \varphi(A_2) = P_2,$$

so gilt unter Annahme einer der äquivalenten Aussagen (i), (ii), (iii) des Strahlensatzes

$$t_{\varphi(A)\varphi(B)} = \mathrm{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{AB} \quad \textit{für alle } A, B \in E.$$

Die lineare Abbildung $T(\varphi)$ ist dann also gerade die Multiplikation mit der Zahl $\mathrm{TV}(A_0, A_1, P_1) \in K$ und somit eine zentrische Streckung.[4]

Definition 1.45 (aff. Raum). *Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und seien $A, B \in X$ fest gegeben. Dann heißt der eindeutig bestimmte Punkt M_{AB} auf $\overleftrightarrow{AB}$ mit $\mathrm{TV}(A, B, M_{AB}) = \frac{1}{2}$ der **Mittelpunkt** von A und B. Ist speziell $X = K^n$, so gilt offensichtlich $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$.*

[4] Ist allgemein $(A_0, \ldots, A_n)$ eine affine Basis von X und $\lambda \in K$ gegeben, so heißt die nach Proposition 1.22 eindeutig bestimmte affine Abbildung $\psi\colon X \to Y$ mit

$$\psi(A_0) = A_0 \quad \text{und } T(\psi)(v) = \lambda \cdot v \text{ für alle } v \in T(X).$$

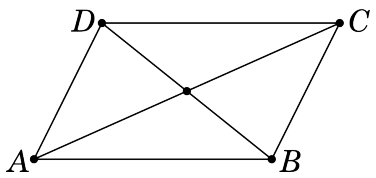
die ***zentrische Streckung*** mit Zentrum A_0 und Streckungsfaktor λ.

Satz 1.46 (Diagonalensatz, **aff. Raum**). *Sei* $\operatorname{char}(K) \neq 2$. *Dann sind für ein nicht entartetes Viereck* $\Pi ABCD$ *in* X *die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\Pi ABCD$ *ist ein Parallelogramm.*

(ii) *Es gelten die (äquivalenten) Vektoridentitäten* $t_{CD} = -t_{AB}$ *und* $t_{BC} = t_{AD}$.

(iii) *Die Mittelpunkte* M_{AC} *und* M_{BD} *stimmen überein.*



Beweis. Nach Definition 1.29 ist $\Pi ABCD$ genau dann ein Parallelogramm, wenn

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \quad \text{sowie} \quad \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$$

und somit

$$\langle t_{AB} \rangle_K = T(\overleftrightarrow{AB}) = T(\overleftrightarrow{CD}) = \langle t_{CD} \rangle_K \quad \text{sowie} \quad \langle t_{AD} \rangle_K = T(\overleftrightarrow{AD}) = T(\overleftrightarrow{BC}) = \langle t_{BC} \rangle_K$$

gelten. Das ist äquivalent dazu, dass es $\lambda, \mu \in K \setminus \{0\}$ mit

$$t_{CD} = \lambda t_{AB} \quad \text{und} \quad t_{BC} = \mu t_{AD}$$

gibt. An dieser Stelle ist klar, dass Aussage (i) aus Aussage (ii) folgt. Nehmen wir andererseits Aussage (i) an, so folgt aus den bisherigen Überlegungen

$$t_{AB} + t_{CD} = (\lambda + 1) \cdot t_{AB} \quad \text{sowie} \quad t_{DA} + t_{BC} = (\mu - 1) \cdot t_{AD}.$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir mit dem Dreiecksaxiom (D)

$$0 = t_{AB} + t_{BC} + t_{CD} + t_{DA} = (\lambda + 1) \cdot t_{AB} + (\mu - 1) \cdot t_{AD}.$$

Da $\Pi ABCD$ nicht entartet ist, sind insbesondere die drei Punkte A, B, D nicht kollinear, also (A, B, D) affin unabhängig und schließlich (t_{AB}, t_{AD}) linear unabhängig. Mit der obigen Gleichung folgt daher $\lambda = -1$ und $\mu = 1$, also Aussage (ii).

Es verbleibt die Äquivalenz der Aussagen (ii) und (iii) zu zeigen. Nach (1.11) ist M_{AC} bzw. M_{BD} der eindeutig bestimmte Punkt auf $\overleftrightarrow{AC}$ bzw. $\overleftrightarrow{BD}$ mit

$$t_{AM_{AC}} = \frac{1}{2} \cdot t_{AC} \quad \text{und} \quad t_{BM_{BD}} = \frac{1}{2} \cdot t_{BD}.$$

Es gilt also

$$t_{AM_{BD}} = t_{AB} + t_{BM_{BD}} = t_{AB} + \frac{1}{2} \cdot t_{BD} = t_{AB} + \frac{1}{2} \cdot (t_{AD} - t_{AB}) = \frac{1}{2} \cdot (t_{AB} + t_{AD})$$

und somit

$$M_{BD} = M_{AC} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot (t_{AB} + t_{AD}) = \frac{1}{2} \cdot t_{AC} \quad \Longleftrightarrow \quad t_{AD} = t_{BC}.$$

□

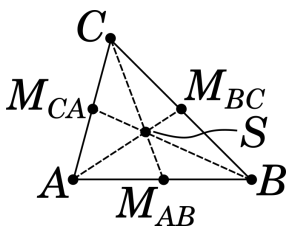
Satz 1.47 (Schwerpunktsatz, **aff. Raum**). *Sei* $\operatorname{char}(K) \neq 2, 3$. *Dann schneiden sich in einem beliebigen Dreieck* $\triangle ABC$ *in* X *die* ***Seitenhalbierenden***

$$\overleftrightarrow{AM_{BC}}, \quad \overleftrightarrow{BM_{CA}}, \quad \overleftrightarrow{CM_{AB}}$$

von $\triangle ABC$ *in einem eindeutig bestimmten gemeinsamen Punkt* S, *dem* ***Schwerpunkt*** *von* $\triangle ABC$. *Hierbei gilt*

$$\operatorname{TV}(A, M_{BC}, S) = \operatorname{TV}(B, M_{CA}, S) = \operatorname{TV}(C, M_{AB}, S) = \frac{2}{3}.$$

Ist speziell $X = K^n$ *für ein* $n \geq 2$, *so gilt* $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$.



Beweis. Sei n die Dimension von X. Nach Wahl einer affinen Basis $\mathcal{B}$ von X erhalten wir das zugehörige affine Koordinatensystem $\eta_{\mathcal{B}} \colon X \to K^n$, so dass wir nach Proposition 1.42 für den Beweis ohne Einschränkung $X = K^n$ annehmen können. Wegen

$$S := \frac{1}{3} \cdot (A + B + C) = \frac{1}{3} \cdot A + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (B + C) = \frac{1}{3} \cdot A + \frac{2}{3} \cdot M_{BC}$$

liegt der Punkt S auf der Seitenhalbierenden $\overleftrightarrow{AM_{BC}}$ und es gilt

$$S - A = \frac{2}{3} \cdot (M_{BC} - A),$$

nach (1.11) also $\operatorname{TV}(A, M_{BC}, S) = \frac{2}{3}$. Dass die entsprechenden Aussagen bei den anderen beiden Seitenhalbierenden zutreffen, zeigt man analog.

Es verbleibt zu zeigen, dass der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eindeutig ist. Aber wäre er es nicht, so stimmten alle drei Seitenhalbierenden überein. Insbesondere wären die Punkte A, B, C kollinear, was nicht sein kann, da $\triangle ABC$ ein Dreieck ist. □

1.4 Euklidische Räume

Definition 1.48. *Ein* ***euklidischer Raum*** *ist ein Quadrupel* $(X, T(X), \langle \cdot \mid \cdot \rangle, \tau)$, *so dass* $(X, T(X), \tau)$ *ein affiner Raum über* $\mathbb{R}$ *und* $(T(X), \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ *ein euklidischer Vektorraum ist, also ein endlichdimensionaler* $\mathbb{R}$*-Vektorraum mit Skalarprodukt* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. *Für „Sei* $(X, T(X), \langle \cdot \mid \cdot \rangle, \tau)$ *ein euklidischer Raum." schreiben wir künftig auch kurz „***(eukl. Raum)***".*

Anstelle des Quadrupels $(X, T(X), \langle \cdot \mid \cdot \rangle, \tau)$ werden wir häufig nur kurz X schreiben.

Beispiel 1.49. *Ein Beispiel für einen euklidischen Raum ist durch den* ***euklidischen Standardraum*** $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \langle \cdot \mid \cdot \rangle, \tau_{\mathbb{R}^n})$ *der Dimension n gegeben, wobei*

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ *bezeichne.*

Durch das Vorhandensein des Skalarprodukts sind euklidische Räume mit wesentlich mehr Struktur ausgestattet als affine Räume:

Bemerkung 1.50 (eukl. Raum). *Auf* $T(X)$ *ist durch*

$$\|\cdot\| \colon T(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \|t\| := \sqrt{\langle t \mid t \rangle}$$

eine ***Norm*** *gegeben. Auf* X *ist durch*

$$d \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d(A, B) := \|t_{AB}\|$$

eine ***Metrik*** *erklärt. Diese ist translationsinvariant, für* $t \in T(X)$ *gilt also* $d(\tau_t(A), \tau_t(B)) = d(A, B)$. *Wir nennen* $d(A, B)$ *auch den* ***Abstand*** *zwischen* A *und* B. *Für* $t, t' \in T(X) \smallsetminus \{0\}$ *definieren wir* $\measuredangle(t, t')$ *als die eindeutig bestimmte reelle Zahl im Intervall* $[0, \pi]$ *mit*

$$\cos \measuredangle(t, t') = \frac{\langle t \mid t' \rangle}{\|t\| \cdot \|t'\|}.^{5} \tag{1.12}$$

Wir nennen $\measuredangle(t, t')$ *die* ***Winkelgröße*** *zwischen* t *und* t'.

Im euklidischen Standardraum gelten

$$\|t\| = \sqrt{t_1^2 + \ldots + t_n^2} \qquad \text{für } t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

$$d(A, B) = \|B - A\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2} \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Wir werden es im Folgenden mit zwei euklidischen Räumen X und Y zu tun haben. Im Hinblick auf bessere Lesbarkeit werden wir die zugehörigen Normen, Metriken, Skalarprodukte und Winkelgrößen nicht mit Indizes X und Y versehen. Es sollte stets aus dem Kontext klar sein, in welchem Raum diese jeweils zu betrachten sind.

[5] Dies ist wohldefiniert wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $|\langle t \mid t' \rangle| \leq \|t\| \cdot \|t'\|$, wobei Gleichheit hier genau dann besteht, wenn t und t' linear abhängig sind.

Definition 1.51 (eukl. Raum). *Sei $(Y, T(Y), \langle \cdot \mid \cdot \rangle, \sigma)$ ein euklidischer Raum. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ heißt ein* ***Homomorphismus euklidischer Räume****, wenn φ eine affine Abbildung und $T(\varphi)$ eine orthogonale Abbildung ist, wenn also*

$$\langle T(\varphi)(t_1) \mid T(\varphi)(t_2) \rangle = \langle t_1 \mid t_2 \rangle \quad \text{für alle } t_1, t_2 \in T(X)$$

gilt. Ist φ zusätzlich bijektiv, so nennen wir es einen ***Isomorphismus euklidischer Räume****. Im Fall $X = Y$ heißt ein solcher Isomorphismus auch ein* ***Automorphismus*** *von X.*

Homomorphismen euklidischer Räume erhalten Norm, Abstand und Winkelgröße:

Proposition 1.52 (eukl. Raum). *Sei $(Y, T(Y), \langle \cdot \mid \cdot \rangle, \sigma)$ ein euklidischer Raum und $\varphi\colon X \to Y$ ein Homomorphismus euklidischer Räume. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *φ ist injektiv.*

(b) *$\|T(\varphi)(t)\| = \|t\|$ für alle $t \in T(X)$.*

(c) *$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$ für alle $A, B \in X$.*

(d) *$\measuredangle\big(T(\varphi)(t), T(\varphi)(t')\big) = \measuredangle(t, t')$ für alle $t, t' \in T(X) \setminus \{0\}$.*

Insbesondere ist jeder Homomorphismus euklidischer Räume $\varphi\colon X \to X$ ein Automorphismus von X.

Beweis. Da $T(\varphi)$ orthogonal ist, ist es nach Bemerkung 23.2 aus der Linearen Algebra injektiv. Behauptung (a) ergibt sich dann unmittelbar aus Übungsaufgabe 1.5. Behauptung (b) folgt ebenfalls aus dem soeben zitierten Resultat aus der Linearen Algebra. Zum Nachweis von Behauptung (c) berechnen wir

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = \|t_{\varphi(A)\varphi(B)}\| = \|T(\varphi)(t_{AB})\| = \|t_{AB}\| = d(A, B).$$

Für Behauptung (d) bemerken wir

$$\cos \measuredangle\big(T(\varphi)(t), T(\varphi)(t')\big) = \frac{\langle T(\varphi)(t) \mid T(\varphi)(t') \rangle}{\|T(\varphi)(t)\| \|T(\varphi)(t')\|} = \frac{\langle t \mid t' \rangle}{\|t\| \|t'\|} = \cos \measuredangle(t, t').$$

□

Es stellt sich die Frage, ob es neben den Homomorphismen euklidischer Räume weitere – nicht notwendig affine – Abbildungen von X nach Y gibt, die Abstände erhalten. Wir werden zeigen, dass dem nicht so ist:

Definition 1.53 (eukl. Raum). *Sei $(Y, T(Y), \langle \cdot \mid \cdot \rangle, \sigma)$ ein euklidischer Raum. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ heißt eine* ***Isometrie****, wenn $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$ für alle $A, B \in X$ gilt. Im Fall $X = Y$ sprechen wir auch von einer* ***Bewegung****.*

Proposition 1.54 (eukl. Raum). *Sei $(Y, T(Y), \langle \cdot \mid \cdot \rangle, \sigma)$ ein euklidischer Raum und sei $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *φ ist ein Homomorphismus euklidischer Räume.*

(ii) *φ ist eine Isometrie.*

Insbesondere sind die Automorphismen von X genau durch die Bewegungen von X gegeben. In anderen Worten: Die Bewegungen von X sind gerade die Affinitäten $\varphi\colon X \to X$, für die $T(\varphi)$ orthogonal ist.

Beweis. Dass Homomorphismen euklidischer Räume Isometrien sind, haben wir bereits in Proposition 1.52 gezeigt.

Sei also $\varphi\colon X \to Y$ eine Isometrie. Zum Nachweis, dass φ ein Homomorphismus euklidischer Räume ist, genügt es nach Proposition 1.21 zu zeigen, dass für einen beliebigen, aber festen Punkt $O \in X$ die Abbildung

$$\Phi\colon \begin{cases} T(X) & \to T(Y), \\ t_{OP} & \mapsto t_{\varphi(O)\varphi(P)} \end{cases}$$

linear und orthogonal ist. Tatsächlich gilt

$$\|\Phi(t)\| = \|t\| \qquad \text{für alle } t \in T(X), \tag{1.13}$$

denn: Für jedes $t \in T(X)$ gibt es ein $P \in X$ mit $t = t_{OP}$. In dieser Schreibweise gilt nun

$$\|\Phi(t)\| = \|t_{\varphi(O)\varphi(P)}\| = d(\varphi(O), \varphi(P)) \overset{\text{(ii)}}{=} d(O, P) = \|t_{OP}\| = \|t\|.$$

#

Hieraus erhalten wir

$$\langle \Phi(t_1) \mid \Phi(t_2) \rangle = \langle t_1 \mid t_2 \rangle \qquad \text{für alle } t_1, t_2 \in T(X), \tag{1.14}$$

denn: Für alle $t_1, t_2 \in T(X)$ gibt es $P_1, P_2 \in X$ mit $t_1 = t_{OP_1}$ und $t_2 = t_{OP_2}$ und also zunächst

$$\begin{aligned} \|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)\| &= \|t_{\varphi(O)\varphi(P_1)} - t_{\varphi(O)\varphi(P_2)}\| \overset{(D)}{=} \|t_{\varphi(P_2)\varphi(P_1)}\| \\ &= d(\varphi(P_2), \varphi(P_1)) \overset{\text{(ii)}}{=} d(P_2, P_1) = \|t_{P_2P_1}\| = \|t_1 - t_2\|. \end{aligned}$$

Nach Quadrieren beider Seiten erhalten wir definitionsgemäß

$$\begin{aligned} \|t_1 - t_2\|^2 &= \langle t_1 - t_2 \mid t_1 - t_2 \rangle = \|t_1\|^2 - 2\langle t_1 \mid t_2 \rangle + \|t_2\|^2, \\ \|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)\|^2 &= \langle \Phi(t_1) - \Phi(t_2) \mid \Phi(t_1) - \Phi(t_2) \rangle \\ &= \|\Phi(t_1)\|^2 - 2 \cdot \langle \Phi(t_1) \mid \Phi(t_2) \rangle + \|\Phi(t_2)\|^2. \end{aligned}$$

Aus alledem und (1.13) folgt die Behauptung. #

Schließlich ist Φ auch linear,

denn: Für alle $t_1, t_2, t \in T(X)$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi(t_1+t_2) - \Phi(t_1) - \Phi(t_2) \mid \Phi(t_1+t_2) - \Phi(t_1) - \Phi(t_2) \rangle \\
=\ &\langle \Phi(t_1+t_2) \mid \Phi(t_1+t_2) \rangle + \langle \Phi(t_1) \mid \Phi(t_1) \rangle + \langle \Phi(t_2) \mid \Phi(t_2) \rangle \\
&- 2 \cdot \langle \Phi(t_1+t_2) \mid \Phi(t_1) \rangle - 2 \cdot \langle \Phi(t_1+t_2) \mid \Phi(t_2) \rangle + 2 \cdot \langle \Phi(t_1) \mid \Phi(t_2) \rangle \\
\overset{(1.14)}{=}\ &\langle t_1+t_2 \mid t_1+t_2 \rangle + \langle t_1 \mid t_1 \rangle + \langle t_2 \mid t_2 \rangle - 2 \cdot \langle t_1+t_2 \mid t_1 \rangle - 2 \cdot \langle t_1+t_2 \mid t_2 \rangle + 2 \cdot \langle t_1 \mid t_2 \rangle \\
=\ &\langle t_1+t_2-t_1-t_2 \mid t_1+t_2-t_1-t_2 \rangle \\
=\ &0
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi(\lambda t) - \lambda \cdot \Phi(t) \mid \Phi(\lambda t) - \lambda \cdot \Phi(t) \rangle \\
=\ &\langle \Phi(\lambda t) \mid \Phi(\lambda t) \rangle - 2\lambda \cdot \langle \Phi(\lambda t) \mid \Phi(t) \rangle + \lambda^2 \cdot \langle \Phi(t) \mid \Phi(t) \rangle \\
\overset{(1.14)}{=}\ &\langle \lambda t \mid \lambda t \rangle - 2\lambda \cdot \langle \lambda t \mid t \rangle + \lambda^2 \cdot \langle t \mid t \rangle \\
=\ &0.
\end{aligned}$$

Aufgrund der positiven Definitheit des Skalarprodukts folgen hieraus

$$\begin{aligned}
&\Phi(t_1+t_2) = \Phi(t_1) + \Phi(t_2), \\
&\Phi(\lambda t) = \lambda \cdot \Phi(t)
\end{aligned}$$

und also die behauptete Linearität. #

□

Definition 1.55 (eukl. Raum). *Eine Abbildung $\varphi\colon X \to X$ heißt eine **Ähnlichkeit**, wenn es eine reelle Zahl $\rho > 0$ mit*

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = \rho \cdot d(A, B) \quad \text{für alle } A, B \in X$$

*gibt. Die Zahl ρ heißt dabei der **Ähnlichkeitsfaktor** von φ.*

Offenbar ist jede Bewegung eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor 1. Allgemeiner gilt:

Proposition 1.56 (eukl. Raum). *Sei $\varphi\colon X \to X$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) *φ ist eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor ρ.*

(ii) *φ ist eine Affinität, für die $\frac{1}{\rho} \cdot T(\varphi)$ orthogonal ist.*

Beweis. Gelte zunächst Aussage (ii), sei also φ eine Affinität, für die $\frac{1}{\rho} \cdot T(\varphi)$ orthogonal ist. Dann gilt für alle $A, B \in X$ die Gleichheit

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = \|t_{\varphi(A)\varphi(B)}\| = \|T(\varphi)(t_{AB})\| = \rho \cdot \|\frac{1}{\rho} \cdot T(\varphi)(t_{AB})\| \overset{\text{(ii)}}{=} \rho \cdot \|t_{AB}\| = \rho \cdot d(A, B)$$

und also Aussage (i).

Nun gelte umgekehrt Aussage (i), sei φ also eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor ρ. Wir wählen ein $O \in X$ und setzen

$$\Phi\colon \begin{cases} T(X) & \to T(X), \\ t_{OP} & \mapsto t_{\varphi(O)\varphi(P)}. \end{cases}$$

Für jedes $t \in T(X)$ gibt es dann ein $P \in X$ mit $t = t_{OP}$ und es gilt

$$\|\frac{1}{\rho} \cdot \Phi(t)\| = \frac{1}{\rho} \cdot \|t_{\varphi(O)\varphi(P)}\| = \frac{1}{\rho} \cdot d(\varphi(O), \varphi(P)) \overset{\text{(i)}}{=} d(O, P) = \|t_{OP}\|.$$

Wie im Beweis von Proposition 1.54 bekommen wir hieraus, dass $\frac{1}{\rho} \cdot \Phi$ linear und orthogonal ist. Es folgt die Linearität von Φ und mit Proposition 1.21, dass φ eine affine Abbildung ist. Es verbleibt zu zeigen, dass φ auch bijektiv und somit eine Affinität ist. Seien hierfür $A \neq B \in X$ gegeben. Für diese gilt

$$0 \neq d(A, B) \overset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{\rho} \cdot d(\varphi(A), \varphi(B)),$$

also $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ und somit die Injektivität von φ. Aus dieser folgt die Injektivität und somit die Bijektivität von $T(\varphi)$, die wiederum die Bijektivität von φ impliziert. □

Insbesondere ist jede zentrische Streckung $\varphi\colon X \to X$ eine Ähnlichkeit; hier ist $T(\varphi) = \rho \cdot \mathrm{id}$ für eine reelle Zahl $\rho > 0$.

Definition 1.57 (eukl. Raum). *Es seien $A, B, C \in X$ paarweise verschieden und nicht kollinear.*

(a) *Die Menge $\overline{AB} := \{\tau_t(A) : t = \lambda t_{AB}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1\}$ heißt die **Strecke** zwischen A und B.*

(b) *Die Menge $\overrightarrow{AB} := \{\tau_t(A) : t = \lambda t_{AB}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda\}$ heißt der **Strahl** aus A durch B.*

(c) *Die Vereinigung $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ heißt der **Winkel** $\angle BAC$.*

(d) *Die reelle Zahl $\measuredangle BAC := \measuredangle(t_{AB}, t_{AC}) \in (0, \pi)$ heißt die **Winkelgröße** des Winkels $\angle BAC$.*

(e) *Der Winkel $\angle BAC$ heißt ein **rechter Winkel**, wenn $\measuredangle BAC = \frac{\pi}{2}$ ist.*

Im euklidischen Standardraum $\mathbb{E}^n$ gelten offenbar:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \{(1-\lambda) \cdot A + \lambda \cdot B : 0 \leq \lambda \leq 1\}, \\ \overrightarrow{AB} &= \{(1-\lambda) \cdot A + \lambda \cdot B : 0 \leq \lambda\}, \\ \measuredangle BAC &= \arccos \frac{\langle B - A \mid C - A \rangle}{\|B - A\| \|C - A\|}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Bemerkung 1.58 (eukl. Raum). *Jede Ähnlichkeit $\varphi\colon X \to X$ erhält Winkelgrößen,*

denn: Ist ρ der Ähnlichkeitsfaktor von φ und sind $A, B, C \in X$ paarweise verschieden und nicht kollinear, so ist

$$\begin{aligned}\cos \measuredangle \varphi(B)\varphi(A)\varphi(C) &= \cos \measuredangle (T(\varphi)(t_{AB}), T(\varphi)(t_{AC})) \\ &= \cos \measuredangle (\frac{1}{\rho} \cdot T(\varphi)(t_{AB}), \frac{1}{\rho} \cdot T(\varphi)(t_{AC})) \\ &= \cos \measuredangle (t_{AB}, t_{AC}) \\ &= \cos \measuredangle BAC.\end{aligned}$$

#

Definition 1.59 (eukl. Raum). *Ein $(n+1)$-Tupel $(A_0, \ldots, A_n)$ von Punkten in X heißt eine **Orthonormalbasis** von X, wenn das n-Tupel $(t_{A_0A_1}, \ldots, t_{A_0A_n})$ eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums $(T(X), \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ist.*

Die affine Standardbasis $(0, E_1, \ldots, E_n)$ von $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ ist offenbar eine Orthonormalbasis von $\mathbb{E}^n$.

Bemerkung 1.60 (eukl. Raum). *Jeder euklidische Raum hat eine Orthonormalbasis,*

denn: Wir wählen einen Punkt $O \in X$. Nach dem Gram-Schmidt-Verfahren existiert eine Orthonormalbasis $(t_1, \ldots, t_n)$ von $(T(X), \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$. Das $(n+1)$-Tupel $(O, \tau_{t_1}(O), \ldots, \tau_{t_n}(O))$ ist dann offenbar eine Orthonormalbasis von X. #

Satz 1.61 (eukl. Raum). *Sei $(A_0, \ldots, A_n)$ eine Orthonormalbasis von X. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus euklidischer Räume*

$$\varphi\colon X \to \mathbb{E}^n \quad \textit{mit } \varphi(A_i) = E_i \textit{ für alle } i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Beweis. Nach Satz 1.35 existiert eine eindeutig bestimmte Affinität $\varphi\colon X \to \mathbb{E}^n$ mit $\varphi(A_i) = E_i$ für $i = 0, \ldots, n$. Da $(A_0, \ldots, A_n)$ eine Orthonormalbasis von X ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle T(\varphi)(t_{A_0A_i}) \mid T(\varphi)(t_{A_0A_j}) \rangle &= \langle \varphi(A_i) - \varphi(A_0) \mid \varphi(A_j) - \varphi(A_0) \rangle \\ &= \langle E_i \mid E_j \rangle = \delta_{ij} = \langle t_{A_0A_i} \mid t_{A_0A_j} \rangle.\end{aligned}$$

Aus der Bilinearität des Skalarprodukts und der Tatsache, dass $(t_{A_0A_1}, \ldots, t_{A_0A_n})$ eine Basis von $T(X)$ ist, ergibt sich $\langle T(\varphi)(t_1) \mid T(\varphi)(t_2) \rangle = \langle t_1 \mid t_2 \rangle$ für alle $t_1, t_2 \in T(X)$ und damit die Orthogonalität von $T(\varphi)$. □

Aufgrund von Satz 1.61 können wir uns im Rest des Abschnitts auf den euklidischen Standardraum $\mathbb{E}^n$ beschränken.

Bemerkung 1.62. *Nach Beispiel 1.25 und Proposition 1.52 ist jede Bewegung von $\mathbb{E}^n$ von der Form*

$$\varphi = \varphi_{M,P} \colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^n, \\ A & \mapsto M \cdot A + P \end{cases} \quad \text{mit } M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ und } P = \varphi(0).$$

*Eine solche Bewegung heißt **eigentlich**, wenn M bereits in $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ liegt, und **uneigentlich** sonst. Für $n = 2$ gilt nach Bemerkung 23.11 aus der Linearen Algebra:*

- *Jedes $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ lässt sich schreiben als*

$$M = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha, \end{pmatrix} \quad \text{mit einem eindeutig bestimmten } \alpha \in [0, 2\pi).$$

  Für $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = \pi$ hat D_α den zweifachen Eigenwert 1 bzw. -1, in allen anderen Fällen hat D_α keinen Eigenwert. Die Determinante von D_α ist 1.

- *Jedes $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ lässt sich schreiben als*

$$M = S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit einem eindeutig bestimmten } \alpha \in [0, 2\pi).$$

  S_α hat für jedes α die beiden Eigenwerte ± 1. Die Determinante von S_α ist -1.

Eine geometrische Interpretation hiervon geben wir in Bemerkung 1.63. Bewegungen in Ebenen werden uns in Abschnitt 3.3 dabei helfen nachzuweisen, dass $\mathbb{E}^2$ den Axiomen einer sogenannten Hilbertebene genügt.

Nach Proposition 1.56 ist folglich jede Ähnlichkeit von $\mathbb{E}^n$ von der Form

$$\varphi = \varphi_{\rho M,P} \colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^n, \\ A & \mapsto \rho M \cdot A + P \end{cases} \quad \text{mit } M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ und } P = \varphi(0).$$

Hierbei ist ρ der Ähnlichkeitsfaktor von φ.

Bemerkung 1.63. *In dieser Bemerkung klassifizieren wir die Bewegungen von $\mathbb{E}^2$. Vorbereitend stellen wir zunächst fest, dass man zeigen kann, dass die Fixpunktmenge einer Affinität φ eines allgemeinen affinen Raumes X stets ein affiner Unterraum von X ist, der **Fixraum** $\mathrm{Fix}(\varphi)$ von φ. Ist $\mathrm{Fix}(\varphi)$ nicht leer, so ist $T(\mathrm{Fix}(\varphi))$ dabei durch den Eigenraum zum Eigenwert 1 der linearen Abbildung $T(\varphi)$ gegeben.*

Sei nun φ eine Bewegung von $\mathbb{E}^2$. Nach Korollar 1.24 gibt es dann ein $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ und ein $B \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(A) = MA + B \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^2,$$

wobei M die Darstellungsmatrix von $T(\varphi)$ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. Es gibt die folgenden Möglichkeiten:

- $\mathrm{Fix}(\varphi)$ *hat Dimension 0 und besteht also aus genau einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$. Dann nennen wir φ eine **Drehung** mit Zentrum P. Aufgrund von $\varphi(P) = P$ ist $B = P - MP$ und*

$$\varphi(A) = MA + (P - MP) = M \cdot (A - P) + P.$$

Da hier der Eigenraum von $T(\varphi)$ zum Eigenwert 1 Dimension 0 hat, liegt M nach Bemerkung 1.62 in $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ und ist von der Einheitsmatrix verschieden. Insbesondere gilt

$$M = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \textit{für ein eindeutig bestimmtes } \alpha \in (0, 2\pi),$$

wobei die Matrix D_α eine Drehung mit Zentrum 0 um α beschreibt.[6] *Insgesamt nennen wir φ eine Drehung mit Zentrum P um α.*

- $\mathrm{Fix}(\varphi)$ *hat Dimension 1 und ist also eine Gerade g. Dann nennen wir φ eine* ***Spiegelung*** *an g. Eine explizite Beschreibung dieser Situation führen wir in Übungsaufgabe 1.9 durch. An der Stelle sei nur bemerkt, dass φ durch Angabe von g bereits eindeutig festgelegt ist. Aus der Eindimensionalität von $T(\mathrm{Fix}(\varphi))$ folgt nach Bemerkung 1.62*

$$M = S_\alpha \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \smallsetminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \quad \textit{für ein eindeutig bestimmtes } \alpha \in [0, 2\pi),$$

wobei die Matrix S_α eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \binom{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ beschreibt.

- $\mathrm{Fix}(\varphi)$ *hat Dimension 2. Dann ist φ die* ***Identität****.*

- $\mathrm{Fix}(\varphi)$ *ist leer. Dann ist offensichtlich $B \neq 0$ und wir können statt φ die Bewegung $\tilde{\varphi} := \delta \circ \varphi$ betrachten, wobei δ die Drehung mit Zentrum $\frac{1}{2} \cdot B$ um π bezeichne. Dann gilt*

$$\tilde{\varphi}(0) = \delta\big(\varphi(0)\big) = \delta(B) = 0,$$

so dass $\mathrm{Fix}(\tilde{\varphi})$ nicht leer ist. $\mathrm{Fix}(\tilde{\varphi})$ kann aber auch nicht Dimension 2 haben, da $\tilde{\varphi}$ dann die Identität wäre und $\varphi = \delta^{-1} = \delta$ eine Drehung. Es verbleiben die folgenden Möglichkeiten:

  - $\mathrm{Fix}(\tilde{\varphi})$ *hat Dimension 0. Dann ist $\tilde{\varphi}$ eine Drehung mit Zentrum 0 und es gibt ein $\alpha \in (0, 2\pi)$ mit $\tilde{\varphi}(A) = D_\alpha A$ für alle $A \in \mathbb{R}^2$. Da δ selbstinvers ist, folgt*

$$\varphi(A) = \delta^{-1}\big(\tilde{\varphi}(A)\big) = \delta(D_\alpha A) = D_\pi D_\alpha A + B \qquad \textit{für alle } A \in \mathbb{R}^2.$$

    Gälte nun $\alpha \neq \pi$, so wäre die Matrix $C := (I_2 - D_\pi D_\alpha)^{-1} \cdot B$ wegen $\det(I_2 - D_\pi D_\alpha) = 2 \cdot (1 + \cos\alpha) > 0$ invertierbar und es folgte

$$\varphi(A) = D_\pi D_\alpha A + (I_2 - D_\pi D_\alpha) \cdot C = D_\pi D_\alpha \cdot (A - C) + C \qquad \textit{für alle } A \in \mathbb{R}^2,$$

    so dass φ eine Drehung mit Zentrum C wäre, was nicht sein kann. Es gilt daher $\alpha = \pi$ und

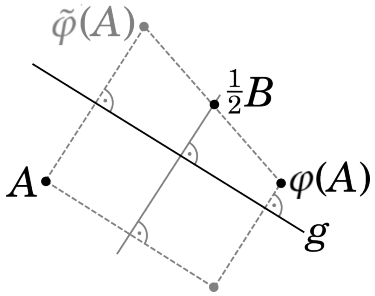
$$\varphi(A) = D_\pi D_\pi A + B = A + B \qquad \textit{für alle } A \in \mathbb{R}^2.$$

    In diesem Fall nennen wir φ eine ***Translation****.*

[6] Die Zahl α ist hierbei im Wesentlichen das Maß des Winkels $\angle\varphi(A)PA$, mit der technischen Schwierigkeit, dass wir in Definition 1.57 die Winkelgröße nur für Winkel ungleich dem Nullwinkel und dem gestreckten Winkel und als eine Zahl im Intervall $(0, \pi)$ definiert hatten. Eine kurze Rechnung zeigt hierbei konkret

$$\measuredangle\varphi(A)PA = \begin{cases} \alpha & \text{für } \alpha \in (0, \pi), \\ 2\pi - \alpha & \text{für } \alpha \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

– $\mathrm{Fix}(\tilde{\varphi})$ *hat Dimension* 1. *Dann ist* $\tilde{\varphi}$ *eine Spiegelung an einer Geraden* g *und* $\varphi = \delta^{-1} \circ \tilde{\varphi} = \delta \circ \tilde{\varphi}$ *die Hintereinanderausführung dieser Spiegelung und der Drehung* δ. *Wir nennen in diesem Fall* φ *eine* ***Gleitspiegelung***. *Man kann zeigen, dass* φ *die Hintereinanderausführung der Spiegelung an der auf* g *orthogonalen Geraden durch* $\frac{1}{2} \cdot B$ *und der Translation um das Doppelte des Translationsvektors vom Schnittpunkt dieser beiden Geraden nach* $\frac{1}{2} \cdot B$ *ist.*



Zusammengefasst erhalten wir die Identität, Translationen, Spiegelungen, Drehungen und Gleitspiegelungen als die Typen von Bewegungen der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}^2$. *In der Klassifikation von Bemerkung 1.62 sind dabei Translationen und Drehungen eigentlich und Spiegelungen und Gleitspiegelungen uneigentlich.*[7]

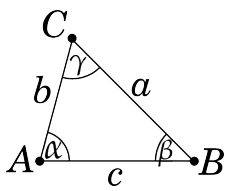
Definition 1.64. *Sei* $n \geq 2$ *und sei* $\triangle ABC$ *ein Dreieck im euklidischen Standardraum* $\mathbb{E}^n$. *Dann heißen*

- $(\|B - C\|, \|C - A\|, \|A - B\|)$ *seine* ***Seitenlängen***,
- $(\measuredangle CAB, \measuredangle CBA, \measuredangle ACB)$ *seine* ***Innenwinkelgrößen***.

Wir können nun leicht weitere klassische Sätze der affinen Geometrie herleiten:

Satz 1.65 (Kosinussatz). *Sei* $n \geq 2$ *und sei* $\triangle ABC$ *ein Dreieck im euklidischen Standardraum* $\mathbb{E}^n$ *mit Innenwinkelgrößen* (α, β, γ) *und Seitenlängen* (a, b, c). *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma. \end{aligned}$$



[7] Man beachte, dass sich diese Klassifikation von Bewegungen nicht auf höherdimensionale Räume überträgt.

Beweis. Es genügt offensichtlich, eine der Gleichungen zu zeigen. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
a^2 &= \|B-C\|^2 \overset{(D)}{=} \|(B-A)-(C-A)\|^2 \\
&= \langle (B-A)-(C-A) \mid (B-A)-(C-A)\rangle \\
&= \langle B-A \mid B-A\rangle - 2\cdot\langle B-A \mid C-A\rangle + \langle C-A \mid C-A\rangle \\
&\overset{(1.12)}{=} \|B-A\|^2 - 2\cdot\|B-A\|\|C-A\|\cdot\cos\big(\measuredangle(B-A, C-A)\big) + \|C-A\|^2 \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha
\end{aligned}$$

und somit die erste der behaupteten Gleichungen. □

Eine einfache, aber wichtige Folgerung des Kosinussatzes 1.65 betrifft den Fall rechtwinkliger Dreiecke:

Korollar 1.66 (Satz des Pythagoras)**.** *Sei $n \geq 2$ und sei $\triangle ABC$ ein Dreieck im euklidischen Standardraum $\mathbb{E}^n$ mit Innenwinkelgrößen (α, β, γ) und Seitenlängen (a, b, c). Genau dann ist $\angle BCA$ ein rechter Winkel, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.*

Satz 1.67 (Winkelsumme im Dreieck)**.** *Sei $n \geq 2$ und sei $\triangle ABC$ ein Dreieck im euklidischen Standardraum $\mathbb{E}^n$ mit Innenwinkelgrößen (α, β, γ). Dann gilt*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, die drei Punkte liegen in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}^2$ und es gilt $A = 0$. Dann gilt direkt nach (1.12)

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\langle B \mid C\rangle}{\|B\|\cdot\|C\|}, \\
\cos\beta &= \frac{\langle -B \mid C-B\rangle}{\|B\|\cdot\|C-B\|} = \frac{\|B\|^2 - \langle B \mid C\rangle}{\|B\|\cdot\|B-C\|}, \\
\cos\gamma &= \frac{\langle -C \mid B-C\rangle}{\|B\|\cdot\|B-C\|} = \frac{\|C\|^2 - \langle B \mid C\rangle}{\|C\|\cdot\|B-C\|}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Für den weiteren Beweis hätten wir gerne ebensolche Gleichungen für die respektiven Sinuswerte. Setzen wir für beliebige $t = \binom{t_1}{t_2}, t' = \binom{t'_1}{t'_2} \in \mathbb{R}^2$

$$[t, t'] = \det(t\ t') = t_1 t'_2 - t_2 t'_1,$$

so gilt in Entsprechung zu (1.12)

$$\sin\measuredangle(t, t') = \frac{|[t, t']|}{\|t\|\cdot\|t'\|}, \tag{1.17}$$

denn: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}[t,t']^2 + \langle t \mid t'\rangle^2 &= (t_1t_2' - t_2t_1')^2 + (t_1t_1' + t_2t_2')^2 \\ &= (t_1^2 + t_2^2)\cdot((t_1')^2 + (t_2')^2) \\ &= \|t\|^2 \cdot \|t'\|^2.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Hieraus folgt[8]

$$\sin^2 \measuredangle(t,t') = 1 - \cos^2 \measuredangle(t,t') \overset{(1.12)}{=} 1 - \frac{\langle t \mid t'\rangle^2}{\|t\|^2 \cdot \|t'\|^2} \overset{(1.18)}{=} \frac{[t,t']^2}{\|t\|^2 \cdot \|t'\|^2} \tag{1.19}$$

und die Behauptung ergibt sich durch Wurzelziehen. #

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{|[B,C]|}{\|B\|\cdot\|C\|}, \\ \sin\beta &= \frac{|[-B,C-B]|}{\|B\|\cdot\|C-B\|} = \frac{|[B,C]|}{\|B\|\cdot\|B-C\|}, \\ \sin\gamma &= \frac{|[-C,B-C]|}{\|B\|\cdot\|B-C\|} = \frac{|[B,C]|}{\|C\|\cdot\|B-C\|}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Aus den Additionstheoremen von Sinus und Kosinus erhalten wir

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \\ &\overset{(1.16),(1.20)}{=} \frac{|[B,C]|\cdot(\|B\|^2 - \langle B \mid C\rangle) + \langle B \mid C\rangle\cdot|[B,C]|}{\|B\|^2\cdot\|C\|\cdot\|B-C\|} \\ &= \frac{|[B,C]|}{\|C\|\cdot\|B-C\|} \\ &\overset{(1.20)}{=} \sin\gamma = \sin(\pi-\gamma)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \\ &\overset{(1.16),(1.20)}{=} \frac{\langle B \mid C\rangle\cdot\|B\|^2 - \langle B \mid C\rangle^2 - [B,C]^2}{\|B\|^2\cdot\|C\|\cdot\|B-C\|}\end{aligned}$$

[8] Die hier verwendete Rechenregel

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

wird oft als Satz von Pythagoras bezeichnet. Andererseits wird der Zusammenhang zu dem von uns bereits bewiesenen Satz dieses Namens (vgl. Korollar 1.66) erst mit Korollar 1.69 klar, welches auf diesem Beweis aufbaut. Es ist von daher wichtig, uns daran zu erinnern, dass sich obige Rechenregel direkt mit analytischen Methoden aus den Reihendarstellungen von Sinus und Kosinus herleiten lässt. Tatsächlich gilt mit dem Additionstheorem des Kosinus

$$1 = \cos 0 = \cos(x-x) = \cos x\cdot\cos(-x) - \sin x\cdot\sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$\overset{(1.18)}{=} \frac{\langle B \mid C\rangle - \|C\|^2}{\|C\| \cdot \|B - C\|}$$
$$\overset{(1.16)}{=} -\cos\gamma = \cos(\pi - \gamma).$$

Mit $0 < \alpha + \beta, \pi - \gamma < 2\pi$ folgt daraus $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ und somit der Satz. □

Satz 1.68 (Sinussatz). *Sei $n \geq 2$ und sei $\triangle ABC$ ein Dreieck im euklidischen Standardraum $\mathbb{E}^n$ mit Innenwinkelgrößen (α, β, γ) und Seitenlängen (a, b, c). Dann gilt*

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Beweis. Durch Quadrieren von zwei der Gleichungen aus dem Kosinussatz 1.65 erhalten wir

$$4b^2c^2 \cdot \cos^2\alpha = (b^2 + c^2 - a^2)^2 \quad \text{und} \quad 4a^2c^2 \cdot \cos^2\beta = (a^2 + c^2 - b^2)^2.$$

Dies verwenden wir, um folgende Umformungen zu zeigen:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} &= \frac{4a^2b^2c^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha)}{4a^2b^2c^2 \cdot (1 - \cos^2\beta)} = \frac{4a^2b^2c^2 - a^2 \cdot (4b^2c^2\cos^2\alpha)}{4a^2b^2c^2 - b^2 \cdot (4a^2c^2\cos^2\beta)} \\ &= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} = \frac{a^2}{b^2}.\end{aligned}$$

Da $a, b, \sin\alpha, \sin\beta$ allesamt positive reelle Zahlen sind, folgt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$ und also die erste behauptete Gleichheit. Die zweite Gleichheit zeigt man analog. □

Korollar 1.69. *Sei $n \geq 2$. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ im euklidischen Standardraum $\mathbb{E}^n$ mit rechtem Winkel $\angle BCA$ heißen $\overline{BC}, \overline{CA}$ die **Katheten** und $\overline{AB}$ die **Hypothenuse** von $\triangle ABC$. Sind $(\alpha, \beta, \frac{\pi}{2})$ die Winkelgrößen und (a, b, c) die Seitenlängen von $\triangle ABC$, dann gilt*

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c} \quad \textit{und} \quad \cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c}.$$

Beweis. Mit dem Sinussatz 1.68 und dem Satz über die Winkelsumme des Dreiecks 1.67 gilt

$$\begin{aligned}\frac{a}{c} &= \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}} = \sin\alpha = \sin(\pi - \frac{\pi}{2} - \beta) = \cos\beta, \\ \frac{b}{c} &= \frac{\sin\beta}{\sin\frac{\pi}{2}} = \sin\beta = \sin(\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha.\end{aligned}$$

□

1.5 Polytope

Wir schließen die analytische euklidische Geometrie ab, indem wir in diesem Abschnitt mit den Polytopen exemplarisch ein tieferes Thema der dreidimensionalen Geometrie untersuchen. Um diesen Einblick anschaulich zu halten, argumentieren wir vollständig im euklidischen Standardraum $\mathbb{E}^3$ und gelegentlich ein wenig skizzenhaft.

Wir betrachten zunächst eine beliebige Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$. Deren Komplement in $\mathbb{R}^3$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten S_+, S_-,

denn: Nach dem Basisergänzungssatz für Vektorräume lässt sich eine beliebige affine Basis (A_0, A_1, A_2) von E durch Hinzunahme eines Punktes $A_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus E$ zu einer affinen Basis (A_0, A_1, A_2, A_3) von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Ist $\eta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das affine Koordinatensystem bezüglich dieser affinen Basis, so gilt

$$E = \left\{A \in \mathbb{R}^3 : \eta(A) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x_3 = 0\right\}.$$

Offensichtlich zerfällt $\mathbb{R}^3 \setminus E$ in die beiden durch das Vorzeichen der dritten affinen Koordinate beschriebenen Zusammenhangskomponenten. #

Die Mengen S_+ und S_- nennen wir ***offene Halbräume***, die Mengen $S_+ \cup E$ und $S_- \cup E$ ***abgeschlossene Halbräume***.

Definition 1.70. *Ein nichtleerer Durchschnitt $P \subseteq \mathbb{R}^3$ endlich vieler abgeschlossener Halbräume heißt ein **konvexes Polyeder**, der Durchschnitt der zugehörigen offenen Halbräume das **Innere** $\mathring{P}$ des Polyeders P. Ein beschränktes konvexes Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^3$ mit nichtleerem Inneren nennen wir ein **Polytop**.*

Beispiel 1.71. *Wir betrachten für $i = 1, 2, 3$ jeweils die Ebene*

$$E^i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_i = 0 \right\} \quad \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Hier sind wieder die jeweils zugehörigen offenen Halbräume S^i_+ und S^i_- durch das Vorzeichen der i-ten Koordinate definiert. Ein beliebiger Durchschnitt der so erhaltenen zugehörigen sechs abgeschlossenen Halbräume liefert jeweils ein Beispiel für ein konvexes Polyeder, das kein Polytop ist.

Bemerkung 1.72. (a) *Da abgeschlossene Halbräume konvex sind, sind konvexe Polyeder tatsächlich konvex*[9] *und insbesondere zusammenhängend.*

(b) *Sei P ein Polytop und seien $H^i = E^i \cup S^i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ abgeschlossene Halbräume mit*

$$P = \bigcap_{i=1}^{n} H^i = \bigcap_{i=1}^{n} (E^i \cup S^i).$$

[9] Für je zwei Punkte eines abgeschlossenen Halbraums liegt also auch jeder Punkt ihrer Verbindungsstrecke in diesem.

Der Rand ∂P ist definiert als $\partial P := P \setminus \mathring{P}$. Es ist

$$\partial P = P \setminus \bigcap_{i=1}^{n} S^i = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} \big((E^j \cup S^j) \setminus S^i\big) = \bigcup_{i=1}^{n} \big(\bigcap_{j=1}^{n} (E^j \cup S^j) \cap E^i\big)$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n} (P \cap E^i) = \bigcup_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} \big(P \cap \bigcap_{i \in I} E^i\big),$$

*insbesondere ist der Rand von P eine nicht notwendigerweise disjunkte endliche Vereinigung von Ecken, Kanten und Flächen. Eine nichtleere Menge der Form $P \cap \bigcap_{i \in I} E^i$ heißt hierbei eine **Ecke**, wenn sie ein Punkt ist, eine **Kante**, wenn sie kein Punkt, aber in einer Geraden enthalten ist, und eine **Fläche** sonst.*

Definition 1.73. *Für ein gegebenes Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^3$ nennen wir*

$e(P)$	*die Anzahl der Ecken in ∂P,*
$k(P)$	*die Anzahl der Kanten in ∂P,*
$f(P)$	*die Anzahl der Flächen in ∂P*

*und sprechen dabei auch von den **Ecken** bzw. **Kanten** bzw. **Flächen** von P.*

Beispiel 1.74. *Für $i = 1, 2, 3$ seien*

$$H_+^i := \Big\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_i \geq 0 \Big\} \quad \textit{und} \quad \tilde{H}_-^i := \Big\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_i \leq 1 \Big\}.$$

Dann ist der Durchschnitt

$$P := \bigcap_{i=1}^{3} H_+^i \cap \bigcap_{i=1}^{3} \tilde{H}_-^i$$

ein Würfel mit Kantenlänge 1 und erfüllt $e(P) = 8$, $k(P) = 12$ und $f(P) = 6$. Insbesondere gilt

$$e(P) - k(P) + f(P) = 2.$$

Dieser letzte Zusammenhang gilt auch allgemein:

Satz 1.75 (Euler'sche Polyederformel)**.** *Für ein beliebiges Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt*

$$e(P) - k(P) + f(P) = 2.$$

Beweisskizze. Sei P für den Beweis des Satzes fest gewählt. Offenbar bilden Translationen und zentrische Streckungen Polytope auf Polytope ab und lassen dabei die untersuchten Anzahlen $e(P), k(P), f(P)$ fest. Da P als Polytop ein nichtleeres Inneres hat, gibt es ein $A_0 \in \mathbb{R}^3$ im Inneren von P. Nach Anwendung der Translation $A \mapsto A - A_0$ können wir somit ohne Einschränkung $0 \in \mathring{P}$ annehmen. Da P als Polytop beschränkt ist, gibt es zudem ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|A\| <$

λ für alle $A \in P$. Nach Anwendung der zentrischen Streckung $A \mapsto \frac{1}{\lambda} \cdot A$, die 0 auf sich selbst abbildet, können wir daher ohne Einschränkung annehmen, P liege zudem in der offenen Einheitskugel $\{A \in \mathbb{R}^3 : \|A\| < 1\}$.

Schritt 1. Wir „blasen" das Polytop P zentrisch auf, bis alle Randpunkte zu Punkten auf der Einheitssphäre

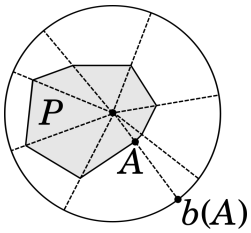
$$S^2 = \{A \in \mathbb{R}^3 : \|A\| = 1\}.$$

werden. Formal betrachten wir die Zuordnung

$$b\colon \begin{cases} \partial P & \to S^2, \\ A & \mapsto b(A) := \frac{A}{\|A\|}. \end{cases}$$

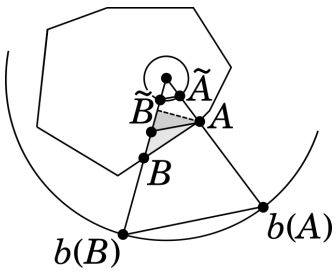
Diese ist ein Homöomorphismus zwischen den topologischen Unterräumen ∂P und S^2 des $\mathbb{R}^3$,

denn: Die Bijektivität von b lässt sich leicht aus $0 \in \mathring{P}$ und der Konvexität von P folgern.



Wir zeigen nun die Stetigkeit von b in einem beliebigen Punkt $B \in \partial P$. Wegen $0 \in \mathring{P}$ gibt es ein $r \in (0,1)$ mit $\|A\| > r$ für alle $A \in \partial P$. Seien nun $\varepsilon > 0$ und $A \in \partial P$ mit $\|B - A\| < r\varepsilon$. Sei weiter $\tilde{B}$ bzw. $\tilde{A}$ der eindeutig bestimmte Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{0B}$ bzw. $\overrightarrow{0A}$ mit $\|\tilde{B}\| = \|\tilde{A}\| = r$. Nach dem Strahlensatz 1.43 gilt dann

$$\|b(B) - b(A)\| = \frac{1}{r} \cdot \|\tilde{B} - \tilde{A}\| = \frac{1}{r} \cdot \frac{\|\tilde{A}\|}{\|A\|} \cdot \|\frac{\|A\|}{\|\tilde{A}\|} \cdot \tilde{B} - A\|.$$



Nehmen wir ohne Einschränkung $\|A\| < \|B\|$ an, so folgt mit Übungsaufgabe 1.13

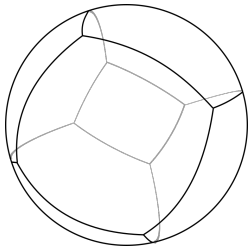
$$\|b(B) - b(A)\| < \frac{1}{r} \cdot \frac{\|\tilde{A}\|}{\|A\|} \cdot \|B - A\| < \frac{1}{r} \cdot \|B - A\| < \varepsilon$$

und somit die behauptete Stetigkeit von b. Die Stetigkeit von b^{-1} zeigt man genauso. #

Der Homöomorphismus b schickt eins zu eins

- die Ecken von P auf paarweise verschiedene Punkte in S^2, die ***sphärischen Ecken*** von $b(\partial P)$.
- die Kanten von P auf selbstschnittfreie Kurven in S^2, die je zwei sphärische Ecken verbinden und die sich gegenseitig nur in ihren Anfangs- und Endpunkten schneiden, die ***sphärischen Kanten*** von $b(\partial P)$.
- die Flächen von P auf abgeschlossene Teilmengen von S^2, deren jeweiliger Rand aus sphärischen Kanten besteht, die ***sphärischen Flächen*** von $b(\partial P)$.

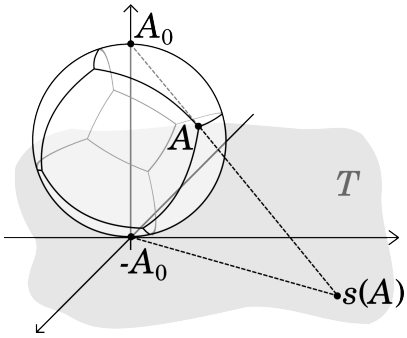
Auf diese Weise definiert b auf S^2 die Struktur eines ***sphärischen Polytops***, hier beispielhaft als sphärischer Würfel dargestellt:



Schritt 2. Wir fixieren einen Punkt A_0 im Inneren einer der Flächen des sphärischen Polytops und definieren eine ***stereographische Projektion*** s, indem wir jedem Punkt $A \in S^2 \setminus \{A_0\}$ den eindeutigen Schnittpunkt der Tangentialebene

$$T := \{-A_0 + t : \langle t \mid -A_0 \rangle = 0\}$$

an S^2 in $-A_0$ mit der Geraden $\overleftrightarrow{A_0A}$ zuordnen.



Auf diese Weise erhalten wir einen Homöomorphismus $s\colon S^2 \setminus \{A_0\} \to T$ von topologischen Unterräumen des $\mathbb{R}^3$,

denn: Gilt $s(A) = s(B)$ für zwei Punkte $A, B \in S^2 \setminus \{A_0\}$, so sind nach Konstruktion $A_0, A, B \in S^2$ kollinear. Da nach Übungsaufgabe 1.14 keine Gerade mehr als zwei Schnittpunkte mit S^2 hat, folgt $A = B$ und somit die Injektivität von s. Hätte weiter für ein $S \in T$ die Gerade $\overleftrightarrow{A_0S}$ außer A_0 keinen Schnittpunkt mit S^2, so wäre sie bereits ganz in der zu T parallelen Tangentialebene

an S^2 in A_0 enthalten und S wäre ein Schnittpunkt von T mit dieser Tangentialebene. Das kann aber nicht sein, so dass es ein $A \in S^2 \setminus \{A_0\}$ mit $s(A) = S$ gibt und s auch surjektiv ist.

Die Stetigkeit von s bzw. s^{-1} in einem gegebenen Punkt $A \in S^2 \setminus \{A_0\}$ bzw. $S \in T$ lässt sich leicht zeigen, wenn man als offene Umgebungen von A und $s(A)$ bzw. von S und $s^{-1}(S)$ die jeweiligen Durchschnitte von offenen Kugeln mit dem jeweiligen Teilraum betrachtet und ähnlich wie für die Stetigkeit von b argumentiert. #

Der Homöomorphismus $s \circ b$ definiert auf T die Struktur eines sogenannten ***Netzes*** N von P. Genauer schickt $s \circ b$

- die Ecken von P auf paarweise verschiedene Punkte in T, die ***Ecken*** von N.
- die Kanten von P auf selbstschnittfreie Kurven in T, die je zwei Ecken von N verbinden und die sich gegenseitig nur in ihren Anfangs- und Endpunkten schneiden, die ***Kanten*** von N.
- die Flächen von P mit Ausnahme derer, in deren Innerem $b^{-1}(A_0)$ liegt, auf abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von T, deren jeweiliger Rand aus Kanten von N besteht, die ***Flächen*** von N. Die verbleibende Fläche von P wird auf die Umgebung des Netzes N abgebildet und im Weiteren ignoriert.

Aufgrund der Bijektivität von $s \circ b$ gilt in Missbrauch unserer Notation insgesamt

$$e(N) = e(P), \quad k(N) = k(P), \quad f(N) = f(P) - 1$$

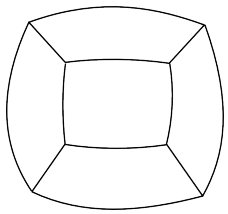
und insbesondere

$$e(N) - k(N) + f(N) = e(P) - k(P) + f(P) - 1.$$

Zum Beweis der Euler'schen Polyederformel genügt es also

$$e(N) - k(N) + f(N) = 1$$

zu zeigen. Die folgende Abbildung zeigt beispielhaft ein Netz eines Würfels:



Schritt 3. Wir vereinfachen nun unser Netz N sukzessive und halten dabei fest, wie sich das auf die Anzahlen von Ecken, Kanten und Flächen auswirkt. Zunächst wählen wir eine Fläche von $N =: N_0$ aus und ziehen diese unter Verwendung einer geeigneten Homotopie zu einem einzigen Punkt zusammen. Auf diese Weise erhalten wir ein neues Netz N_1. Hatte die kollabierte Fläche n Eckpunkte, so gilt in N_1

$$e(N_1) = e(N_0) - (n-1), \quad k(N_1) = k(N_0) - n, \quad f(N_1) = f(N_0) - 1$$

und somit

$$e(N_1) - k(N_1) + f(N_1) = e(N_0) - k(N_0) + f(N_0).$$

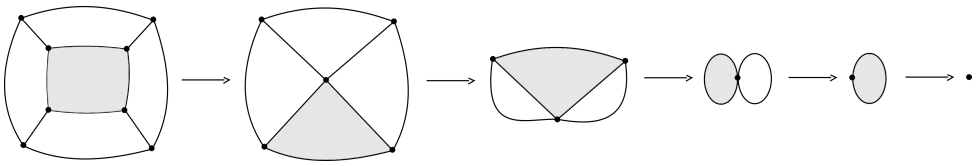
Wir iterieren unser Vorgehen indem wir eine Fläche unseres Netzes nach der anderen zusammenziehen und erhalten jeweils aus dem Netz N_{k-1} ein Netz N_k mit

$$e(N_k) - k(N_k) + f(N_k) = e(N_{k-1}) - k(N_{k-1}) + f(N_{k-1}) = e(N_0) - k(N_0) + f(N_0).$$

Da $f(N)$ endlich ist, erreichen wir so nach endlich vielen Schritten ein Netz $N_{f(N)}$ ohne Flächen, ohne Kanten, aber mit einem Punkt. Für dieses Netz gilt offensichtlich wie behauptet

$$e(N_{f(N)}) - k(N_{f(N)}) + f(N_{f(N)}) = 1 - 0 + 0 = 1,$$

so dass insgesamt die Euler'sche Polyederformel folgt. Die folgende Abbildung zeigt im Beispiel des Würfels eine Folge $N_0, N_1, \ldots, N_5$ von Netzen wie im Beweis.



□

Es liegt nahe, dieses Ergebnis zur Klassifikation von Polytopen zu verwenden. In voller Allgemeinheit ist das allerdings sehr schwer, weshalb wir jetzt eine besonders einfache Unterklasse von Polytopen einführen wollen:

Definition 1.76. *Seien $n \geq 3$ eine natürliche Zahl und $F = \Pi A_1 \ldots A_n$ ein nicht entartetes n-Eck in der euklidischen Standardebene wie in Definition 1.28 mit* ***Seiten*** $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$.

(a) *Das n-Eck F heißt* ***einfach****, wenn jeder Schnittpunkt verschiedener Seiten von F ein Eckpunkt von F ist. In diesem Fall ist durch*

$$C := \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$$

ein geschlossener Polygonzug in $\mathbb{R}^2$ gegeben, dessen Komplement in $\mathbb{R}^2$ die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener, zusammenhängender Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ ist, von denen eine beschränkt ist.[10] *Letztere nennen wir das* ***Innere*** *I von F.*

(b) *Das n-Eck F heißt* ***konvex****, wenn es einfach ist und $C \cup I$ eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.*

(c) *Das n-Eck F heißt* ***regelmäßig****, wenn die folgenden Bedingungen gelten:*

[10] Hier geht der Jordan'sche Kurvensatz ein. Dieser behandelt allgemeiner den Fall von überschneidungsfreien geschlossenen Kurven in der Ebene. Obwohl die Aussage offensichtlich erscheint, erfordert der Beweis des Jordan'schen Kurvensatzes einigen Aufwand. Im Fall von Polygonzügen ist die Aussage deutlich einfacher zu zeigen, wir lassen den Beweis trotzdem aus.

- *F ist konvex,*
- $\|A_i - A_j\| = \|A_1 - A_2\|$ *für alle* $1 \leq i, j \leq n$ *mit* $i \equiv j - 1 \bmod (n)$,
- $\measuredangle A_i A_j A_k = \measuredangle A_1 A_2 A_3$ *für alle* $1 \leq i, j, k \leq n$ *mit* $i \equiv j - 1 \equiv k - 2 \bmod (n)$.

*Wir nennen dann $\|A_1 - A_2\|$ die **Seitenlänge** und $\measuredangle A_1 A_2 A_3$ die **Innenwinkelgröße** des regelmäßigen n-Ecks $\Pi A_1 \dots A_n$.*

(d) *Ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **regulär** oder auch ein **platonischer Körper**, wenn es ein natürliches $n \geq 3$ gibt, so dass jeder Durchschnitt einer seiner Randflächen mit seiner Eckenmenge bei geeigneter Nummerierung der Ecken die Struktur eines regelmäßigen n-Ecks trägt*[11] *und in jeder Ecke die gleiche Anzahl $g(P)$ von Kanten anliegt. Die Anzahl $n(P) := n$ heißt dann der **Grad** von P.*

Beispiel 1.77. *Das Einheitsquadrat ist ein regelmäßiges Viereck mit Kantenlänge 1 und Innenwinkelgröße $\frac{\pi}{2}$. Der Einheitswürfel ist ein platonischer Körper mit $n(P) = 4$ und $g(P) = 3$.*

Proposition 1.78. *Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ ein reguläres Polytop vom Grad $n(P)$, bei dem in jeder Ecke $g(P)$ Kanten anliegen. Dann gilt*

$$k(P) = \frac{1}{2} n(P) f(P) = \frac{1}{2} g(P) e(P),$$
$$f(P) = \frac{4g(P)}{2n(P) - g(P)n(P) + 2g(P)}.$$

Insbesondere sind die Anzahlen $e(P), k(P), f(P)$ durch $n(P), g(P)$ bereits eindeutig bestimmt.

Beweis. Von jeder der $e(P)$ Ecken gehen genau $g(P)$ Kanten aus. Da an jede Kante genau zwei Ecken angrenzen, folgt

$$2k(P) = g(P)e(P).$$

Analog wird jede Seitenfläche von genau $n(P)$ Kanten begrenzt. Da jede Kante an genau zwei Flächen angrenzt, folgt

$$2k(P) = n(P)f(P).$$

Mit der Euler'schen Polyederformel 1.75 erhalten wir

$$2 = e(P) - k(P) + f(P) = \frac{2k(P)}{g(P)} - k(P) + f(P).$$

Nach Multiplikation mit $2g(P)$ ergibt sich

$$4g(P) = 4k(P) - 2g(P)k(P) + 2f(P)g(P) = 2n(P)f(P) - n(P)f(P)g(P) + 2f(P)g(P).$$

Lösen wir dies nach $f(P)$ auf, erhalten wir die letzte zu zeigende Aussage. □

[11] Hierbei ist eine geeignete Identifikation der Ebene im $\mathbb{R}^3$, in der die jeweilige Randfläche liegt, und der euklidischen Standardebene vorzunehmen, so dass (c) anwendbar ist.

Korollar 1.79. *Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ ein reguläres Polytop vom Grad $n(P)$, bei dem in jeder Ecke $g(P)$ Kanten anliegen. Dann gilt*

$$\big(n(P), g(P)\big) \in \big\{(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3)\big\}.$$

Beweis. Nach Proposition 1.78 gelten

$$\frac{1}{g(P)} = \frac{e(P)}{2k(P)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n(P)} = \frac{f(P)}{2k(P)}$$

und somit

$$\frac{1}{g(P)} + \frac{1}{n(P)} = \frac{e(P) + f(P)}{2k(P)} \overset{1.75}{=} \frac{2 + k(P)}{2k(P)} = \frac{1}{k(P)} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}.$$

Nun gilt $n(P) \geq 3$ nach Definition und $g(P) \geq 3$, da sonst an jeder Ecke nur je eine Fläche anliegen dürfte und P kein nichtleeres Inneres hätte. Die einzigen ganzzahligen Lösungen der obigen Ungleichung sind daher die behaupteten. □

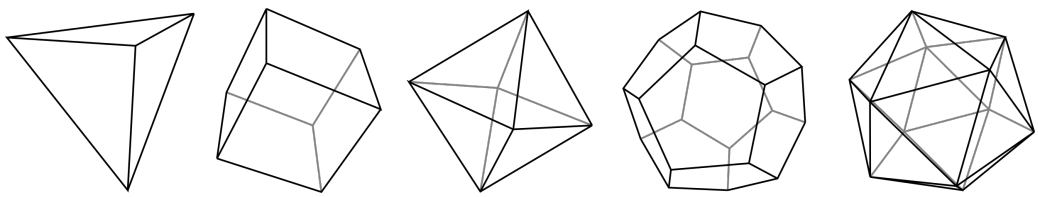
Nach Korollar 1.79 gibt es höchstens fünf (n, g)-Klassen platonischer Körper, nämlich

	$n(P)$	$g(P)$	$e(P)$	$k(P)$	$f(P)$
Tetraeder	3	3	4	6	4
Hexaeder	4	3	8	12	6
Oktaeder	3	4	6	12	8
Dodekaeder	5	3	20	30	12
Ikosaeder	3	5	12	30	20

Die Anzahlen $e(P)$, $k(P)$ und $f(P)$ in der Tabelle ergeben sich mit den Formeln aus Proposition 1.78. Es stellt sich heraus, dass es eine anschauliche Interpretation hiervon gibt:

Definition 1.80. *Sei n eine natürliche Zahl. Zwei Teilmengen $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen **ähnlich**, wenn es eine Ähnlichkeit $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(M_1) = M_2$ gibt. Man kann leicht zeigen, dass Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation auf der Potenzmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.*

Satz 1.81. *Es gibt genau 5 Ähnlichkeitsklassen von platonischen Körpern: die Tetraeder, die Hexaeder, die Oktaeder, die Dodekaeder und die Ikosaeder.*

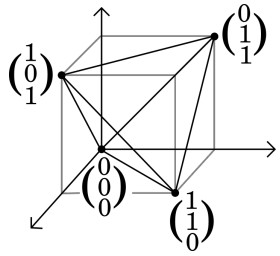


Beweisskizze. Die Idee ist zu zeigen, dass jede (n, g)-Klasse aus der Tabelle genau eine Ähnlichkeitsklasse von Polytopen enthält. Wir führen dies nur für die Tetraeder durch; die entsprechenden Aussagen für Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder zeigt man ähnlich.

Es lässt sich leicht überprüfen, dass die konvexe Hülle der Punkte

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3$$

ein Tetraeder ist.



Es verbleibt zu zeigen, dass sich ein beliebiges Tetraeder $\tilde{T}$ mit Ecken $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in \mathbb{R}^3$ durch Ähnlichkeitsabbildungen in ein beliebiges anderes Tetraeder T mit Ecken $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ überführen lässt. Wir verfahren wie folgt:

- Nach Anwendung der zentrischen Streckung mit Zentrum $\tilde{A}$ und Streckfaktor $\|\frac{B-A}{\tilde{B}-\tilde{A}}\|$ stimmen die Kantenlängen von $\tilde{T}$ und T überein.

- Nach Anwendung der Translation um den Vektor $A - \tilde{A}$ gilt $\tilde{A} = A$.

- Nach Anwendung einer geeigneten Drehung um A gilt $\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}} = \overrightarrow{AB}$ und also auch $\tilde{B} = B$.

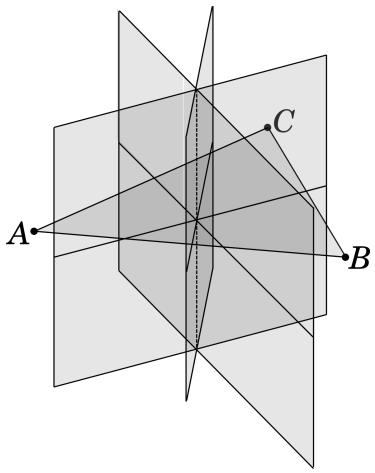
- Nach Anwendung einer geeigneten Drehung um die Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ liegt $\tilde{C}$ in derselben Ebene wie A, B, C, und zwar auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ wie C. Es folgt $\tilde{C} = C$,

  denn: Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck 1.67 beträgt die Innenwinkelgröße in jedem regelmäßigen Dreieck $\frac{\pi}{3}$. Das trifft insbesondere auf die Dreiecke $\triangle AB\tilde{C}$ und $\triangle ABC$ zu. Die Behauptung folgt über eine kurze Rechnung, da die Kantenlängen $\|\tilde{C} - A\|$ und $\|C - A\|$ übereinstimmen und $\tilde{C}, C$ auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ liegen. #

- Nach möglicher Spiegelung an der Ebene durch A, B, C liegt $\tilde{D}$ auf derselben Seite dieser Ebene wie D. Wegen $\|\tilde{D} - A\| = \|\tilde{D} - B\|$ und $\|D - A\| = \|D - B\|$ liegen sowohl $\tilde{D}$ als auch D in der zu $\overleftrightarrow{AB}$ orthogonalen Ebene durch den Mittelpunkt M_{AB}.[12] Analog zeigt man, dass $\tilde{D}$ und D beide in der zu $\overleftrightarrow{BC}$ orthogonalen Ebene durch M_{BC} und in der zu $\overleftrightarrow{CA}$ orthogonalen Ebene durch M_{CA} liegen. Nach dem Umkreissatz[13] ist der Durchschnitt dieser drei Ebenen die zur Ebene durch A, B, C orthogonale Gerade durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

[12] Um dies einzusehen, ergänzt man $t_{AB} = B - A$ zu einer Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ und stellt das Problem in dieser Basis dar.

[13] Diesen werden wir als Satz 3.74 in einem Setting zeigen, das insbesondere die affine Standardebene umfasst.



Aus Symmetriegründen liegt auf jeder Seite der Ebene durch A, B, C genau ein Punkt dieser Geraden, der zu den Punkten A, B, C jeweils die Kantenlänge von T als Abstand hat. Es folgt $\tilde{D} = D$ und damit die Behauptung.

□

1.6 Projektive Geometrie

Beim Fotografieren werden Objekte der realen Welt möglichst wirklichkeitsgetreu auf eine Bildebene abgebildet. Dabei treten Phänomene auf, die mit der von uns bisher studierten affinen Geometrie nicht beschrieben werden können: Wählen wir etwa als Motiv in einer Ebene verlaufende Eisenbahnschienen – mathematisch betrachtet sind dies zwei parallele Geraden in einer reellen affinen Ebene – so kann es bekanntlich passieren, dass sich die Bilder dieser Geraden auf der – ebenfalls als reelle affine Ebene interpretierten – Fotografie in einem „Fluchtpunkt“ schneiden.

Da affine Abbildungen Parallelität erhalten, lässt sich der beschriebene Vorgang nicht durch solche Abbildungen beschreiben. Die Idee dieses Abschnitts ist es nun, die affine Ebene durch Hinzunahme von Fluchtpunkten so in einen größeren Raum einzubetten, dass man dort mit diesen Punkten rechnen kann, und das Fotografieren als Abbildung in diesem größeren Raum zu verstehen. Hierfür müssen wir etwas ausholen und die Grundkonzepte der projektiven Geometrie einführen.

Definition 1.82. *Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Dann heißt die Menge*

$$\mathbb{P}(V) := \{U \subseteq V \text{ Untervektorraum } : \dim_K(U) = 1\}$$

*der **Ursprungsgeraden** in V der zu V gehörige **projektive Raum** und die Elemente von $\mathbb{P}(V)$ seine **Punkte**. Ist V endlichdimensional, so setzen wir*

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim_K \mathbb{P}(V) := \dim_K(V) - 1$$

*und nennen diese Zahl die **(projektive) Dimension** von $\mathbb{P}(V)$. Insbesondere gilt $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset$ und $\dim \emptyset = -1$. Für „Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\mathbb{P}(V)$ der zu V gehörige projektive Raum." schreiben wir künftig auch kurz „**(proj. Raum)**".*

Wir interessieren uns im Kontext projektiver Räume nur für endlichdimensionale Vektorräume und werden dies stets stillschweigend voraussetzen.

Beispiel 1.83. *Der **projektive Standardraum** der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K ist gegeben durch*

$$\mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1}).$$

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zwei Vektoren $v, v' \in V \setminus \{0\}$ haben genau dann dasselbe Bild unter der kanonischen Abbildung

$$\kappa\colon \begin{cases} V \setminus \{0\} & \to \mathbb{P}(V), \\ v & \mapsto \langle v \rangle_K, \end{cases}$$

wenn es ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $v' = \lambda v$ gibt. Ist speziell

$$v = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1} \setminus \{0\},$$

so nennen wir das $(n+1)$-Tupel

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) := \kappa(v)$$

die ***homogenen Koordinaten*** des Punktes $\langle v \rangle_K \in \mathbb{P}^n(K)$. Wegen $v \neq 0$ ist hierbei stets mindestens eines der x_i von Null verschieden und es gilt

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (x_0' : x_1' : \ldots : x_n')$$

$$\iff \text{es gibt ein } \lambda \in K \smallsetminus \{0\} \text{ mit } x_i' = \lambda x_i \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Die homogenen Koordinaten sind also nur bis auf einen gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor festgelegt.

Definition 1.84 (proj. Raum). *Für eine nichtleere Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ setzen wir*

$$U(Z) := \bigcup_{P \in Z} P \subseteq V.$$

Außerdem setzen wir $U(\emptyset) := \{0\}$. Ist $U(Z)$ ein Untervektorraum von V, so heißt $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ ein ***projektiver Unterraum****.*

Für $Z = \{P\}$ mit einem Punkt $P \in \mathbb{P}(V)$ folgt insbesondere $U(Z) = P$. Dies sind zwei unterschiedliche Dinge, die getrennt gehalten werden müssen: Z ist hier die aus dem Punkt P bestehende Einpunktmenge und $U(Z)$ der eindimensionale Untervektorraum P von V.

Proposition 1.85. *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \{\text{Untervektorräume von } V\} &\leftrightarrows \{\text{projektive Unterräume von } \mathbb{P}(V)\} \\ W &\mapsto \mathbb{P}(W) \\ U(Z) &\leftarrow\!\shortmid Z \end{aligned}$$

sind wohldefinierte, inklusionserhaltende, zueinander inverse Bijektionen, deren Verkettung in beiden Reihenfolgen die Identität ist. Insbesondere ist jeder projektive Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ selbst ein projektiver Raum.

Beweis. Es ist

$$U\big(\mathbb{P}(\{0\})\big) = U(\emptyset) = \{0\} \subseteq V$$

ein Untervektorraum von V und also $\emptyset = \mathbb{P}(\{0\})$ ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$. Außerdem gilt

$$\mathbb{P}\big(U(\emptyset)\big) = \mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset.$$

Für den Rest des Beweises genügt es daher, nichttriviale Untervektorräume von $\{0\} \neq W \subseteq V$ und nichtleere projektive Unterräume $\emptyset \neq Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ zu betrachten. Für diese gilt einerseits

$$U\big(\mathbb{P}(W)\big) = \bigcup_{P \in \mathbb{P}(W)} P = \bigcup_{\substack{R \subseteq W \\ \text{1-dim. Untervektorraum}}} R = W,$$

so dass $\mathbb{P}(W)$ ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ ist. Gilt andererseits

$$\mathbb{P}\big(U(Z)\big) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{P \in Z} P\right) = \Big\{\text{1-dim. Untervektorraum von } \bigcup_{P \in Z} P\Big\} =: M,$$

so folgt $M = Z$,

denn: Einerseits ist jedes $R \in Z$ sofort ein eindimensionaler Untervektorraum von $\bigcup_{P \in Z} P$. Ist andererseits R ein eindimensionaler Untervektorraum von $\bigcup_{P \in Z} P$, so gilt $R = \langle x \rangle$ für ein $x \in V$. Da dann ein $P \in Z$ mit $x \in P$ existiert, folgt $\langle x \rangle = P$ und somit $R = P \in Z$. #

Es folgt, dass die Abbildungen U und $\mathbb{P}$ bijektiv und zueinander invers sind. Dass sie auch Inklusionen erhalten, ist klar. Insgesamt folgt so die Proposition. □

Definition 1.86 (proj. Raum). *Für einen projektiven Unterraum Z von $\mathbb{P}(V)$ heißt*

$$\dim Z = \dim \mathbb{P}\big(U(Z)\big) = \dim U(Z) - 1$$

*die **Dimension** von Z. Speziell heißt $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$*

- *eine **(projektive) Hyperebene** in $\mathbb{P}(V)$, wenn $\dim Z = \dim \mathbb{P}(V) - 1$ gilt,*
- *eine **(projektive) Ebene** in $\mathbb{P}(V)$, wenn $\dim Z = 2$ gilt,*
- *eine **(projektive) Gerade** in $\mathbb{P}(V)$, wenn $\dim Z = 1$ gilt.*

Unter der Bijektion aus 1.85 korrespondieren m-dimensionale projektive Unterräume von $\mathbb{P}(V)$ zu $(m+1)$-dimensionalen Untervektorräumen von V.

Beispiel 1.87. *Eine Gerade g in $\mathbb{P}^2(K)$ ist eine Menge von Punkten aus $\mathbb{P}^2(K)$ – und also von Ursprungsgeraden in K^3 – deren Vereinigung ein zweidimensionaler Untervektorraum $U(g)$ des K^3 – mithin eine Ursprungsebene – ist. Letzterer ist daher der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems: Es existieren $a_0, a_1, a_2 \in K$ mit*

$$U(g) = \Big\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^3 : a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \Big\}.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} g = \mathbb{P}\big(U(g)\big) &= \{\textit{eindimensionale Untervektorräume von } U(g)\} \\ &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Proposition 1.88 (proj. Raum). *Für eine Familie $(Z_i)_{i \in I}$ projektiver Unterräume von $\mathbb{P}(V)$ gilt:*

(a) *$\bigcap_{i \in I} Z_i$ ist wieder ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ mit $U\big(\bigcap_{i \in I} Z_i\big) = \bigcap_{i \in I} U(Z_i)$.*

(b) *Der Durchschnitt aller projektiven Unterräume $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ mit $\bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq Z$ heißt der **Verbindungsraum** $\bigvee_{i \in I} Z_i$ und ist wieder ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ mit*

$$U\big(\bigvee_{i \in I} Z_i\big) = \sum_{i \in I} U(Z_i). \tag{1.21}$$

*Im Fall $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir auch $\bigvee_{i \in I} Z_i = Z_1 \vee Z_2 \vee \ldots \vee Z_n$; im Fall $I = \{1, 2\}$, $Z_1 = \{P_1\}$ und $Z_2 = \{P_2\}$ mit $P_1 \neq P_2 \in \mathbb{P}(V)$ ist $Z_1 \vee Z_2$ eine Gerade, die **Verbindungsgerade** $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ von P_1 und P_2.*

Beweis. Es ist

$$\bigcap_{i\in I} Z_i = \bigcap_{i\in I} \mathbb{P}\big(U(Z_i)\big) = \mathbb{P}\big(\bigcap_{i\in I} U(Z_i)\big),$$

somit folgt Behauptung (a) aus Proposition 1.85.

Aufgrund von Aussage (a) ist $\bigvee_{i\in I} Z_i$ ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$. Weiter gilt

$$\bigvee_{i\in I} Z_i = \mathbb{P}\big(\sum_{i\in I} U(Z_i)\big) =: \tilde{Z},$$

denn: $\tilde{Z}$ ist ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$, der $\mathbb{P}\big(U(Z_i)\big) = Z_i$ für alle $i \in I$ umfasst, mithin ist $\bigvee_{i\in I} Z_i \subseteq \tilde{Z}$. Ist umgekehrt $Z = \mathbb{P}(W)$ ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ mit $Z = \mathbb{P}(W) \supseteq Z_i = \mathbb{P}\big(U(Z_i)\big)$, dann folgt mit Proposition 1.85 für alle $i \in I$ die Inklusion $W \supseteq U(Z_i)$. Es ergibt sich $W \supseteq \sum_{i\in I} U(Z_i)$ und deshalb $Z = \mathbb{P}(W) \supseteq \mathbb{P}\big(\sum_{i\in I} U(Z_i)\big) = \tilde{Z}$. Die Behauptung folgt dann aus der Definition des Verbindungsraums. #

Aussage (b) erhalten wir nun mit Proposition 1.85. Im Fall $Z_1 = \{P_1\}$ und $Z_2 = \{P_2\}$ mit $P_1 \neq P_2 \in \mathbb{P}(V)$ ist $U(Z_1 \vee Z_2) = U(Z_1) + U(Z_2)$ zweidimensional wegen $U(Z_1) \cap U(Z_2) = P_1 \cap P_2 = \{0\}$ und $Z_1 \vee Z_2$ ist eine Gerade. □

Beispiel 1.89. *Seien $A \neq B \in \mathbb{P}^2(K)$, etwa $A = (a_0 : a_1 : a_2)$ und $B = (b_0 : b_1 : b_2)$. Wir setzen*

$$c_0 := a_2b_1 - a_1b_2, \quad c_1 := a_0b_2 - a_2b_0, \quad c_2 := a_1b_0 - a_0b_1.$$

Dann ist

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0\} =: g,$$

denn: Wegen $A \neq B$ ist $(c_0, c_1, c_2) \neq (0,0,0)$ und somit

$$U(g) = \Big\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^3 : c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \Big\}$$

ein zweidimensionaler Untervektorraum von K^3. Offensichtlich gilt weiter

$$c_0a_0 + c_1a_1 + c_2a_2 = 0 \quad \textit{sowie} \quad c_0b_0 + c_1b_1 + c_2b_2 = 0,$$

also $A, B \in g$ und somit $\overleftrightarrow{AB} \subseteq g$. Es folgt $U(\overleftrightarrow{AB}) \subseteq U(g)$, was wegen $\dim U(\overleftrightarrow{AB}) = 2 = \dim U(g)$ unmittelbar $U(\overleftrightarrow{AB}) = U(g)$ und damit $\overleftrightarrow{AB} = g$ impliziert. #

Wie im Affinen gibt es auch im Projektiven eine Dimensionsformel:

Satz 1.90 (Dimensionsformel für projektive Unterräume, **proj. Raum**). *Für je zwei projektive Unterräume $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ gilt*

$$\dim(Z_1 \vee Z_2) = \dim Z_1 + \dim Z_2 - \dim(Z_1 \cap Z_2).$$

Insbesondere ist $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, falls $\dim Z_1 + \dim Z_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$ gilt.

Beweis. Nach Proposition 1.88 und der Dimensionsformel für Untervektorräume aus der Linearen Algebra gilt

$$\begin{aligned}
\dim(Z_1 \vee Z_2) &= \dim \mathbb{P}\big(U(Z_1 \vee Z_2)\big) \\
&= \dim\big(\mathbb{P}(U(Z_1) + U(Z_2))\big) \\
&= \dim\big(U(Z_1) + U(Z_2)\big) - 1 \\
&= \dim U(Z_1) + \dim U(Z_2) - \dim\big(U(Z_1) \cap U(Z_2)\big) - 1 \\
&= \dim U(Z_1) + \dim U(Z_2) - \dim U(Z_1 \cap Z_2) - 1 \\
&= (\dim Z_1 + 1) + (\dim Z_2 + 1) - \big(\dim(Z_1 \cap Z_2) + 1\big) - 1 \\
&= \dim Z_1 + \dim Z_2 - \dim(Z_1 \cap Z_2)
\end{aligned}$$

und somit der Satz. □

Bemerkung 1.91. *Aus der Dimensionsformel 1.90 folgt insbesondere, dass sich in einer projektiven Ebene E je zwei verschiedene Geraden g, h in genau einem Punkt schneiden,*

denn: Es ist dann $g \vee h = E$, also

$$2 = \dim(g \vee h) = \dim(g) + \dim(h) - \dim(g \cap h) = 1 + 1 - \dim(g \cap h)$$

und somit $\dim(g \cap h) = 0$. Wir erhalten $\dim U(g \cap h) = 1$, so dass $g \cap h = \mathbb{P}\big(U(g \cap h)\big)$ aus genau einem Punkt besteht. #

Achtung: *Schon in einem dreidimensionalen projektiven Raum gilt diese Aussage nicht mehr: Es lassen sich dann Geraden konstruieren, die leeren Schnitt haben.*

Beispiel 1.92. *Zu je zwei verschiedenen Geraden*

$$\begin{aligned}
g &= \big\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\big\}, \\
h &= \big\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0\big\}
\end{aligned}$$

in $\mathbb{P}^2(K)$ existiert nach Bemerkung 1.91 ein eindeutig bestimmter Schnittpunkt $(c_0 : c_1 : c_2)$. Für diesen gilt

$$c_0 := a_2b_1 - a_1b_2, \quad c_1 := a_0b_2 - a_2b_0, \quad c_2 := a_1b_0 - a_0b_1,$$

denn man kann leicht nachrechnen, dass dieser Punkt auf beiden Geraden liegt.[14]

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen projektiven Räumen und affinen Räumen verstehen und untersuchen diesen im folgenden Satz:

Satz 1.93 (proj. Raum). *Sei $H \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine Hyperebene. Dann kann man das Komplement*

$$X := \mathbb{P}(V) \smallsetminus H$$

so zu einem affinen Raum $(X, T(X), \tau)$ machen, dass die folgenden Aussagen gelten:

[14] Die Übereinstimmung von $(c_0 : c_1 : c_2)$ in Beispiel 1.89 und hier in Beispiel 1.92 ist kein Zufall: Sie liegt im Dualitätsprinzip für projektive Räume begründet, das wir in dieser Vorlesung aber nicht kennenlernen werden.

(a) *Es gibt eine kanonische Bijektion*

$$H \to X_\infty := \{[g] : g \subseteq X \text{ Gerade}\},$$

wobei $[g] := \{h \subseteq X \text{ Gerade} : g \parallel h\}$ *das zu* g *gehörige* ***Parallelenbüschel*** *bezeichne.*[15] *Man kann sich das Parallelenbüschel* $[g]$ *als einen* ***unendlich fernen Punkt*** *(außerhalb von* X*) vorstellen, in dem sich die (in* X *parallelen) Geraden* $h \in [g]$ *schneiden. Die Menge* X_∞ *heißt dann die* ***unendlich ferne Hyperebene*** *von* X*.*

(b) *Für jeden projektiven Unterraum* $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ *mit* $Z \not\subseteq H$ *ist* $Z \cap X \subseteq X$ *ein affiner Unterraum mit*

$$\dim(Z \cap X) = \dim Z \quad \textit{und} \quad \dim(Z \cap H) = \dim Z - 1.$$

Die durch $Z \mapsto Z \cap X$ *gegebene Zuordnung von der Menge der nicht in* H *enthaltenen projektiven Unterräume von* $\mathbb{P}(V)$ *in die Menge der nichtleeren affinen Unterräume von* X *ist bijektiv. Insbesondere gibt es zu jedem nichtleeren affinen Unterraum* $Y \subseteq X$ *einen eindeutig bestimmten* ***(projektiven) Abschluss****, also einen nicht in* H *enthaltenen projektiven Unterraum* $\overline{Y} \subseteq \mathbb{P}(V)$ *mit* $\overline{Y} \cap X = Y$*.*

Beweis. Wir wählen ein $P_0 \in V \smallsetminus U(H)$ und betrachten den affinen Unterraum

$$X' := P_0 + U(H) \quad \subseteq V.$$

Für ein $P \in X'$ gilt $\langle P \rangle_K \not\subseteq U(H)$ und also $\langle P \rangle_K \in \mathbb{P}(V) \smallsetminus \mathbb{P}(U(H)) = X$. Die so erhaltene Abbildung

$$\sigma\colon \begin{cases} X' & \to X, \\ P & \mapsto \langle P \rangle_K \end{cases}$$

ist bijektiv,

denn: Nach Bemerkung 1.17 schneidet jeder Untervektorraum U von V, der nicht in $U(H)$ enthalten ist, die Hyperebene $X' \subseteq V$. Ist U eindimensional, so gilt nach der Dimensionsformel für affine Unterräume 1.15

$$\dim V = \dim(U \vee X') = \dim U + \dim X' - \dim(U \cap X') = 1 + (\dim V - 1) - \dim(U \cap X')$$

und somit

$$\dim(U \cap X') = 0.$$

Jeder eindimensionale Untervektorraum von V, der nicht in $U(H)$ enthalten ist, schneidet X' daher in genau einem Punkt. #

Konstruktionsgemäß ist $T(X') = U(H)$. Wir definieren

$$\tau\colon \begin{cases} X \times X & \to U(H), \\ (A, B) & \mapsto \sigma^{-1}(B) - \sigma^{-1}(A) = t_{\sigma^{-1}(A)\sigma^{-1}(B)}. \end{cases}$$

[15] Offensichtlich ist Parallelität von Geraden in X eine Äquivalenzrelation mit den Parallelenbüscheln als Äquivalenzklassen.

Setzen wir nun noch $T(X) := U(H)$, so wird $(X, T(X), \tau)$ zu einem affinen Raum und σ zu einer Affinität mit $T(\sigma) = \mathrm{id}_{U(H)}$.

Wir zeigen nun Behauptung (a). Jeder Punkt in H lässt sich wegen $H = \mathbb{P}\big(U(H)\big)$ eindeutig mit der von einem $w \in U(H) \smallsetminus \{0\}$ aufgespannten Geraden $K \cdot w \subseteq U(H)$ schreiben. Andererseits gilt $T(X) = U(H)$, so dass die Menge dieser Geraden in Bijektion mit der Menge der Translationsvektorräume der Geraden in X steht. Letztere lässt sich offensichtlich mit der Menge der Parallelenbüschel von Geraden in X und also der unendlich fernen Hyperebene X_∞ identifizieren.

Zum Beweis von Behauptung (b) benutzen wir die Affinität σ: Ist Z ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$, so ist $U(Z) \cap X'$ als Durchschnitt zweier affiner Unterräume von V wieder ein solcher und wegen $U(Z) \cap X' \subseteq X'$ sogar ein affiner Unterraum von X'. Folglich ist

$$\sigma(U(Z) \cap X') = \sigma\big(U(Z)\big) \cap \sigma(X') = Z \cap X \tag{1.22}$$

ein affiner Unterraum von X. Aus $\mathbb{P}\big(U(Z)\big) = Z \not\subseteq H = \mathbb{P}\big(U(H)\big)$ folgt $U(Z) \not\subseteq U(H)$. Nach der Dimensionsformel für Untervektorräume aus der Linearen Algebra gilt dann

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim(U(Z) \vee X') \\ &= \dim U(Z) + \dim X' - \dim(U(Z) \cap X') \\ &= \dim U(Z) + (\dim V - 1) - \dim(U(Z) \cap X').\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\dim(Z \cap X) &= \dim \sigma(U(Z) \cap X') \\ &= \dim(U(Z) \cap X') = \dim U(Z) - 1 = \dim Z\end{aligned} \tag{1.23}$$

und somit die erste Teilbehauptung von (b). Aus $U(Z) \not\subseteq U(H)$ ergibt sich $U(H) + U(Z) = V$ und somit mit der Dimensionsformel für Untervektorräume

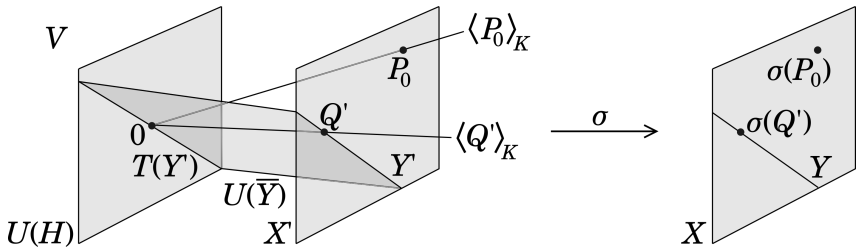
$$\begin{aligned}\dim(Z \cap H) + 1 &= \dim\big(\mathbb{P}(U(H) \cap U(Z))\big) + 1 \\ &= \dim\big(U(H) \cap U(Z)\big) = \dim U(Z) - 1 = \dim Z\end{aligned}$$

und somit die zweite Teilbehauptung von (b). Um nun die Abbildung $Z \mapsto Z \cap X$ umzukehren, müssen wir für jeden nichtleeren affinen Unterraum $Y \subseteq X$ einen projektiven Abschluss $\overline{Y} \subseteq \mathbb{P}(V)$ konstruieren. Dies geschieht wie folgt: Zum affinen Unterraum $Y' := \sigma^{-1}(Y) \subseteq X'$ gehört ein Translationsvektorraum

$$T(Y') \subseteq T(X') = U(H) \quad \text{mit } Y' = Q' + T(Y') \text{ für ein } Q' \in Y'.$$

Wir setzen nun

$$\overline{Y} := \mathbb{P}\big(U(\overline{Y})\big) \quad \text{mit } U(\overline{Y}) := \langle Q' \rangle_K \oplus T(Y').$$



In der Definition von $U(\overline{Y})$ ist die Summe tatsächlich direkt,

denn: Nach Voraussetzung gilt

$$Q' \in Y' \subseteq X' = P_0 + U(H) \quad \text{mit } P_0 \in V \smallsetminus U(H)$$

und somit $Q' \notin U(H) \supseteq T(Y')$. #

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \overline{Z \cap X} &= Z \quad \text{für alle projektiven Unterräume } Z \subseteq \mathbb{P}(V) \text{ mit } Z \not\subseteq H, \\ \overline{Y} \cap X &= Y \quad \text{für alle affinen Unterräume } \emptyset \subsetneq Y \subseteq X, \end{aligned}$$

denn: Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \overline{Z \cap X} &\overset{(1.22)}{=} \overline{\sigma(U(Z) \cap X')} \\ &= \mathbb{P}\big(\langle Q' \rangle_K \oplus T(U(Z) \cap X')\big) \quad \text{mit } U(Z) \cap X' = Q' + T(U(Z) \cap X'). \end{aligned}$$

Der Vektorraum $\langle Q' \rangle_K \oplus T(U(Z) \cap X')$ ist offensichtlich in $U(Z)$ enthalten und hat nach (1.23) Dimension $1 + (\dim U(Z) - 1) = \dim U(Z)$, wofür wir die Voraussetzung $Z \not\subseteq H$ verwenden. Es folgt

$$\overline{Z \cap X} = \mathbb{P}\big(U(Z)\big) = Z$$

und somit die erste Teilbehauptung. Für die zweite Teilbehauptung berechnen wir

$$\begin{aligned} \overline{Y} \cap X &= \mathbb{P}\big(U(\overline{Y})\big) \cap \big(\mathbb{P}(V) \smallsetminus \mathbb{P}(U(H))\big) \\ &= \mathbb{P}\big(U(\overline{Y})\big) \smallsetminus \mathbb{P}\big(U(H)\big) \\ &\overset{Q' \notin U(H)}{=} \mathbb{P}\big(\langle Q' \rangle_K \oplus T(Y')\big) \smallsetminus \mathbb{P}\big(T(Y')\big) \\ &= \{\langle P' \rangle_K : P' \in (Q' + T(Y')) \text{ oder } P' \in T(Y')\} \smallsetminus \{\langle P' \rangle_K : P' \in T(Y')\} \\ &= \sigma(Y') = Y. \end{aligned}$$

#

Damit ist gezeigt, dass die Zuordnung $Y \mapsto \overline{Y}$ die Abbildung $Z \mapsto Z \cap X$ umkehrt, und Behauptung (b) bewiesen. □

Beispiel 1.94. *In diesem Beispiel vollziehen wir die Konstruktionen aus dem Beweis von Satz 1.93 (a) exemplarisch nach: Sei dafür $V = K^3$ und insbesondere $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(K^3) = \mathbb{P}^2(K)$. Sei weiter*

$$H := \big\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : x_0 = 0\big\}$$

eine Gerade und somit Hyperebene in $\mathbb{P}^2(K)$ und

$$X := \mathbb{P}^2(K) \smallsetminus H = \big\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : x_0 \neq 0\big\}.$$

Mit

$$U(H) = \Big\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^3 : x_0 = 0 \Big\} \quad \textit{und} \quad P_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K^3 \smallsetminus U(H)$$

erhalten wir so den affinen Unterraum

$$X' := P_0 + U(H) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U(H) = \Big\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^3 : x_0 = 1 \Big\} \subseteq K^3.$$

Die Abbildung

$$\sigma\colon \begin{cases} X' & \to X, \\ P = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto \langle P \rangle_K = (1 : x_1 : x_2) \end{cases}$$

ist bijektiv mit Umkehrung

$$\sigma^{-1}\big((x_0 : x_1 : x_2)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_1}{x_0} \\ \frac{x_2}{x_0} \end{pmatrix}.$$

Mit

$$T(X) := T(X') = U(H) \quad \textit{und} \quad \tau\colon \begin{cases} X \times X & \to T(X), \\ (A, B) & \mapsto \sigma^{-1}(B) - \sigma^{-1}(A) \end{cases}$$

ist dann $(X, T(X), \tau)$ ein affiner Raum und $\sigma\colon X' \to X$ ein affiner Isomorphismus. Der affine Raum X' ist andererseits auch affin isomorph zu $\mathbb{A}^2(K)$ via

$$\psi\colon \begin{cases} X' & \to K^2, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Wir erhalten einen affinen Isomorphismus

$$\varphi := \psi \circ \sigma^{-1} \colon \begin{cases} X & \to K^2, \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_0} \\ \frac{x_2}{x_0} \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit Umkehrung

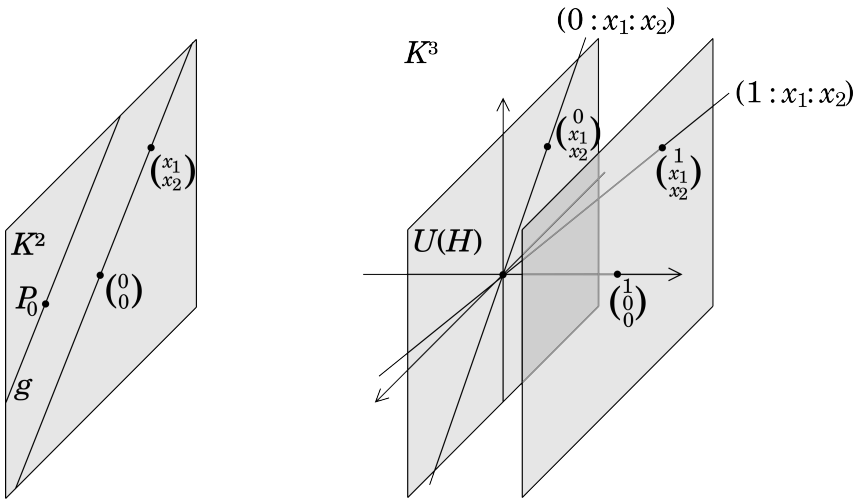
$$\varphi^{-1} \colon \begin{cases} K^2 & \to X, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto (1 : x_1 : x_2) \end{cases}$$

und schließlich eine induzierte Einbettung von $\mathbb{A}^2(K)$ nach $\mathbb{P}^2(K)$:

$$\iota \colon \begin{cases} \mathbb{A}^2(K) \underset{\varphi^{-1}}{\cong} X = \mathbb{P}^2(K) \smallsetminus H & \hookrightarrow \mathbb{P}^2(K), \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto (1 : x_1 : x_2). \end{cases}$$

Darüber hinaus liefert uns Satz 1.93 eine Bijektion

$$\begin{cases} X_\infty := \{\textit{Parallelenbüschel in } \mathbb{A}^2(K) \cong X\} & \to H, \\ [P + \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle_K] & \mapsto (0 : x_1 : x_2). \end{cases}$$



Beispiel 1.95. *In diesem Beispiel vollziehen wir die Konstruktionen aus dem Beweis von Satz 1.93 (b) exemplarisch nach: In der Situation von Beispiel 1.94 geht es dabei um die Bijektionen*

$$\{Z \subseteq \mathbb{P}^2(K) \textit{ projektiver Unterraum} : Z \not\subseteq H\} \rightleftarrows \{\emptyset \neq Y \subseteq X \cong \mathbb{A}^2(K) \textit{ affiner Unterraum}\},$$

$$\begin{aligned} Z &\mapsto Z \cap X, \\ \overline{Y} &\leftarrow\!\shortmid Y. \end{aligned}$$

Wir betrachten das Beispiel projektiver Geraden Z und affiner Geraden Y. Sei $H \neq Z \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ eine projektive Gerade, etwa

$$Z = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\} \quad \textit{mit } (a_0 : a_1 : a_2) \neq (1 : 0 : 0).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Z \cap X &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \textit{ und } x_0 \neq 0\} \\ &= \{(1 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : a_1x_1 + a_2x_2 = -a_0\}. \end{aligned}$$

Unter φ korrespondiert dies zu der affinen Gerade

$$\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = -a_0\}.$$

Startet man umgekehrt mit der affinen Geraden

$$g = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\},$$

so ist der projektive Abschluss $\overline{g}$ von g durch

$$\overline{g} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : -bx_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\},$$

gegeben, denn die rechte Seite ist eine projektive Gerade in $\mathbb{P}^2(K)$, deren Schnitt mit X unter φ zu g korrespondiert.

Beispiel 1.96. *Die Geraden*

$$\begin{aligned} g &= \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 5\}, \\ h &= \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 4x_2 = 3\} \end{aligned}$$

sind in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ affin parallel. Wir identifizieren wie in Beispiel 1.94 die affine Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \smallsetminus H$ mit

$$H := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_0 = 0\}$$

Wie in Beispiel 1.95 erhalten wir dann für die projektiven Abschlüsse

$$\begin{aligned} \overline{g} &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : -5x_0 + x_1 + 2x_2 = 0\}, \\ \overline{h} &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : -3x_0 + 2x_1 + 4x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Mit Beispiel 1.92 erhalten wir als projektiven Schnittpunkt von $\overline{g}$ und $\overline{h}$ den Punkt $(0 : -2 : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Bemerkung 1.97. *Für $i = 0, \ldots, n$ setzen wir jeweils*

$$H_i := \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K) : x_i = 0\}.$$

Dann sind $H_0, \ldots, H_n$ Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(K)$ mit $H_0 \cap H_1 \cap \ldots \cap H_n = \emptyset$. Setzen wir für $i = 0, \ldots, n$ jeweils

$$A_i := \mathbb{P}^n(K) \setminus H_i = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K) : x_i \neq 0\},$$

so ist

$$\mathbb{P}^n(K) = A_0 \cup \ldots \cup A_n.$$

*Jedes der A_i kann man analog zu Beispiel 1.94 mit der Struktur eines affinen Raumes versehen, der isomorph zu $\mathbb{A}^n(K)$ ist. Wir können den projektiven Raum $\mathbb{P}^n(K)$ also durch $n+1$ Kopien des affinen Raumes $\mathbb{A}^n(K)$ überdecken. Diese Kopien $A_0, \ldots, A_n$ heißen **affine Karten**.*

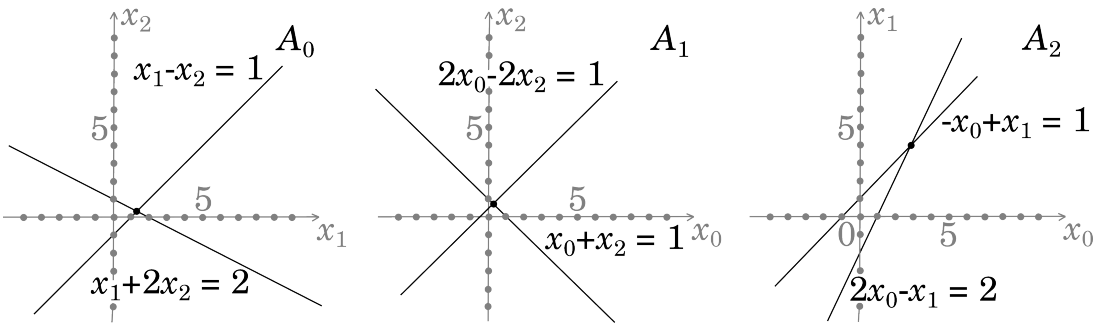
Beispiel 1.98. *Nach Bemerkung 1.97 können wir $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ durch die drei affinen Karten*

$$A_i := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \quad \text{für } i = 0, 1, 2$$

überdecken. Wir betrachten die beiden projektiven Geraden

$$g = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : 2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0\},$$
$$h = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : -x_0 + x_1 - x_2 = 0\}.$$

Diese finden sich in den affinen Karten A_0, A_1, A_2 wie folgt wieder:



Da der Schnittpunkt $(3 : 4 : 1)$ der projektiven Geraden g und h in allen drei unserer affinen Karten liegt, schneiden sich die zugehörigen affinen Geraden jeweils. Das muss jedoch nicht immer so sein: Etwa liegt der Schnittpunkt $(0 : 2 : -1)$ der projektiven Geraden aus Beispiel 1.96 nicht in A_0. Dass sich die zugehörigen affinen Geraden

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 5\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 4x_2 = 3\right\}$$

nicht schneiden, können wir dann auch so interpretieren, dass wir schlichtweg in der falschen affinen Karte nachsehen.

Um in projektiven Räumen arbeiten zu können, führen wir geeignete Abbildungen zwischen diesen ein:

Definition 1.99 (proj. Raum). *Sei W ein Vektorraum über dem Körper K und $\mathbb{P}(W)$ der zu W gehörige projektive Raum. Eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ heißt **projektive Abbildung**, wenn es eine injektive lineare Abbildung $\Phi\colon V \to W$ mit*

$$\varphi(\langle v\rangle_K) = \langle \Phi(v)\rangle_K \quad \textit{für alle } 0 \neq v \in V$$

*gibt. Wir schreiben kurz $\varphi =: \mathbb{P}(\Phi)$. Eine bijektive projektive Abbildung heißt auch eine **Projektivität**.*

In Definition 1.99 ist die Injektivität der linearen Abbildung Φ notwendig für die Wohldefiniertheit von φ,

denn: Wäre Φ nicht injektiv, so gäbe es ein $0 \neq v \in V$ mit $\Phi(v) = 0$. Es gälte dann

$$\varphi(\langle v\rangle_K) = \langle \Phi(v)\rangle_K = 0 \quad \notin \mathbb{P}(W).$$

#

Die Injektivität von Φ hat zur Folge, dass auch φ injektiv ist,

denn: Sind $P = \langle v\rangle_K$, $Q = \langle w\rangle_K \in \mathbb{P}(V)$ mit $\varphi(P) = \varphi(Q)$, so ist $\langle \Phi(v)\rangle_K = \langle \Phi(w)\rangle_K$ und es existiert somit ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $\Phi(v) = \lambda \cdot \Phi(w) = \Phi(\lambda w)$. Aufgrund der Injektivität von Φ ergibt sich $v = \lambda w$ und deshalb $P = Q$. #

Ebenso folgt aus der Injektivität von Φ sofort $\dim W \geq \dim V$ und somit auch

$$\dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1 \geq \dim V - 1 = \dim \mathbb{P}(V).$$

Diese Phänomene sind gegenüber der affinen Theorie völlig neuartig und bedingen, dass sich beliebte Abbildungstypen wie etwa Projektionen des Raumes auf eine Ebene nicht ohne Weiteres ins Projektive übertragen lassen. Wir werden nun aber mit den Zentralprojektionen beispielhaft eine Klasse projektiver Abbildungen einführen:

Definition 1.100 (proj. Raum). *Seien $Z, Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ projektive Unterräume, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(i) $\dim(Z_1) = \dim(Z_2)$,

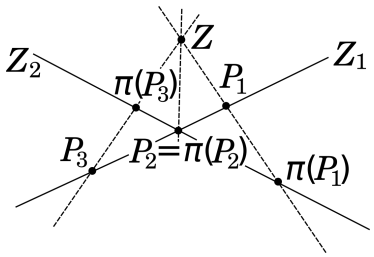
(ii) $Z \vee Z_1 = Z \vee Z_2 = \mathbb{P}(V)$,

(iii) $Z \cap Z_1 = Z \cap Z_2 = \emptyset$,

Dann heißt die Abbildung

$$\pi\colon \begin{cases} Z_1 & \to Z_2, \\ P & \mapsto \textit{Schnittpunkt von } Z \vee \{P\} \textit{ und } Z_2 \end{cases}$$

*die **Zentralprojektion** mit **Zentrum** Z von Z_1 auf Z_2.*



Bemerkung 1.101 (proj. Raum). (a) *Die Bedingungen (ii) und (iii) aus Definition 1.100 sind aufgrund von Proposition 1.85 und Proposition 1.88 äquivalent zu*

$$V = U(Z) \oplus U(Z_1) = U(Z) \oplus U(Z_2).$$

Sind speziell Z_1 und Z_2 Hyperebenen, so ist daher $Z = \{P\}$ für einen Punkt P außerhalb von $Z_1 \cup Z_2$.

(b) *Die Zentralprojektion ist wohldefiniert,*

denn: Zu zeigen ist, dass für einen beliebigen Punkt $P \in Z_1$ die Menge $(Z \vee \{P\}) \cap Z_2$ tatsächlich aus genau einem Punkt in Z_2 besteht. Mit der Dimensionsformel 1.90 gilt zunächst

$$\dim(Z \vee \{P\}) = \dim Z + \dim\{P\} - \dim(Z \cap \{P\}) \overset{\text{(iii)}}{=} \dim Z + 1, \tag{1.24}$$

$$\dim(Z \vee Z_2) = \dim Z + \dim Z_2 - \dim(Z \cap Z_2) \overset{\text{(iii)}}{=} \dim Z + \dim Z_2 + 1. \tag{1.25}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{P}(V) &\overset{\text{(ii)}}{=} \dim(Z \vee Z_2) = \dim\big((Z \vee \{P\}) \vee Z_2\big) \\
&\overset{1.90}{=} \dim(Z \vee \{P\}) + \dim Z_2 - \dim\big((Z \vee \{P\}) \cap Z_2\big) \\
&\overset{(1.24)}{=} (\dim Z + 1) + \dim Z_2 - \dim\big((Z \vee \{P\}) \cap Z_2\big) \\
&= (\dim Z + \dim Z_2 + 1) - \dim\big((Z \vee \{P\}) \cap Z_2\big) \\
&\overset{(1.25)}{=} \dim(Z \vee Z_2) - \dim\big((Z \vee \{P\}) \cap Z_2\big) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \dim \mathbb{P}(V) - \dim\big((Z \vee \{P\}) \cap Z_2\big)
\end{aligned}$$

und also $\dim\big((Z \vee \{P\}) \cap Z_2\big) = 0.$ #

Beispiel 1.102. *Wir betrachten in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ die beiden Geraden*

$$\begin{aligned}
g &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : 2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0\}, \\
h &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : -x_0 + x_1 - x_2 = 0\}.
\end{aligned}$$

aus Beispiel 1.98 sowie den Punkt $P := (1 : 1 : 2)$. Für die Zentralprojektion π mit Zentrum $Z = \{P\}$ von g auf h gilt dann

$$\pi(Q) = (q_0 + q_1 - q_2 : -q_0 + 3q_1 - q_2 : -2q_0 + 2q_1) \quad \textit{für alle } Q = (q_0 : q_1 : q_2) \in g,$$

denn: Nach Beispiel 1.89 gilt dann für die Verbindungsgerade

$$\begin{aligned} Z \vee \{Q\} &= \overleftrightarrow{PQ} \\ &= \left\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : (2q_1 - q_2) \cdot x_0 + (q_2 - 2q_0) \cdot x_1 + (q_0 - q_1) \cdot x_2 = 0\right\} \end{aligned}$$

und nach Beispiel 1.92 ist der eindeutig bestimmte Geradenschnittpunkt $S = (s_0 : s_1 : s_2)$ von h mit $Z \vee \{Q\}$ durch

$$\begin{aligned} s_0 &:= (-1) \cdot (q_2 - 2q_0) - (q_0 - q_1) = q_0 + q_1 - q_2, \\ s_1 &:= (-1) \cdot (q_0 - q_1) - (-1) \cdot (2q_1 - q_2) = -q_0 + 3q_1 - q_2, \\ s_2 &:= (2q_1 - q_2) - (-1) \cdot (q_2 - 2q_0) = -2q_0 + 2q_1 \end{aligned}$$

gegeben. Die Behauptung folgt, da nach Definition 1.100 bereits $\pi(Q) = S$ gilt. #

Proposition 1.103 (proj. Raum). *Jede Zentralprojektion ist eine Projektivität.*

Beweis. Seien Z_1, Z_2 projektive Unterräume von $\mathbb{P}(V)$ und $\pi\colon Z_1 \to Z_2$ eine Zentralprojektion mit Zentrum Z. Nach Bemerkung 1.101 gilt dann $V = U(Z) \oplus U(Z_2)$, so dass wir ein beliebiges Element $v \in V$ eindeutig in der Form $v = w + w_2$ mit $w \in U(Z)$ und $w_2 \in U(Z_2)$ schreiben können. Es existiert dann eine Projektion

$$\Pi\colon \begin{cases} V = U(Z) \oplus U(Z_2) & \to U(Z_2), \\ w + w_2 & \mapsto w_2. \end{cases}$$

Die Einschränkung Φ von Π auf $U(Z_1)$ ist ein Isomorphismus,

denn: Zu jedem $w_2 \in U(Z_2)$ gibt es ein $w \in U(Z)$ und ein $w_1 \in U(Z_1)$ mit $w_2 = w + w_1$. Es ist dann $\Phi(w_1) = \Pi(w_1) = \Pi(-w + w_2) = w_2$ und also Φ surjektiv. Darüber hinaus ist $\ker \Phi = \ker \Pi \cap U(Z_1) = U(Z) \cap U(Z_1) = 0$ und Φ injektiv. #

Sei $0 \neq w_1 \in U(Z_1)$. Dann gilt

$$\langle \Phi(w_1) \rangle_K = \big(U(Z) \oplus \langle w_1 \rangle_K\big) \cap U(Z_2),$$

denn: Es gibt eindeutig bestimmte $w \in U(Z)$ und $w_2 \in U(Z_2)$ mit $w_1 = w + w_2$ und also mit $\Phi(w_1) = w_2 = -w + w_1 \in \big(U(Z) \oplus \langle w_1 \rangle_K\big) \cap U(Z_2)$. Ist umgekehrt $v \in \big(U(Z) \oplus \langle w_1 \rangle_K\big) \cap U(Z_2)$, dann existieren eindeutig bestimmte $w \in U(Z)$, $\lambda \in K$ mit $v = w + \lambda w_1 \in U(Z_2)$. Es ist dann $\Phi(\lambda w_1) = \Pi(\lambda w_1) = \Pi(-w + v) = v$. #

Schließlich gilt $\pi = \mathbb{P}(\Phi)$,

denn: Für $P = \langle w_1 \rangle_K \in Z_1$ ist das eindeutig bestimmte Element von $(Z \vee \{P\}) \cap Z_2$ gegeben durch

$$U\big((Z \vee \{P\}) \cap Z_2\big) = \big(U(Z) \oplus \langle w_1 \rangle_K\big) \cap U(Z_2) = \langle \Phi(w_1) \rangle_K = \mathbb{P}(\Phi)(\langle w_1 \rangle_K) = \mathbb{P}(\Phi)(P).$$

#

Insgesamt folgt die Proposition. □

Offensichtlich bleibt bei einer Zentralprojektion $\pi\colon Z_1 \to Z_2$ der Durchschnitt $Z_1 \cap Z_2$ punktweise fest. Insbesondere ist nicht jede Projektivität bereits eine Zentralprojektion. In Übungsaufgabe 1.20 zeigen wir, dass aber jede Projektivität $\varphi\colon Z_1 \to Z_2$ mit $\varphi|_{Z_1 \cap Z_2} = \mathrm{id}_{Z_1 \cap Z_2}$ eine Zentralprojektion ist.

Abschließend für diesen Abschnitt wollen wir zu unserer Ausgangsfrage mit den Eisenbahnschienen zurückkehren und dafür zunächst die Zentralprojektion aus Beispiel 1.102 in affinen Karten betrachten:

Beispiel 1.104. *Die Zentralprojektion $\pi\colon g \to h$ aus Beispiel 1.102 schränkt sich zu einer Abbildung*

$$\pi|_{g \cap A_0}\colon g \cap A_0 \to h$$

ein, wobei

$$A_0 := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$$

eine der in Beispiel 1.98 betrachteten affinen Karten sei. Uns interessiert in Hinsicht auf unsere Fragestellung nun die Menge V_0 der Punkte in $g \cap A_0$, die unter π in die unendlich ferne Hyperebene

$$H_0 := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_0 = 0\}$$

abgebildet werden. Für diese gilt

$$V_0 = \{(1 : 0 : 1)\},$$

denn: Definitionsgemäß ist zunächst

$$\begin{aligned} g \cap A_0 &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_0 \neq 0 \text{ und } 2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0\} \\ &= \{(1 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_1 = 2 - 2x_2\} \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} &\pi(g \cap A_0) \\ &\overset{1.102}{=} \big\{\big(1 + (2 - 2x_2) - x_2 : -1 + 3 \cdot (2 - 2x_2) - x_2 : -2 + 2 \cdot (2 - 2x_2)\big) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\big\} \\ &= \big\{\big(-3x_2 + 3 : -7x_2 + 5 : -4x_2 + 2\big) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\big\}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} h \cap H_0 &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_0 = 0 \text{ und } -x_0 + x_1 - x_2 = 0\} \\ &= \{(0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_1 = x_2\}. \end{aligned}$$

Jeder Punkt aus $\pi(g \cap A_0)$, der auch in $h \cap H_0$ liegt, erfüllt offensichtlich $x_2 = 1$. Setzen wir dies in die Beschreibung von $g \cap A_0$ ein, so erhalten wir $x_1 = 0$ und $(1 : 0 : 1)$ als einzigen möglichen Punkt in V_0. Die Behauptung folgt nun mit $\pi\big((1 : 0 : 1)\big) = (0 : 2 : 2) \in h \cap H_0$. #

Durch weitere Einschränkung erhalten wir so eine wohldefinierte Abbildung

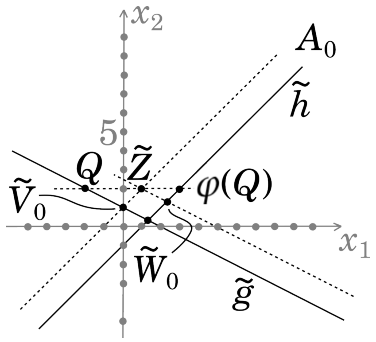
$$\pi|^{h \cap A_0}_{(g \cap A_0) \smallsetminus V_0}\colon (g \cap A_0) \smallsetminus V_0 \to h \cap A_0$$

im Affinen.

Im folgenden Beispiel wollen wir uns die in Beispiel 1.104 hergeleitete Einschränkung der gegebenen Zentralprojektion veranschaulichen, indem wir die betrachtete affine Karte A_0 mit der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ identifizieren:

Beispiel 1.105. *Indem wir in der Situation von Beispiel 1.104 die affine Karte A_0 via $(1 : x_1 : x_2) \mapsto \binom{x_1}{x_2}$ mit $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ identifizieren, erhalten wir als Bilder von $g \cap A_0$, $h \cap A_0$, Z und V_0 die folgenden Teilmengen der affinen Standardebene:*

$$\begin{aligned}
\tilde{g} &:= \{\tbinom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 2\},\\
\tilde{h} &:= \{\tbinom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 1\},\\
\tilde{Z} &:= \{\tbinom{1}{2}\},\ \tilde{V}_0 := \{\tbinom{0}{1}\}.
\end{aligned}$$



Die eingeschränkte Zentralprojektion wird so vermöge (1.26) zur Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \tilde{g} \smallsetminus \tilde{V}_0 & \to \tilde{h},\\ \binom{x_1}{x_2} & \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-7x_2+5}{-3x_2+3} \\ \frac{-4x_2+2}{-3x_2+3} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dass wir dabei die Menge $\tilde{V}_0$ aus dem Definitionsbereich von φ herausnehmen müssen, liegt daran, dass φ nach Konstruktion der Zentralprojektion einen beliebigen gegebenen Punkt $Q \in \tilde{g}$ auf den Schnittpunkt der Geraden $\tilde{Z} \vee \{Q\}$ und $\tilde{h}$ abbildet, diese Geraden im Fall $Q \in \tilde{V}_0$ aber parallel sind, so dass ein solcher Schnittpunkt nicht existiert. Analog sehen wir ein, dass φ nicht surjektiv ist, da der Schnittpunkt von $\tilde{h}$ und der Parallelen zu $\tilde{g}$ durch $\tilde{Z}$ offensichtlich kein Urbild unter φ haben kann. Berechnen wir diesen Schnittpunkt und setzen wir mit diesem

$$\tilde{W}_0 := \{\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}\},$$

so erhalten wir eine bijektive Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon \tilde{g} \smallsetminus \tilde{V}_0 \to \tilde{h} \smallsetminus \tilde{W}_0,$$

deren Umkehrabbildung offensichtlich die entsprechend konstruierte Einschränkung der Zentralprojektion mit Zentrum Z von h auf g ist.

Die Abbildung $\tilde{\varphi}$ ist keine Einschränkung einer affinen Abbildung von $\tilde{g}$ nach $\tilde{h}$,

denn: Wäre dem so, müsste $\tilde{\varphi}$ nach Proposition 1.42 Teilverhältnisse erhalten. Für

$$A := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt aber

$$\tilde{\varphi}(A) := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \tilde{\varphi}(B) := \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \; \tilde{\varphi}(C) := \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\mathrm{TV}\big(\tilde{\varphi}(A), \tilde{\varphi}(B), \tilde{\varphi}(C)\big) \overset{1.41}{=} \frac{\frac{2}{3} - 2}{\frac{1}{3} - 2} = \frac{4}{5} \neq \frac{6}{5} = \frac{0-2}{\frac{1}{3} - 2} \overset{1.41}{=} \mathrm{TV}(A, B, C).$$

#

1.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1 (aff. Raum). *Sei Y ein affiner Unterraum von X. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

(a) *Für $P \in Y$ gilt $Y = \{A \in X : t_{PA} \in T(Y)\} = \{\tau_t(P) : t \in T(Y)\}$,*

(b) $T(Y) = \{t_{AB} : A, B \in Y\}$,

(c) *Im Falle $\dim(X), \dim(Y) < \infty$ gilt*

$$\dim(X) = \dim(Y) \iff X = Y,$$

(d) *Für $A, B, C, D \in X$ gilt*

$$t_{AB} = t_{CD} \iff \text{es gibt ein } t \in T(X) \text{ mit } C = \tau_t(A), D = \tau_t(B).$$

Aufgabe 1.2 (aff. Raum). *Beweisen Sie Proposition 1.12: Seien A und B zwei verschiedene Punkte in X. Zeigen Sie, dass der Verbindungsraum von A und B gegeben ist durch die Gerade, die durch A und B verläuft, also*

$$\{A\} \vee \{B\} = \{\tau_t(A) : t \in \langle t_{AB} \rangle\} \quad \text{und} \quad T(\{A\} \vee \{B\}) = \langle t_{AB} \rangle.$$

Aufgabe 1.3 (aff. Raum). *Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie, dass dann für eine Teilmenge $Y \subseteq X$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:*

(i) *Y ist ein affiner Unterraum von X.*

(ii) *Zu je zwei verschiedenen Punkten $A, B \in Y$ ist $\overleftrightarrow{AB} := \{A\} \vee \{B\}$ in Y enthalten.*

Aufgabe 1.4. *Seien*

$$Y_1 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \textit{und} \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte $P \in \mathbb{R}^3$, die auf keiner Verbindungsgeraden $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ mit $P_1 \in Y_1$ und $P_2 \in Y_2$ liegen.

Aufgabe 1.5 (aff. Raum). *Aufgabe Seien X, Y, Z affine Räume und $\varphi\colon X \to Y$ und $\psi\colon Y \to Z$ affine Abbildungen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

(a) *$(\psi \circ \varphi)\colon X \to Z$ ist wieder affin und es gilt $T(\psi \circ \varphi) = T(\psi) \circ T(\varphi)$.*

(b) *φ ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn $T(\varphi)$ die entsprechende Eigenschaft hat.*

(c) *Ist φ bijektiv, so ist auch $\varphi^{-1}\colon Y \to X$ affin mit $T(\varphi^{-1}) = T(\varphi)^{-1}$.*

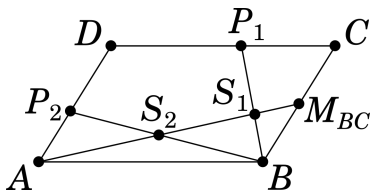
Aufgabe 1.6 (aff. Raum). *Zeigen Sie in Verallgemeinerung von (1.7) die folgende Aussage: Sei $(Y, T(Y), \sigma)$ ein affiner Raum über dem Körper K, sei $\varphi\colon X \to Y$ eine affine Abbildung und seien $X_1, X_2 \subseteq X$ zwei affine Unterräume. Gilt dann $X_1 \parallel X_2$, so auch $\varphi(X_1) \parallel \varphi(X_2)$.*

Aufgabe 1.7 (aff. Raum). *Eine bijektive Abbildung $\varphi\colon X \to X$ heißt eine **Kollineation**, wenn für alle Geraden $g \subseteq X$ auch $\varphi(g) \subseteq X$ eine Gerade ist. Zeigen Sie, dass jede Affinität eine Kollineation ist.*

Aufgabe 1.8. *Sei $\Pi ABCD$ ein Parallelogramm in einem affinen Raum X über einem Körper K der Charakteristik $\operatorname{char}(K) \neq 2$.*

(a) *Seien P_1 der Punkt mit $\mathrm{TV}(C, D, P_1) = t_1 \in (0,1)$ und S_1 der Schnittpunkt der Geraden $\overleftrightarrow{AM_{BC}}$ und $\overleftrightarrow{BP_1}$. Drücken Sie die Teilverhältnisse $\mathrm{TV}(A, M_{BC}, S_1)$ und $\mathrm{TV}(B, P_1, S_1)$ durch den Parameter t_1 aus.*

(b) *Seien P_2 der Punkt mit $\mathrm{TV}(A, D, P_2) = t_2 \in (0,1)$ und S_2 der Schnittpunkt der Geraden $\overleftrightarrow{AM_{BC}}$ und $\overleftrightarrow{BP_2}$. Drücken Sie die Teilverhältnisse $\mathrm{TV}(A, M_{BC}, S_2)$ und $\mathrm{TV}(B, P_2, S_2)$ durch den Parameter t_2 aus.*



Aufgabe 1.9. *Für $A, t \in \mathbb{R}^2$ mit $\|t\| = 1$ definieren wir die Abbildung*

$$\sigma_{t,A}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2, \\ P & \mapsto P - 2 \cdot \langle P - A \mid t \rangle \cdot t. \end{cases}$$

Diese beschreibt eine Spiegelung an der Geraden $g = \{P \in \mathbb{R}^2 : \langle P - A \mid t\rangle = 0\}$. *Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

(a) *Die Spiegelung* $\sigma_{t,A}$ *ist eine Bewegung mit* $\sigma_{t,A}^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

(b) *Für jedes* $B \in \mathbb{R}^2$ *lässt sich die Translation*

$$\tau_B \colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2, \\ P & \mapsto P + B \end{cases}$$

um B *als Verkettung zweier Spiegelungen* $\sigma_{t,A}$ *und* $\sigma_{t',A'}$ *mit* $A, A', t, t' \in \mathbb{R}^2$, $\|t\| = \|t'\| = 1$ *und* $\langle t, t'\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ *schreiben.*

(c) *Für* $A', t' \in \mathbb{R}^2$ *mit* $\|t'\| = 1$ *und* $\langle t, t'\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ *ist die Verkettung* $\sigma_{t,A} \circ \sigma_{t',A'}$ *eine Drehung. Um welchen Punkt? Um welchen Winkel?*

Darüber hinaus kann man zeigen, dass eine Bewegung mit genau einem Fixpunkt eine Drehung ist und sich als Verkettung zweier Spiegelungen schreiben lässt. Eine Bewegung, deren Fixpunktmenge eine Gerade ist, ist eine Spiegelung. Folgern Sie:

(d) *Jede Bewegung des* $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ *lässt sich als Verkettung von höchstens drei Spiegelungen darstellen.*

Aufgabe 1.10. *Sei* $\triangle ABC$ *ein Dreieck in einem Euklid'schen Raum* X *mit Innenwinkelgrößen* (α, β, γ) *und Seitenlängen* (a, b, c) *sowie* D *ein von* A *und* B *verschiedener Punkt auf der Strecke* $\overline{AB}$. *Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

(a) *Ist* $\angle CAB$ *ein rechter Winkel, so gilt* $d(C, D) < a$.

(b) *Genau dann gilt* $a = b$, *wenn auch* $\alpha = \beta$ *gilt.*

(c) *Gilt* $c = 2 \cdot d(C, M_{AB})$, *so ist* $\angle ACB$ *ein rechter Winkel.*

Aufgabe 1.11. *Sei* $n \geq 2$ *und sei* $\triangle ABC$ *ein Dreieck im euklidischen Standardraum* $\mathbb{E}^n$ *mit Innenwinkelgrößen* (α, β, γ) *und Seitenlängen* (a, b, c). *Seien weiter* $U = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$ *der halbe* ***Umfang*** *von* $\triangle ABC$ *sowie* $\mathrm{vol}(\triangle ABC) = \frac{ab}{2} \cdot \sin(\gamma)$ *der* ***Flächeninhalt*** *von* $\triangle ABC$, *vergleiche auch das verlinkte Zusatzmaterial.*

(a) *Zeigen Sie die* ***Heron'sche Formel***

$$\mathrm{vol}(\triangle ABC)^2 = U \cdot (U - a) \cdot (U - b) \cdot (U - c).$$

(b) *Folgern Sie aus (a) die Abschätzung*

$$\mathrm{vol}(\triangle ABC) \leq \frac{(a + b + c)^2}{12\sqrt{3}}$$

und zeigen Sie, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b = c$ *gilt, das Dreieck* $\triangle ABC$ *also* ***gleichseitig*** *ist.*

Hinweis: *Sie dürfen ohne Beweis die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel verwenden.*

Aufgabe 1.12. *Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass es im euklidischen Standardraum $\mathbb{E}^n$ kein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ mit Eckpunkten $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$ gibt.*

Hinweis: *Zeigen Sie induktiv, dass ansonsten die quadrierten Seitenlängen durch eine beliebig große Potenz von 4 teilbar sein müssten.*

Aufgabe 1.13. *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}^2$, so dass $\angle BCA$ ein rechter Winkel ist. Sei weiter $A' := C + \lambda(A - C)$ mit einem $\lambda \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass dann $\|B - A'\| < \|B - A\|$ gilt.*

Aufgabe 1.14. *Seien A, B, C drei kollineare Punkte auf der Einheitssphäre $S^2 \subseteq \mathbb{E}^3$ mit $A \neq C$. Zeigen Sie, dass dann schon $B \in \{A, C\}$ gilt.*

Aufgabe 1.15. *Eine Teilmenge einer Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$, die als Fläche eines Polytops $P \subseteq \mathbb{R}^3$ vorkommt, heißt ein **konvexes Polygon**. Schneiden wir die abgeschlossenen Halbräume aus der Definition von P jeweils mit der Ebene E, so erhalten wir eine Darstellung des Polygons als endlichen Durchschnitt von abgeschlossenen Halbflächen. Analog zu Definition 1.70 ist das **Innere** des konvexen Polygons durch den Durchschnitt der jeweiligen offenen Halbflächen gegeben. Der Rand des konvexen Polygons zerfällt offensichtlich (nicht disjunkt) in Ecken und Kanten von P, die wir hier auch die **Ecken** und **Kanten** des konvexen Polygons nennen wollen.*

*In dieser Aufgabe leiten wir aus der Euler'schen Polyederformel mit dem **Satz von Pick** einen Satz über den Flächeninhalt konvexer Polygone in der Euklid'schen Standardebene $\mathbb{E}^2$ her, wobei wir letztere über eine geeignete Einbettung als Ebene im obigen Sinne auffassen können. Die vorkommenden Flächeninhalte bestimmen wir über die aus der Schule bekannte Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks und eine überlappungsfreie Zerlegung des konvexen Polygons in Dreiecke, wie das verlinkte Zusatzmaterial motiviert.*

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) *Für den Flächeninhalt eines Dreiecks $\triangle$, dessen Ecken A, B, C in $\mathbb{Z}^2$ liegen und auf dessen sonstigen Rand und in dessen Inneren keine Punkte von $\mathbb{Z}^2$ vorkommen, gilt stets*

$$\mathrm{vol}(\triangle) = \frac{1}{2}.$$

Hinweis: *Zeigen Sie dafür, dass je zwei der Translationsvektoren t_{AB}, t_{BC}, t_{CA} eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}^2$ bilden, indem Sie nachweisen, dass die gesamte Ebene $\mathbb{E}^2$ durch ganzzahlige Translate des durch diese zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms parkettiert wird.*

(b) *Für den Flächeninhalt eines konvexen Polygons $\Pi \subseteq \mathbb{R}^2$, dessen Ecken in $\mathbb{Z}^2$ liegen, gilt stets*

$$\mathrm{vol}(\Pi) = e(\Pi)_{\mathrm{int}} + \frac{1}{2} e(\Pi)_{\mathrm{rand}} - 1,$$

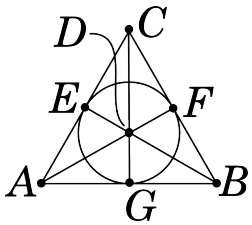
wobei $e(\Pi)_{\mathrm{int}}$ die Anzahl der ganzzahligen Punkte im Inneren von Π und $e(\Pi)_{\mathrm{rand}}$ die Anzahl der ganzzahligen Punkte auf dem Rand von Π bezeichnet.

Hinweis: *Unterteilen Sie Π in Dreiecke, wie sie in Teil (a) behandelt wurden und benutzen Sie die Euler'sche Polyederformel für Netze, wie sie in Schritt 2 des Beweises von Satz 1.75 formuliert ist.*

Aufgabe 1.16. *In dieser Aufgabe untersuchen wir die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen.*

(a) *Bestimmen Sie alle Punkte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$. Wie viele gibt es?*

(b) *Aus wie vielen Punkten besteht eine Gerade in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$? Bestimmen Sie konkrete Werte für die Eckpunkte A, B, C, D, E, F in der folgenden Abbildung, sodass Punkte auf derselben Linie Punkten in einer projektiven Geraden entsprechen:*



Aufgabe 1.17. *Ist $g \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eine Gerade, so gibt es nach Beispiel 1.87 reelle Zahlen a_0, a_1, a_2, nicht alle Null, mit*

$$g = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}.$$

Der Punkt $P(g) := (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist dabei durch g eindeutig festgelegt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) *Zu zwei voneinander verschiedenen Geraden $g_1 \neq g_2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind auch die zugehörigen Punkte $P(g_1)$ und $P(g_2)$ voneinander verschieden.*

(b) *Haben gegebene Geraden $g_1, g_2, g_3 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ einen gemeinsamen Schnittpunkt, so liegen die Punkte $P(g_1), P(g_2), P(g_3)$ auf einer gemeinsamen Geraden.*

Aufgabe 1.18. *Seien*

$$P(X_1, X_2) = a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{12}X_1X_2 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2 + a_{00},$$
$$\overline{P}(X_0, X_1, X_2) = a11X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{12}X_1X_2 + a_{01}X_0X_1 + a_{02}X_0X_2 + a_{00}X_0^2$$

Polynome mit reellen Koeffizienten und $a_{00}a_{11} < 0$. Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge

$$X := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : P(x_1, x_2) = 0\}$$

genau dann ein Kreis[16]*ist, wenn der Durchschnitt von*

$$\overline{X} := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : \overline{P}(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

mit der ***unendlich fernen Hyperebene*** *$H := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : x_0 = 0\}$ genau aus den Punkten $(0 : 1 : \pm i) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ besteht.*

[16]Ein Kreis in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ist natürlich die Menge aller Punkte, die zu einem gegebenen Punkt $M \in \mathbb{R}^2$ einen gegebenen euklidischen Abstand $r > 0$ haben.

Aufgabe 1.19. *Seien Z_1, Z_2 zwei projektive Unterräume von $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Diskutieren Sie das mögliche Schnittverhalten von Z_1 und Z_2 in den folgenden Fällen und vergleichen Sie dieses mit dem möglichen Schnittverhalten von affinen Unterräumen entsprechender Dimension von $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:*

(i) *Z_1 ist eine projektive Gerade und Z_2 eine projektive Ebene.*

(ii) *Z_1 und Z_2 sind beides projektive Ebenen.*

Aufgabe 1.20 (proj. Raum). *Seien $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ projektive Unterräume gleicher Dimension und sei $\varphi\colon Z_1 \to Z_2$ eine Projektivität mit $\varphi|_{Z_1 \cap Z_2} = \mathrm{id}_{Z_1 \cap Z_2}$. Zeigen Sie, dass dann φ bereits eine Zentralprojektion ist.*

KAPITEL 2

Inzidenzgeometrie

In diesem Kapitel und den Kapiteln 3 und 4 werden wir die ebene Geometrie nach Euklid in moderner Form streng axiomatisch einführen. In Abgrenzung zur Analytischen Geometrie aus Kapitel 1 spricht man hierbei von der ***Synthetischen Geometrie***. Im Großen und Ganzen folgen wir der Darstellung aus den *Grundlagen der Geometrie* von Hilbert aus dem Jahr 1899. Die Ausformulierung der Axiome im Detail ist allerdings an keine bestimmte Quelle angelehnt, sondern von uns auf Übersichtlichkeit und gute Verständlichkeit hin optimiert. Um die hierbei verwendete Herangehensweise kennenzulernen und um besser Vergleiche zur Analytischen Geometrie anstellen zu können, studieren wir in diesem Kapitel zunächst deutlich allgemeiner Inzidenzebenen und affine Ebenen.

2.1 Inzidenzebenen

Definition 2.1. *Ein Paar* $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ *aus einer Menge* $\mathbf{P}$ *und einer Menge* $\mathbf{G}$ *von Teilmengen von* $\mathbf{P}$ *heißt eine* ***Ebene****. Die Elemente von* $\mathbf{P}$ *nennen wir die* ***Punkte****, die Elemente von* $\mathbf{G}$ *die* ***Geraden*** *von* $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$.

Um in einer gegebenen Ebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ geometrische Sachverhalte beschreiben zu können, führen wir dort eine Reihe von Sprechweisen ein. Genauer sagen wir:

- Ein Punkt $A \in \mathbf{P}$ ***liegt auf*** einer Geraden $g \in \mathbf{G}$ bzw. g ***geht durch*** A, falls $A \in g$ gilt.
- Ein Punkt $A \in \mathbf{P}$ ist ein ***Schnittpunkt*** von zwei Geraden $g, h \in \mathbf{G}$, falls A im Mengendurchschnitt $g \cap h$ liegt.
- Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbf{P}$ mit mindestens 3 Elementen ist ***kollinear***, falls es eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ mit $M \subseteq g$ gibt.
- Drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ sind ***in allgemeiner Lage***, falls $\{A, B, C\}$ nicht kollinear ist, es also kein $g \in \mathbf{G}$ mit $A, B, C \in g$ gibt.
- Zwei Geraden $g, h \in \mathbf{G}$ sind ***parallel***, in Zeichen $g \parallel h$, falls $g = h$ oder $g \cap h = \emptyset$ gilt.

In unserer Vorstellung sind Geraden keine beliebigen Teilmengen der Punktemenge $\mathbf{P}$ einer Ebene, sondern genügen bestimmten Anforderungen. Diese formulieren wir nun:

Definition 2.2. *Eine Ebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ heißt eine **Inzidenzebene**, falls die folgenden **Inzidenzaxiome** erfüllt sind:*

(I_1) *Durch je zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}$ existiert genau eine Gerade in $\mathbf{G}$. Diese heißt die **Verbindungsgerade** $\overleftrightarrow{AB}$ von A und B.*

(I_2) *Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.*

(I_3) *Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.*

*Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene." schreiben wir künftig auch kurz „**(I)**".*

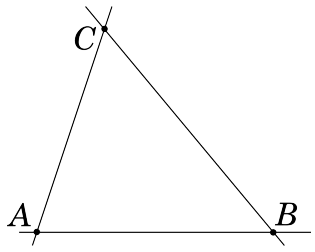
Die erste Frage, die wir uns nun stellen, ist, ob es ein ***Modell*** für eine Inzidenzebene gibt, also eine Ebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$, welche die Axiome (I_1), (I_2) und (I_3) erfüllt:

Beispiel 2.3. *Aufgrund von (I_3) enthält jede Inzidenzebene mindestens drei Punkte A, B, C. Das Paar*

$$(\mathbf{P}, \mathbf{G}) := \big(\{A, B, C\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}\big)$$

erfüllt aber offensichtlich die Inzidenzaxiome. Für $\mathbf{P} = \{A, B, C\}$ gibt es keine andere Teilmenge $\mathbf{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{P})$, für die das stimmt,

denn: Wir untersuchen die Teilmengen von $\mathbf{P} = \{A, B, C\}$ systematisch: Nach (I_3) gilt $\mathbf{P} \notin \mathbf{G}$. Mit (I_1) folgt $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\} \in \mathbf{G}$. Nach (I_2) gilt schließlich $\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\} \notin \mathbf{G}$. #



Wir beweisen nun erste Eigenschaften von Inzidenzebenen und zeigen so, dass man bereits in dieser Allgemeinheit Geometrie betreiben kann:

Proposition 2.4 (I). *Je zwei nichtparallele Geraden g und h haben einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt, den wir ab sofort mit $g \wedge h$ bezeichnen wollen.*

Beweis. Aus $g \nparallel h$ folgt definitionsgemäß $g \cap h \neq \emptyset$. Lägen zwei verschiedene Punkte A, B in $g \cap h$, so folgte mit (I_1) die Gleichheit $g = \overleftrightarrow{AB} = h$, was im Widerspruch zu $g \nparallel h$ steht. □

Proposition 2.5 (I). *Für je drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ mit $A \neq B$ und $A \neq C$ gilt die Äquivalenz*

$$C \in \overleftrightarrow{AB} \iff \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}.$$

Beweis. Gilt $C \in \overleftrightarrow{AB}$, so geht die Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ durch die beiden Punkte A und C. Nach (I_1) folgt $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Ist umgekehrt $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$, so gilt offensichtlich $C \in \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AB}$. □

Proposition 2.6 (I). (a) *Für jede Gerade $g \in \mathbf{G}$ gibt es einen Punkt $A \in \mathbf{P}$ mit $A \notin g$.*

(b) *Für jeden Punkt $A \in \mathbf{P}$ gibt es eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ mit $A \notin g$.*

Beweis. Gäbe es eine Gerade $g \in \mathbf{G}$, die durch alle Punkte in $\mathbf{P}$ geht, so gäbe es im Widerspruch zu (I_3) in $\mathbf{P}$ keine drei Punkte in allgemeiner Lage. Es gibt also für jede Gerade aus $\mathbf{G}$ mindestens einen Punkt $A \in \mathbf{P}$, durch den g nicht geht. Das ist Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) sei $A \in \mathbf{P}$ fest gewählt. Nach (I_3) gibt es dann ein $B \in \mathbf{P} \setminus \{A\}$ und nach (I_1) auch die Verbindungsgerade $\overleftrightarrow{AB}$. Nach Teil (a) existiert weiter ein Punkt $C \in \mathbf{P} \setminus \overleftrightarrow{AB}$. Mit Proposition 2.5 folgt zunächst $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BC}$ und daraus schließlich $A \notin \overleftrightarrow{BC}$. □

Abschließend für diesen Abschnitt zeigen wir nun, dass jede affine Ebene X im Sinne von Abschnitt 1.1 über einem beliebigen Körper K die Struktur einer Inzidenzebene trägt:

Satz 2.7. *Sei X eine affine Ebene über einem beliebigen Körper K im Sinne von Abschnitt 1.1. Dann ist $(\mathbf{P}_X, \mathbf{G}_X)$ eine Inzidenzebene, wobei die Punktemenge durch $P_X := X$ gegeben sei und die Geradenmenge G_X durch die Menge der affinen Geraden in X.*

Beweis. Für je zwei Punkte $A \neq B \in X$ ist die Verbindungsgerade[1] $\overleftrightarrow{AB} \in \mathbf{G}_K$ nach Proposition 1.12 eine Gerade durch A und B. Umgekehrt enthält jede Gerade $g \in \mathbf{G}_K$ durch A und B den eindimensionalen affinen Unterraum $\overleftrightarrow{AB}$ und muss aus Dimensionsgründen dann mit diesem übereinstimmen, so dass wir das erste Inzidenzaxiom (I_1) nachgewiesen haben.

Zum Nachweis von (I_2) bemerken wir, dass jede affine Gerade in X als eindimensionaler affiner Unterraum von X dieselbe Kardinalität wie K hat und insbesondere mindestens zwei Punkte.

Da jede affine Basis von X aus drei Punkten in allgemeiner Lage besteht, gilt schließlich auch (I_3). □

Bemerkung 2.8. *In einer affinen Ebene X im Sinne von Abschnitt 1.1 ist der Begriff der Parallelität von Geraden nun doppelt definiert:*

- *wie in diesem Abschnitt: $g \parallel h \iff g \cap h = \emptyset$ oder $g = h$,*
- *via Definition 1.16 für affine Unterräume: $g \parallel h \iff T(g) = T(h)$.*

Diese Definitionen sind äquivalent,

denn: Ist $g \cap h = \emptyset$, so sind g, h nach Bemerkung 1.17 parallel im Sinne von Definition 1.16 und im Fall $g = h$ sind sie dies offensichtlich auch. Ist umgekehrt $g \cap h \neq \emptyset$ und $g \neq h$, so gilt

$$0 = \dim(g \cap h) = \dim T(g \cap h) = \dim\big(T(g) \cap T(h)\big)$$

und also $T(g) \neq T(h)$, so dass g und h nicht parallel im Sinne von Definition 1.16 sind. #

[1] Gemeint ist hier die Verbindungsgerade der Punkte $A, B \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ wie in Definition 1.11. Indem wir nun (I_1) nachweisen, zeigen wir, dass diese gerade die Verbindungsgerade im Sinne von Definition 2.2 ist.

Definition 2.9. *Seien* $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ *und* $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$ *zwei Inzidenzebenen. Eine bijektive Abbildung* $\varphi\colon \mathbf{P} \to \tilde{\mathbf{P}}$ *heißt ein* ***Isomorphismus*** *von Inzidenzebenen, wenn sie Geraden auf Geraden abbildet, wenn also*

$$\varphi(g) \in \tilde{\mathbf{G}} \quad \text{für alle } g \in \mathbf{G}$$

gilt. Im Fall $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}}) = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ *heißt* φ *hierbei ein* ***Automorphismus*** *von* $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$*. Die Menge der Automorphismen von* $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ *wird mit* $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ *bezeichnet.*

Nach Übungsaufgabe 2.2 ist für beliebige Inzidenzebenen $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ und $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$ mit $\varphi\colon \mathbf{P} \to \tilde{\mathbf{P}}$ auch $\varphi^{-1}\colon \tilde{\mathbf{P}} \to \mathbf{P}$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist für eine beliebige Inzidenzebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ die Menge $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe.

Beispiel 2.10. *Nach Satz 1.35 gibt es für jede affine Ebene* X *über einem Körper* K *im Sinne von Abschnitt 1.1 eine Affinität* $\varphi\colon X \to \mathbb{A}^2(K)$*. Diese ist bijektiv und bildet Geraden auf Geraden ab; insbesondere ist sie ein Isomorphismus von Inzidenzebenen.*

2.2 Affine Ebenen

Wie wir in Abschnitt 2.1 gesehen haben, können wir schon in Inzidenzebenen Geometrie betreiben. Wir beschränken nun die Anzahl möglicher Parallelen und studieren die Auswirkungen:

Definition 2.11. *Sei* $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ *eine Ebene. Dann lautet das* ***schwache Parallelenaxiom***

(p) *Ist* $A \in \mathbf{P}$ *ein Punkt und* $g \in \mathbf{G}$ *eine Gerade, dann gibt es höchstens eine Gerade* $h \in \mathbf{G}$ *mit* $h \parallel g$ *und* $A \in h$*.*

und das ***starke Parallelenaxiom***

(P) *Ist* $A \in \mathbf{P}$ *ein Punkt und* $g \in \mathbf{G}$ *eine Gerade, dann gibt es genau eine Gerade* $h \in \mathbf{G}$ *mit* $h \parallel g$ *und* $A \in h$*.*

In beiden Fällen bezeichnen wir die eindeutige Parallele zu g *durch* A *als* $p_g A$*.*

Definition 2.12. *Eine Inzidenzebene* $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$*, die das starke Parallelenaxiom erfüllt, heißt eine* ***affine Ebene****. Für „Sei* $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ *eine affine Ebene." schreiben wir künftig auch kurz „***(aff. Ebene)***".*

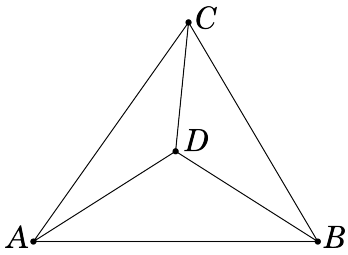
Beispiel 2.13. (a) *Die dreipunktige Inzidenzebene aus Beispiel 2.3 erfüllt* (P) *nicht, da in ihr keine zwei Geraden zueinander parallel sind. Jede affine Ebene hat also mindestens vier Punkte.*

(b) *Es gibt eine vierelementige affine Ebene, nämlich das Paar*

$$(\mathbf{P}, \mathbf{G}) = \big(\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}\big),$$

denn: Die Inzidenzaxiome sind schnell überprüft. Zum Beweis von (P) *betrachten wir ein* $P \in \mathbf{P}$ *und ein* $g \in \mathbf{G}$*. Im Fall* $P \in g$ *ist nach Definition* g *selbst die eindeutig bestimmte Parallele. Im Fall* $P \notin g$ *benötigen wir noch einen Punkt aus* $\mathbf{P} \smallsetminus (g \cup \{P\})$ *auf der Parallele, da diese nach* (I_2)

zwei verschiedene Punkte außerhalb von g enthalten muss. Offensichtlich ist in diesem Fall also $\mathbf{P} \setminus g$ die eindeutig bestimmte Parallele. #



(c) *Affine Ebenen im Sinne von Abschnitt 1.1 sind affine Ebenen im Sinne von Definition 2.12,*

denn: Nach Satz 2.7 genügt es, das starke Parallelenaxiom (P) nachzuweisen. Seien dazu X eine affine Ebene im Sinne von Abschnitt 1.1, $P \in \mathbf{P}_X = X$ und $g \in \mathbf{G}_X$. Die Existenz einer zu g parallelen Geraden durch P haben wir bereits im Kontext von Parallelprojektionen durch unsere Vorüberlegungen zu Proposition 1.26 eingesehen: In der dortigen Notation ist

$$W(P) = \{A \in X : t_{PA} \in T(g)\}$$

eine zu g parallele Gerade durch P. Ist h eine weitere Parallele zu g durch P, so gilt

$$h = \{\tau_v(P) : v \in T(h)\} = \{\tau_v(P) : v \in T(g)\} = W(P)$$

nach Übungsaufgabe 1.1. #

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

Eine Menge von Axiomen heißt ***unabhängig***, wenn sich keines davon aus den anderen herleiten lässt. In unserer Situation gilt

- Die Axiome (I_1), (I_2), (I_3) und (p) sind unabhängig voneinander.
- Die Axiome (I_1), (I_2), (I_3) und (P) sind nicht unabhängig voneinander. Genauer folgt aus (I_1), (I_3) und (P) bereits (I_2).

Ein Beweis hierfür findet sich im verlinkten Zusatzmaterial. Natürlich ist die Überprüfung der Unabhängigkeit nach jedem Hinzufügen weiterer Axiome wieder interessant. Da dabei allerdings der Aufwand explodiert, werden wir diese Fragestellung nicht weiter verfolgen.

Proposition 2.14 (aff. Ebene). *Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf* $\mathbf{G}$.

Beweis. Da aus $g = h$ insbesondere $g \parallel h$ folgt, ist Parallelität reflexiv.

Parallelität ist zudem auch symmetrisch, denn für beliebige $g, h \in \mathbf{G}$ gilt

$$g \parallel h \iff (g = h \text{ oder } g \cap h = \emptyset) \iff (h = g \text{ oder } h \cap g = \emptyset) \iff h \parallel g.$$

Um zu zeigen, dass Parallelität auch transitiv ist, betrachten wir drei Geraden $f, g, h \in \mathbf{G}$ mit $f \parallel g$ und $g \parallel h$. Zu zeigen ist $f \parallel h$. Da wir sonst schon fertig sind, können wir dabei ohne Einschränkung annehmen, es gebe einen Punkt $A \in f \cap h$. Dann liegt A auf den zwei zu g parallelen Geraden f und h. Wegen der Eindeutigkeitsaussage im starken Parallelenaxiom (P) stimmen daher f und h überein; insbesondere gilt wie verlangt $f \parallel h$. □

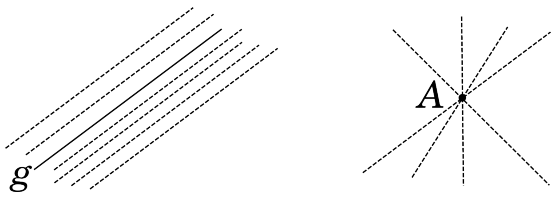
Definition 2.15 (aff. Ebene). *Für eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ heißt die Äquivalenzklasse*

$$[g] := \{h \in \mathbf{G} : h \parallel g\}$$

*das **Parallelenbüschel** zu g;*[2] *insbesondere ist so die Menge $\mathbf{G}$ eine disjunkte Vereinigung von Parallelenbüscheln. Für einen Punkt $A \in \mathbf{P}$ heißt die Menge*

$$A^* := \{h \in \mathbf{G} : A \in h\}$$

*das **Geradenbüschel** durch A.*



Definition 2.16. *Ein Isomorphismus im Sinne von Definition 2.9 zwischen zwei affinen Ebenen heißt ein **affiner Isomorphismus**. Ein Automorphismus einer affinen Ebene heißt ein **affiner Automorphismus**. Die Menge der affinen Automorphismen einer gegebenen affinen Ebene $\mathbb{A}$ wird mit $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ bezeichnet.*

Beispiel 2.17. *$\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$ ist eine affine Ebene mit den vier Punkten $\binom{\bar{0}}{\bar{0}}, \binom{\bar{1}}{\bar{0}}, \binom{\bar{0}}{\bar{1}}, \binom{\bar{1}}{\bar{1}}$ und ist mit einer beliebigen bijektiven Zuordnung von Punkten zur affinen Ebene aus Beispiel 2.13 (b) affin isomorph.*

2.3 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1 (proj. Raum). *Sei $\dim(V) = 3$ und bezeichne $\mathbf{G}_{\mathbb{P}(V)}$ die Menge der projektiven Geraden in $\mathbb{P}(V)$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{P}(V), \mathbf{G}_{\mathbb{P}(V)})$ eine Inzidenzebene ist und untersuchen Sie dort die Gültigkeit der Parallelenaxiome (p) und (P).*

Aufgabe 2.2 (I). *Sei $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$ eine Inzidenzebene und $\varphi\colon \mathbf{P} \to \tilde{\mathbf{P}}$ ein Isomorphismus von $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ nach $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$. Zeigen Sie, dass dann auch φ^{-1} ein Isomorphismus von Inzidenzebenen ist.*

Aufgabe 2.3. *Zeigen Sie, dass die beiden Inzidenzebenen in Beispiel 2.13 auch das schwache Parallelenaxiom erfüllen. Geben Sie eine Inzidenzebene mit fünf Punkten an, die das Axiom (p) nicht erfüllt.*

[2] vgl. auch Satz 1.93

Aufgabe 2.4 (aff. Ebene). *Sei $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine affine Ebene. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

(a) *Seien $g, h \in \mathbf{G}$ mit $g \nparallel h$. Dann ist die Abbildung*

$$\varphi\colon \begin{cases} [h] & \to g, \\ f & \mapsto f \wedge g \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv.

(b) *Seien $g, h \in \mathbf{G}$ mit $g \neq h$. Dann gibt es eine Gerade $f \in \mathbf{G}$ mit $f \nparallel g$ und $f \nparallel h$.*

(c) *Für $g, h \in \mathbf{G}$ gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi\colon g \to h$; g und h sind also als Mengen gleichmächtig.*

Hinweis: *Benutzen Sie (a) und (b).*

Aufgabe 2.5 (aff. Ebene). *Sei $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine affine Ebene. Nach Aufgabe 2.4 sind alle Geraden in $\mathbf{G}$ gleichmächtig. Diese Mächtigkeit heißt die **Ordnung** der affinen Ebene $\mathbb{A}$. Im Folgenden sei $\mathbb{A}$ eine affine Ebene von endlicher Ordnung n. Nach (I_2) gilt $n \geq 2$. Zeigen Sie:*

(a) *Jedes Geradenbüschel besteht aus $n+1$ Geraden, durch jeden Punkt gehen also $n+1$ Geraden.*

(b) *Es gibt $n+1$ Parallelenbüschel.*

(c) *Jedes Parallelenbüschel besteht aus n Geraden, zu jeder Geraden gibt es also n Parallelen.*

(d) *Es gilt $|\mathbf{G}| = n(n+1)$.*

(e) *Es gilt $|\mathbf{P}| = n^2$.*

Aufgabe 2.6 (aff. Ebene). *Seien $\tilde{\mathbb{A}} = (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$ eine affine Ebene und $\varphi\colon \mathbf{P} \to \tilde{\mathbf{P}}$ ein affiner Isomorphismus. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

(a) *Für alle $A \neq B \in \mathbf{P}$ gilt $\varphi(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$.*

(b) *Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ sind genau dann kollinear, wenn $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \in \tilde{\mathbf{P}}$ kollinear sind.*

(c) $\varphi(\mathbf{G}) := \{\varphi(g) \mid g \in \mathbf{G}\} = \tilde{\mathbf{G}}$.

(d) *Für parallele Geraden $g \parallel h \in \mathbf{G}$ gilt $\varphi(g) \parallel \varphi(h)$.*

KAPITEL 3

Hilbertebenen

In diesem Kapitel führen wir zunächst ausgehend vom Begriff der Inzidenzebene aus Kapitel 2 mit den Anordnungsaxiomen und den Kongruenzaxiomen für Strecken und Winkel weitere Klassen von Axiomen ein. Auf diese Weise erhalten wir in Abschnitt 3.3 das Konzept der Hilbertebene. In solchen können wir eine Reihe klassischer geometrischer Sätze synthetisch beweisen. Es stellt sich jedoch heraus, dass manche Aussagen – darunter auch einige aus der Schulmathematik bekannte – im Kontext von Hilbertebenen nicht allgemein richtig sind. Wir werden diesen Missstand in Kapitel 4 durch Hinzunahme zweier weiterer Axiome beheben.

3.1 Die Anordnungsaxiome

In diesem Abschnitt führen wir in einer Inzidenzebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ Axiome ein, vermöge derer wir angeben können, wie gegebene kollineare Punkte auf ihrer gemeinsamen Verbindungsgeraden angeordnet sind. Hierfür benötigen wir eine Reihe von Sprechweisen:

- Seien $M_\star \subseteq \mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \mathbf{P}$ eine fest gewählte Teilmenge und $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte. Liegt das (angeordnete) Tripel (A, B, C) in $M_\star$, so sagen wir, der Punkt B ***liegt bezüglich der Anordnung*** $\star$ ***zwischen*** A ***und*** C, und schreiben $A \star B \star C$.

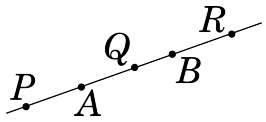
- Seien $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade und $A, B \in \mathbf{P} \smallsetminus g$ zwei Punkte. Falls es einen Punkt auf g gibt, der zwischen A und B liegt, so sagen wir, A ***und*** B ***liegen auf verschiedenen Seiten von*** g, und schreiben $A \mid_g B$. Andernfalls sagen wir, A ***und*** B ***liegen auf derselben Seite von*** g, und schreiben $AB|_g$.

Dieses Konzept einer Anordnung ist noch sehr allgemein gefasst; entgegen unserer naiven geometrischen Vorstellung ist es etwa möglich, dass von drei Punkten $A, B, C \in \mathbf{P}$ jeder zwischen den jeweils anderen beiden liegt. Wir fordern daher präzisierend die folgenden Axiome:

Definition 3.1 (I). *Das Tripel* $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$ *erfüllt die* ***Anordnungsaxiome****, falls gilt:*

(A_1) *Gilt $A, B, C \in \mathbf{P}$ mit $A \star B \star C$, so sind A, B, C kollinear, paarweise verschieden und es gilt $C \star B \star A$.*

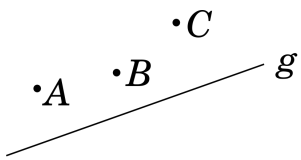
(A_2) *Für je zwei Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}$ gibt es $P, Q, R \in \overleftrightarrow{AB}$ mit $P \star A \star B$, $A \star Q \star B$ und $A \star B \star R$.*

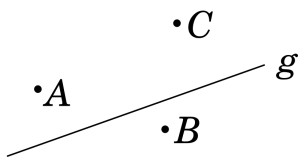


(A_3) *Sind $A, B, C \in \mathbf{P}$ paarweise verschieden und kollinear, so gibt es unter diesen drei Punkten genau einen, der zwischen den beiden anderen liegt.*

(A_4) *Für jede Gerade $g \in \mathbf{G}$ und alle Punkte $A, B, C \in \mathbf{P} \setminus g$ gilt*

- *Aus $AB|_g$ und $BC|_g$ folgt $AC|_g$.*
- *Aus $A\ |_g\ B$ und $B\ |_g\ C$ folgt $AC|_g$.*





*Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene, die zusammen mit der Anordnung $\star$ die Anordnungsaxiome erfüllt." schreiben wir künftig auch kurz „**(I + A)**".*

Die Anordnungsaxiome (A_1) und (A_3) sorgen dafür, dass wir uns Geraden in einer Inzidenzebene tatsächlich so vorstellen können, wie wir das gerne täten. Axiom (A_2) ist eine Reichhaltigkeitsaussage, die erzwingt, dass es in jeder Inzidenzebene mit Anordnungsaxiomen unendlich viele Punkte gibt, vgl. Übungsaufgabe 3.2. Axiom (A_4) hat zur Folge, dass wir in der folgenden Proposition 3.2 das Konzept der Seiten einer Geraden sinnvoll einführen können:

Proposition 3.2 (I + A). *Für eine beliebige Gerade $g \in \mathbf{G}$ ist $__|_g$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{P} \setminus g$. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen $S_1(g)$ und $S_2(g)$, die **Seiten** von g. Insbesondere gilt*

$$\mathbf{P} = g \mathbin{\dot\cup} S_1(g) \mathbin{\dot\cup} S_2(g).$$

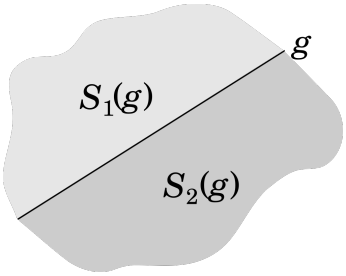


Abbildung 3.1: Nach (A_1) und (A_4) hat g Seiten, nach (A_2) und (A_4) genau zwei Stück.

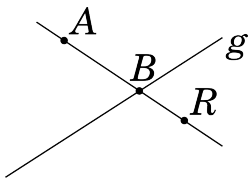
Beweis. Zum Beweis der Reflexivität von $__|_g$ betrachten wir $A \in \mathbf{P} \setminus g$. Da für einen beliebigen Punkt $P \in g$ die drei Punkte A, P, A nicht paarweise verschieden sind, folgt mit (A_1), dass es kein $P \in g$ mit $A \star P \star A$ gibt. Nach Definition gilt also $AA|_g$.

Um die Symmetrie von $__|_g$ zu zeigen, betrachten wir zwei Punkte $A, B \in \mathbf{P} \setminus g$ mit $AB|_g$. Es gibt kein $P \in g$ mit $A \star P \star B$ und nach (A_1) also auch kein $P \in g$ mit $B \star P \star A$. Es folgt $BA|_g$.

Die Transitivität von $__|_g$ ist schließlich gerade die erste Aussage von (A_4).

Insgesamt wissen wir jetzt also, dass $__|_g$ eine Äquivalenzrelation ist. Es gibt bezüglich $__|_g$ genau zwei Äquivalenzklassen,

denn: Nach Proposition 2.6 bzw. (I_2) gibt es Punkte $A \in \mathbf{P} \setminus g$ bzw. $B \in g$. Nach (A_2) gibt es ein $R \in \overleftrightarrow{AB}$ mit $A \star B \star R$, so dass $A \mid_g R$ gilt und es mindestens zwei Seiten von g gibt.



Sei nun $P \in \mathbf{P} \setminus g$ von A und von R verschieden. Gilt $P \mid_g A$, so folgt mit der zweiten Aussage von (A_4) sofort $PR|_g$. Ein beliebiger Punkt P liegt also stets auf derselben Seite von g wie A oder wie R, so dass es nicht mehr als zwei Seiten von g gibt. #

□

Beispiel 3.3. *Wir führen nun eine Anordnung $\star$ in der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ein, für welche dort die Anordnungsaxiome erfüllt sind. Wir setzen*

$$\mathbf{G}_{\mathbb{R}} := \{g \text{ affine Gerade in } \mathbb{A}^2(\mathbb{R})\} = \{g_{P,v} := P + \langle v \rangle_K : P, v \in K^2, v \neq 0\}.$$

Wie wir in Proposition 1.39 gesehen haben, ist in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ die Verbindungsgerade $\overleftrightarrow{AC}$ zweier voneinander verschiedener Punkte $A, C \in \mathbb{R}^2$ durch

$$\overleftrightarrow{AC} = \{\lambda A + (1-\lambda)\, C : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Davon motiviert definieren wir für je drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$

$$A \star B \star C \quad :\Longleftrightarrow \quad A \neq C \text{ und es gibt ein } \lambda \in (0,1) \text{ mit } B = \lambda A + (1-\lambda)\, C. \tag{3.1}$$

*Wir geben nun eine Beschreibung der Seiten einer gegebenen Geraden $g_{P,v}$ mit $P, v \in \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0$: Bezeichnet $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, so nennen wir jeden Vektor $n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\langle v \mid n \rangle = 0$ einen **Normalenvektor** von $g_{P,v}$. Da der Translationsvektorraum einer Geraden eindimensional ist, ist dieser Begriff wohldefiniert. Wie man schnell nachrechnet, gilt*

$$\{n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \langle n \mid v \rangle = 0\} = \langle v^\perp \rangle_{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \quad \text{mit } v^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v.$$

Mit $(v^\perp)^\perp = -v$ *folgt*

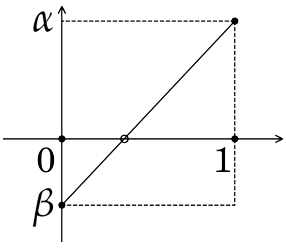
$$A \in g_{P,v} \quad \Longleftrightarrow \quad A - P \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle A - P \mid v^\perp \rangle = 0,$$

so dass wir die Gerade $g_{P,v}$ *in ihrer* ***Hesse'schen Normalform***

$$g_{P,v} = \{A \in \mathbb{R}^2 : \langle A - P \mid v^\perp \rangle = 0\} = \{A \in \mathbb{R}^2 : \langle A \mid v^\perp \rangle = \langle P \mid v^\perp \rangle\} \tag{3.2}$$

schreiben können. Für $A \neq B$ *in* $\mathbb{R}^2 \setminus g_{P,v}$ *gilt nun*

$$\begin{aligned}
A \mid_{g_{P,v}} B &\Longleftrightarrow \text{Es gibt ein } Q \in g_{P,v} \text{ mit } A \star Q \star B. \\
&\overset{(3.1)}{\Longleftrightarrow} \text{Es gibt ein } \lambda \in (0,1) \text{ mit } \lambda A + (1-\lambda) B \in g_{P,v}. \\
&\overset{(3.2)}{\Longleftrightarrow} \text{Es gibt ein } \lambda \in (0,1) \text{ mit } 0 = \langle (\lambda A + (1-\lambda) B) - P \mid v^\perp \rangle. \\
&\Longleftrightarrow \text{Es gibt ein } \lambda \in (0,1) \text{ mit } 0 = \lambda \cdot \underbrace{\langle A - P \mid v^\perp \rangle}_{=:\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} + (1-\lambda) \cdot \underbrace{\langle B - P \mid v^\perp \rangle}_{=:\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \\
&\Longleftrightarrow \text{Es gibt eine Nullstelle } \lambda \in (0,1) \text{ der Abbildung } \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \alpha x + \beta(1-x). \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \alpha \text{ und } \beta \text{ haben verschiedene Vorzeichen.}
\end{aligned}$$



Die zwei Seiten von $g_{P,v}$ *sind somit*

$$\{A \in \mathbb{R}^2 : \langle A - P \mid v^\perp \rangle > 0\} \quad \text{und} \quad \{A \in \mathbb{R}^2 : \langle A - P \mid v^\perp \rangle < 0\}.$$

Wir nutzen nun diese Beschreibung, um zu zeigen, dass $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ *zusammen mit der Anordnung* $\star$ *die Anordnungsaxiome erfüllt; ein Beweis dafür findet sich im verlinkten Zusatzmaterial.*

In Beweisen kommt es oft vor, dass drei paarweise verschiedene, kollineare Punkte gegeben sind und man statt mit den Seiten einer noch zu konstruierenden Geraden lieber mit den Seiten des mittleren Punktes argumentieren möchte. Dieses Vorgehen legitimieren wir nun:

Definition 3.4 (I + A). *Seien* $A, B, P \in \mathbf{P}$ *paarweise verschieden und kollinear. Im Fall* $A \star P \star B$ *sagen wir,* A ***und*** B ***liegen auf verschiedenen Seiten von*** P*, und schreiben* $A \mid_P B$*. Andernfalls sagen wir,* A ***und*** B ***liegen auf derselben Seite von*** P*, und schreiben* $AB|_P$*.*

Proposition 3.5 (I + A). *Für drei paarweise verschiedene und kollineare Punkte* $A, B, P \in \mathbf{P}$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *A und B liegen auf verschiedenen Seiten von P.*

(ii) *A und B liegen auf verschiedenen Seiten einer von $\overleftrightarrow{AB}$ verschiedenen Geraden durch P.*

(iii) *A und B liegen auf verschiedenen Seiten aller von $\overleftrightarrow{AB}$ verschiedenen Geraden durch P.*

Beweis. Aus (iii) folgt (ii), da es nach (I_3) und (I_1) eine von $\overleftrightarrow{AB}$ verschiedene Gerade durch P gibt.

Gelte nun (ii) und sei $h \neq \overleftrightarrow{AB}$ eine Gerade durch P mit $A \mid_h B$. Dann gibt es einen Punkt $Q \in h$ mit $A \star Q \star B$. Nach Konstruktion ist $Q = h \wedge \overleftrightarrow{AB} = P$. Es folgt $A \mid_P B$, also (i).

Gelte schließlich (i), also $A \star P \star B$. Sei h eine beliebige von $\overleftrightarrow{AB}$ verschiedene Gerade durch P. Wegen $P \in h$ gilt dann $A \mid_h B$. Wegen der freien Wahl von h haben wir somit (iii) gezeigt. □

Korollar 3.6 (I + A). *Sei $g \in \mathbf{G}$ eine beliebige Gerade. Für einen beliebigen Punkt $P \in g$ ist dann $__\mid_P$ eine Äquivalenzrelation auf $g \setminus \{P\}$. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen $S_1(P)$ und $S_2(P)$, die **Seiten** von P auf g. Insbesondere gilt*

$$g = \{P\} \mathbin{\dot\cup} S_1(P) \mathbin{\dot\cup} S_2(P).$$

Beweis. Klar mit den Propositionen 3.2 und 3.5. □

Definition 3.7 (I + A). *Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Gilt $A_i \star A_j \star A_k$ für alle $1 \leq i < j < k \leq n$, so schreiben wir einfacher $A_1 \star \ldots \star A_n$.*

Proposition 3.8 (I + A). (a) *Für beliebige vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbf{P}$ gilt*

$$A \star B \star C \text{ und } A \star C \star D \quad \Longleftrightarrow \quad B \star C \star D \text{ und } A \star B \star D.$$

(b) *Für beliebige vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbf{P}$ gilt*

$$A \star B \star C \text{ und } B \star C \star D \quad \Longrightarrow \quad A \star B \star D \text{ und } A \star C \star D.$$

(c) *Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahlund seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{P}$. Dann gilt*

$$A_i \star A_{i+1} \star A_{i+2} \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n-2\} \quad \Longleftrightarrow \quad A_1 \star \ldots \star A_n.$$

Beweis. Die Beweise der drei Teilbehauptungen sind einander sehr ähnlich. Wir beweisen hier nur Aussage (b) und verweisen für den Rest auf Übungsaufgabe 3.1

Es gelten $A \star B \star C$ und $B \star C \star D$. Nach (A_1) sind dann die Punkte A, B, C und B, C, D jeweils kollinear, so dass dies auch auf die vier Punkte A, B, C, D zutrifft. Außerdem sind wieder nach (A_1) die Punkte A, B, C und B, C, D jeweils paarweise verschieden. Da aus $A = D$ sofort $A \star B \star C$ und $B \star C \star A$ folgte, was nach (A_3) nicht sein kann, sind die vier Punkte A, B, C, D auch paarweise verschieden.

Wegen unserer Voraussetzungen $A \star B \star C$ und $B \star C \star D$ gelten $A \mid_B C$ und $CD|_B$. Mit Korollar 3.6 folgt $A \mid_B D$, also $A \star B \star D$. Wieder wegen unserer Voraussetzungen $A \star B \star C$ und $B \star C \star D$ gelten $AB|_C$ und $B \mid_C D$. Mit Korollar 3.6 folgt $A \mid_C D$, also $A \star C \star D$. □

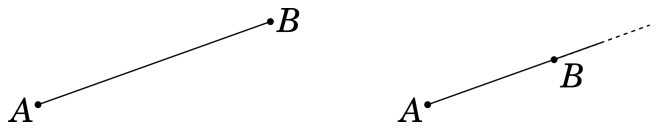
Bemerkung 3.9. *Eine äquivalente Formulierung des zweiten Anordnungsaxioms* (A_2) *ist*

(A_2') *Für je zwei Punkte* $A \neq B \in \mathbf{P}$ *gibt es Punkte* $P, Q, R \in \overleftrightarrow{AB}$ *mit* $P \star A \star Q \star B \star R$,

denn: (A_2') *folgt vermöge Teil (a) von Proposition 3.8 aus* (A_2). *Die andere Richtung ist trivial.* #

Definition 3.10 (I + A). *Seien* $A \neq B \in \mathbf{P}$ *zwei verschiedene Punkte. Dann heißen die Mengen*

$\overline{AB} := \{P \in \overleftrightarrow{AB} : A \star P \star B\} \cup \{A, B\}$ *die* ***Strecke*** $\overline{AB}$ *mit den* ***Endpunkten*** A, B,
$\overrightarrow{AB} := \{P \in \overleftrightarrow{AB} : A \star P \star B \ \vee \ A \star B \star P\} \cup \{A, B\}$ *der* ***Strahl*** $\overrightarrow{AB}$ *mit dem* ***Ausgangspunkt*** A.



Zwei Strahlen $\overrightarrow{AB}$ *und* $\overrightarrow{AC}$ *heißen* ***entgegengesetzt****, falls* A *zwischen* B *und* C *liegt. Wird im Folgenden eine der Notationen* $\overline{AB}$ *oder* $\overrightarrow{AB}$ *verwendet, ohne dass wir ausdrücklich* $A \neq B$ *voraussetzen, so ist dies an dieser Stelle als implizit angenommen zu verstehen.*

Proposition 3.11 (I + A). *Für je zwei verschiedene Punkte* $A, B \in \mathbf{P}$ *gilt:*

$$\overline{AB} = \overline{BA} \quad \textit{und} \quad \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus (A_1). Im Beweis der zweiten Aussage folgt die Inklusion „$\supseteq$“ unmittelbar aus Definition 3.10. Sei für die andere Inklusion P ein beliebiger Punkt aus $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung $P \notin \{A, B\}$ annehmen. Mit $P \in \overrightarrow{AB}$ gilt

$$A \star P \star B \quad \text{oder} \quad A \star B \star P,$$

so dass A, B, P kollinear und paarweise verschieden sind. Mit $P \in \overrightarrow{BA}$ gilt aber auch

$$B \star P \star A \quad \text{oder} \quad B \star A \star P.$$

Falls $A \star P \star B$ nicht gilt, kann nach (A_1) auch $B \star P \star A$ nicht gelten. Es folgt, dass dann sowohl $A \star B \star P$ als auch $B \star A \star P$ gelten müssten, was ein Widerspruch zu (A_3) wäre und deshalb nicht sein kann. Es folgt also $A \star P \star B$, also $P \in \overline{AB}$, was zu zeigen war. □

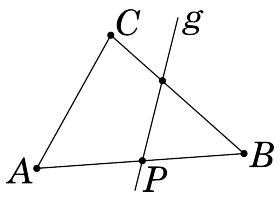
Proposition 3.12 (I + A). *Für drei Punkte* $A, B, C \in \mathbf{P}$ *mit* $B \star A \star C$ *gilt:*

$$\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \quad \textit{und} \quad \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}.$$

Beweis. Zum Beweis der ersten Behauptung sei $P \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \overrightarrow{AB}$. Nach Definition 3.10 und (A_3) gilt dann $P \mid_A B$. Wir können ohne Einschränkung $P \neq C$ annehmen, da P sonst definitionsgemäß schon auf $\overrightarrow{AC}$ läge. Es sind dann A, P, C drei kollineare, paarweise verschiedene Punkte. Wegen $P \mid_A B$ und $B \mid_A C$ gilt $PC|_A$. Es folgt $P \in \overrightarrow{AC}$.

Zum Beweis der zweiten Behauptung betrachten wir einen Punkt $P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC}$. Dieser ist nach Definition entweder gleich A oder es gilt sowohl $PB|_A$ als auch $PC|_A$. Da letzteres aufgrund der Voraussetzung $B \star A \star C$ nicht möglich ist, folgt die Behauptung. □

Satz 3.13 (Satz von Pasch, **I + A**). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage und sei $g \in \mathbf{G}$ mit $g \cap \overline{AB} = \{P\}$ für ein $P \in \mathbf{P}$ mit $A \star P \star B$. Dann schneidet g eine der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Im Fall $C \notin g$ schneidet g genau eine der beiden Strecken.*



Beweis. Da für $C \in g$ nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung $C \notin g$ annehmen. Wegen $A \star P \star B$ gilt $A \mid_g B$ und also entweder $CA|_g$ oder $CB|_g$. Da sich diese beiden Situationen durch eine Umbenennung von A in B und umgekehrt ineinander überführen lassen, können wir ohne Einschränkung annehmen, es gelte $CA|_g$. Dann folgt $B \mid_g C$, so dass es also einen Punkt $Q \in g$ mit $B \star Q \star C$ gibt. Dieser Punkt Q liegt nach Konstruktion im Durchschnitt $g \cap \overline{BC}$, der somit nicht leer sein kann. Andererseits gilt $AC|_g$, so dass es keinen Punkt $R \in g$ mit $A \star R \star C$ gibt, der Durchschnitt $g \cap \overline{AC}$ ist also leer. □

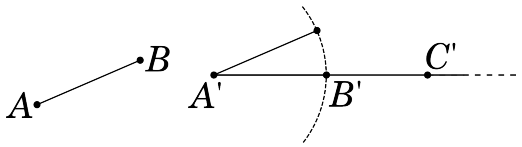
3.2 Die Kongruenzaxiome für Strecken

Wir haben im letzten Abschnitt den Begriff der Strecke eingeführt, haben bislang aber noch keine Möglichkeit, solche miteinander zu vergleichen. Wir führen daher den Begriff der ***Kongruenz von Strecken*** als Relation $\cong$ auf der Menge $\mathbf{S}$ aller Strecken in $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$ ein:

Definition 3.14 (I + A). *Das 4-Tupel $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$ erfüllt die **Kongruenzaxiome für Strecken**, wenn gilt:*

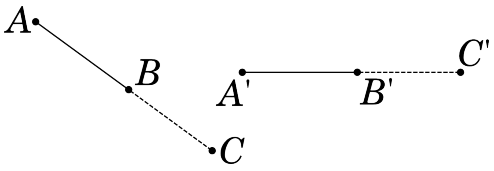
(K_1) *$\cong$ ist auf $\mathbf{S}$ eine Äquivalenzrelation.*

(K_2) *Sind $A \neq B \in \mathbf{P}$ und $A' \neq C' \in \mathbf{P}$, so gibt es genau ein $B' \in \overrightarrow{A'C'}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.*



Man sagt, eine beliebige Strecke lässt sich auf einen beliebigen Strahl ***abtragen****.*

(K_3) *Sind $A, B, C, A', B', C' \in \mathbf{P}$ mit $A \star B \star C$, $A' \star B' \star C'$ und $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, so gilt auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.*



*Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene, die zusammen mit der Anordnung $\star$ die Anordnungsaxiome und zusammen mit der Relation $\cong$ auf $\mathbf{S}$ die Kongruenzaxiome für Strecken erfüllt." schreiben wir künftig auch kurz „(**I + A + K**)".*

Beispiel 3.15. *In der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ definieren wir unseren Kongruenzbegriff für Strecken wie folgt: Für je vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ mit $A \neq B$ und $C \neq D$ setzen wir*

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad :\Longleftrightarrow \quad d(A, B) = d(C, D),$$

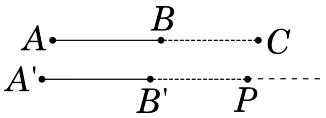
wobei für je zwei Punkte $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ die Zahl

$$d(A, B) = \|B - A\| = \sqrt{\langle B - A \mid B - A \rangle} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad \in \mathbb{R}$$

den aus der Linearen Algebra bekannten ***euklidischen Abstand*** *zwischen A und B bezeichne. Die affine Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zusammen mit diesem Kongruenzbegriff erfüllt die Kongruenzaxiome für Strecken; ein Beweis hierzu findet sich im verlinkten Zusatzmaterial.*

Proposition 3.16 (I + A + K). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte mit $A \star B \star C$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ drei Punkte mit $C' \in \overrightarrow{A'B'}$. Gilt dann $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, so folgt $A' \star B' \star C'$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.*

Beweis. Nach Übungsaufgabe 3.3 gibt es einen eindeutig bestimmten Strahl mit Ausgangspunkt B', der dem Strahl $\overrightarrow{B'A'}$ entgegengesetzt ist. Sei P der nach (K_2) existente eindeutige Punkt auf diesem Strahl mit $\overline{B'P} \cong \overline{BC}$. Daraus und aus $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ folgern wir mit (K_3) die Kongruenz $\overline{A'P} \cong \overline{AC}$.



Nun liegen aber sowohl P als auch C' auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$, denn für C' ist das vorausgesetzt, und nach Konstruktion von P gilt $A' \star B' \star P$. Da nach Voraussetzung $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ gilt, folgt mit (K_1) unmittelbar $\overline{A'P} \cong \overline{A'C'}$ und mit der Eindeutigkeitsaussage in (K_2) schon $P = C'$. Das impliziert $A' \star B' \star C'$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, also die Behauptung. $\square$

Definition 3.17 (I + A + K). *Seien $A, B, C, D \in \mathbf{P}$ vier Punkte mit $A \neq B$ und $C \neq D$. Gibt es ein $P \in \mathbf{P}$ mit $C \star P \star D$ und $\overline{AB} \cong \overline{CP}$, so sagen wir, die Strecke $\overline{AB}$ sei **kleiner** als die Strecke $\overline{CD}$, bzw. $\overline{CD}$ **größer** als $\overline{AB}$, und schreiben $\overline{AB} < \overline{CD}$ bzw. $\overline{CD} > \overline{AB}$.*

Proposition 3.18 (I + A + K). (a) *Seien $A, B, C, D, A', B', C', D'$ Punkte in $\mathbf{P}$ mit $A \neq B$, $C \neq D$, $A' \neq B'$, $C' \neq D'$ und $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$. Dann gilt*

$$\overline{AB} < \overline{CD} \quad \Longrightarrow \quad \overline{A'B'} < \overline{C'D'}.$$

(b) *Sind A, B, C, D, E, F Punkte in $\mathbf{P}$ mit $A \neq B$, $C \neq D$, $E \neq F$, dann gilt*

$$\overline{AB} < \overline{CD} \quad \textit{und} \quad \overline{CD} < \overline{EF} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AB} < \overline{EF}.$$

(c) *Für beliebige A, B, C, D in $\mathbf{P}$ mit $A \neq B$ und $C \neq D$ gilt genau eine der folgenden Aussagen*

$$\overline{AB} < \overline{CD}, \quad \overline{AB} \cong \overline{CD}, \quad \overline{AB} > \overline{CD}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Sei dafür $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, und gelte $\overline{AB} < \overline{CD}$. Dann existiert ein $P \in \mathbf{P}$ mit $C \star P \star D$ und $\overline{CP} \cong \overline{AB}$. Nach (K_2) existiert auf $\overrightarrow{C'D'}$ ein Punkt P' mit $\overline{C'P'} \cong \overline{CP} \cong \overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Aus Proposition 3.16 erhalten wir $C' \star P' \star D'$ und damit $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$.

Aufgrund von (a) und (K_2) können wir zum Nachweis von (b) von $\overline{AB} < \overline{AC}$ und $\overline{AC} < \overline{AD}$ mit B, C in $\overrightarrow{AD}$ ausgehen. Insbesondere existiert ein $C' \in \mathbf{P}$ mit $A \star C' \star D$ und $\overline{AC'} \cong \overline{AC}$. Aufgrund von (K_2) ist $C' = C$, es gilt also $A \star C \star D$. Analog ergibt sich $A \star B \star C$. Nach Proposition 3.8 gilt $A \star B \star D$ und somit $\overline{AB} < \overline{AD}$.

Zum Nachweis von (c) nehmen wir nach (a) und (K_2) ohne Einschränkung $\overline{AB} \ncong \overline{AC}$ mit $C \in \overrightarrow{AB}$ an. Wir erhalten entweder $A \star C \star B$ oder $A \star B \star C$, was entweder $\overline{AC} < \overline{AB}$ oder $\overline{AB} < \overline{AC}$ zur Folge hat. □

3.3 Die Kongruenzaxiome für Winkel

Definition 3.19 (I + A). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann heißt*

$$\angle BAC := \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$$

*der **Winkel** $\angle BAC$, A sein **Scheitel** und $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ seine **Schenkel**.*

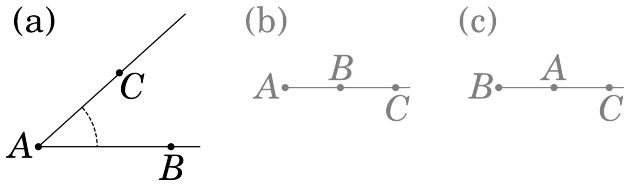


Abbildung 3.2: Wir werden Winkel in Skizzen ab sofort mit einem Bogen wie in (a) darstellen. Dabei ist anzumerken, dass es für jeden Winkel zwei mögliche Wahlen eines solchen Bogens gibt, von denen wir in der Skizze jeweils einen auswählen müssen. Gemeint ist unabhängig von dieser Wahl stets der Winkel selbst. Man bemerke außerdem, dass die obige Definition den Nullwinkel (b) und den geraden Winkel (c) ausschließt.

Proposition 3.20 (I + A). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

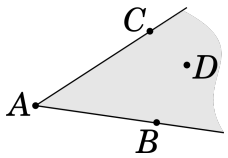
(i) $\angle BAC = \angle B'A'C'$,

(ii) $A = A'$ *und entweder* $\left(B' \in \overrightarrow{AB} \text{ und } C' \in \overrightarrow{AC}\right)$ *oder* $\left(B' \in \overrightarrow{AC} \text{ und } C' \in \overrightarrow{AB}\right)$.

Insbesondere hat jeder Winkel einen eindeutig bestimmten Scheitel.

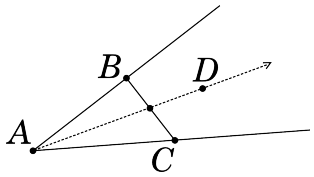
Beweis. Unmittelbar mit Definition 3.19 □

Definition 3.21 (I + A). *Seien $A, B, C, D \in \mathbf{P}$, so dass A, B, C in allgemeiner Lage sind und D nicht in der Vereinigung der Geraden $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{AC}$ liegt. Wir sagen, D* ***liegt im Inneren*** *von $\angle BAC$ oder der Strahl $\overrightarrow{AD}$* ***liegt zwischen*** *den Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, falls $DB|_{\overleftrightarrow{AC}}$ und $DC|_{\overleftrightarrow{AB}}$ gilt.*



Lemma 3.22 (I + A). (a) *Für $g \in \mathbf{G}$, $A \in g$, $B \notin g$ und $P \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ gilt $PB|_g$.*

(b) *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage und $D \in \mathbf{P}$ im Inneren von $\angle BAC$. Dann schneidet der Strahl $\overrightarrow{AD}$ die Strecke $\overline{BC}$, und der Schnittpunkt ist ungleich B, C.*



(c) *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage und $D \in \mathbf{P}$ ein weiterer Punkt, der nicht in der Vereinigung der Geraden $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{AC}$ liegt. Dann sind äquivalent:*

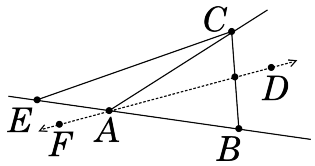
(i) *D liegt im Inneren von $\angle BAC$.*

(ii) *$DB|_{\overleftrightarrow{AC}}$ und $B\ |_{\overleftrightarrow{AD}}\ C$.*

(iii) *$DC|_{\overleftrightarrow{AB}}$ und $B\ |_{\overleftrightarrow{AD}}\ C$.*

Beweis. Zum Beweis von Behauptung (a) dürfen wir ohne Einschränkung $P \neq B$ annehmen. Läge P auf g, so wäre P der Schnittpunkt von g und $\overleftrightarrow{PB}$ und somit gleich A. Das hatten wir aber ausgeschlossen. Gälte $P\ |_g\ B$, so gäbe es einen Punkt auf g zwischen ihnen. Dieser wäre insbesondere der Schnittpunkt der Geraden g und $\overleftrightarrow{PB}$ und somit gleich A. Es folgte $P \star A \star B$ im Widerspruch zu $P \in \overrightarrow{AB}$ und (A_3). Es gilt also $PB|_g$.

Nun zeigen wir Behauptung (b). Nach (A_2) gibt es einen Punkt $E \in \overleftrightarrow{AB}$ mit $B \star A \star E$. Die Punkte B, C, E sind offenbar in allgemeiner Lage und wegen $D \notin \overleftrightarrow{AB}$ schneidet die Gerade $g := \overleftrightarrow{AD}$ die Strecke $\overline{BE}$ genau im Punkt A. Nach dem Satz von Pasch 3.13 schneidet also g eine der Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{EC}$. Nach Wahl von E gilt $E\ |_{\overleftrightarrow{AC}}\ B$. Mit (a) folgt, dass ganz $\overrightarrow{CE} \setminus \{C\}$ auf der nicht B enthaltenden Seite von $\overleftrightarrow{AC}$ liegt. Andererseits liegen nach Voraussetzung D und B auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AC}$, also wieder nach (a) auch B und ganz $\overrightarrow{AD} \setminus \{A\}$. Es folgt $\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{CE} = \emptyset$. Sei nun $\overrightarrow{AF}$ der zu $\overrightarrow{AD}$ entgegengesetzte Strahl. Nach Voraussetzung liegen D und C auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$, also wieder nach (a) auch C und ganz $\overrightarrow{AD} \setminus \{A\}$. Es folgt, dass ganz $\overrightarrow{AF} \setminus \{A\}$ auf der anderen Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ liegen muss. Aber $\overrightarrow{EC} \setminus \{E\}$ liegt gänzlich auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ wie C, also gilt auch $\overrightarrow{AF} \cap \overrightarrow{EC} = \emptyset$ und insgesamt, dass g die Strecke $\overline{BC}$ schneidet. Ganz ähnlich zeigt man $\overrightarrow{AF} \cap \overline{BC} = \emptyset$ und somit Behauptung (b).



Für Behauptung (c) langt es aus Symmetriegründen, die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen:

- Es gelte (i). Für (ii) genügt es dann $B\ |_{\overleftrightarrow{AD}}\ C$ zu zeigen. Aufgrund von (b) existiert der Schnittpunkt S von $\overrightarrow{AD}$ und $\overline{BC}$. Es gilt dann aus $B \star S \star C$ und somit $B\ |_{\overleftrightarrow{AD}}\ C$.
- Gelte umgekehrt (ii). Dann existiert ein $S \in \overleftrightarrow{AD}$ mit $B \star S \star C$. Deshalb gilt $SC|_{\overleftrightarrow{AB}}$ und $SB|_{\overleftrightarrow{AC}}$. Nach Voraussetzung gilt $DB|_{\overleftrightarrow{AC}}$. Wir erhalten $SD|_{\overleftrightarrow{AC}}$, insbesondere gilt nicht $S \star A \star D$. Somit liegt D auf dem Strahl $\overrightarrow{AS}$. Aus (a) ergibt sich $SD|_{\overleftrightarrow{AB}}$ und schließlich $DC|_{\overleftrightarrow{AB}}$.

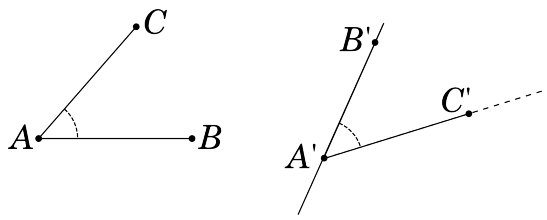
□

Wir führen nun den Begriff der ***Kongruenz von Winkeln*** als Relation $\simeq$ auf der Menge $\mathbf{W}$ aller Winkel in $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$ ein:

Definition 3.23 (I + A + K). *Das 5-Tupel $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ erfüllt die **Kongruenzaxiome für Winkel**, wenn gilt:*

(K_4) *$\simeq$ ist auf $\mathbf{W}$ eine Äquivalenzrelation,*

(K_5) *Sind $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage und $A' \neq B' \in \mathbf{P}$, dann gibt es für jede Seite S von $\overleftrightarrow{A'B'}$ genau einen Strahl $\overrightarrow{A'C'}$ mit $\overrightarrow{A'C'} \subseteq S \cup \{A'\}$ und $\angle B'A'C' \simeq \angle BAC$.*



*Man sagt, ein beliebiger Winkel lässt sich auf einen beliebigen Strahl **abtragen**.*

(K_6) *Sind $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage mit*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C',$$

so gilt

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \angle ABC \simeq \angle A'B'C' \quad \text{und} \quad \angle ACB \simeq \angle A'C'B'.$$

*In diesem Fall nennen wir das 5-Tupel $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ auch eine **Hilbertebene**. Wir werden, wenn wir im Folgenden eine Hilbertebene einführen und nichts anderes sagen, stets diese Notation annehmen. Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene." schreiben wir künftig auch kurz „**(H)**".*

Beispiel 3.24. *Wir definieren nun in der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zusätzlich zu der bereits eingeführten Anordnung $\star$ und dem bereits eingeführten Kongruenzbegriff $\cong$ für Strecken einen Kongruenzbegriff $\simeq$ für Winkel. Dafür halten wir zunächst fest, dass der Begriff des Winkels aus Definition 3.19 im Fall der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit dem Winkelbegriff aus Definition 1.57 übereinstimmt, so dass wir auf die in (1.15) eingeführte Winkelgröße zurückgreifen können. Wir definieren jetzt, dass je zwei Winkel $\angle ABC$ und $\angle A'B'C'$ in der affinen Standardebene genau dann kongruent sind, wenn sie die gleiche Winkelgröße haben:*

$$\angle ABC \simeq \angle A'B'C' \quad :\Longleftrightarrow \quad \measuredangle(A - B, C - B) = \measuredangle(A' - B', C' - B'). \tag{3.3}$$

Wir werden später zeigen, dass die affine Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zusammen mit dieser Kongruenz von Winkeln den Kongruenzaxiomen für Winkel genügt. Zusammen mit Satz 2.7 und den Beispielen 3.3 und 3.15 folgt daraus, dass $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ eine Hilbertebene ist.

Wir haben nun einen Begriff dafür, wann zwei Winkel „gleich groß" sind – wenn sie nämlich kongruent sind. Mit dem Begriff des „Dazwischenliegens" von Strahlen mit demselben Scheitel können wir auch angeben, wann ein Winkel „größer" bzw. „kleiner" als ein anderer ist:

Definition 3.25 (H). *Seien A, B, C und A', B', C' je drei Punkte in $\mathbf{P}$ in allgemeiner Lage. Gibt es einen Strahl $\overrightarrow{A'P}$ zwischen $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{A'C'}$ mit $\angle BAC \simeq \angle PA'C'$, so sagen wir, $\angle BAC$ sei **kleiner** als $\angle B'A'C'$ bzw. $\angle B'A'C'$ **größer** als $\angle BAC$, und schreiben $\angle BAC < \angle B'A'C'$ bzw. $\angle B'A'C' > \angle BAC$.*

In Übungsaufgabe 3.5 zeigen wir die folgende Entsprechung von Proposition 3.18:

Proposition 3.26 (H). (a) *Sind $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbf{W}$ mit $\alpha \simeq \alpha'$ und $\beta \simeq \beta'$, so ist genau dann $\alpha < \beta$, wenn $\alpha' < \beta'$ gilt.*

(b) *Sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{W}$, so folgt aus $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$, dass auch $\alpha < \gamma$ gilt.*

(c) *Für zwei Winkel $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$ gilt genau eine der drei folgenden Aussagen*

$$\alpha < \beta, \quad \alpha \simeq \beta, \quad \alpha > \beta.$$

Definition 3.27 (H). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann heißt das Tripel*

$$\triangle ABC := (A, B, C)$$

*das **Dreieck** mit den **Eckpunkten** A, B, C. Die Strecken $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ heißen die **Seiten** des Dreiecks $\triangle ABC$ und die Winkel $\angle ABC, \angle BCA, \angle CAB$ seine **Innenwinkel**.*

*Sind $A', B', C' \in \mathbf{P}$ weitere drei Punkte in allgemeiner Lage, so heißen die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ zueinander **kongruent**, in Zeichen $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, falls die jeweils entsprechenden Seiten und Innenwinkel jeweils kongruent zueinander sind, falls also gilt:*

$$\begin{array}{lll} \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, & \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, & \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \\ \angle BAC \simeq \angle B'A'C', & \angle ABC \simeq \angle A'B'C', & \angle ACB \simeq \angle A'C'B'. \end{array}$$

*Wir sagen, ein $D \in \mathbf{P}$ liegt im **Inneren** des Dreiecks $\triangle ABC$, wenn D im Inneren seiner drei Innenwinkel liegt.*

Bemerkung 3.28 (H). (a) *Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BAC$ sind nicht zwangsläufig kongruent, denn aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt sofort $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, was nicht für jedes Dreieck zutrifft. In der Literatur findet sich daher oft die Definition des Dreiecks $\triangle ABC$ als die nicht geordnete Menge $\{A, B, C\}$. Eine solche Festlegung zieht jedoch einen merkbar aufwändigeren Kongruenzbegriff nach sich, während unsere Notation lediglich eine etwas größere Wachsamkeit erfordert.*

(b) *Mit Definition 3.21 sehen wir sofort, dass ein Punkt $D \in \mathbf{P}$ im Inneren von $\triangle ABC$ liegt, wenn er im Inneren von zweien der drei Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ liegt.*

Wir können nun Axiom (K_6) umformulieren zum ***SWS-Kriterium***

(K_6') *Sind $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage mit*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C',$$

so sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent.

Wir leiten nun ein Kriterium für die Gültigkeit des SWS-Kriteriums her und holen dafür zunächst ein wenig aus:

Bemerkung 3.29. *Bei der Definition der für die Formulierung der Relationen $\cong$ und $\simeq$ benötigten Begriffe „Strecke" und „Winkel" haben wir die Inzidenz- und Anordnungsaxiome vorausgesetzt. Rein formal ist dies jedoch nicht notwendig, so dass wir unter Verzicht auf sämtliche Axiome bereits in einer beliebigen Ebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ über eine Anordnung $\star$ und Kongruenzbegriffe $\cong$ bzw. $\simeq$ für Strecken bzw. Winkel sprechen und dies wieder als $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ notieren können. Sinnvolle Sätze lassen sich in einem derart allgemeinen Setting natürlich nicht zeigen, weshalb wir für alle auftretenden Anwendungen die Inzidenz- und Anordnungsaxiome voraussetzen werden.*

Definition 3.30. *Eine **Bewegung** einer Ebene $\Pi := (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ ist eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ mit den folgenden Eigenschaften.*

(i) *Für alle Teilmengen $g \subseteq \mathbf{P}$ gilt*

$$g \in \mathbf{G} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(g) \in \mathbf{G}.$$

(ii) *Für je drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ gilt*

$$A \star B \star C \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(A) \star \varphi(B) \star \varphi(C).$$

(iii) *Für je zwei Punkte $A, B \in \mathbf{P}$ mit $A \neq B$ gilt*

$$\overline{AB} \cong \overline{\varphi(A)\varphi(B)}.$$

(iv) *Für je drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage gilt*

$$\angle ABC \simeq \angle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C).$$

Die Menge aller Bewegungen in Π bezeichnen wir mit $\mathrm{Bew}(\Pi)$.

Vereinfachend können wir sagen, dass Bewegungen gerade diejenigen bijektiven Abbildungen auf $\mathbf{P}$ sind, die die bislang von uns eingeführte Geometrie im Sinne der Kongruenz unverändert lassen. Fordern wir, dass $\cong$ und $\simeq$ transitiv sind, so wird $\mathrm{Bew}(\Pi)$ zu einer Gruppe.

Beispiel 3.31. *Die Menge* $\mathrm{Bew}\big((\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq)\big)$ *besteht nach den Propositionen 1.52 und 1.54 genau aus den in Bemerkung 1.62 betrachteten **Bewegungen** der analytischen Geometrie*

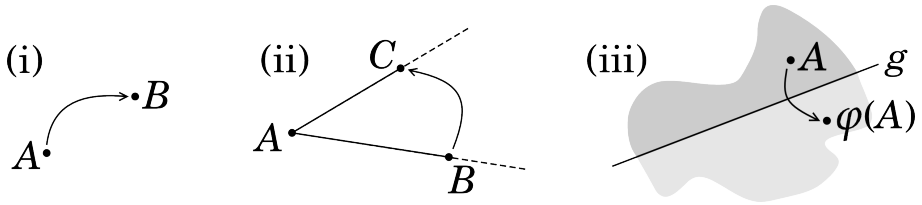
$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2, \\ P & \mapsto M \cdot P + A \end{cases} \quad \text{mit } M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \text{ und } A \in \mathbb{R}^2.$$

Definition 3.32. *Sei $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Ebene, die die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome erfüllt. Wir sagen, Π habe **genügend viele Bewegungen**, wenn gilt:*

(i) *Für je zwei Punkte $A, B \in \mathbf{P}$ gibt es ein $\varphi \in \mathrm{Bew}(\Pi)$ mit $\varphi(A) = B$.*

(ii) *Für beliebige drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ mit $A \neq B$ und $A \neq C$ gibt es ein $\varphi \in \mathrm{Bew}(\Pi)$ mit $\varphi(A) = A$ und $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$.*

(iii) *Für jede Gerade $g \in \mathbf{G}$ gibt es ein $\varphi \in \mathrm{Bew}(\Pi)$, so dass zum einen $\varphi(A) = A$ für alle $A \in g$ gilt und zum anderen $A \mid_g \varphi(A)$ für alle $A \in \mathbf{P} \setminus g$.*



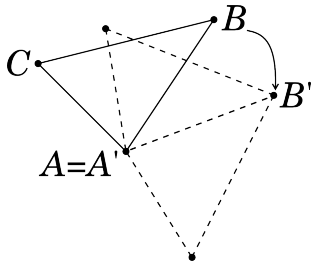
Satz 3.33. *Sei $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Ebene, die die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome sowie die Axiome $(K_1), (K_2), (K_4), (K_5)$ erfüllt. Hat dann Π genügend viele Bewegungen, so gilt in Π das SWS-Kriterium (K_6').*

Beweis. Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage, und gelte

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C'. \tag{3.4}$$

Nach Definition 3.32 (i) gibt es ein $\varphi_1 \in \mathrm{Bew}(\Pi)$ mit $\varphi_1(A) = A'$. Da andererseits φ_1 bijektiv ist und Anordnungen und Kongruenzen von Strecken und Winkeln erhält, können wir ohne Einschränkung $A = A'$ annehmen.

Nach Definition 3.32 (ii) gibt es ein $\varphi_2 \in \mathrm{Bew}(\Pi)$ mit $\varphi_2(A) = A$ und $\varphi_2(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB'}$. Mit demselben Argument wie oben können wir daher ohne Einschränkung annehmen, dass neben $A = A'$ auch $B = B'$ gilt.



Schließlich gibt es nach Definition 3.32 (iii) ein $\varphi_3 \in \mathrm{Bew}(\Pi)$, das die Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ punktweise festlässt, und für das $C \mid_{\overleftrightarrow{AB}} \varphi_3(C)$ gilt. Wieder ohne Einschränkung können wir annehmen, dass nicht nur $A = A'$ und $B = B'$ gelten, sondern auch $CC'|_{\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{A'B'}}$. Unsere Voraussetzungen (3.4) lauten nun

(i) $\angle BAC \simeq \angle BAC'$,

(ii) $\overline{AC} \cong \overline{AC'}$,

(iii) $CC'|_{\overleftrightarrow{AB}}$.

Mit (K_5) folgt aus (i) und (iii) sofort $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$, mit (K_2) daraus und aus (ii) die Gleichheit $C = C'$. Insgesamt haben wir gezeigt, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen eine Bewegung

in $\mathrm{Bew}(\Pi)$ gibt, die das Dreieck $\triangle ABC$ auf das Dreieck $\triangle A'B'C'$ abbildet. Letztere sind also kongruent, was zu zeigen war. $\square$

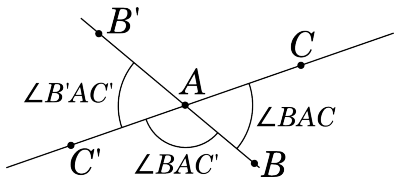
Beispiel 3.34. *Im verlinkten Zusatzmaterial zeigen wir, dass die affine Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zusammen mit dieser Kongruenz von Winkeln den Kongruenzaxiomen $(K4)$, (K_5) für Winkel genügt und genügend viele Bewegungen hat. Zusammen mit Satz 3.33, 2.7 und den Beispielen 3.3 und 3.15 folgt daraus, dass $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ eine Hilbertebene ist.*

Man kann zeigen, dass jede Hilbertebene genügend viele Bewegungen hat. Insbesondere kann man in der Definition einer Hilbertebene das Axiom (K_6) – bzw. das SWS-Axiom (K_6') – dadurch ersetzen, dass man die Existenz genügend vieler Bewegungen fordert.

3.4 Ergänzungswinkel, Gegenwinkel und rechte Winkel

In diesem Abschnitt studieren wir Winkel in Hilbertebenen noch etwas genauer:

Definition 3.35 (H). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage. Seien weiter $B', C' \in \mathbf{P}$ mit $B' \star A \star B$ und $C' \star A \star C$. Dann heißen $\angle BAC'$ und $\angle B'AC$ **Ergänzungswinkel** zu $\angle BAC$. Der Winkel $\angle B'AC'$ heißt der **Gegenwinkel** oder auch der **Scheitelwinkel** von $\angle BAC$.*



Proposition 3.36 (H). *Für $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$ und Ergänzungswinkel α' bzw. β' zu α bzw. zu β gilt*

$$\alpha \simeq \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha' \simeq \beta';$$

Ergänzungswinkel kongruenter Winkel sind also kongruent. Insbesondere sind die Ergänzungswinkel eines gegebenen Winkels zueinander kongruent.

Beweis. Seien $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ Dreiecke mit $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle EDF$ und seien weiter $B', C', E', F' \in \mathbf{P}$ mit

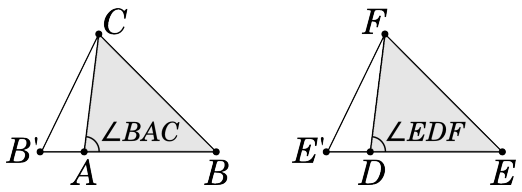
$$B' \star A \star B, \quad C' \star A \star C, \quad E' \star D \star E, \quad F' \star D \star F.$$

Die Menge der Ergänzungswinkel zu α ist dann durch $\{\angle BAC', \angle B'AC\}$ gegeben, die Menge der Ergänzungswinkel zu β durch $\{\angle EDF', \angle E'DF\}$. Wir werden nun zeigen, dass aus $\alpha \simeq \beta$ die Kongruenz $\angle B'AC \simeq \angle E'DF$ folgt; die anderen Fälle ergeben sich nach Umbenennung genauso.

Indem wir gegebenenfalls die Punkte E, E', F durch andere Punkte auf dem jeweils gleichen von D ausgehenden Strahl ersetzen, können wir vermöge (K_2) ohne Einschränkung

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \quad \overline{AC} \cong \overline{DF} \quad \text{und} \quad \overline{AB'} \cong \overline{DE'}$$

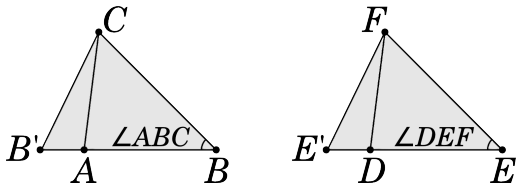
annehmen.



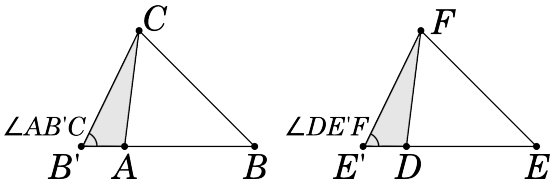
Mit dem SWS-Kriterium (K_6') folgt aus $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ und $\angle BAC \simeq \angle EDF$ die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ und insbesondere die Kongruenzen $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ und $\angle ABC \simeq \angle DEF$. Weiter gelten

$$B' \star A \star B, \quad E' \star D \star E, \quad \overline{AB'} \cong \overline{DE'} \quad \text{und} \quad \overline{AB} \cong \overline{DE},$$

so dass nach (K_3) auch $\overline{BB'} \cong \overline{EE'}$ gilt.



Wir können also wieder das SWS-Kriterium anwenden und erhalten die Kongruenz der Dreiecke $\triangle BB'C$ und $\triangle EE'F$. Hieraus folgen sofort die Kongruenzen $\overline{B'C} \cong \overline{E'F}$ und $\angle AB'C \simeq \angle DE'F$. Zu Beginn des Beweises hatten wir zudem ohne Einschränkung $\overline{AB'} \cong \overline{DE'}$ gesetzt.



Ein letztes Mal können wir das SWS-Kriterium (K_6') anwenden und erhalten die Kongruenz der Dreiecke $\triangle AB'C$ und $\triangle DE'F$, was insbesondere die Proposition beweist. □

Korollar 3.37 (H). *Ein beliebiger Winkel $\alpha \in \mathbf{W}$ ist zu seinem Gegenwinkel α' kongruent.*

Beweis. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $\alpha = \angle BAC$, und seien weiter $B', C' \in \mathbf{P}$ Punkte mit $B' \star A \star B$ und $C' \star A \star C$, so dass $\alpha' = \angle B'AC'$ gilt. Dann sind $\angle BAC$ und $\angle B'AC'$ beide Ergänzungswinkel zu $\angle B'AC$, also kongruent nach Proposition 3.36. □

Proposition 3.38 (H). *Es seien $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$ zwei Winkel und $\alpha', \beta' \in \mathbf{W}$ seien Ergänzungswinkel zu α bzw. β. Dann gilt:*

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \beta' < \alpha'.$$

Beweis. Sei $\beta = \angle BAC$. Wegen $\alpha < \beta$ gibt es dann einen Punkt D im Inneren von $\angle BAC$ mit $\angle BAD \simeq \alpha$. Sei $E \in \mathbf{P}$ mit $E \star A \star B$. Nach Proposition 3.36 genügt es, $\angle CAE < \angle DAE$ zu zeigen, dass also C im Inneren von $\angle DAE$ liegt. Aufgrund von $E \star A \star B$ gilt $B \mid_{\overleftrightarrow{AC}} E$, dazu gilt $DC|_{\overleftrightarrow{AB}}$, $BD|_{\overleftrightarrow{AC}}$. Wir erhalten $D \mid_{\overleftrightarrow{AC}} E$, $DC|_{\overleftrightarrow{AE}}$ und damit nach Lemma 3.22 die Behauptung. □

Definition 3.39 (H). *Ein Winkel $\alpha \in \mathbf{W}$ heißt ein **rechter Winkel**, wenn er zu einem und somit allen seinen Ergänzungswinkeln kongruent ist.*

Proposition 3.40 (H). *Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$ zwei Winkel. Dann gilt: Ist α ein rechter Winkel, und sind α und β kongruent, so ist auch β ein rechter Winkel. Insbesondere ist jeder Ergänzungswinkel eines rechten Winkels wieder ein rechter Winkel.*

Beweis. Sei α' bzw. β' ein Ergänzungswinkel zu α bzw. β. Aus $\alpha \simeq \beta$ folgt mit Proposition 3.36, dass auch α' und β' zueinander kongruent sind. Da α ein rechter Winkel ist, folgt

$$\beta \simeq \alpha \simeq \alpha' \simeq \beta'$$

und somit die Behauptung. □

Satz 3.41 (H). *Je zwei rechte Winkel sind zueinander kongruent.*

Beweis. Wären $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$ zwei nichtkongruente rechte Winkel, so gälte $\alpha < \beta$ oder $\beta < \alpha$; ohne Einschränkung ersteres. Für Ergänzungswinkel α' zu α und β' zu β erhielten wir dann aus der Rechtwinkligkeit von α und β den Widerspruch

$$\beta \simeq \beta' \overset{3.38}{<} \alpha' \simeq \alpha.$$

Es folgt, dass alle rechten Winkel paarweise zueinander kongruent sein müssen. □

Korollar 3.42 (H). *Die rechten Winkel bilden eine Kongruenzklasse in $\mathbf{W}$.*[1]

Bemerkung 3.43. *Ist $\alpha \in \mathbf{W}$ ein Winkel, $\alpha' \in \mathbf{W}$ ein Ergänzungswinkel von α und $\gamma \in \mathbf{W}$ ein rechter Winkel, dann gilt entweder $\alpha \simeq \alpha' \simeq \gamma$ oder ($\alpha < \gamma$ oder $\alpha' < \gamma$),*

denn: Gilt $\alpha \simeq \gamma$, so gilt nach Proposition 3.36 auch $\alpha' \simeq \gamma$. Andernfalls ist $\alpha < \gamma$ oder $\gamma < \alpha$ und im letzteren Fall gilt $\alpha' < \gamma$ nach Proposition 3.38. #

3.5 Orthogonalität und Parallelität

Unsere naive Vorstellung sagt uns, dass wir mit dem Begriff des rechten Winkels ein Kriterium für Parallelität angeben können sollten. Dies soll in diesem Abschnitt untersucht werden:

[1] Strenggenommen brauchen wir dafür noch, dass es überhaupt rechte Winkel gibt, da Äquivalenzklassen per Definition stets nichtleer sind. Dies folgt jedoch aus Satz 3.45, den wir gleich im Anschluss beweisen werden.

Definition 3.44 (H). *Zwei Geraden $g, h \in \mathbf{G}$ heißen* ***orthogonal****, in Zeichen $g \perp h$, wenn sie sich in genau einem Punkt schneiden und einer der gebildeten Winkel ein rechter Winkel ist.*

Nach den Überlegungen des letzten Abschnitts sind zwei nichtparallele Geraden genau dann orthogonal, wenn alle gebildeten Winkel rechte Winkel sind.

Satz 3.45 (H). *Für beliebige $g \in \mathbf{G}$ und $A \in \mathbf{P}$ gibt es eine Gerade durch A, die orthogonal zu g ist.*

Beweis. **Fall 1:** $A \notin g$**.** Nach (I_2) gibt es zwei Punkte $B \neq C \in g$. Weiter gibt es nach (K_5) auf der Seite von g, auf der A nicht liegt, genau einen Strahl $\overrightarrow{BP}$ mit $\angle PBC \simeq \angle ABC$. Nach (K_2) gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt Q auf $\overrightarrow{BP}$ mit $\overline{BQ} \cong \overline{BA}$. Da A und Q nach Konstruktion auf verschiedenen Seiten von g liegen, gibt es einen Punkt $R \in g$ mit $A \star R \star Q$. Ist $R = C$, so ersetzen wir C durch einen Punkt auf g, so dass B, C auf verschiedenen Seiten von R liegen.

Wir zeigen nun, dass $\angle ARC$ kongruent zu seinem Ergänzungswinkel $\angle QRC$ ist. Nach Definition ist er dann ein rechter Winkel und mit $\overleftrightarrow{AQ}$ ist eine auf g orthogonale Gerade gefunden. Im Fall $R = B$ gilt einfach $\angle QRC = \angle PBC \simeq \angle ABC = \angle ARC$. Sind andererseits R und B verschieden, so erhalten wir mit dem SWS-Kriterium (K_6') die Kongruenz $\triangle ABR \cong \triangle QBR$,

denn: Nach Konstruktion gelten $\overline{BA} \cong \overline{BQ}$ und $\overline{BR} \cong \overline{BR}$. Es bleibt $\angle ABR \simeq \angle QBR$ zu zeigen. Im Fall $B \star R \star C$ folgt dies direkt aus $\angle ABR = \angle ABC \simeq \angle PBC = \angle QBR$. Der Fall $B \star C \star R$ geht natürlich analog. Im Fall $R \star B \star C$ ist zu beachten, dass $\angle ABC$ und $\angle ABR$ bzw. $\angle QBC$ und $\angle QBR$ Ergänzungswinkel sind. Aus $\angle ABC \simeq \angle QBC$ folgt somit nach Proposition 3.36, dass auch $\angle ABR$ und $\angle QBR$ kongruent sind. #

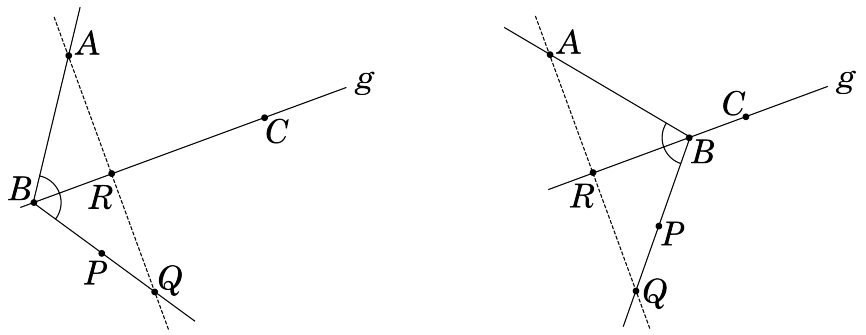
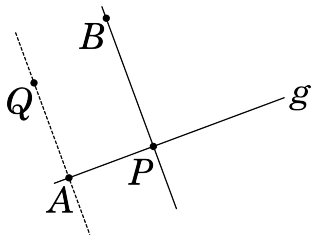


Abbildung 3.3: Die beiden interessanten Fälle $B \star R \star C$ und $R \star B \star C$.

Hieraus folgt direkt $\angle ARB \simeq \angle QRB$ und mit Korollar 3.37 auch $\angle ARC \simeq \angle QRC$.

Fall 2: $A \in g$**.** Nach (I_3) gibt es ein $B \in \mathbf{P} \setminus g$ und nach Fall 1 dann auch eine Gerade h durch B, die orthogonal auf g steht. Sei P der Geradenschnittpunkt $g \wedge h$.



Falls bereits $P = A$ gilt, sind wir fertig. Ansonsten ist nach Konstruktion $\angle BPA$ ein rechter Winkel. Andererseits gibt es nach (K_5) auf derselben Seite von g wie B einen Strahl $\overrightarrow{AQ}$ mit $\angle BPA \simeq \angle QAP$. Nach Proposition 3.40 ist dann $\angle QAP$ ein rechter Winkel und $\overleftrightarrow{AQ}$ die gesuchte orthogonale Gerade. □

Aus Satz 3.45 ergibt sich insbesondere, dass in jeder Hilbertebene ein rechter Winkel existiert.

Definition 3.46 (H). *Eine Gerade $t \in \mathbf{G}$ heißt eine **Transversale** zu gegebenen Geraden $g, h \in \mathbf{G}$, falls sie g und h jeweils genau einmal schneidet und diese Schnittpunkte voneinander verschieden sind.*

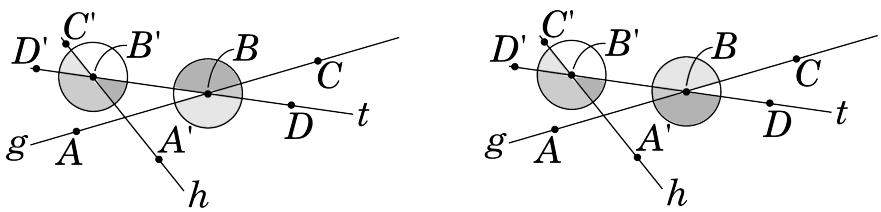
Setzen wir nun $B := g \wedge t$ und $B' := h \wedge t$, und wählen wir Punkte $A, C \in g$ und $A', C' \in h$ mit $A \star B \star C$ und $A' \star B' \star C'$, so dass A und A' auf derselben Seite von t liegen, und Punkte $D, D' \in t$ mit $D \star B \star B' \star D'$. Dann heißen

$$(\angle ABB', \angle C'B'B),\ (\angle ABD, \angle C'B'D'),\ (\angle CBD, \angle A'B'D') \text{ und } (\angle CBB', \angle A'B'B)$$

*Paare von **Wechselwinkeln** bezüglich der Geraden g, h und der Transversalen t und*

$$(\angle CBD, \angle C'B'B),\ (\angle CBB', \angle C'B'D'),\ (\angle ABB', \angle A'B'D') \text{ und } (\angle ABD, \angle A'B'B)$$

*Paare von **Stufenwinkeln** bezüglich der Geraden g, h und der Transversalen t.*



Wechselwinkel Stufenwinkel

Statt „(α, β) ist ein Paar von Wechselwinkeln bzw. Stufenwinkeln" werden wir künftig auch einfacher „α und β sind Wechselwinkel bzw. Stufenwinkel" schreiben.

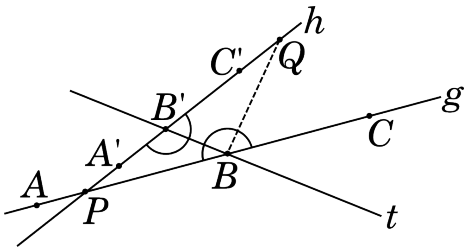
Bemerkung 3.47 (H). *Sind α, β Wechselwinkel und ist β' der Gegenwinkel zu β, dann sind α, β' Stufenwinkel. Sind α, β Stufenwinkel und ist β' der Gegenwinkel zu β, dann sind α, β' Wechselwinkel.*

Satz 3.48 (H). *Es gelten die beiden äquivalenten Aussagen:*

(i) ***Schwacher Wechselwinkelsatz**: Haben zwei von einer Transversalen geschnittene Geraden ein Paar kongruenter Wechselwinkel, so sind sie parallel.*

(ii) ***Schwacher Stufenwinkelsatz**: Haben zwei von einer Transversalen geschnittene Geraden ein Paar kongruenter Stufenwinkel, so sind sie parallel.*

Beweis. Nach Bemerkung 3.47 sind die beiden Aussagen zueinander äquivalent. Wir zeigen den schwachen Wechselwinkelsatz und benutzen dabei die Notation aus Definition 3.46. Nach Annahme und Proposition 3.36 gelten dann $\angle A'B'B \simeq \angle CBB'$ und $\angle C'B'B \simeq \angle ABB'$.



Wir nehmen nun an, g und h wären nicht parallel und schnitten sich also in genau einem Punkt $P \in \mathbf{P}$. Ohne Einschränkung läge dann P auf derselben Seite von t wie A und A'; sonst ersetzte man $\angle A'B'B$ und $\angle CBB'$ durch ihre Ergänzungswinkel.

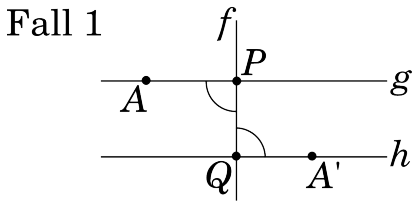
Nach (K_2) gäbe es auf dem Strahl $\overrightarrow{B'C'}$ einen eindeutigen Punkt Q mit $\overline{B'Q} \cong \overline{BP}$. Nach dem SWS-Kriterium (K_6') gälte dann $\triangle B'BP \cong \triangle BB'Q$ und insbesondere $\angle CBB' \simeq \angle A'B'B \simeq \angle QBB'$.

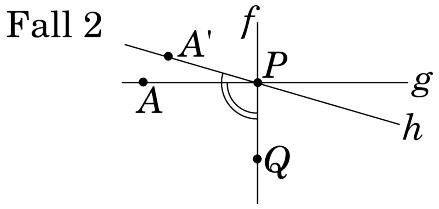
Nach Konstruktion gälte $QC|_t$. Mit (K_5) folgte $Q \in \overrightarrow{BC} \subseteq g$, was ein Widerspruch dazu ist, dass P der einzige Schnittpunkt von g und h ist. Die beiden Geraden sind also parallel. □

Korollar 3.49 (H). *Seien $f, g, h \in \mathbf{G}$ mit $g \perp f$ und $h \perp f$. Dann gilt $g \parallel h$.*

Beweis. **Fall 1: f ist transversal zu g und h.** Sei $P := f \wedge g$ und $Q := f \wedge h$. Seien außerdem $A \in g$ und $A' \in h$ auf verschiedenen Seiten von f. Dann sind die Winkel $\angle APQ$ und $\angle PQA'$ Wechselwinkel. Wegen $g \perp f$ und $h \perp f$ sind sie aber auch rechte Winkel und somit nach Satz 3.41 zueinander kongruent. Die Behauptung folgt mit dem schwachen Wechselwinkelsatz 3.48.

Fall 2: f, g, h haben einen gemeinsamen Schnittpunkt P. Seien $A \in g$ und $A' \in h$ auf derselben Seite von f und $Q \neq P$ ein weiterer Punkt auf f. Dann sind die Winkel $\angle APQ$ und $\angle A'PQ$ beide rechte Winkel und somit nach Satz 3.41 kongruent. Nach (K_5) liegt also A' auf $\overrightarrow{PA}$, so dass $h = \overleftrightarrow{PA'} = \overleftrightarrow{PA} = g$ und insbesondere $g \parallel h$ folgt. □





Korollar 3.50 (H). *Seien $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade und $A \in \mathbf{P}$ ein Punkt. Dann gibt es genau eine Gerade $\ell_g A$ durch A, die orthogonal zu g ist. Diese heißt das* ***Lot*** *von A auf g und ihr Schnittpunkt $L_g A := \ell_g A \wedge g$ mit g heißt der* ***Lotfußpunkt*** *von A auf g.*

Beweis. Die Existenz des Lots haben wir bereits in Satz 3.45 gezeigt. Zum Nachweis der Eindeutigkeit betrachten wir zwei Geraden $\ell_g A, \ell'_g A \in \mathbf{G}$, die beide durch A gehen und beide orthogonal auf g stehen. Mit Korollar 3.49 folgt $\ell_g A \parallel \ell'_g A$, was wegen $A \in \ell_g A \cap \ell'_g A$ sofort $\ell_g A = \ell'_g A$ impliziert. □

Korollar 3.51 (H). *Seien $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade und $A \in \mathbf{P}$ ein Punkt. Dann gibt es eine (nicht notwendigerweise eindeutige) Gerade $h \in \mathbf{G}$ durch A mit $g \parallel h$.*

Beweis. Es gilt $\ell_g A \perp g$ und $\ell_{(\ell_g A)} A \perp \ell_g A$ und somit $\ell_{(\ell_g A)} A \parallel g$ nach Korollar 3.49. □

Man kann sich nun fragen, ob die Umkehrung des schwachen Wechselwinkelsatzes auch gilt, dass also Wechselwinkel an parallelen Geraden kongruent sein müssen. Wie wir nun zeigen werden, ist dies genau dann richtig, wenn die betrachtete Hilbertebene affin ist:

Satz 3.52 (H). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es gilt das schwache Parallelenaxiom (p).*

(ii) *Es gilt das starke Parallelenaxiom (P).*

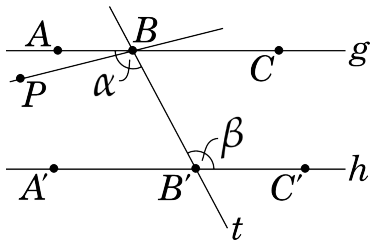
(iii) *Es gilt der* ***starke Wechselwinkelsatz****: Je zwei parallele Geraden haben bezüglich einer beliebigen Transversalen vier Paare kongruenter Wechselwinkel.*

(iv) *Es gilt der* ***starke Stufenwinkelsatz****: Je zwei parallele Geraden haben bezüglich einer beliebigen Transversalen vier Paare kongruenter Stufenwinkel.*

Beweis. Nach Bemerkung 3.47 sind offenbar der starke Wechselwinkelsatz und der starke Stufenwinkelsatz äquivalent, so dass zum Beweis des Satzes genügt, die Äquivalenz der Aussagen (i), (ii) und (iii) zu zeigen.

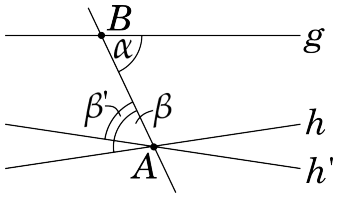
Wir nehmen zunächst an, es gelte das schwache Parallelenaxiom (p), es gebe also zu je einem Punkt $A \in \mathbf{P}$ und einer Geraden $g \in \mathbf{G}$ nie mehr als eine Parallele zu g durch A. Da es aber nach Korollar 3.51 stets mindestens eine solche Parallele gibt, folgt das starke Parallelenaxiom (P).

Wir zeigen nun, dass aus dem starken Parallelenaxiom (P) der starke Wechselwinkelsatz folgt. Sei dazu $t \in \mathbf{G}$ eine Transversale zu zwei gegebenen parallelen Geraden $g \parallel h \in \mathbf{G}$. Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung $g \neq h$ annehmen. Wir nennen die Schnittpunkte $B := t \wedge g$ und $B' := t \wedge h$ und wählen Punkte $A, C \in g$ mit $A \star B \star C$ und Punkte $A', C' \in h$ mit $A' \star B' \star C'$ und $AA'|_t$. Der starke Wechselwinkelsatz ist gezeigt, wenn wir die Kongruenz $\alpha := \angle ABB' \simeq \angle C'B'B =: \beta$ zeigen können, da daraus mit Proposition 3.36 und Korollar 3.37 die übrigen Kongruenzen folgen.



Nehmen wir dafür im Gegenteil an, es gälte $\alpha \not\simeq \beta$, ohne Einschränkung $\alpha > \beta$. Dann gäbe es einen Punkt P im Inneren von α mit $\angle PBB' \simeq \beta$ und nach dem schwachen Wechselwinkelsatz 3.48 wären die Geraden $\overleftrightarrow{BP}$ und h parallel. Andererseits ist nach Voraussetzung auch g eine Parallele zu h durch B. Nach (P) gälte daher $\overleftrightarrow{BP} = g$, was nicht sein kann, da P ein Punkt im Inneren von α ist.

Es verbleibt, das schwache Parallelenaxiom (p) aus dem starken Wechselwinkelsatz herzuleiten. Seien dafür $g \in \mathbf{G}$ und $A \in \mathbf{P}$ gegeben. Im Fall $A \in g$ ist g selbst offenbar die einzige Parallele zu g durch A. Im Folgenden können wir daher ohne Einschränkung $A \notin g$ annehmen. Seien $h, h' \in \mathbf{G}$ zwei zu g parallele Geraden durch A und sei $B \in g$ beliebig.



Die Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ ist eine Transversale zu g und h. Nach dem starken Wechselwinkelsatz haben also g, h bzgl. $\overleftrightarrow{AB}$ ein Paar kongruenter Wechselwinkel $\alpha \simeq \beta$. Andererseits ist $\overleftrightarrow{AB}$ auch eine Transversale zu g und h'. Wieder nach dem starken Wechselwinkelsatz ist der Wechselwinkel β' zu α zwischen $\overleftrightarrow{AB}$ und h' zu α kongruent. Es folgt $\beta \simeq \beta'$ und mit (K_5) die Gleichheit der Geraden h und h'. □

Bemerkung 3.53. *Wir nehmen Satz 3.52 zum Anlass, in Hilbertebenen nicht weiter zwischen schwachem und starkem Parallelenaxiom zu unterscheiden und nur noch vom Parallelenaxiom (P) zu reden. Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene, in der das Parallelenaxiom (P) gilt." schreiben wir künftig auch kurz „**(H + P)**".*

3.6 Der Kongruenzsatz für Dreiecke

Der Kongruenzsatz fasst mehrere Kongruenzkriterien für Dreiecke zusammen. Wir werden ihn benutzen, um in Abschnitt 3.7 zu einer gegebenen Strecke einen Mittelpunkt zu konstruieren. Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Propositionen:

Proposition 3.54 (H). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage und $A' \neq B' \in \mathbf{P}$ zwei verschiedene Punkte mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Dann gibt es auf jeder Seite von $\overleftrightarrow{A'B'}$ genau einen Punkt C' mit $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

Beweis. Nach (K_5) gibt es auf jeder fest ausgewählten Seite von $\overleftrightarrow{A'B'}$ genau einen Strahl $\overrightarrow{A'P}$ mit $\angle CAB \simeq \angle PA'B'$. Weiter gibt es nach (K_2) genau einen Punkt C' auf diesem Strahl mit $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. Nach dem SWS-Kriterium (K_6') sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent. □

Definition 3.55 (H). *Ein Dreieck heißt **gleichschenklig**, wenn zwei seiner Seiten zueinander kongruent sind. Diese beiden Seiten heißen dann die **Schenkel** des gleichschenkligen Dreiecks, die verbleibende Strecke die **Basis**.*

Proposition 3.56 (H). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann gilt die Äquivalenz*

$$\overline{AB} \cong \overline{AC} \quad \Longleftrightarrow \quad \angle ABC \simeq \angle ACB.$$

*Ein Dreieck ist also genau dann gleichschenklig, wenn zwei seiner Winkel zueinander kongruent sind. Diese Winkel heißen dann die **Basiswinkel** des gleichschenkligen Dreiecks.*

Beweis. Dass aus der Kongruenz der Strecken die Kongruenz der Winkel folgt, sehen wir sofort durch Anwenden des SWS-Kriteriums (K_6') auf die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACB$.

Gelte nun umgekehrt $\angle ABC \simeq \angle ACB$. Angenommen, es gälte $\overline{AB} \ncong \overline{AC}$, ohne Einschränkung $\overline{AB} > \overline{AC}$. Dann gäbe es ein $D \in \overline{AB}$ mit $\overline{DB} \cong \overline{AC}$ und insbesondere $A \star D \star B$. Nach Konstruktion liegt daher D im Inneren des Winkels $\angle BCA$. Da D auf $\overline{AB}$ liegt, gilt aber andererseits $\angle ABC = \angle DBC$. Mit dem SWS-Kriterium (K_6') folgt $\triangle DBC \cong \triangle ACB$ und insbesondere $\angle DCB \simeq \angle ACB$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass D im Inneren von $\angle ACB$ liegt. □

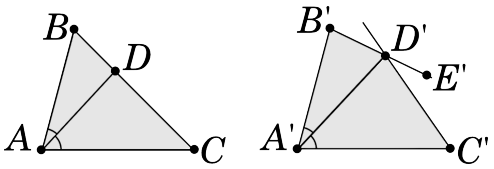
Proposition 3.57 (H). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ bzw. $A', B', C' \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lageund sei D bzw. D' ein Punkt im Inneren von $\angle BAC$ bzw. $\angle B'A'C'$. Dann folgt aus je zwei der Kongruenzen*

$$\angle BAD \simeq \angle B'A'D', \quad \angle DAC \simeq \angle D'A'C', \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C'$$

die jeweils dritte.

Beweis. Der Beweis zerfällt offensichtlich in drei Fälle.

Fall 1: $(\angle BAD \simeq \angle B'A'D') \wedge (\angle DAC \simeq \angle D'A'C') \Longrightarrow (\angle BAC \simeq \angle B'A'C')$**.** Nach Lemma 3.22 schneidet der Strahl $\overrightarrow{AD}$ die Strecke $\overline{BC}$. Indem wir gegebenenfalls D durch diesen Schnittpunkt ersetzen, können wir daher ohne Einschränkung $B \star D \star C$ annehmen. Weiter können wir nach (K_2) die Punkte B', C', D' jeweils derart durch Punkte auf demselben Strahl aus A' ersetzen, dass $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$, $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$ und $\overline{A'D'} \cong \overline{AD}$ gelten. Nach Annahme gelten außerdem $\angle B'A'D' \simeq \angle BAD$ und $\angle D'A'C' \simeq \angle DAC$. Nach dem SWS-Kriterium (K_6') sind dann die Dreiecke $\triangle BAD$ und $\triangle B'A'D'$ bzw. $\triangle DAC$ und $\triangle D'A'C'$ kongruent.



Sei nun E' ein Punkt auf der Geraden $\overleftrightarrow{B'D'}$ mit $B' \star D' \star E'$; so etwas gibt es nach (A_2). Dann ist $\angle A'D'E'$ ein Ergänzungswinkel zu $\angle A'D'B' \simeq \angle ADB$. Andererseits ist $\angle ADC$ ein Ergänzungswinkel zu $\angle ADB$, so dass mit Proposition 3.36 die Kongruenz $\angle A'D'E' \simeq \angle ADC \simeq \angle A'D'C'$ folgt.

Da C' und B' auf verschiedenen Seiten von $\overleftrightarrow{A'D'}$ liegen und B' und E' ebenso, liegen nach (A_4) die Punkte C' und E' auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{A'D'}$. Nach (K_5) sind daher die Winkel $\angle A'D'E'$ und $\angle A'D'C'$ sogar identisch. Insbesondere gilt $B' \star D' \star C'$.

Da wir mit der Kongruenz der Dreiecke schon vorhin $\overline{B'D'} \cong \overline{BD}$ und $\overline{D'C'} \cong \overline{DC}$ eingesehen hatten, folgt mit (K_3) die Kongruenz $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$. Weiter hatten wir schon $\angle A'C'B' = \angle A'C'D' \simeq \angle ACD = \angle ACB$ erkannt und $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$ vorausgesetzt. Mit dem SWS-Kriterium (K_6') folgt somit die Kongruenz der Dreiecke $\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$ und insbesondere die Behauptung.

Fall 2: $(\angle BAD \simeq \angle B'A'D') \wedge (\angle BAC \simeq \angle B'A'C') \implies (\angle DAC \simeq \angle D'A'C')$**.** Nach $(K5)$ existiert ein C'', das auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{A'D'}$ liegt wie C' und das $\angle D'A'C'' \simeq \angle DAC$ erfüllt. Wenn wir C' durch C'' ersetzen, haben wir also die Voraussetzungen für Fall 1 erfüllt und erhalten so $\angle B'A'C'' \simeq \angle BAC$. Das impliziert

$$\angle B'A'C' \simeq \angle BAC \simeq \angle B'A'C''$$

und somit $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$. Daraus ergibt sich

$$\angle DAC \simeq \angle D'A'C'' \simeq \angle D'A'C'$$

und also die Behauptung.

Fall 3: $(\angle BAC \simeq \angle B'A'C') \wedge (\angle DAC \simeq \angle D'A'C') \implies (\angle BAD \simeq \angle B'A'D')$**.** Dieser Fall ist nach Umbenennung mit Fall 2 identisch. □

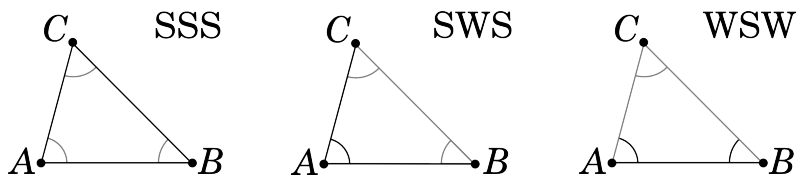
Satz 3.58 (Kongruenzsatz für Dreiecke, **H**)**.** *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,

(ii) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ *und* $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ (SSS)

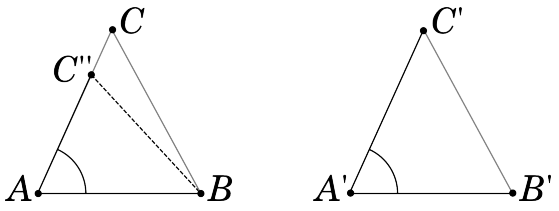
(iii) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ *und* $\angle BAC \simeq \angle B'A'C'$, (SWS)

(iv) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \simeq \angle B'A'C'$ *und* $\angle ABC \simeq \angle A'B'C'$. (WSW)



Beweis. Dass aus (i) die anderen drei Aussagen folgen, ist klar. Dass aus (iii) Aussage (i) folgt, gilt mit dem SWS-Kriterium (K_6') und somit nach Definition der Hilbertebene.

Wir zeigen nun das WSW-Kriterium, das besagt, dass aus (iv) Aussage (i) folgt. Nehmen wir dafür an, es gelten die Kongruenzen aus (iv). Mit (K_2) wählen wir auf dem Strahl $\overrightarrow{AC}$ einen Punkt C'' mit $\overline{AC''} \cong \overline{A'C'}$. Da nach Voraussetzung $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\angle BAC'' = \angle BAC \simeq \angle B'A'C'$ gelten, können wir das SWS-Kriterium auf die Dreiecke $\triangle ABC''$ und $\triangle A'B'C'$ anwenden und erhalten deren Kongruenz.



Daraus und wieder aus (iv) folgt

$$\angle ABC'' \simeq \angle A'B'C' \simeq \angle ABC. \tag{3.5}$$

Nach Konstruktion liegen C und C'' auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$, so dass wegen (3.5) und (K_5) bereits die Identität der Strahlen $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BC''}$ gilt. Es folgt

$$C'' = \overleftrightarrow{BC} \wedge \overleftrightarrow{AC} = C$$

und insbesondere $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. Wir dürfen also das SWS-Kriterium auf die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ anwenden und zeigen so (i).

Am aufwändigsten ist der Beweis des SSS-Kriteriums, dessentwegen wir die Propositionen 3.54, 3.56 und 3.57 gezeigt haben. Nehmen wir dafür an, es gelten die Kongruenzen aus (ii). Nach Proposition 3.54 gibt es auf der B' gegenüberliegenden Seite von $\overleftrightarrow{A'C'}$ genau einen Punkt B'' mit $\triangle A'B''C' \cong \triangle ABC$. Wir setzen $P := \overleftrightarrow{A'C'} \wedge \overleftrightarrow{B'B''}$. In Abhängigkeit von der Lage von P auf der Geraden $\overleftrightarrow{A'C'}$ ergeben sich verschiedene Fälle.

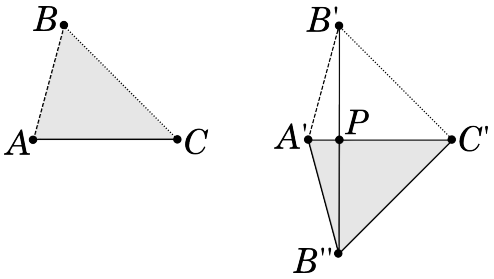
Fall 1: $P = A'$. In diesem Fall sind die Punkte A', B', B'' kollinear. Da sonst die Punkte A', B', C' kollinear wären, sind deswegen C', B', B'' in allgemeiner Lage. Wegen der Kongruenz $\overline{B'C'} \cong \overline{BC} \cong \overline{B''C'}$ ist das Dreieck $\triangle C'B'B''$ gleichschenklig und hat kongruente Basiswinkel $\angle C'B'B'' = \angle A'B'C'$ und $\angle C'B''B' = \angle A'B''C'$ nach Proposition 3.56. Das reicht, um mit dem SWS-Kriterium die Kongruenz von Dreiecken $\triangle ABC \cong \triangle A'B''C' \cong \triangle A'B'C'$ folgern zu können.

Fall 2: $P = C'$. Dieser Fall ist nach Umbenennung mit Fall 1 identisch.

Fall 3: A', C', P paarweise verschieden. Analog zu Fall 1 sind die Dreiecke $\triangle C'B'B''$ und $\triangle A'B'B''$ gleichschenklig, woraus mit 3.56 die Kongruenzen

$$\angle C'B'P \simeq \angle C'B''P \quad \text{und} \quad \angle A'B'P \simeq \angle A'B''P$$

der jeweiligen Basiswinkel folgen. Mit Proposition 3.57 erhalten wir $\angle C'B'A' \simeq \angle C'B''A'$, was mithilfe des SWS-Kriteriums die Behauptung zeigt.



□

3.7 Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass jede gegebene Strecke eine eindeutige Mittelsenkrechte besitzt und jeder gegebene Winkel eine eindeutige Winkelhalbierende. Für beide Ziele wird es sich als vorteilig erweisen, zu einer gegebenen Strecke einen Mittelpunkt konstruieren zu können, so dass wir hiermit beginnen:

Definition 3.59 (H). *Gegeben seien drei paarweise verschiedene kollineare Punkte $A, B, M \in \mathbf{P}$. Der Punkt M heißt ein **Mittelpunkt** der Strecke $\overline{AB}$, falls $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ gilt.*

Lemma 3.60 (H). *Seien $A, B, M \in \mathbf{P}$ paarweise verschieden und kollinear. Ist M ein Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, so gilt $A \star M \star B$.*

Beweis. Gälte $M \star A \star B$, so folgte nach Definition $\overline{AM} = \overline{MA} < \overline{MB}$. Dies stünde nach Proposition 3.18 im Widerspruch zur Annahme $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ und kann daher nicht sein. Gälte $A \star B \star M$, so folgte nach Definition $\overline{AM} > \overline{BM} = \overline{MB}$. Dies stünde genauso im Widerspruch zur Annahme $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ und kann daher ebenfalls nicht sein. Nach (A_3) liegt aber genau einer der Punkte A, B, M zwischen den anderen beiden, so dass wir das Lemma gezeigt haben. □

Satz 3.61 (H). *Für zwei beliebige Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}$ hat die Strecke $\overline{AB}$ genau einen Mittelpunkt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz. Wie in Proposition 3.2 gilt für $g := \overleftrightarrow{AB}$ die Aufteilung

$$\mathbf{P} = g \cup S_1(g) \cup S_2(g)$$

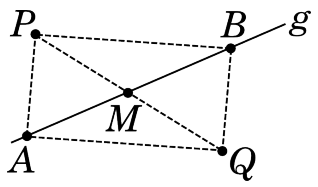
von $\mathbf{P}$ in g und die durch g begrenzten Halbebenen. Für einen beliebigen Punkt $P \in S_1(g)$ gibt es nach Proposition 3.54 genau einen Punkt $Q \in S_2(g)$ mit $\triangle ABP \cong \triangle BAQ$ und insbesondere

$$\overline{AP} \cong \overline{BQ} \quad \text{und} \quad \overline{PB} \cong \overline{QA}. \tag{3.6}$$

Die Punkte A, P, Q sind in allgemeiner Lage,

denn: Nach Konstruktion ist g eine Transversale der beiden Geraden $\overleftrightarrow{BP}$ und $\overleftrightarrow{AQ}$ mit kongruenten Wechselwinkeln $\angle PBA \simeq \angle QAB$. Nach dem schwachen Wechselwinkelsatz 3.48 sind somit die Geraden $\overleftrightarrow{BP}$ und $\overleftrightarrow{AQ}$ parallel. Da sie wegen $A \neq B$ zudem voneinander verschieden sind, folgt die Behauptung. #

Analog zeigt man, dass auch die Punkte B, Q, P in allgemeiner Lage sind.



Insgesamt können wir das SSS-Kriterium 3.58 auf die Dreiecke $\triangle APQ$ und $\triangle BQP$ anwenden und erhalten wegen $\overline{PQ} \cong \overline{QP}$ und (3.6) deren Kongruenz. Insbesondere gelten die Kongruenzen von Winkeln

$$\angle APQ \simeq \angle BQP \quad \text{und} \quad \angle AQP \simeq \angle BPQ. \tag{3.7}$$

Wegen $P \mid_g Q$ schneidet g die Strecke $\overline{PQ}$ in einem Punkt M. Für diesen gilt $A \star M \star B$,

denn: Da die Punkte A, P, Q bzw. B, Q, P in allgemeiner Lage sind, liegen weder A noch B auf der Verbindungsgeraden $\overleftrightarrow{PQ}$; es ist also $M \notin \{A, B\}$. Weiter gilt nicht $M \star A \star B$, denn sonst läge A jeweils im Inneren der Winkel $\angle BPM$ und $\angle BQM$ und es folgte

$$\begin{aligned}
\angle APQ &= \angle APM < \angle BPM = \angle BPQ \\
&\overset{(3.7)}{\simeq} \angle AQP = \angle AQM < \angle BQM = \angle BQP \\
&\overset{(3.7)}{\simeq} \angle APQ,
\end{aligned}$$

was offensichtlich nicht sein kann. Analog zeigt man, dass auch $A \star B \star M$ nicht sein kann, so dass die Behauptung mit dem Anordnungsaxiom (A_3) folgt. #

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
&\angle MAP = \angle BAP \simeq \angle ABQ = \angle MBQ, && (A \star M \star B,\ \triangle ABP \cong \triangle BAQ) \\
&\overline{AP} \overset{(3.6)}{\cong} \overline{BQ}, \\
&\angle APM = \angle APQ \overset{(3.7)}{\simeq} \angle BQP = \angle BQM && (P \star M \star Q)
\end{aligned}$$

und also mit dem WSW-Kriterium 3.58 die Kongruenz der Dreiecke $\triangle AMP$ und $\triangle BMQ$. Insbesondere folgt die Kongruenz von Strecken $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ und somit, dass M ein Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist.

Es verbleibt die Eindeutigkeit des Streckenmittelpunkts zu zeigen. Sei dafür M' ein von M verschiedener Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Wir können ohne Einschränkung $\overline{AM} < \overline{AM'}$ annehmen,

insbesondere also $A \star M \star M'$. Aufgrund von $A \star M' \star B$ folgt mit 3.8 die Anordnung $M \star M' \star B$ und deshalb $\overline{BM'} < \overline{BM}$. Insgesamt erhalten wir aber mit den Mittelpunktseigenschaften von M und M' die Ungleichungskette

$$\overline{AM} < \overline{AM'} \cong \overline{M'B} < \overline{MB} \cong \overline{AM}$$

und somit nach Proposition 3.18 einen Widerspruch. □

Die Existenz eines eindeutigen Streckenmittelpunkts bedingt die Existenz einer eindeutigen Mittelsenkrechten und einer eindeutigen Winkelhalbierenden wie folgt:

Definition 3.62 (H). *Seien $A \neq B \in \mathbf{P}$ zwei verschiedene Punkte. Das Lot des Mittelpunkts von $\overline{AB}$ auf $\overleftrightarrow{AB}$ nennen wir die* ***Mittelsenkrechte*** *m_{AB} von $\overline{AB}$.*

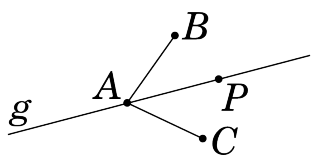
Proposition 3.63 (H). *Für zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}$ gilt*

$$m_{AB} = \{P \in \mathbf{P} : \overline{AP} \cong \overline{BP}\}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für ein beliebiges $P \in m_{AB}$ die Bedingung $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ gilt. Da dies für den Streckenmittelpunkt M von $\overline{AB}$ definitionsgemäß richtig ist, können wir dabei ohne Einschränkung $P \in m_{AB} \setminus \{M\}$ annehmen. Nach dem SWS-Kriterium sind dann die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle AMP$ und $\triangle BMP$ kongruent, insbesondere gilt $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.

Sei nun umgekehrt $P \in \mathbf{P}$ mit $\overline{AP} \cong \overline{BP}$. Im Fall $P = M$ liegt P trivialerweise auf m_{AB}. Im Fall $P \neq M$ ist das Dreieck $\triangle PAB$ gleichschenklig, woraus $\angle PAM \simeq \angle PBM$ folgt. Mithilfe des SWS-Kriteriums erhalten wir $\triangle PAM \cong \triangle PBM$, was $\angle PMA \simeq \angle PMB$ zur Folge hat. Diese Winkel sind Ergänzungswinkel, weshalb $\angle PMA$ ein rechter Winkel ist. Aus der Eindeutigkeit des Lotes folgt wie verlangt $P \in m_{AB}$. □

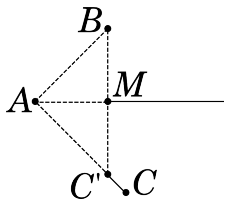
Definition 3.64 (H). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage und g eine Gerade durch A. Genau dann heißt g eine* ***Winkelhalbierende*** *von $\angle BAC$, wenn für ein (und damit alle) $P \in g \setminus \{A\}$ die Kongruenz $\angle PAB \simeq \angle PAC$ gilt.*



Ist g eine Winkelhalbierende von $\angle BAC$, so gilt $B \mid_g C$. Die Punkte B, C liegen nämlich beide nicht auf g, andernfalls würden wir unmittelbar einen Widerspruch erhalten und der Fall $BC|_g$ würde aufgrund von (K_5) sofort zu $C \in \overrightarrow{AB}$ führen, im Widerspruch dazu, dass A, B, C in allgemeiner Lage sind.

Proposition 3.65 (H). *Zu je drei Punkten $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage gibt es genau eine Winkelhalbierende $w_{\angle CAB}$ des Winkels $\angle CAB$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz. Nach (K_2) gibt es einen eindeutigen Punkt $C' \in \overrightarrow{AC}$ mit $\overline{AC'} \cong \overline{AB}$. Nach Satz 3.61 hat die Strecke $\overline{BC'}$ einen Mittelpunkt M, der definitionsgemäß $\overline{BM} \cong \overline{MC'}$ erfüllt.



Damit können wir das SSS-Kriterium auf die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle AC'M$ anwenden und erhalten deren Kongruenz. Insbesondere gilt dann auch $\angle BAM \simeq \angle C'AM$, so dass durch die Gerade $\overleftrightarrow{AM}$ eine Winkelhalbierende des Winkels $\angle C'AB = \angle CAB$ gegeben ist.

Die Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden zeigt man analog zur Eindeutigkeit des Streckenmittelpunkts im Beweis von Satz 3.61. □

3.8 Innen- und Außenwinkel im Dreieck

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff des Außenwinkels eines Dreiecks ein und untersuchen damit das Verhältnis von Innen- und Außenwinkeln einerseits und von Innenwinkeln und Dreiecksseiten andererseits:

Definition 3.66 (H). *Ein beliebiger Ergänzungswinkel eines Innenwinkels eines gegebenen Dreiecks heißt ein* ***Außenwinkel*** *dieses Dreiecks.*

Die folgenden beiden Resultate sind jeweils eine Abschwächung des in euklidischen Ebenen gültigen Satzes 1.67 von der Innenwinkelsumme im Dreieck:

Proposition 3.67 (H + P). *Seien α, β, γ die Innenwinkel eines Dreiecks $\triangle$ und seien α', β', γ' die Innenwinkel eines weiteren Dreiecks $\triangle'$. Dann gilt*

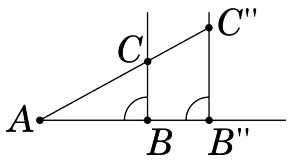
$$\Big(\alpha \simeq \alpha' \quad \textit{und} \quad \beta \simeq \beta'\Big) \quad \Longrightarrow \quad \gamma \simeq \gamma'.$$

Beweis. Wir schreiben $\triangle = \triangle ABC$ und $\triangle' = \triangle A'B'C'$ und setzen

$$\begin{array}{llllll} \alpha & := \angle CAB, & \beta & := \angle ABC & \text{und} & \gamma & := \angle BCA, \\ \alpha' & := \angle C'A'B', & \beta' & := \angle A'B'C' & \text{und} & \gamma' & := \angle B'C'A'. \end{array}$$

Nach (K_2) gibt es auf dem Strahl $\overrightarrow{AB}$ einen eindeutigen Punkt B'' mit $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$. Ohne Einschränkung können wir $B'' \neq B$ annehmen, da sonst nach dem WSW-Kriterium die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent und somit nichts zu zeigen wäre. Nach Proposition 3.54 gibt es dann genau einen Punkt C'' mit

$$C''C|_{\overleftrightarrow{AB}} \quad \text{und} \quad \triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'. \tag{3.8}$$



Insbesondere gilt

$$\angle ABC = \beta \simeq \beta' = \angle A'B'C' \overset{(3.8)}{\simeq} \angle AB''C'',$$

so dass die beiden Geraden $\overleftrightarrow{BC}$ und $\overleftrightarrow{B''C''}$ bezüglich der Transversalen $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB''}$ kongruente Stufenwinkel haben. Nach dem schwachen Stufenwinkelsatz 3.48 gilt somit $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B''C''}$.

Andererseits gilt die Kongruenz

$$\angle CAB = \alpha \simeq \alpha' = \angle C'A'B' \overset{(3.8)}{\simeq} \angle C''AB'' = \angle C''AB.$$

Wegen $C''C|_{\overleftrightarrow{AB}}$ stimmen folglich nach (K_5) die Strahlen $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AC''}$ überein. Wir können daher den starken Stufenwinkelsatz 3.52 auf die Transversale $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AC''}$ der parallelen Geraden $\overleftrightarrow{BC}$ und $\overleftrightarrow{B''C''}$ anwenden und erhalten wie verlangt die Kongruenz der Winkel

$$\gamma = \angle BCA \simeq \angle B''C''A \overset{(3.8)}{\simeq} \angle B'C'A' = \gamma'.$$

□

Satz 3.68 (Außenwinkelsatz, **H**). *Sind α, β, γ die Innenwinkel eines Dreiecks und ist γ' ein Ergänzungswinkel zu γ, so gilt*

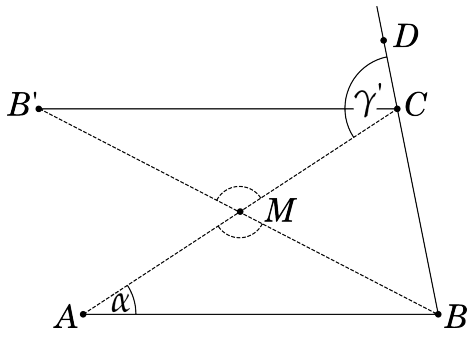
$$\alpha < \gamma' \quad \textit{und} \quad \beta < \gamma'.$$

Beweis. Wir schreiben $\triangle ABC$ für das Dreieck und setzen

$$\alpha := \angle CAB, \quad \beta := \angle ABC \quad \text{und} \quad \gamma := \angle BCA.$$

Da nach Proposition 3.36 beide Wahlen für den Außenwinkel γ' kongruent sind, dürfen wir zudem ohne Einschränkung einen Punkt $D \in \overleftrightarrow{BC}$ mit $B \star C \star D$ wählen und $\gamma' := \angle ACD$ setzen.

Da die Behauptungen $\alpha < \gamma'$ und $\beta < \gamma'$ unter Umbenennung zueinander äquivalent sind, genügt es, die erste der beiden zu zeigen. Sei dafür M der nach Satz 3.61 existierende eindeutige Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Für diesen gilt definitionsgemäß $\overline{AM} \cong \overline{CM}$. Wir wählen nun auf $\overleftrightarrow{BM}$ einen Punkt B' mit $B \star M \star B'$ und $\overline{BM} \cong \overline{MB'}$.



Da die Winkel $\angle AMB$ und $\angle CMB'$ als Gegenwinkel kongruent sind, können wir dann das SWS-Kriterium auf die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle CB'M$ anwenden und erhalten deren Kongruenz. Insbesondere folgt die Kongruenz der Winkel α und $\angle MCB' = \angle ACB'$. Andererseits liegt B' im Inneren des Winkels $\angle ACD = \gamma'$,

denn: Nach Konstruktion gilt $B \mid_{\overleftrightarrow{AC}} B'$. Außerdem gilt $AB'|_{\overleftrightarrow{BC}}$, denn es gilt $AM|_{\overleftrightarrow{BC}}$ wegen $A \star M \star C$ und es gilt $B'M|_{\overleftrightarrow{BC}}$ wegen $B \star M \star B'$. Folglich liegt der Punkt A im Inneren des Winkels $\angle BCB'$. Nach Lemma 3.22 bedeutet dies $AB|_{\overleftrightarrow{B'C}}$ und $B \mid_{\overleftrightarrow{AC}} B'$. Wegen $B \star C \star D$ ist dies äquivalent zu $A \mid_{\overleftrightarrow{B'C}} D$ und $B'D|_{\overleftrightarrow{AC}}$. Wieder nach Lemma 3.22 ist dies gleichbedeutend dazu, dass B' im Inneren von $\angle DCA = \angle ACD$ liegt. #

□

Aus dem Außenwinkelsatz 3.68 folgern wir einen Zusammenhang zwischen Innenwinkeln eines Dreiecks und den jeweils gegenüberliegenden Seiten. Dieser Zusammenhang wird für euklidische Ebenen mit dem Sinussatz 1.68 präzisiert:

Satz 3.69 (H). *In einem Dreieck $\triangle ABC$ gilt*

$$\overline{AB} > \overline{BC} \quad \Longleftrightarrow \quad \angle BCA > \angle CAB.$$

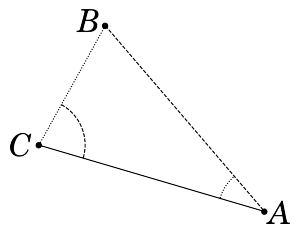


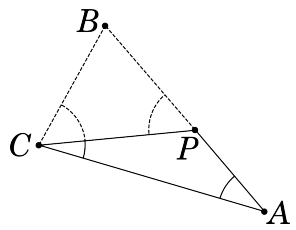
Abbildung 3.4: Der größeren Dreiecksseite liegt stets der größere Innenwinkel gegenüber.

Beweis. Unter der Annahme $\overline{AB} > \overline{BC}$ gibt es einen Punkt P zwischen A und B mit $\overline{BP} \cong \overline{BC}$. Da $\angle CPB$ ein Außenwinkel des Dreiecks $\triangle CPA$ ist, ist er nach dem Außenwinkelsatz 3.68 größer als der Innenwinkel $\angle CAP = \angle CAB$. Da P im Inneren des Winkels $\angle BCA$ liegt, ist

zudem letzterer größer als $\angle BCP$. Da das Dreieck $\triangle BCP$ nach Konstruktion gleichschenklig ist, sind schließlich seine Basiswinkel $\angle BCP$ und $\angle CPB$ kongruent. Insgesamt haben wir

$$\angle BCA > \angle BCP \simeq \angle CPB > \angle CAB$$

gezeigt und somit die erste Implikation.



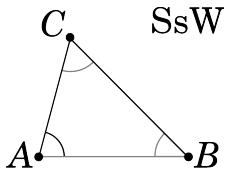
Gelte nun umgekehrt $\angle BCA > \angle CAB$. Da die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks stets kongruent sind, kann dann nicht $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ gelten. Gälte $\overline{AB} < \overline{BC}$, so folgte $\angle BCA < \angle CAB$ nach dem bereits Gezeigten, was nicht sein kann. Der Satz folgt im Ausschlussprinzip nach Proposition 3.26. □

Wir sind nun in der Lage, weitere Kongruenzkriterien für Dreiecke herzuleiten:

Satz 3.70 (H). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage und sei $\overline{AC} < \overline{BC}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,

(ii) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \quad$ *und* $\quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C'$. (SsW)



Beweis. Dass (ii) aus (i) folgt, ist trivial. Gelte also umgekehrt (ii). Auf $\overrightarrow{AB}$ gibt es einen eindeutigen Punkt B'' mit $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$. Für diesen gilt nach dem SWS-Kriterium die Kongruenz von Dreiecken $\triangle AB''C \cong \triangle A'B'C'$ und insbesondere die Streckenkongruenz $\overline{B''C} \cong \overline{B'C'} \cong \overline{BC}$. Mit Proposition 3.56 folgt die Kongruenz $\angle CB''B \simeq \angle CBB''$ der Basiswinkel im zugehörigen gleichschenkligen Dreieck $\triangle CBB''$. Wir unterscheiden nun drei Fälle für die Lage der drei Punkte A, B, B'' zueinander:

Fall 1: $B'' = B$**.** Es gilt $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und mit (ii) und dem SSS-Kriterium folgt die gewünschte Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$.

Fall 2: $A \star B \star B''$**.** Für ein beliebiges $E \in \mathbf{P}$ mit $E \star A \star B$ ist $\alpha := \angle EAC$ ein Ergänzungswinkel zu $\angle CAB$ und der Außenwinkelsatz 3.68 gibt für das Dreieck $\triangle AB''C$ die Abschätzung $\angle CB''A < \alpha$. Nach Satz 3.69 folgt aus der Voraussetzung $\overline{AC} < \overline{BC}$ weiter $\angle CBA < \angle CAB$, was nach

Proposition 3.38 die Abschätzung $\alpha < \angle CBB''$ der jeweiligen Ergänzungswinkel impliziert. Insgesamt erhalten wir den Widerspruch

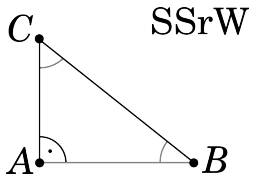
$$\alpha < \angle CBB'' \simeq \angle CB''B = \angle CB''A < \alpha.$$

Fall 3: $A \star B'' \star B$**.** Das ist nach Umbenennung gerade Fall 2. □

Korollar 3.71 (H). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage und seien $\angle BAC$ und $\angle B'A'C'$ rechte Winkel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,

(ii) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ *und* $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. (SSrW)



Beweis. Dass (ii) aus (i) folgt, ist trivial. Gelte also umgekehrt (ii) und sei $E \in \mathbf{P}$ mit $E \star A \star B$. Der Winkel $\angle EAC$ ist ein Ergänzungswinkel zum rechten Winkel $\angle BAC$, also ein Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ und selbst ein rechter Winkel. Mit dem Außenwinkelsatz 3.68 und Satz 3.41 folgt daher $\angle ABC < \angle EAC \simeq \angle BAC$ und mit Proposition 3.69 weiter $\overline{AC} < \overline{BC}$. Damit dürfen wir das SsW-Kriterium 3.70 anwenden und erhalten die behauptete Kongruenz $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ von Dreiecken. □

3.9 In- und Umkreis

Wir haben gesehen, dass sich in Hilbertebenen gut Geometrie betreiben lässt. Da die klassische Geometrie ohne Kreise nicht vorstellbar ist, führen wir diese nun ein:

Definition 3.72 (H). *Seien $M \neq A \in \mathbf{P}$ zwei verschiedene Punkte. Dann heißt*

$$K(M, A) := \{P \in \mathbf{P} : \overline{MA} \cong \overline{MP}\}$$

*der **Kreis** mit **Mittelpunkt** M und **Radius** $\overline{MA}$.*

Proposition 3.73 (H). *Sei $K \subseteq \mathbf{P}$ ein Kreis. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) *Der Kreis K ist nichtleer.*

(b) *Jede Gerade durch einen Mittelpunkt von K schneidet K in genau zwei Punkten.*

(c) *Der Kreis K hat genau einen Mittelpunkt.*

Beweis. Aussage (a) ist trivialerweise richtig, da für $K = K(M, A)$ definitionsgemäß $A \in K$ gilt.

Ist $K = K(M, A)$, so können wir auf jedem Strahl aus M eindeutig den Radius abtragen. Aussage (b) folgt, da sich eine beliebige Gerade g durch M als Vereinigung von genau zwei solcher Strahlen schreiben lässt und deren Durchschnitt gerade aus dem Punkt M besteht.

Es verbleibt Aussage (c) zu zeigen. Nach (a) gibt es einen Punkt $A \in K$. Nehmen wir nun an, K hätte zwei Mittelpunkte $M \neq M'$. Dann könnten wir $K = K(M, A) = K(M', A)$ schreiben. Nach (b) schnitte die Gerade $\overleftrightarrow{MM'}$ den Kreis K dann in genau zwei Punkten, die wir B und C nennen wollen. Diese erfüllten einerseits $B \star M \star C$ und $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ und andererseits $B \star M' \star C$ und $\overline{BM'} \cong \overline{M'C}$. Da der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ nach Satz 3.61 eindeutig ist, folgte $M = M'$, was wir ausgeschlossen hatten. Der Mittelpunkt eines Kreises ist also stets eindeutig bestimmt und Aussage (c) bewiesen. □

Unter zusätzlicher Voraussetzung des Parallelenaxioms (P) können wir nun mithilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 3.7 noch einige bekannte Sätze über Kreise herleiten:

Satz 3.74 (Umkreissatz, **H + P**). *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Dann schneiden sich die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ in einem gemeinsamen Punkt U. Der Kreis $K(U, A)$ enthält die Punkte A, B, C und ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt. Wir nennen $K(U, A)$ den **Umkreis** und U den **Umkreismittelpunkt** von $\triangle ABC$.*[2]

Beweis. Die drei Mittelsenkrechten sind paarweise nicht parallel,

denn: Nach Definition gelten $m_{AB} \perp \overleftrightarrow{AB}$ und $m_{AC} \perp \overleftrightarrow{AC}$. Gälte $m_{AB} \parallel m_{AC}$, so folgte $m_{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ mit dem starken Wechselwinkelsatz 3.52, was nach Korollar 3.49 sofort die Unmöglichkeit $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ implizierte. #

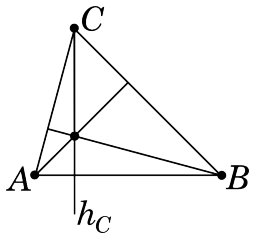
Je zwei Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich also in genau einem Punkt. Sei U der Schnittpunkt von m_{AB} und m_{AC}. Nach Proposition 3.63 gilt dann $\overline{BU} \cong \overline{AU} \cong \overline{CU}$, was wieder nach 3.63 zur Folge hat, dass U in m_{BC} liegt. Es schneiden sich also die drei Mittelsenkrechten von $\triangle ABC$ in genau einem Punkt, nämlich in U.

Nach Konstruktion ist dann $K(U, A)$ ein Kreis, der die Punkte A, B, C enthält. Sei K' ein weiterer Kreis, der A, B, C enthält, und sei U' der – nach Proposition 3.73 eindeutige – Mittelpunkt von K'. Dann gilt insbesondere $\overline{BU'} \cong \overline{AU'} \cong \overline{CU'}$ und aus Proposition 3.63 folgt $U' = m_{AB} \wedge m_{AC} = U$. Es folgt also $K' = K(U', A) = K(U, A)$. □

Bemerkung 3.75. *Mit dem Umkreissatz haben wir insbesondere gezeigt, dass je drei Punkte in allgemeiner Lage einen eindeutigen Kreis bestimmen.*

Definition 3.76 (H). *Für ein Dreieck $\triangle ABC$ heißt das Lot von C auf die Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ die **Höhe von** $\triangle ABC$ **durch** C und wird mit h_C bezeichnet. Der Schnittpunkt $h_C \wedge \overleftrightarrow{AB}$ heißt dabei der **Fußpunkt** der Höhe h_C. Analog werden auch die Höhen h_A und h_B und ihre Fußpunkte definiert.*

[2] Diese Namensgebung erhält ihren tieferen Sinn erst dann, wenn man zeigt, dass mit Ausnahme der Eckpunkte A, B, C alle Punkte des Umkreises „außerhalb“ von $\triangle ABC$ liegen, was wir allerdings nicht tun werden.



Satz 3.77 (Höhensatz, **H + P**). *Die Höhen h_A, h_B, h_C eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt H.*

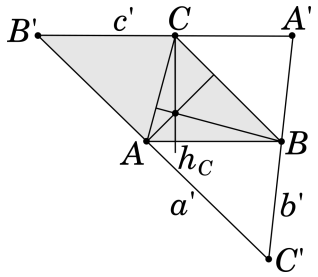
Beweis. Per Widerspruchsbeweis sieht man schnell ein, dass die Geraden

$$a' := p_{\overleftrightarrow{BC}}A, \quad b' := p_{\overleftrightarrow{CA}}B, \quad c' := p_{\overleftrightarrow{AB}}C$$

paarweise nicht parallel sind. Die jeweiligen Schnittpunkte

$$A' := b' \wedge c', \quad B' := c' \wedge a', \quad C' := a' \wedge b'$$

sind in allgemeiner Lage, da ihre Kollinearität auch die der Punkte A, B, C implizierte, was wir ausgeschlossen hatten.



Nach Übungsaufgabe 3.10 gilt nun

$$M_{A'B'} = C, \quad M_{B'C'} = A, \quad M_{C'A'} = B.$$

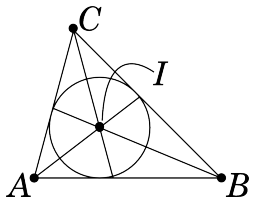
Mit $h_A \perp \overleftrightarrow{BC} \parallel a'$ folgt daraus $h_A = m_{B'C'}$ und analog $h_B = m_{C'A'}$ und $h_C = m_{A'B'}$. Der Satz folgt nun mit dem Umkreissatz 3.74 angewandt auf das Dreieck $\triangle A'B'C'$. □

Satz 3.78 (Inkreissatz, **H + P**). *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Dann schneiden sich die Winkelhalbierenden der Innenwinkel $\alpha := \angle CAB$, $\beta := \angle ABC$ und $\gamma := \angle BCA$ in einem gemeinsamen Punkt I. Der Kreis $K(I, L_{\overleftrightarrow{AB}}I)$ enthält die Lotfußpunkte*

$$L_a := L_{\overleftrightarrow{BC}}I, \quad L_b := L_{\overleftrightarrow{CA}}I \quad \textit{und} \quad L_c := L_{\overleftrightarrow{AB}}I$$

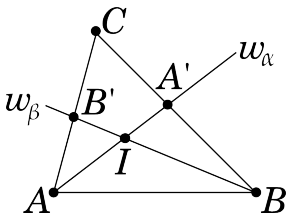
und ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt. Wir nennen $K(I, L_{\overleftrightarrow{AB}}I)$ den ***Inkreis*** *und I den* ***Inkreismittelpunkt*** *von $\triangle ABC$.*[3]

[3] Diese Namensgebung erhält ihren tieferen Sinn erst dann, wenn man zeigt, dass mit Ausnahme der Lotfußpunkte L_a, L_b, L_c alle Punkte des Inkreises „innerhalb" von $\triangle ABC$ liegen, was wir allerdings nicht tun werden.



Beweis. Die drei Winkelhalbierenden sind paarweise nicht parallel,

denn: Es langt zu zeigen, dass sich die Winkelhalbierenden w_α und w_β schneiden; die anderen beiden Fälle ergeben sich analog. Wegen $B \notin w_\alpha$ und $B \in w_\beta$ sind w_α und w_β verschieden. Wegen $B \mid_{w_\alpha} C$ gibt es einen Schnittpunkt A' von w_α und $\overline{BC}$. Nach Konstruktion gilt $C \star A' \star B$, so dass $A'C|_{w_\beta}$ gilt. Andererseits gilt nach Definition der Winkelhalbierenden $A \mid_{w_\beta} C$ und mit (A_4) erhalten wir $A \mid_{w_\beta} A'$. Es muss daher einen Schnittpunkt von w_β und $\overline{AA'} \subseteq w_\alpha$ geben. #

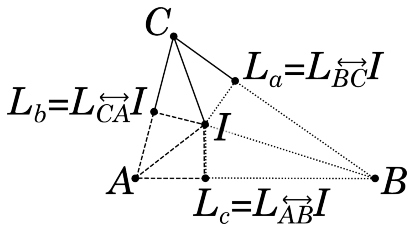


Den eindeutig bestimmten Geradenschnittpunkt $w_\alpha \wedge w_\beta$ bezeichnen wir im Folgenden als I. Fällen wir sein Lot auf die drei Seiten des Dreiecks und schreiben

$$L_a := L_{\overleftrightarrow{BC}}I, \quad L_b := L_{\overleftrightarrow{CA}}I \quad \text{und} \quad L_c := L_{\overleftrightarrow{AB}}I,$$

so erhalten wir kongruente Dreiecke $\triangle AIL_c \cong \triangle AIL_b$ und $\triangle BIL_c \cong \triangle BIL_a$,

denn: Da w_α Winkelhalbierende ist, gilt $\angle IAL_b \simeq \angle IAL_c$. Andererseits sind nach Konstruktion $\angle IL_cA$ und $\angle IL_bA$ rechte Winkel und nach Satz 3.41 somit ebenfalls kongruent. Nach Proposition 3.67 sind daher auch $\angle AIL_c$ und $\angle AIL_b$ kongruent. Da die beiden Dreiecke außerdem die Seite $\overline{AI}$ gemeinsam haben, folgt die erste der gesuchten Kongruenzen mit dem WSW-Kriterium. Die andere Kongruenz zeigt man analog. #



Aus dem gerade Gezeigten folgt insbesondere $\overline{IL_c} \cong \overline{IL_a} \cong \overline{IL_b}$. Man kann zeigen, dass die Punkte L_a, L_b, L_c in allgemeiner Lage sind, dies führen wir hier nicht aus. Nach dem Umkreissatz 3.74 ist $K(I, L_c)$ der eindeutige Kreis durch die Lotfußpunkte L_a, L_b und L_c.

Wir haben den Inkreissatz bewiesen, wenn wir noch $\overleftrightarrow{CI} = w_\gamma$ zeigen können. Wegen $\overline{IL_a} \cong \overline{IL_b}$ und da $\angle IL_bC, \angle IL_aC$ nach Konstruktion rechte Winkel sind, gilt nach dem SSrW-Kriterium 3.71 die Kongruenz von Dreiecken $\triangle IL_bC \cong \triangle IL_aC$ und insbesondere

$$\angle ACI = \angle L_bCI \simeq \angle L_aCI = \angle BCI.$$

□

3.10 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1 (I + A). *Beweisen Sie die Aussagen (a) und (c) von Proposition 3.8.*

Aufgabe 3.2 (I + A). *Zeigen Sie, dass* **P** *unendlich viele Elemente hat.*

Aufgabe 3.3 (I + A). *Zeigen Sie die folgenden Aussagen.*

(a) *Seien $A \neq B \in \mathbf{P}$ Punkte und $\overline{AB}$ die sie verbindende Strecke. Dann gibt es in $\overline{AB}$ keine Punkte C, D mit $C \star A \star D$. Die Endpunkte von $\overline{AB}$ sind also bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

(b) *Seien $A \neq B \in \mathbf{P}$ Punkte und $\overrightarrow{AB}$ der Strahl von A durch B. Dann gibt es in $\overrightarrow{AB}$ keinen Punkt C mit $C \star A \star B$. Der Ausgangspunkt eines Strahls ist also eindeutig bestimmt. Ist C ein beliebiger, von A verschiedener Punkt auf $\overrightarrow{AB}$, dann ist $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.*

(c) *Seien $A \neq B \in \mathbf{P}$ Punkte und $\overrightarrow{AB}$ der Strahl von A durch B. Dann gibt es ein $C \in \mathbf{P}$, so dass die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ einander entgegengesetzt sind, und der Strahl $\overrightarrow{AC}$ ist mit dieser Eigenschaft eindeutig. Zu jedem Strahl gibt es also genau einen entgegengesetzten Strahl.*

Aufgabe 3.4. *Zeigen Sie, dass die Definition der Anordnung auf $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ wie in (3.1) äquivalent zu folgender Definition ist.*

Es gilt $A \star B \star C$, wenn $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ paarweise verschieden und kollinear sind und mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$a_1 < b_1 < c_1, \quad a_2 < b_2 < c_2, \quad a_1 > b_1 > c_1 \quad \text{oder} \quad a_2 > b_2 > c_2.$$

Aufgabe 3.5 (H). *Beweisen Sie Proposition 3.26.*

Aufgabe 3.6 (I + A). *Seien $A, B, C, B', C' \in \mathbf{P}$ derart gegeben, dass A, B, C und A, B', C' jeweils in allgemeiner Lage sind. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.*

(i) $\angle BAC = \angle B'AC'$,

(ii) *Ein Punkt $P \in \mathbf{P}$ liegt genau im Inneren von $\angle BAC$, wenn er im Inneren von $\angle B'AC'$ liegt.*

Aufgabe 3.7 (I + A). *Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbf{P}$ heißt* ***konvex****, falls für alle $A \neq B \in S$ auch die gesamte Strecke $\overline{AB}$ in S enthalten ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.*

(a) *Beliebige Durchschnitte konvexer Mengen sind wieder konvex. Die Vereinigung zweier konvexer Mengen ist jedoch nicht notwendigerweise konvex.*

(b) *Für eine beliebige Gerade $g \in \mathbf{G}$ sind die durch g begrenzten Halbebenen $S_1(g)$ und $S_2(g)$ konvex.*

(c) *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage. Dann sind die Mengen*

$$I_{\angle BAC} := \{P \in \mathbf{P} : P \text{ liegt im Inneren des Winkels } \angle BAC\},$$
$$I_{\triangle ABC} := \{P \in \mathbf{P} : P \text{ liegt im Inneren des Dreiecks } \triangle ABC\}$$

konvex.

Aufgabe 3.8 (H). *Zeigen Sie, dass es einen Winkel gibt, der kein rechter Winkel ist.*

Aufgabe 3.9 (H). *Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.*

(a) *Es gilt das Kongruenzkriterium (SSW) für Dreiecke, also*

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \text{ und } \angle BAC \simeq \angle B'A'C'\right).$$

(b) *Es gilt das Kongruenzkriterium (WWS) für Dreiecke, also*

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \angle BAC \simeq \angle B'A'C' \text{ und } \angle ACB \simeq \angle A'C'B'\right).$$

Aufgabe 3.10 (H + P). *Seien $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbf{P}$ paarweise verschiedene Punkte, so dass je drei von ihnen nicht kollinear sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ *und* $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

(ii) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ *und die Punkte B, C liegen auf derselben Seite von* $\overleftrightarrow{AD}$.

*Ist dies der Fall, so heißt das 4-Tupel $\Pi A_1A_2A_3A_4 := (A_1, A_2, A_3, A_4)$ ein **Parallelogramm**.*

Aufgabe 3.11 (H + P). *Seien A_1, A_2 zwei Punkte auf einer Geraden gund seien B_1, C_1, B_2, C_2 Punkte auf derselben Seite von g, so dass A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 jeweils in allgemeiner Lage sind. Dann gilt*

$$\overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2} \quad \text{und} \quad \overleftrightarrow{A_1C_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2} \quad \Longrightarrow \quad \angle B_1A_1C_1 \simeq \angle B_2A_2C_2.$$

Aufgabe 3.12 (H). *Sei $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade. Die **Geradenspiegelung** σ_g an g ist dann die Abbildung $\sigma_g \colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$, die die Gerade g punktweise festlässt und einen beliebigen Punkt $A \notin g$ auf den eindeutigen Punkt $A' \in \ell_g A$ mit*

$$A \star L_gA \star A' \quad \text{und} \quad \overline{BL_gA} \cong \overline{AL_gA}$$

schickt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) *Die Abbildung σ_g ist bijektiv, genauer gilt $\sigma_g \circ \sigma_g = \mathrm{id}_{\mathbf{P}}$.*

(b) *Für $A \neq B \in \mathbf{P}$ gilt $\overline{AB} \cong \overline{\sigma_g(A)\sigma_g(B)}$.*

Hinweis: *Machen Sie eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit von der Lage der Punkte A, B zur Geraden g.*

(c) *Für $A, B \in \mathbf{P}$ gibt es eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ mit $\sigma_g(A) = B$.*

(d) *Für $A, B, C \in \mathbf{P}$ mit $A \neq B$ und $A \neq C$ gibt es eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ mit $\sigma_g(A) = A$ und $\sigma_g(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$.*

Aufgabe 3.13 (H). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage und sei $P \in \mathbf{P}$ mit $A \star P \star B$.*

(a) *Zeigen Sie, dass im Fall, dass $\angle BAC$ ein rechter Winkel ist, die Abschätzung*

$$\overline{AC} < \overline{PC} < \overline{BC}$$

gilt. Insbesondere ist $\overline{BC}$ die längste Seite des Dreiecks $\triangle ABC$.

(b) *Folgern Sie aus (a), dass ganz allgemein stets $\overline{PC} < \overline{AC}$ oder $\overline{PC} < \overline{BC}$ gilt.*

(c) *Sei $K = K(M, A) \subseteq \mathbf{P}$ ein Kreis. Das **Innere** I_K von K sei die Menge*

$$I_K := \{P \in \mathbf{P} : P = M \text{ oder } \overline{MP} < \overline{MA}\}.$$

Zeigen Sie, dass $I_K \cup K$ konvex im Sinne von Übungsaufgabe 3.7 ist.

(d) *Wir nehmen nun an, dass in $\mathbb{H}$ zusätzlich (P) gilt. Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage und K der Umkreis von $\triangle ABC$. Folgern Sie dann aus (c), dass alle von A, B, C verschiedenen Punkte auf den Seiten von $\triangle ABC$ in I_K liegen.*

Aufgabe 3.14 (Höhenformel)**.** *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit Winkelgrößen (α, β, γ) und Seitenlängen (a, b, c)und seien A', B', C' die Fußpunkte der Höhen h_A, h_B, h_C. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten.*

$$\begin{aligned}
\|A - A'\| &= c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma, \\
\|B - B'\| &= a \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\alpha, \\
\|C - C'\| &= b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta.
\end{aligned}$$

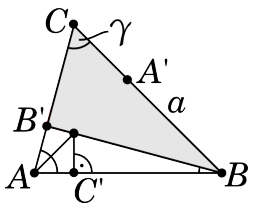


Abbildung 3.5: Zum Ablesen markiert: $\|B - B'\| = a \cdot \sin\gamma$.

KAPITEL 4

Euklidische Geometrie

Im Kontext von Hilbertebenen haben wir bereits eine Vielzahl klassischer geometrischer Sätze gezeigt. Es stellt sich jedoch heraus, dass einige klassische Aussagen in beliebigen Hilbertebenen nicht korrekt sind. So werden wir in Kapitel 5 eine Hilbertebene konstruieren, in der das Parallelenaxiom und damit auch der starke Wechselwinkelsatz 3.52 nicht gelten. Offensichtlich müssen wir also unserem Axiomensatz noch weitere Axiome hinzufügen. So kommen wir zum Begriff der ***euklidischen Ebene***, in der uns alle Objekte und Schlussweisen zur Verfügung stehen, die in Euklids Elementen eine Rolle spielen. Über den Hauptsatz für euklidische Ebenen 4.7 sehen wir ein, dass sich alle euklidischen Ebenen in geeigneter Weise identifizieren lassen, so dass es genügt, die Geometrie in einem Standardmodell zu untersuchen.

4.1 Das Vollständigkeitsaxiom

Für die Identifikation einer gegebenen Hilbertebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ mit der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$ konstruiert man ein Koordinatensystem, das eine gegebene Gerade bijektiv auf die x-Achse abbildet. Damit dies möglich ist, muss die zugrundeliegende Hilbertebene bestimmte Vollständigkeitseigenschaften erfüllen. Wir erinnern zunächst an das aus der Analysis bekannte

Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen *Sei (S, T) ein Dedekindschnitt von $\mathbb{R}$, also ein Paar (S, T) nichtleerer Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $S \cup T = \mathbb{R}$ und $p < q$ für alle $p \in S$ und alle $q \in T$. Dann gibt es genau ein $r \in \mathbb{R}$ mit $p \leq r \leq q$ für alle $p \in S$ und alle $q \in T$, insbesondere ist*

$$\begin{array}{ll} \textit{entweder} & S = (-\infty, r) \textit{ und } T = [r, \infty) \\ \textit{oder} & S = (-\infty, r] \textit{ und } T = (r, \infty). \end{array}$$

Die Ungleichung $p < q$ für alle $p \in S$ und alle $q \in T$ aus der obigen Definition eines Dedekindschnitts von $\mathbb{R}$ impliziert insbesondere, dass kein Punkt aus S zwischen zwei Punkten aus T liegt und kein Punkt aus T zwischen zwei Punkten aus S. Die nachfolgende Übertragung des Begriffs des Dedekindschnitts in unsere Situation ist daher naheliegend:

Definition 4.1 (I + A). *Ein **Dedekindschnitt** einer Geraden $g \in \mathbf{G}$ ist ein Paar (s,t) nichtleerer Teilmengen von g mit $s \dot\cup t = g$, so dass*

- *kein Punkt von t zwischen zwei Punkten aus s liegt und $P \neq Q \in s$ also $\overline{PQ} \subseteq s$ impliziert,*
- *kein Punkt von s zwischen zwei Punkten aus t liegt und $P \neq Q \in t$ also $\overline{PQ} \subseteq t$ impliziert.*

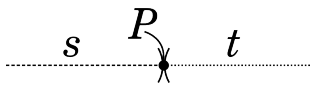
Definition 4.2 (H). *Die Hilbertebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ erfüllt das **Vollständigkeitsaxiom**, wenn gilt:*

(V) *Für jede Gerade $g \in \mathbf{G}$ und jeden Dedekindschnitt (s,t) von g gibt es genau einen Punkt $P \in \mathbf{P}$, so dass für alle $A \in s$, $B \in t$ genau eine der folgenden drei Aussagen gilt.*

$$P = A, \quad P = B \quad \text{oder} \quad A \star P \star B.$$

*Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene, in der das Vollständigkeitsaxiom (V) gilt." schreiben wir künftig auch kurz „**(H + V)**".*

Bemerkung 4.3 (H + V). *Ist (s,t) ein Dedekindschnitt einer Geraden g und P der von (V) dazu gelieferte Punkt, dann ist entweder s ein Strahl auf g mit Ausgangspunkt P und t das Komplement von s, oder t ist ein Strahl auf g mit Ausgangspunkt P und s ist das Komplement von t,*



denn: Hier sind zwei Fälle zu betrachten:

Fall 1: *$P \in t$. Es existiert ein von P verschiedener Punkt $Q \in t$, andernfalls läge P zwischen zwei Punkten aus s. Es folgt $\overline{PQ} \subseteq t$. Sei $R \in g$ mit $P \star Q \star R$. Wäre $R \in s$, so ergäbe sich ein Widerspruch zu (V). Somit liegt R in t und es folgt $\overrightarrow{PQ} \subseteq t$. Nach (V) gilt $S \star P \star Q$ für ein beliebiges $S \in s$. Sei nun $R \in t \setminus \{P\}$. Wiederum aufgrund von (V) ergibt sich $S \star P \star R$, also $QR|_P$ und damit $R \in \overrightarrow{PQ}$. Insgesamt erhalten wir $t = \overrightarrow{PQ}$ und $t = g \setminus s$.*

Fall 2: *$P \in s$. Dieser Fall ergibt sich analog.* #

Beispiel 4.4. (a) *$\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ erfüllt das Vollständigkeitsaxiom (V),*

denn: Seien $g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ eine Gerade und (s,t) ein Dedekindschnitt von g. Für beliebige, aber feste $A \neq B \in g$ schreiben wir

$$g = \{\lambda A + (1-\lambda)B : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

und setzen

$$S := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda A + (1-\lambda)B \in s\} \quad \text{sowie} \quad T := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda A + (1-\lambda)B \in t\}.$$

Wegen $g = s \dot\cup t$ gilt hierbei $\mathbb{R} = S \dot\cup T$. Nun sind entweder alle $p \in S$ kleiner als alle $q \in T$ oder umgekehrt, da es sonst $p_1, p_2 \in S$ und $q_1, q_2 \in T$ gäbe mit $p_1 > q_1$ und $p_2 < q_2$. Zwangsläufig läge für diese Punkte einer der folgenden drei Fälle vor.

Fall 1: *$q_1 > p_2$. Dann gälte $p_1 > q_1 > p_2$ und es folgte die Existenz eines Punktes in t, der zwischen zwei Punkten von s liegt.*

Fall 2: *$q_1 = p_2$. Unter dieser Voraussetzung wären S und T und damit auch s und t nicht disjunkt.*

Fall 3: *$q_1 < p_2$. Hier ergäbe sich $q_1 < p_2 < q_2$ und es folgte die Existenz eines Punktes in s, der zwischen zwei Punkten von t liegt.*

Da alle drei Möglichkeiten zu einem Widerspruch führen, müssen tatsächlich alle $p \in S$ kleiner als alle $q \in T$ sein oder umgekehrt, ohne Einschränkung ersteres. Nach dem Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen gibt es dann genau ein $r \in \mathbb{R}$ mit $p \leq r \leq q$ für alle $p \in S$ und alle $q \in T$. Dies ist äquivalent zur Existenz eines $P \in g$ derart, dass für alle $A \in s$ und alle $B \in t$ genau eine der folgenden Aussagen gilt:

$$P = A, \quad P = B \quad \text{oder} \quad A \star P \star B.$$

Damit ist die Gültigkeit von (V) nachgewiesen. #

(b) $\mathbb{A}^2(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})$ *erfüllt das Vollständigkeitsaxiom (V) nicht,*

denn: Dort lässt sich die x-Achse als die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$s = \{(x,0) \in (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})^2 : x < \pi\} \quad \text{und} \quad t = \{(x,0) \in (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})^2 : x > \pi\}$$

schreiben. Offenbar ist (s,t) ein Dedekindschnitt der x-Achse. Ein Punkt P wie in (V) gefordert existiert aber nicht, da π transzendent ist und somit nicht in $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ liegt. #

4.2 Euklidische Ebenen

Wir halten nun den bereits in der Einleitung dieses Kapitels beschriebenen Begriff der euklidischen Ebene in einer Definition fest:

Definition 4.5. *Eine Hilbertebene, die das Vollständigkeitsaxiom (V) und das Parallelenaxiom (P) erfüllt, heißt **euklidische Ebene**.*

Beispiel 4.6. *Nach den Beispielen 2.13, 3.24 und 4.4 ist die reelle affine Standardebene $\mathbb{E} := \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq)$ eine euklidische Ebene. Wir nennen sie das kartesische Modell der **euklidischen Standardebene**.*

Für euklidische Ebenen kann man auf naheliegende Weise einen Isomorphiebegriff einführen: Man versteht unter einem Isomorphismus euklidischer Ebenen eine bijektive Abbildung, die Geraden auf Geraden schickt und Anordnung sowie Kongruenz von Strecken und Winkeln erhält. Das zentrale Resultat in der Theorie der euklidischen Ebenen ist der folgende Satz:

Satz 4.7 (Hauptsatz für euklidische Ebenen)**.** *Jede euklidische Ebene ist isomorph zu $\mathbb{E}$.*

Der Beweis dieses Satzes ist sehr aufwändig und wird hier nicht durchgeführt. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in den Abschnitten 4.3 bis 4.8 unseres Lehrbuchs *Grundlagen der ebenen Geometrie*.

Eine Folgerung ist, dass wir den Beweis einer behaupteten Aussage in einer beliebigen euklidischen Ebene stets in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$ führen dürfen und dabei sowohl analytische als auch synthetische Methoden heranziehen können. Für „Sei $\mathbb{E}$ die euklidische Standardebene." schreiben wir künftig auch kurz $(\mathbb{E})$.

Exemplarisch untersuchen wir die synthetisch eingeführten Begriffe des Ergänzungswinkels und des Inneren eines Winkels mit dem in Abschnitt 1.3 eingeführten analytischen Winkelmaß quantitativ:

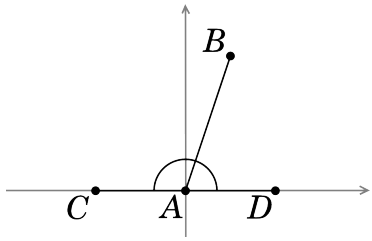
Proposition 4.8 $(\mathbb{E})$**.** *Seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ vier Punkte so, dass sowohl A, B, C als auch A, B, D in allgemeiner Lage sind. Dann gilt:*

(a) *Sind $\angle CAB$, $\angle BAD$ Ergänzungswinkel, dann gilt $\measuredangle CAB + \measuredangle BAD = \pi$. Insbesondere ist $\angle CAB$ genau dann ein rechter Winkel, wenn $\measuredangle CAB = \frac{\pi}{2}$ ist.*

(b) *Liegt der Punkt D im Inneren von $\angle BAC$, so gilt $\measuredangle BAD + \measuredangle DAC = \measuredangle BAC$.*

Beweis. Seien zunächst $\angle CAB$ und $\angle BAD$ Ergänzungswinkel. Dann gilt $C \star A \star D$, so dass es eine Bewegung gibt, die A auf den Ursprung und C, D auf Punkte auf der x-Achse abbildet, die auf verschiedenen Seiten von A liegen. Da Bewegungen Winkelgrößen unverändert lassen, können wir ohne Einschränkung von dieser Situation ausgehen. Weiter können wir C und D durch beliebige Punkte ihres jeweiligen von A ausgehenden Strahls ersetzen. Insgesamt können wir daher für geeignete $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ohne Einschränkung annehmen, es gelte

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Mit (1.12) folgt

$$\cos \measuredangle CAB = \frac{\langle C \mid B \rangle}{\|C\| \cdot \|B\|} = \frac{-b_1}{\|B\|} = -\frac{\langle B \mid D \rangle}{\|B\| \cdot \|D\|} = -\cos \measuredangle BAD.$$

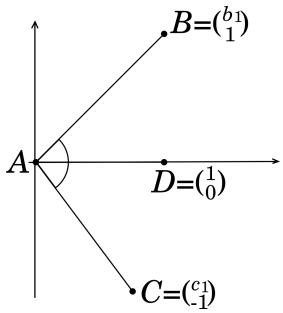
Da beide Winkelmaße im Intervall $(0, \pi)$ liegen, haben wir damit (a) gezeigt.

Beim Beweis von (b) können wir ohne Einschränkung von

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ausgehen. Da D im Inneren des Winkels $\angle BAC$ liegt, liegen B und C nach Lemma 3.22 auf verschiedenen Seiten der Geraden $\overleftrightarrow{AD}$, also der x-Achse. Ohne Einschränkung liege B in der oberen und C in der unteren Halbebene. Weil wir weiter B und C durch beliebige Punkte ihres jeweiligen von A ausgehenden Strahls ersetzen können, dürfen wir sogar annehmen, es gelte

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Wegen $CD|_{\overleftrightarrow{AB}}$ folgt mit den Überlegungen aus Beispiel 3.3

$$\begin{aligned} -\operatorname{sgn}(c_1 + b_1) &= \operatorname{sgn}\langle \begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix} \rangle = \operatorname{sgn}\langle C \mid B^\perp \rangle \\ &= \operatorname{sgn}\langle D \mid B^\perp \rangle = \operatorname{sgn}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix} \rangle = -\operatorname{sgn}(1) \end{aligned}$$

und somit $b_1 + c_1 > 0$. Mit (1.17) erhalten wir

$$\sin \measuredangle BAD = \frac{|\det(B\ D)|}{\|B\| \cdot \|D\|} = \frac{1}{\|B\|} \quad \text{und} \quad \sin \measuredangle DAC = \frac{|\det(D\ C)|}{\|D\| \cdot \|C\|} = \frac{1}{\|C\|}.$$

Mit den Additionstheoremen von Sinus und Kosinus folgt nun

$$\begin{aligned} \sin(\measuredangle BAD + \measuredangle DAC) &= \sin \measuredangle BAD \cos \measuredangle DAC + \cos \measuredangle BAD \sin \measuredangle DAC \\ &= \frac{1}{\|B\|}\frac{c_1}{\|C\|} + \frac{b_1}{\|B\|}\frac{1}{\|C\|} = \frac{c_1 + b_1}{\|B\|\|C\|} > 0, \\ \cos(\measuredangle BAD + \measuredangle DAC) &= \cos \measuredangle BAD \cos \measuredangle DAC - \sin \measuredangle BAD \sin \measuredangle DAC \\ &= \frac{b_1}{\|B\|}\frac{c_1}{\|C\|} - \frac{1}{\|B\|}\frac{1}{\|C\|} = \frac{b_1 c_1 - 1}{\|B\|\|C\|} = \frac{\langle B \mid C \rangle}{\|B\|\|C\|} = \cos \measuredangle BAC. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich schließlich wie verlangt $\measuredangle BAC = \measuredangle BAD + \measuredangle DAC$. □

4.3 Kreise

Kreise als geometrische Figuren haben wir bereits in Abschnitt 3.9 eingeführt. Da wir nun auch analytisch argumentieren dürfen, bietet sich aber eine etwas eingängigere Notation an. Von nun an schreiben wir für alle $M \in \mathbb{R}^2$ und alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$K_r(M) := \{P \in \mathbb{R}^2 : \|P - M\| = r\}$$

für den ***Kreis*** mit ***Mittelpunkt*** M und ***Radius*** r. Das ist insofern mit der alten Notation kompatibel, als für jeden beliebigen Punkt $A \in K_r(M)$ die Identität $K_r(M) = K(M, A)$ gilt. Die Punkte $P \in \mathbb{R}^2$ mit $\|P - M\| < r$ liegen ***innerhalb*** von $K_r(M)$, die Punkte mit $\|P - M\| > r$ ***außerhalb***.

Wir hatten schon in Proposition 3.73 festgestellt, dass ein Kreis mit einer Geraden durch seinen Mittelpunkt immer genau zwei Schnittpunkte hat. Wir studieren nun den Durchschnitt eines Kreises mit einer beliebigen Geraden:

Proposition 4.9 ($\mathbb{E}$). *Sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei $g = g_{P,v}$ eine Gerade in $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ mit $P, v \in \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0$. Dann gilt:*

(a) $|K \cap g| = 2 \iff \|P - M\|^2 < r^2 + \langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|}\rangle^2$.

*In diesem Fall nennt man g eine **Sekante** von K.*

(b) $|K \cap g| = 1 \iff \|P - M\|^2 = r^2 + \langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|}\rangle^2$.

*In diesem Fall nennt man g eine **Tangente** von K.*

(c) $|K \cap g| = 0 \iff \|P - M\|^2 > r^2 + \langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|}\rangle^2$.

*In diesem Fall nennt man g eine **Passante** von K.*

In den Fällen (b) und (c) besitzt g keine Punkte im Inneren von K.

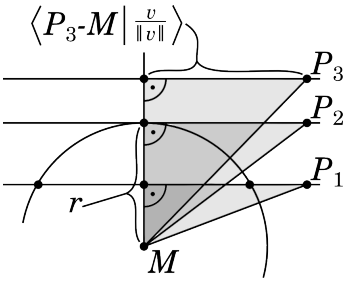


Abbildung 4.1: Der Durchschnitt von K und g ist zwei-, ein- bzw. nullelementig, falls der Lotfußpunkt von M auf g im Kreis bzw. auf dem Kreis bzw. außerhalb des Kreises liegt.

Beweis. Sei $Q = P + \lambda v \in g$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& Q \in K_r(M) \\
\iff & r = \|Q - M\| \\
\iff & r^2 = \|Q - M\|^2 = \langle Q - M \mid Q - M\rangle = \langle P + \lambda v - M \mid P + \lambda v - M\rangle \\
& \quad = \|P - M\|^2 + 2\lambda\langle P - M \mid v\rangle + \lambda^2\|v\|^2 \\
\iff & 0 = \|v\|^2 \cdot \lambda^2 + 2\langle P - M \mid v\rangle \cdot \lambda + \left(\|P - M\|^2 - r^2\right)
\end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Gleichung in λ, deren Lösungsmenge in Abhängigkeit vom Vorzeichen $\in \{+, 0, -\}$ ihrer Diskriminante

$$\left(2\langle P - M \mid v\rangle\right)^2 - 4 \cdot \|v\|^2 \cdot \left(\|P - M\|^2 - r^2\right)$$

$$= -4\|v\|^2 \cdot \left(\|P-M\|^2 - r^2 - \langle P-M \mid \frac{v}{\|v\|}\rangle^2\right)$$

zweielementig, einelementig oder leer ist. In den Fällen (b) und (c) gilt wegen $Q \in g = g_{Q,v}$

$$\|Q-M\|^2 \geq r^2 + \langle Q-M \mid \frac{v}{\|v\|}\rangle^2 \geq r^2,$$

so dass g keinen Punkt im Inneren von K besitzt. □

Korollar 4.10 ($\mathbb{E}$)**.** *Seien $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $g = g_{P,v}$ eine Gerade in $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ mit $P, v \in \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0$. Für ein beliebiges $Q \in K \cap g$ sind dann die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *g ist Tangente an K,*

(ii) $\measuredangle(Q-M, v) = \frac{\pi}{2}$.

Beweis. Ohne Einschränkung setzen wir $P = Q$. Nach Proposition 4.9 gilt dann

$$\begin{aligned} g \text{ Tangente an } K &\iff \|Q-M\|^2 = r^2 + \langle Q-M \mid \frac{v}{\|v\|}\rangle^2 \\ &\overset{Q\in K}{\iff} \langle Q-M \mid \frac{v}{\|v\|}\rangle^2 = 0 \\ &\iff (Q-M) \perp v \\ &\iff \measuredangle(Q-M, v) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Wir wissen jetzt, wie viele Schnittpunkte eine gegebene Gerade mit einem gegebenen Kreis hat. Um etwas über deren Lage in Erfahrung zu bringen, führen wir eine Hilfsgröße ein:

Definition 4.11 ($\mathbb{E}$)**.** *Sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt. Dann heißt*

$$\kappa_K(P) := \|P-M\|^2 - r^2$$

*die **Potenz** von P in Bezug auf K.*

Offensichtlich beschreibt das Vorzeichen der Potenz, ob der Punkt P in K, auf K oder außerhalb von K liegt. Der Betrag der Potenz liefert dafür Informationen über die (relative) Lage der Schnittpunkte von Sekanten oder Tangenten von K in P:

Satz 4.12 (Zwei-Sehnen-Satz, $\mathbb{E}$)**.** *Sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $P \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ ein Punkt. Sei weiter g eine Sekante von K durch P mit $g \cap K = \{A, B\}$. Dann gilt*

$$\|P-A\| \cdot \|P-B\| = |\kappa_K(P)|,$$

für alle durch P verlaufenden Sekanten von K ist also das Produkt der sogenannten ***Sehnenabschnitte*** *gleich.*

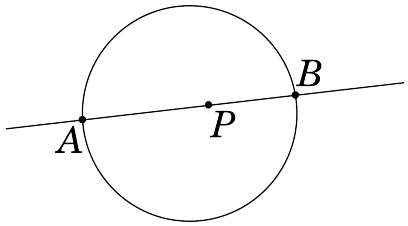


Abbildung 4.2: Eine ***Sehne*** eines Kreises K ist die Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten einer gegebenen Sekante von K.

Beweis. Sei $g_{P,v}$ eine Sekante durch P mit $\|v\| = 1$. Wie im Beweis von Proposition 4.9 liegt $Q := P + \lambda v$ genau dann im Durchschnitt $g_{P,v} \cap K$, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \|v\|^2 \cdot \lambda^2 + 2\langle P - M \mid v\rangle \cdot \lambda + \left(\|P - M\|^2 - r^2\right) \\ &= \lambda^2 + 2\langle P - M \mid v\rangle \cdot \lambda + \kappa_K(P) \end{aligned}$$

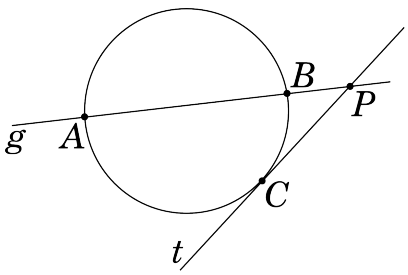
gilt. Da $g_{P,v}$ eine Sekante von K ist, hat diese quadratische Gleichung zwei reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es gilt also $\kappa_K(P) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ und ohne Einschränkung $A = P + \lambda_1 v$ und $B = P + \lambda_2 v$. Es folgt die Behauptung

$$\|P - A\| \cdot \|P - B\| = \|\lambda_1 v\| \cdot \|\lambda_2 v\| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2| = |\kappa_K(P)|.$$

□

Satz 4.13 (Sehnen-Tangenten-Satz, $\mathbb{E}$)**.** *Sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt außerhalb von K. Seien weiter g eine Sekante von K durch P mit $g \cap K =: \{A, B\}$ und t eine Tangente an K durch P mit $t \cap K =: \{C\}$. Dann gilt*

$$\|P - A\| \cdot \|P - B\| = \|P - C\|^2 = |\kappa_K(P)|.$$



Beweis. Nach dem Zwei-Sehnen-Satz 4.12 ist nur das zweite Gleichheitszeichen zu zeigen. Dessen Beweis erfolgt analog, außer, dass es statt zwei verschiedenen Nullstellen λ_1, λ_2 der quadratischen Gleichung nurmehr eine doppelte Nullstelle μ gibt. □

Wir studieren nun den Durchschnitt zweier Kreise und betrachten dazu die Menge der Punkte, die bezüglich zweier verschiedener Kreise die gleiche Potenz haben. Es stellt sich heraus, dass diese eine Gerade ist, deren Durchschnitte mit je einem der beteiligten Kreise mit dem Durchschnitt der Kreise untereinander übereinstimmen. So lässt sich die Frage des Durchschnitts zweier Kreise auf die bereits behandelte Frage des Durchschnitts eines Kreises mit einer Geraden zurückführen:

Proposition 4.14 ($\mathbb{E}$)**.** *Für je zwei Kreise $K_1 = K_r(M)$ und $K_2 = K_s(N)$ mit $M \neq N \in \mathbb{R}^2$ und $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:*

(a) $p_{K_1,K_2} := \{P \in \mathbb{R}^2 : \kappa_{K_1}(P) = \kappa_{K_2}(P)\}$ *ist eine Gerade, die* ***Potenzgerade*** *von K_1 und K_2.*

(b) $p_{K_1,K_2} \perp \overleftrightarrow{MN}$,

(c) $K_1 \cap K_2 = K_1 \cap p_{K_1,K_2} = K_2 \cap p_{K_1,K_2}$.

Insbesondere schneiden sich zwei verschiedene Kreise in höchstens zwei Punkten.

Beweis. Zum Nachweis von (a) sei $P \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P \in p_{K_1,K_2} &\iff \kappa_{K_1}(P) = \kappa_{K_2}(P) \\ &\iff \|P - M\|^2 - r^2 = \|P - N\|^2 - s^2 \\ &\iff \|P\|^2 - 2\langle P \mid M\rangle + \|M\|^2 - r^2 = \|P\|^2 - 2\langle P \mid N\rangle + \|N\|^2 - s^2 \\ &\iff \langle P \mid N - M\rangle = \frac{1}{2}(r^2 - s^2 + \|N\|^2 - \|M\|^2). \end{aligned}$$

Aufgrund von $M \neq N$ ist p_{K_1,K_2} insbesondere nicht leer. Ist nun $A \in p_{K_1,K_2}$ fixiert, so ergibt sich

$$P \in p_{K_1,K_2} \iff \langle P \mid N - M\rangle = \langle A \mid N - M\rangle \iff \langle P - A \mid N - M\rangle = 0.$$

Die obige Gleichung beschreibt genau die Hesse'sche Normalform der Geraden $g_{A,(N-M)^\perp}$, was neben (a) auch (b) impliziert. Die erste Gleichung in (c) ergibt sich nun direkt aus der Äquivalenz

$$\begin{aligned} P \in K_1 \cap K_2 &\iff \kappa_{K_1}(P) = 0 \text{ und } \kappa_{K_2}(P) = 0 \\ &\iff \kappa_{K_1}(P) = 0 \text{ und } \kappa_{K_1}(P) = \kappa_{K_2}(P) \\ &\iff P \in K \cap p_{K_1,K_2}, \end{aligned}$$

und die zweite Gleichung folgt aus Symmetriegründen. □

Nachdem wir nun wissen, dass der Durchschnitt zweier verschiedener Kreise höchstens zwei Elemente hat, gilt es nun herauszufinden, unter welchen Voraussetzungen es keinen, einen oder zwei Schnittpunkte gibt. Dabei hilft uns das folgende Lemma:

Lemma 4.15 ($\mathbb{E}$)**.** *Sei φ eine Bewegung der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$, und sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt*

$$\varphi(K_r(M)) = K_r(\varphi(M)),$$

insbesondere bilden also Bewegungen Kreise auf Kreise ab.

Beweis. Sei zunächst $P \in K_r(M)$ ein Punkt. Dann gilt mit den bekannten Bewegungseigenschaften $\|\varphi(M) - \varphi(P)\| = \|M - P\| = r$, so dass $\varphi(P)$ in $K_r(\varphi(M))$ liegt. Es folgt

$$\varphi(K_r(M)) \subseteq K_r(\varphi(M)).$$

Da nach Beispiel 3.31 mit φ auch φ^{-1} eine Bewegung ist, gilt analog

$$\varphi^{-1}(K_r(\varphi(M))) \subseteq K_r(\varphi^{-1} \circ \varphi(M)) = K_r(M).$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$K_r(M) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(K_r(M)) = \varphi^{-1}(\varphi(K_r(M))) \subseteq \varphi^{-1}(K_r(\varphi(M))) \subseteq K_r(M),$$

so dass in allen Teilmengenbeziehungen Gleichheit gelten muss, was das Lemma zeigt. □

Satz 4.16 (Kreis-Kreis-Schnitt-Eigenschaft, $\mathbb{E}$)**.** *Für zwei Kreise $K_1 = K_r(M)$ und $K_2 = K_s(N)$ mit $M, N \in \mathbb{R}^2$ und $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

(i) *K_1 besitzt einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb von K_2.*[1]

(ii) $|K_1 \cap K_2| = 2$.

Beweis. Da im Fall $M = N$ stets sowohl Aussage (i) als auch Aussage (ii) falsch ist, können wir für den Rest des Beweises ohne Einschränkung $M \neq N$ annehmen und, da die Fragestellung unter Bewegungen invariant ist, sogar

$$K_1 = K_r(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad K_2 = K_s(N) \text{ mit } N = \begin{pmatrix}n\\0\end{pmatrix} \text{ für ein } n > 0.$$

Für einen Schnittpunkt $S = \binom{x}{y}$ gilt

$$\begin{aligned} S \in K_1 \cap K_2 &\Longrightarrow \|S - M\| = r \text{ und } \|S - N\| = s \\ &\Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } (x-n)^2 + y^2 = s^2 \\ &\Longrightarrow 2xn - n^2 = x^2 - (x-n)^2 = r^2 - s^2 \\ &\Longrightarrow x = \frac{r^2 - s^2 + n^2}{2n}. \end{aligned}$$

Die x-Koordinate eines Schnittpunkts ist also eindeutig. Da jeder Schnittpunkt insbesondere auf K_1 liegen muss, folgt daher

$$\begin{aligned} |K_1 \cap K_2| = 2 &\Longleftrightarrow y^2 = r^2 - \left(\frac{r^2 - s^2 + n^2}{2n}\right)^2 \text{ hat zwei Lösungen} \\ &\Longleftrightarrow -r < \frac{r^2 - s^2 + n^2}{2n} < r \\ &\overset{n>0}{\Longleftrightarrow} -2nr < r^2 - s^2 + n^2 < 2nr \end{aligned}$$

[1] Aus Symmetriegründen besitzt dann auch K_2 einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb von K_1.

$$\begin{aligned}
&\iff (n-r)^2 < s^2 < (n+r)^2 \\
&\iff \|\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}\|^2 < s^2 < \|\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}\|^2 \\
&\iff \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ liegt innerhalb von } K_2 \text{ und } \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ liegt außerhalb von } K_2.
\end{aligned}$$

Es verbleibt zu zeigen, dass dies äquivalent dazu ist, dass es auf K_1 je irgendeinen Punkt innerhalb beziehungsweise außerhalb von K_2 gibt. Dem ist aber so,

denn: Aus der Analysis wissen wir, dass sich ein beliebiger Punkt $P \in K_1$ in der Form

$$P = P(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit einem } t \in \mathbb{R}$$

schreiben lässt. Durch den Abstand

$$\|P(t) - N\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + (n - r\cos t)^2} = \sqrt{r^2 - 2nr\cos t + n^2}$$

ist offenbar eine stetige Funktion in der Variablen $t \in \mathbb{R}$ gegeben. Wegen $n > 0$ nimmt diese ihre (globalen) Minima in $t \in 2\mathbb{Z}\pi$ und ihre (globalen) Maxima in $t \in (2\mathbb{Z}+1)\pi$ an. Es ist also $\binom{r}{0}$ derjenige Punkt von K_1, der den kleinsten Abstand zu N hat, und $\binom{-r}{0}$ der Punkt von K_1 mit dem größten Abstand. Gibt es nun irgendwelche Punkte $A, B \in K_1$, so dass A innerhalb und B außerhalb von K_2 liegt, dann folgt mit dem soeben Bewiesenen

$$s > \|A - N\| \geq \|\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} - N\| \quad \text{und} \quad s < \|B - N\| \leq \|\begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} - N\|.$$

Es liegt also auch $\binom{r}{0}$ innerhalb und $\binom{-r}{0}$ außerhalb von K_2. Da die andere Schlussrichtung trivial ist, folgt hieraus die Behauptung. #

□

Die gerade nachgewiesene Kreis-Kreis-Schnitt-Eigenschaft ist nicht besonders gut dafür geeignet, für zwei gegebene euklidische Kreise tatsächlich nachzuprüfen, ob sie sich schneiden. In diesem Kontext ist das folgende, angenehmere Kriterium sehr nützlich. Es ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis von Satz 4.16 und macht auch eine Aussage, wenn zwei gegebene Kreise nur einen oder gar keinen Punkt gemeinsam haben:

Korollar 4.17 ($\mathbb{E}$). *Für $K_1 = K_r(M)$, $K_2 = K_s(N)$ mit $M, N \in \mathbb{R}^2$, $r \geq s \in \mathbb{R}_{>0}$ und $K_1 \neq K_2$ gilt*

$$\begin{aligned}
\big|\|M-N\| - r\big| < s \quad &\iff \quad |K_1 \cap K_2| = 2, \\
\big|\|M-N\| - r\big| = s \quad &\iff \quad |K_1 \cap K_2| = 1, \\
\big|\|M-N\| - r\big| > s \quad &\iff \quad |K_1 \cap K_2| = 0.
\end{aligned}$$

Im Rest dieses Abschnitts verwenden wir Kreise dazu, Dreiecke genauer zu studieren:

Satz 4.18 (Peripheriewinkelsatz, $\mathbb{E}$). *Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ Punkte auf dem Kreis $K_r(U)$ um einen Punkt $U \in \mathbb{R}^2$ mit einem Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Seien weiter die Seiten der Geraden $\overleftrightarrow{AB}$ mit S_1 und S_2 bezeichnet. Dann gilt für einen von A und B verschiedenen Punkt $C \in K_r(U) \cap S_1$*

$$\measuredangle ACB = \begin{cases} \frac{1}{2}\measuredangle AUB & \text{für } U \in S_1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } U \in \overleftrightarrow{AB}, \\ \pi - \frac{1}{2}\measuredangle AUB & \text{für } U \in S_2. \end{cases}$$

Insbesondere ist die Winkelgröße $\measuredangle ACB$ nicht von der Wahl des Punktes $C \in K_r(U) \cap S_1$ abhängig.

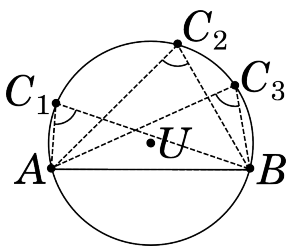


Abbildung 4.3: U und die drei Punkte C_1, C_2, C_3 liegen auf derselben Seite der Geraden zwischen A und B. Die markierten drei Winkel sind also kongruent.

Beweis. Sei $C \in K_r(U) \cap S_1$ ein beliebiger, aber fest gewählter Punkt. Dann unterteilt das Dreieck $\triangle ABC$ das Innere des Kreises in vier durch die Lage auf den verschiedenen Seiten von $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ und $\overleftrightarrow{BC}$ definierte Teile und die drei Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ selbst. So ergeben sich für den Beweis des Satzes sieben Fälle, von denen wir hier allerdings nur einen behandeln. Die übrigen Fälle werden in Übungsaufgabe 4.4 behandelt.

Liege dafür U im Sinne von Definition 3.27 im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$. Nach dem Satz von der Winkelsumme 1.67 für das Dreieck $\triangle AUB$ gilt

$$\measuredangle AUB = \pi - \measuredangle UAB - \measuredangle UBA.$$

Da U insbesondere im Inneren der Winkel $\angle CAB$ und $\angle CBA$ liegt, gelten nach Proposition 4.8

$$\measuredangle UAB = \measuredangle CAB - \measuredangle CAU \quad \text{und} \quad \measuredangle UBA = \measuredangle CBA - \measuredangle CBU.$$

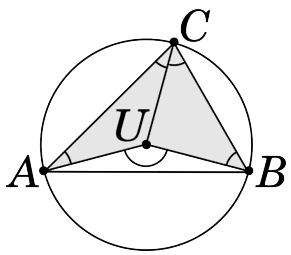
Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} \measuredangle AUB &= \pi - (\measuredangle CAB - \measuredangle CAU) - (\measuredangle CBA - \measuredangle CBU) \\ &= (\pi - \measuredangle CAB - \measuredangle CBA) + (\measuredangle CAU + \measuredangle CBU). \end{aligned}$$

Mit dem Satz von der Winkelsumme 1.67 für das Dreieck $\triangle ABC$ folgt

$$\measuredangle AUB = \measuredangle ACB + (\measuredangle CAU + \measuredangle CBU).$$

Nun ist U auch der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$, so dass $\|U - A\| = \|U - B\| = \|U - C\|$ gilt und also die Dreiecke $\triangle AUC$ und $\triangle BUC$ gleichschenklig sind.



Insbesondere gilt nach Proposition 3.56

$$\angle CAU \simeq \angle ACU \quad \text{und} \quad \angle CBU \simeq \angle UCB.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\measuredangle AUB = \measuredangle ACB + (\measuredangle ACU + \measuredangle UCB) = 2\measuredangle ACB,$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen verwendet haben, dass U auch im Inneren des Winkels $\angle ACB$ liegt. Damit ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen. □

Korollar 4.19 (Satz des Thales, $\mathbb{E}$)**.** *Seien $A, U, B \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte mit $A \star U \star B$ und $\|U - A\| = \|U - B\| = r$. Ist dann $C \in \mathbb{R}^2$ ein dritter Punkt auf dem Kreis $K_r(U)$, so ist der Winkel $\angle ACB$ ein rechter.*

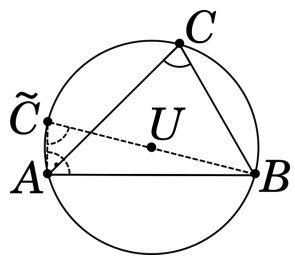
Beweis. Das ist gerade der Peripheriewinkelsatz für $U \in \overleftrightarrow{AB}$. □

Satz 4.20 (Verschärfung des Sinussatzes, $\mathbb{E}$)**.** *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Winkelgrößen (α, β, γ), Seitenlängen (a, b, c) und Umkreis $K_r(U)$. Dann gilt*

$$2r = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung liege U auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ wie C.[2] Nach dem bereits gezeigten Sinussatz 1.68 genügt es für den Beweis des Satzes $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$ zu zeigen. Da U und C auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ liegen, liegt der zweite Schnittpunkt $\tilde{C}$ der Geraden $\overleftrightarrow{BU}$ mit dem Kreis $K_r(U)$ auch auf derselben Seite wie C.

[2] Ist dies nicht der Fall, so liegt U zwangsläufig auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{BC}$ wie A, und wir können nach einer Umbenennung der Punkte A, B, C denselben Beweis führen. Das schließt ausdrücklich auch den Fall mit ein, dass U auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.



Nach dem Peripheriewinkelsatz 4.18 gilt also weiterhin $\measuredangle A\tilde{C}B = \gamma$. Andererseits ist aber $\tilde{a} := \|\tilde{C} - B\| = 2r$ leicht zu berechnen, und nach dem Satz des Thales 4.19 ist $\angle \tilde{C}AB$ ein rechter Winkel. Da nach Korollar 1.69 der Sinus eines Winkels in rechtwinkligen Dreiecken als Quotient der Längen von Gegenkathete und Hypothenuse ausgedrückt werden kann, gilt die zu beweisende Beziehung

$$\sin\gamma = \frac{c}{\tilde{a}} = \frac{c}{2r}.$$

□

Satz 4.21 (Eulergleichung, $\mathbb{E}$)**.** *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Schwerpunkt S, Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U. Dann gilt die* ***Eulergleichung***

$$3S = H + 2U.$$

Beweis. Nach Definition gilt für den Schwerpunkt $3S = A + B + C$. Es folgt

$$\langle 3S \mid B - A\rangle = \langle A + B + C \mid B - A\rangle = \langle A + B \mid B - A\rangle + \langle C \mid B - A\rangle.$$

Nach Definition ist $B - A$ ein Normalenvektor der Geraden h_C bzw. m_{AB}. Die jeweiligen Hesse'schen Normalformen (vgl. Beispiel 3.3) lauten also

$$h_C = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \langle P \mid B - A\rangle = \langle C \mid B - A\rangle\},$$
$$m_{AB} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \langle P \mid B - A\rangle = \langle \frac{1}{2}(A + B) \mid B - A\rangle\}.$$

Mit $H \in h_C$ und $U \in m_{AB}$ folgt

$$\langle H \mid B - A\rangle = \langle C \mid B - A\rangle,$$
$$\langle 2U \mid B - A\rangle = \langle A + B \mid B - A\rangle.$$

Zusammengenommen ergibt sich

$$\langle 3S \mid B - A\rangle = \langle 2U \mid B - A\rangle + \langle H \mid B - A\rangle$$

und somit

$$\langle 3S - 2U - H \mid B - A\rangle = 0.$$

Analog kann man $\langle 3S - 2U - H \mid C - A\rangle = 0$ zeigen. Nun sind aber die Punkte A, B, C in allgemeiner Lage, so dass insbesondere $B - A$ und $C - A$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden. Da das Skalarprodukt in der euklidischen Standardebene nicht ausgeartet ist, folgt $3S - 2U - H = 0$ und somit der Satz. □

In Übungsaufgabe 4.5 zeigen wir, dass Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt genau dann paarweise verschieden sind, wenn das zugehörige Dreieck nicht gleichseitig ist. In diesem Fall gilt noch folgende erstaunliche Folgerung:

Korollar 4.22 ($\mathbb{E}$). *Sei $\triangle ABC$ ein nicht gleichseitiges Dreieck mit Schwerpunkt S, Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.*

(a) *Es gilt $H \star S \star U$, insbesondere sind die Punkte H, S, U kollinear.*

(b) $\frac{\|H-S\|}{\|U-S\|} = 2$.

*Die Gerade $\overleftrightarrow{HU}$ heißt die **Eulergerade** von $\triangle ABC$.*

Beweis. Aus $3S = H + 2U$ folgt $S = \frac{1}{3}H + \frac{2}{3}U$. Da nach Übungsaufgabe 4.5 in einem nicht gleichseitigen Dreieck der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt verschieden sind, folgt daraus $H \star S \star U$ sowie

$$\|H - S\| = \|\frac{2}{3}H - \frac{2}{3}U\| = 2 \cdot \|\frac{1}{3}H - \frac{1}{3}U\| = 2 \cdot \|S - U\| = 2 \cdot \|U - S\|.$$

□

4.4 Die Inversion am Kreis

Mit den Methoden von Abschnitt 4.3 studieren wir nun mit den Kreisspiegelungen eine neue Klasse von Abbildungen in der euklidischen Standardebene. Diese werden wir in Abschnitt 5.1 dazu benutzen, ein Modell einer Hilbertebene ohne Parallelenaxiom zu konstruieren:

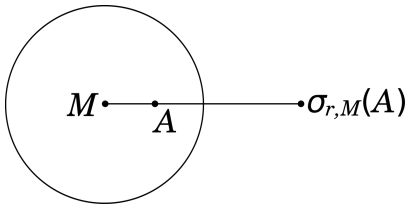
Definition 4.23 ($\mathbb{E}$). *Zu einem gegebenen Kreis $K_r(M)$ definieren wir die Abbildung*

$$\sigma_{r,M} : \mathbb{R}^2 \setminus \{M\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{M\},$$

indem wir jedem $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ den eindeutig bestimmten Punkt $\sigma_{r,M}(A)$ auf dem Strahl $\overrightarrow{MA}$ mit

$$\|M - A\| \cdot \|M - \sigma_{r,M}(A)\| = r^2$$

*zuordnen. Die Abbildung $\sigma_{r,M}$ heißt die **Inversion** oder auch **Spiegelung** am Kreis $K_r(M)$, und $\sigma_{r,M}(A)$ heißt das bezüglich $K_r(M)$ zu A **Inverse**.*



Wir fixieren für den Rest dieses Abschnitts einen Kreis $K := K_r(M)$ und schreiben kurz σ für $\sigma_{r,M}$. Unmittelbar aus Definition 4.23 folgt:

Proposition 4.24 ($\mathbb{E}$). (a) $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$. *Insbesondere ist σ bijektiv und zu sich selbst invers.*

(b) *σ bildet Punkte im Inneren von K auf Punkte außerhalb von K ab und umgekehrt. Punkte auf K werden auf sich selbst abgebildet.*

Ab sofort verwenden wir die abkürzende Schreibweise $A' := \sigma(A)$ für alle $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$. Im Fall, dass A innerhalb von K liegt, geben wir nun eine geometrische Konstruktion für A' an:

Proposition 4.25 ($\mathbb{E}$). *Sei $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ ein Punkt im Inneren von K. Seien weiter P und Q die Schnittpunkte der Lotgeraden $\ell_{\overleftrightarrow{AM}}A$ mit K und $t_K P$ bzw. $t_K Q$ die Tangenten an K in P bzw. Q. Dann schneiden sich die drei Geraden $t_K P$, $t_K Q$ und $\overleftrightarrow{AM}$ im Punkt A'.*

Beweis. Die drei Geraden $t_K P$, $t_K Q$ und $\overleftrightarrow{AM}$ haben einen gemeinsamen Schnittpunkt S,

denn: Der Schnittpunkt von $\overleftrightarrow{AM}$ mit $t_K P$ heiße S_P, der mit $t_K Q$ entsprechend S_Q. Wegen $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$ ist das Dreieck $\triangle MPQ$ gleichschenklig. Nach dem SSrW-Kriterium 3.71 sind daher die Dreiecke $\triangle MAP$ und $\triangle MAQ$ kongruent, insbesondere gilt $\angle PMA \simeq \angle QMA$. Nach dem WSW-Kriterium 3.58 sind schließlich auch die Dreiecke $\triangle MPS_P$ und $\triangle MQS_Q$ kongruent, insbesondere gilt $\overline{MS_P} \cong \overline{MS_Q}$ und somit die Behauptung. #

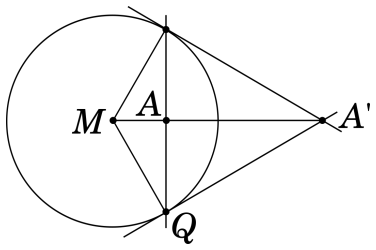
Die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\triangle MAP$ und $\triangle MPS$ haben dieselbe Winkelgröße bei M. Mit Korollar 1.69 folgt

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - P\|} = \frac{\|M - P\|}{\|M - S\|},$$

also

$$\|M - A\| \cdot \|M - S\| = \|M - P\|^2 = r^2.$$

Da A' der einzige Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{MA}$ mit dieser Eigenschaft ist, gilt $S = A'$.



□

Proposition 4.26 ($\mathbb{E}$). *Sei $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$, $g_M \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ eine Gerade mit $M \in g_M$, $g_{\neg M} \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ eine Gerade mit $M \notin g_{\neg M}$ und $K_s(N)$ ein Kreis durch M. Dann gilt:*

(a) $\sigma(\overrightarrow{MA} \setminus \{M\}) = \overrightarrow{MA} \setminus \{M\}$,

(b) $\sigma(g_M \setminus \{M\}) = g_M \setminus \{M\}$.

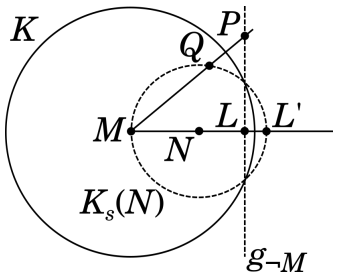
(c) $\sigma(g_{\neg M})$ *ist ein Kreis durch* M*, bei dem der Punkt* M *entfernt ist.*

(d) $\sigma(K_s(N) \setminus \{M\})$ *ist eine Gerade, die nicht durch* M *geht.*

Beweis. Behauptung (a) folgt unmittelbar aus der Definition von σ und aus $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$, und Behauptung (b) folgt direkt aus (a).

Zum Beweis von Behauptung (c) betrachten wir nun $L := L_{g_{\neg M}} M$, seinen Spiegelpunkt L' und den Kreis

$$K_s(N) \quad \text{mit } N := \frac{1}{2}(M + L') \text{ und } s := \|L' - N\|.$$



Wir zeigen $\sigma(g_{\neg M}) = K_s(N) \setminus \{M\}$. Sei dafür zunächst $P \in g_{\neg M}$ beliebig. Dann hat die Gerade $\overleftrightarrow{MP}$ außer M noch einen zweiten Schnittpunkt Q mit dem Kreis $K_s(N)$,

denn: Sonst wäre $\overleftrightarrow{MP}$ die Tangente an $K_s(N)$ in M und stünde somit senkrecht auf $\overleftrightarrow{MN} = \ell_{g_{\neg M}} M$. Dann wären $g_{\neg M}$ und $\overleftrightarrow{MP}$ parallele Geraden durch P, also identisch. Das kann nicht sein, da dann M auf $g_{\neg M}$ läge. #

Nach dem Satz von Thales 4.19 ist $\angle MQL'$ ein rechter Winkel. Andererseits ist nach Konstruktion $\angle MLP$ ebenfalls ein rechter Winkel, so dass mit Korollar 1.69

$$\frac{\|M - Q\|}{\|M - L'\|} = \frac{\|M - L\|}{\|M - P\|}$$

folgt. Mit Definition 4.23 erhalten wir

$$\|M - P\| \cdot \|M - Q\| = \|M - L\| \cdot \|M - L'\| = r^2$$

und somit $P' = Q \in K_s(N) \setminus \{M\}$.

Für $Q \in K_s(N) \setminus \{M\}$ sind umgekehrt die Geraden $\overleftrightarrow{MQ}$ und $g_{\neg M}$ nicht parallel,

denn: Sonst stünde $\overleftrightarrow{MQ}$ orthogonal auf $\overleftrightarrow{MN}$ und wäre somit eine Tangente an $K_s(N)$, was nicht sein kann, da $\overleftrightarrow{MQ}$ ja zwei voneinander verschiedene Schnittpunkte mit $K_s(N)$ hat. #

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von $\overleftrightarrow{MQ}$ und $g_{\neg M}$ mit P, dann sind wieder $\angle MQL'$ und $\angle MLP$ rechte Winkel, und mit derselben Argumentation wie gerade eben folgt $Q = P' \in \sigma(g_{\neg M})$. Insgesamt haben wir somit Behauptung (c) gezeigt.

Behauptung (d) zeigt man analog zu Behauptung (c). □

Auch wenn wir das σ-Bild eines Kreises, der nicht durch M geht, noch nicht kennen, legt Proposition 4.26 nahe, im Kontext der Inversion am Kreis Geraden und Kreise in einem gemeinsamen Oberbegriff zusammenzufassen:

Definition 4.27 ($\mathbb{E}$). *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die eine Gerade oder ein Kreis ist, nennen wir auch eine* ***verallgemeinerte Gerade****. Für eine beliebige verallgemeinerte Gerade g und ein beliebiges $P \in g$ heißt*

$$t_g P := \begin{cases} g & \text{für } g \text{ eine Gerade,} \\ \text{die Tangente an } g \text{ in } P & \text{für } g \text{ ein Kreis} \end{cases}$$

die ***Tangente*** *an die verallgemeinerte Gerade g im Punkt P.*

Proposition 4.28 ($\mathbb{E}$). *Für eine verallgemeinerte Gerade g mit $g \cap K = \{P, Q\}$ gilt:*

(a) $t_K P \perp t_g P \iff t_g P = \overleftrightarrow{MP}$.

(b) $t_K P \perp t_g P \iff t_K Q \perp t_g Q$. *Im Orthogonalitätsfall heißen K und g zueinander* ***orthogonal****.*

Beweis. Nach Korollar 4.10 gilt $t_K P \perp \overleftrightarrow{MP}$. Gilt nun zunächst $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$, so folgt sofort

$$t_K P \perp \overleftrightarrow{MP} = t_g P.$$

Gilt umgekehrt $t_K P \perp t_g P$, so folgt daraus

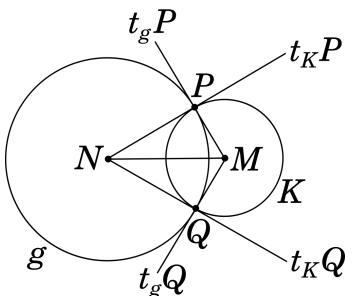
$$\overleftrightarrow{MP} \perp t_K P \perp t_g P$$

und also $t_g P \parallel \overleftrightarrow{MP}$. Mit $P \in t_g P \cap \overleftrightarrow{MP}$ erhalten wir $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$ und insgesamt somit Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) genügt es offenbar, eine der behaupteten Implikationen zu zeigen. Gelte also ohne Einschränkung $t_K P \perp t_g P$. Nach Teil (a) gilt dann $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$.

Fall 1: g ist eine Gerade. Nach Voraussetzung gilt $Q \in g = t_g P = \overleftrightarrow{MP}$, also $g = \overleftrightarrow{MQ}$. Nach Korollar 4.10 folgt $t_K Q \perp \overleftrightarrow{MQ} = g = t_g Q$ und somit Behauptung (b) in diesem Fall.

Fall 2: g ist ein Kreis. Schreiben wir $g = K_s(N)$, so gilt nach dem SSS-Kriterium 3.58 die Kongruenz von Dreiecken $\triangle MPN \cong \triangle MQN$ und insbesondere die Kongruenz von Winkeln $\angle MPN \simeq \angle MQN$. Analog zu $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$ zeigt man $t_K P = \overleftrightarrow{NP}$, so dass wegen $t_K P \perp t_g P$ der Winkel $\angle MPN \simeq \angle MQN$ ein rechter Winkel ist. Es folgt $\overleftrightarrow{MQ} \perp \overleftrightarrow{NQ}$ und mit Korollar 4.10 weiter $t_K Q = \overleftrightarrow{NQ}$ und $t_g Q = \overleftrightarrow{MQ}$. Das zeigt Behauptung (b) auch in diesem Fall.



□

Proposition 4.29 ($\mathbb{E}$). *Für einen Kreis $K_s(N)$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Ist $K_s(N)$ orthogonal zu K, so gilt $\sigma(K_s(N)) = K_s(N)$ und $M \notin K_s(N)$.*

(b) *Gibt es ein $A \in K_s(N) \setminus K$ mit $A' \in K_s(N)$, so ist $K_s(N)$ orthogonal zu K.*

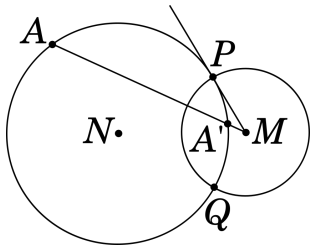
Beweis. Sei $K_s(N)$ orthogonal zu K mit Schnittpunkten P und Q. Nach Proposition 4.28 (a) gilt dann $t_{K_s(N)}P = \overleftrightarrow{MP}$ und $t_{K_s(N)}Q = \overleftrightarrow{MQ}$. Für ein beliebiges $A \in K_s(N) \setminus \{P, Q\}$ schneidet die Gerade $\overleftrightarrow{AM}$ den Kreis $K_s(N)$ in einem weiteren Punkt B,

denn: Wäre dem nicht so, gälte $\overleftrightarrow{AM} = t_{K_s(N)}A$, und mit $\overleftrightarrow{MA}$, $\overleftrightarrow{MP}$ und $\overleftrightarrow{MQ}$ gäbe es also drei paarweise verschiedene Tangenten an $K_s(N)$ durch M. Nach Korollar 4.10 wären dann $\angle MAN$, $\angle MPN$ und $\angle MQN$ allesamt rechte Winkel und nach dem Satz des Thales 4.19 lägen somit die drei paarweise verschiedenen Punkte A, P, Q im Durchschnitt von $K_s(N)$ mit dem „Thales-kreis" $K(\frac{1}{2}(M+N), N)$ lägen. Nach Proposition 4.14 stimmten daher die Kreise $K_s(N)$ und $K(\frac{1}{2}(M+N), N)$ miteinander überein. Wegen $N \in K(\frac{1}{2}(M+N), N)$ und $N \notin K_s(N)$ kann das aber nicht sein. #

Nach dem Sehnen-Tangenten-Satz 4.13 gilt jetzt

$$\|M - A\| \cdot \|M - B\| = \|M - P\|^2 = r^2$$

und also $B = A' \in K_s(N)$ nach Definition 4.23. Da A in $K_s(N) \setminus \{P, Q\}$ beliebig gewählt war und mit $P' = P \in K_s(N)$ sowie $Q' = Q \in K_s(N)$ folgt die Inklusion $\sigma(K_s(N)) \subseteq K_s(N)$. Mit $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$ erhalten wir auch die umgekehrte Inklusion und insgesamt $\sigma(K_s(N)) = K_s(N)$.



Wäre schließlich $M \in K_s(N)$, so lägen nach der gerade erfolgten Diskussion für $A \in K_s(N) \setminus \{P, Q\}$ beliebig die drei kollinearen Punkte M, A, A' allesamt auf dem Kreis $K_s(N)$, was nicht sein kann, da sich nach Proposition 4.9 eine Gerade und ein Kreis in höchstens zwei Punkten schneiden. Zusammengefasst haben wir also Behauptung (a) gezeigt.

Wir zeigen nun Behauptung (b). Da $K_s(N)$ mit A und A' je einen Punkt innerhalb und außerhalb von K enthält, schneiden sich K und $K_s(N)$ nach Satz 4.16 in genau zwei Punkten P und Q. Nach Definition 4.23 gilt

$$\|M - A\| \cdot \|M - A'\| = r^2 = \|M - P\|^2.$$

Mit der Umkehrung des Sehnen-Tangenten-Satzes 4.13[3] folgt $\overleftrightarrow{MP} = t_{K_s(N)}P$. Durch zweifache Anwendung von Korollar 4.10 erhalten wir daraus

$$\overleftrightarrow{MP} = t_{K_s(N)}P \perp \overleftrightarrow{NP} = t_K P.$$

Nach Proposition 4.28 (b) sind also K und $K_s(N)$ orthogonal zueinander und (b) ist gezeigt. □

Teil (a) von Proposition 4.29 lässt sich durch Verwendung einer zentrischen Streckung zu Proposition 4.30 verallgemeinern:

Proposition 4.30 ($\mathbb{E}$). *Für einen Kreis $K_s(N)$ mit $M \notin K_s(N)$ ist $\sigma(K_s(N))$ wieder ein Kreis.*

Für verallgemeinerte Geraden g, h sowie Punkte $A \in g \cap h$ mit $t_g A \neq t_h A$, $B \in g \setminus h$ und $C \in h \setminus g$ lässt sich durch Betrachtung eines geeigneten Winkels zwischen den Tangenten eine verallgemeinerte Winkelgröße $\measuredangle_{(g,h)}BAC$ einführen. Mit einigem Aufwand ließe sich nun zeigen, dass Inversionen am Kreis verallgemeinerte Winkelgrößen in folgendem Sinne erhalten:

Satz 4.31 ($\mathbb{E}$). *Für je zwei verallgemeinerte Geraden g, h und drei von M verschiedene Punkte $A \in g \cap h$ mit $t_g A \neq t_h A$, $B \in g \setminus h$ und $C \in h \setminus g$ gilt*

$$\measuredangle_{(g',h')}B'A'C' = \measuredangle_{(g,h)}BAC.$$

4.5 Übungsaufgaben

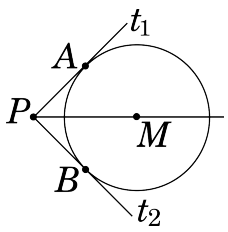
Aufgabe 4.1 ($\mathbb{E}$). *Seien A ein Punkt auf einem Kreis K, t die Tangente an K in A und s eine Sekante von K durch A. Sei weiter r derjenige Teilstrahl von s mit Ausgangspunkt A, der nicht den zweiten Schnittpunkt von s mit K enthält. Dann liegen $r \setminus \{A\}$ und $K \setminus \{A\}$ auf verschiedenen Seiten von t.*

Hinweis: *Ohne Einschränkung können Sie für den Beweis annehmen, der Mittelpunkt des Kreises sei der Ursprung und A liege auf der positiven x-Achse. Bestimmen Sie eine Geradengleichung von s aus einer geeigneten Parameterdarstellung des zweiten Schnittpunktes.*

Aufgabe 4.2 ($\mathbb{E}$). *Sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt außerhalb von K. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.*

(a) *Es gibt genau zwei Tangenten t_1, t_2 an K durch P.*

(b) *Ist $t_1 \cap K =: \{A\}$ und $t_2 \cap K =: \{B\}$, so ist $\overleftrightarrow{MP}$ die Winkelhalbierende von $\angle APB$.*



[3] Die Korrektheit dieser Umkehrung sieht man ein, wenn man sich den Beweis des Zwei-Sehnen-Satzes 4.12 und des Sehnen-Tangenten-Satzes 4.13 anschaut.

Aufgabe 4.3 (Satz von Monge, $\mathbb{E}$). *Es seien $M, M', M'' \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden sowie $r, r', r'' \in \mathbb{R}_{>0}$. Für die drei Kreise $K := K_r(M), K' := K_{r'}(M'), K'' := K_{r''}(M'')$ gilt*

(a) *Die Punkte M, M', M'' sind genau dann kollinear, wenn die Potenzgeraden $p_{K,K'}, p_{K,K''}, p_{K',K''}$ alle parallel zueinander sind.*

(b) *Die Punkte M, M', M'' sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn sich die drei Potenzgeraden $p_{K,K'}, p_{K,K''}, p_{K',K''}$ in genau einem Punkt schneiden.*

Aufgabe 4.4 ($\mathbb{E}$). *Zeigen Sie die übrigen Fälle im Beweis des Peripheriewinkelsatzes 4.18.*

Aufgabe 4.5 ($\mathbb{E}$). *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Schwerpunkt S, Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *Zwei der drei Punkte S, H, U stimmen überein.*

(ii) $S = H = U$.

(iii) $\triangle ABC$ *ist* ***gleichseitig****, es gilt also* $\|A - B\| = \|B - C\| = \|C - A\|$.

KAPITEL 5

Nichteuklidische Geometrie

Schon seit Euklid war die Notwendigkeit des Parallelenaxioms in der euklidischen Geometrie umstritten. Jedoch konnte diese Frage erst im 19. Jahrhundert endgültig geklärt werden. Dies gelang durch Angabe eines Modells einer Geometrie, die mit Ausnahme des Parallelenaxioms allen von Euklid geforderten Eigenschaften genügt, in unserer Sprache also durch Angabe eines Modells einer Hilbertebene, die das Vollständigkeitsaxiom (V) aber nicht das Parallelenaxiom (P) erfüllt. Wir werden in Abschnitt 5.1 mit dem Poincaré'schen Kreismodell ein solches Modell einführen, uns hierbei aber auf die Inzidenzstruktur beschränken.

5.1 Das Poincaré'sche Kreismodell

Definition 5.1. *Eine Hilbertebene, die das Vollständigkeitsaxiom (V) und das* ***hyperbolische Axiom***

(H) *Zu jedem Punkt A und jeder Gerade g, die nicht durch A geht, gibt es unendlich viele zu g parallele Geraden durch A.*

erfüllt, heißt ***hyperbolische Ebene****.*

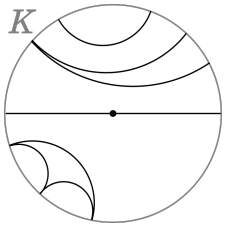
Wir fixieren für den Rest dieses Abschnitts

- den Ursprung $O := \binom{0}{0}$ der euklidischen Standardebene,
- den Einheitskreis $K := K_1(O)$ in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$,
- die Inversion $\sigma := \sigma_{1,O}$ an K.

Dann heißt das Paar $\mathbb{H}_k := (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k)$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &:= \{A \in \mathbb{R}^2 : A \text{ liegt im Inneren von } K\}, \\ \mathbf{G}_k &:= \{g \cap \mathbf{P}_k : g \text{ zu } K \text{ orthogonale verallgemeinerte Gerade}\} \end{aligned}$$

das ***Poincaré'sche Kreismodell***. Die Elemente von $\mathbf{P}_k$ nennen wir hierbei ***k-Punkte***, die Elemente von $\mathbf{G}_k$ heißen ***k-Geraden***. Hierbei heißen diejenigen k-Geraden, die von euklidischen Geraden herstammen, k-Geraden ***vom ersten Typ***, diejenigen, die von euklidischen Kreisen herstammen, k-Geraden ***vom zweiten Typ***.



Zur besseren Unterscheidbarkeit von den Objekten in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$ werden wir die entsprechenden Objekte in $\mathbb{H}_k$ künftig immer mit einem Index „k" kennzeichnen. So bezeichnen wir beispielsweise die k-Verbindungsgerade zweier k-Punkte $A, B \in \mathbf{P}_k$ mit $\overleftrightarrow{AB}^k$.

Definition 5.2 ($\mathbb{E}$)**.** *Die zu einer beliebigen k-Geraden vom ersten Typ gehörige euklidische Gerade und der zu einer beliebigen k-Geraden vom zweiten Typ gehörige euklidische Kreis haben jeweils genau zwei Schnittpunkte mit K. Diese Schnittpunkte nennen wir die* ***Endpunkte*** *der k-Geraden.*

Proposition 5.3 ($\mathbb{E}$)**.** *Das Poincaré'sche Kreismodell* $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k)$ *ist eine Inzidenzebene.*

Beweis. Als erstes zeigen wir das Inzidenzaxiom (I_1), dass also durch je zwei k-Punkte genau eine k-Gerade geht. Seien dafür zwei k-Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}_k$ gegeben.

Fall 1: A, B, O **sind kollinear in** $\mathbb{E}$**.** Dann ist $\overleftrightarrow{AB} \cap \mathbf{P}_k$ eine k-Gerade durch A und B. In $\mathbb{E}$ gilt (I_1), so dass jede weitere k-Gerade durch A und B vom zweiten Typ wäre, also ein Durchschnitt eines zu K orthogonalen Kreises $K_r(M)$ durch A, B mit $\mathbf{P}_k$. So etwas gibt es aber nicht,

denn: Nach Teil (a) von Proposition 4.29 lägen dann mit A, B auch A', B' auf $K_r(M)$. Wegen

$$\overleftrightarrow{AA'} = \overleftrightarrow{AO} = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{OB} = \overleftrightarrow{B'B}$$

enthielte also $K_r(M)$ vier kollineare Punkte, was nach Proposition 4.9 nicht sein kann. #

Fall 2: A, B, O **sind in** $\mathbb{E}$ **in allgemeiner Lage.** Offensichtlich geht dann keine k-Gerade vom ersten Typ durch A, B. Andererseits enthält nach Teil (a) von Proposition 4.29 jeder zu K orthogonale Kreis $K_r(M) \subseteq \mathbb{E}$ durch A, B auch den Punkt A'. Die Punkte A, A', B sind in allgemeiner Lage, da sonst mit O, A, A' auch O, A, B kollinear wären. Nach dem Umkreissatz 3.74 gibt es also einen eindeutig bestimmten Kreis $K_r(M) \subseteq \mathbb{E}$ durch A, A', B. Nach Teil (b) von Proposition 4.29 sind wegen $A, A' \in K_r(M)$ die Kreise K und $K_r(M)$ orthogonal zueinander, so dass $K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$ die eindeutig bestimmte k-Gerade durch A, B ist.

Für (I_2) müssen wir zeigen, dass auf jeder k-Geraden mindestens zwei k-Punkte liegen. Für eine k-Gerade vom ersten Typ ist dies einfach, denn diese ist der Durchschnitt einer Geraden

$g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ durch O mit dem Inneren des Kreises K. Für einen beliebigen Schnittpunkt P von g mit K ist dann beispielsweise $\frac{1}{2}(O+P)$ neben O ein zweiter k-Punkt. Eine k-Gerade vom zweiten Typ ist der Durchschnitt eines zu K orthogonalen Kreises $K_r(M)$ mit dem Inneren von K. Der Mittelpunkt M von $K_r(M)$ liegt dabei außerhalb von K,

denn: Ist P einer der Schnittpunkte von K und $K_r(M)$, so hat das Dreieck $\triangle OPM$ nach Definition der Orthogonalität einen rechten Winkel $\angle OPM$. Mit dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck 1.67 und Satz 3.69 gilt dann $\overline{OP} < \overline{OM}$. #

Seien P, Q die Endpunkte von $K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$. Dann liegen zwischen den Strahlen $\overrightarrow{MP}$ und $\overrightarrow{MQ}$ unendlich viele euklidische Strahlen aus M, die paarweise verschiedene Schnittpunkte mit $K_r(M)$ aufweisen. Unendlich viele solcher Schnittpunkte S liegen im Inneren von K,

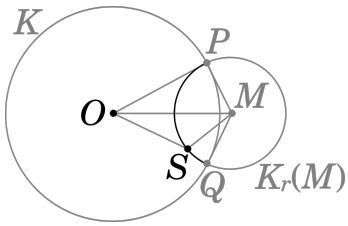
denn: Ohne Einschränkung seien S, O, M nicht kollinear und das Dreieck $\triangle OSM$ somit wohldefiniert. Nach Anwendung des Kosinussatzes 1.65 auf $\triangle OSM$ und des Satzes von Pythagoras 1.66 auf $\triangle OPM$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|O-S\|^2 &= \|O-M\|^2 + \|S-M\|^2 - 2 \cdot \|O-M\| \cdot \|S-M\| \cdot \cos \measuredangle SMO \\ &= (1+r^2) + r^2 - 2r \cdot \sqrt{1+r^2} \cdot \cos \measuredangle SMO. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Aus Symmetriegründen und da nach Konstruktion der Strahl $\overrightarrow{MS}$ zwischen den Strahlen $\overrightarrow{MP}$ und $\overrightarrow{MQ}$ liegt, gilt mit Korollar 1.69

$$\cos \measuredangle SMO > \cos \measuredangle PMO = \cos \measuredangle QMO = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Eingesetzt in (5.1) erhalten wir $\|O-S\|^2 < 1$ und somit die Behauptung. #



Es folgt, dass unendlich viele solcher Schnittpunkte S k-Punkte auf der gegebenen k-Geraden vom zweiten Typ sind, so dass wir (I_2) auch in diesem Fall nachgewiesen haben.

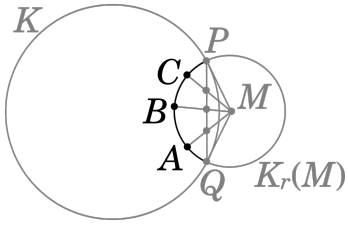
Zuletzt zeigen wir (I_3), dass es also drei k-Punkte in k-allgemeiner Lage gibt. Seien dafür $A, B \in \mathbf{P}_k$ zwei k-Punkte, so dass A, B, O in $\mathbb{E}$ in allgemeiner Lage sind. Dann ist $\overleftrightarrow{AB}^k$ der Durchschnitt eines zu K orthogonalen Kreises $K_r(M)$ durch A, B mit $\mathbf{P}_k$. Nach Teil (a) von Proposition 4.29 liegt O nicht auf $\overleftrightarrow{AB}^k$, so dass A, B, O auch in $\mathbb{H}_k$ in k-allgemeiner Lage sind. □

Um $\mathbb{H}_k$ zu einer Hilbertebene zu machen, müssen wir eine ***Anordnung*** $\star_k$ einführen. Hierzu definieren wir für drei k-kollineare k-Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}_k$:

- Liegen A, B, C auf einer k-Geraden vom ersten Typ, so setzen wir

$$A \star_k B \star_k C :\Longleftrightarrow A \star B \star C.$$

- Liegen A, B, C auf einer k-Geraden $g_k \in \mathbf{G}_k$ vom zweiten Typ, so gibt es einen zu K orthogonalen Kreis $K_r(M)$ mit $g_k = K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$. Wie schon im Beweis von Proposition 5.3 eingesehen liegt der Mittelpunkt M von $K_r(M)$ außerhalb von K.



Wir bezeichnen die Endpunkte von g_k mit P und Q, die nach Teil (b) von Lemma 3.22 existenten Schnittpunkte der Strahlen aus M durch A, B, C mit der Strecke $\overline{PQ}$ mit

$$\{\hat{A}\} := \overrightarrow{MA} \cap \overline{PQ}, \quad \{\hat{B}\} := \overrightarrow{MB} \cap \overline{PQ} \quad \text{und} \quad \{\hat{C}\} := \overrightarrow{MC} \cap \overline{PQ}$$

und setzen

$$\begin{aligned} A \star_k B \star_k C &:\Longleftrightarrow \hat{A} \star \hat{B} \star \hat{C} \\ &\Longleftrightarrow \hat{B} \text{ liegt im Inneren des (euklidischen) Winkels } \angle \hat{A}M\hat{C} \\ &\Longleftrightarrow B \text{ liegt im Inneren des (euklidischen) Winkels } \angle AMC. \end{aligned}$$

Als nächstes führen wir nun auf $\mathbb{H}_k$ einen ***Kongruenzbegriff*** $\cong_k$ ***für k-Strecken*** ein. Seien dafür $A \neq B$ zwei k-Punkte und seien P, Q die Endpunkte der k-Gerade $\overleftrightarrow{AB}^k$. Wir definieren dann zunächst den ***hyperbolischen Abstand*** $d_k(A, B)$ der k-Punkte A, B durch

$$d_k(A, B) := \begin{cases} |\log \mathrm{DV}(A, B, P, Q)| = |\log \left(\frac{\|A-P\|}{\|A-Q\|} \cdot \frac{\|B-Q\|}{\|B-P\|} \right)| & \text{für } A \neq B, \\ 0 & \text{für } A = B. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass d_k eine Metrik auf $\mathbf{P}_k$ ist. Für zwei Paare verschiedener k-Punkte $A_1 \neq B_1$ und $A_2 \neq B_2$ setzen wir

$$\overline{A_1B_1}^k \cong_k \overline{A_2B_2}^k \;:\Longleftrightarrow\; d_k(A_1, B_1) = d_k(A_2, B_2).$$

Einen ***Kongruenzbegriff*** $\simeq_k$ ***für k-Winkel*** führen wir über die verallgemeinerte Winkelgröße aus Abschnitt 4.4 ein: Für je drei k-Punkte A, B, C in k-allgemeiner Lage ist der k-Winkel $\angle_k BAC$ als Vereinigung

$$\angle_k BAC = \overrightarrow{AB}^k \cup \overrightarrow{AC}^k$$

definiert. Die k-Strahlen $\overrightarrow{AB}^k$ und $\overrightarrow{AC}^k$ liegen auf zwei eindeutig bestimmten k-Geraden $\overleftrightarrow{AB}^k \neq \overleftrightarrow{AC}^k$ und es gibt eindeutig bestimmte zu K orthogonale verallgemeinerte Geraden $g \neq h$ mit

$$\overleftrightarrow{AB}^k = g \cap \mathbf{P}_k \quad \text{und} \quad \overleftrightarrow{AC}^k = h \cap \mathbf{P}_k.$$

Man kann zeigen, dass $t_g A \neq t_h A$ ist. Insbesondere lässt sich dem k-Winkel $\angle_k BAC$ wegen der Eindeutigkeit von g bzw. h wohldefiniert die im Abschnitt zur Inversion am Kreis angedeutete verallgemeinerte Winkelgröße $\measuredangle_{(g,h)} BAC$ zuordnen. Wir schreiben

$$\measuredangle_k BAC := \measuredangle_{(g,h)} BAC$$

und nennen diesen Wert das ***k-Bogenmaß*** bzw. die ***k-Winkelgröße*** des k-Winkels $\angle_k BAC$. Für weitere drei k-Punkte D, E, F in k-allgemeiner Lage definieren wir so

$$\angle_k BAC \simeq_k \angle_k EDF :\Longleftrightarrow \measuredangle_k BAC = \measuredangle_k EDF.$$

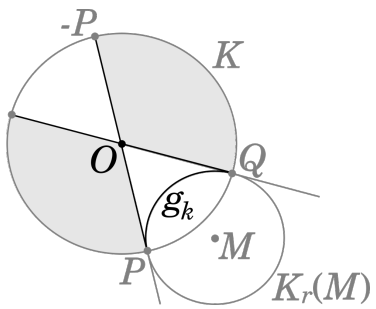
Satz 5.4 ($\mathbb{E}$). *Das Poincaré'sche Kreismodell* $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k, \cong_k, \simeq_k)$ *erfüllt die Axiome einer Hilbertebene sowie das Vollständigkeitsaxiom.*

Einen Beweis für diesen Satz führen wir nicht durch. Wir weisen aber nach, dass $\mathbb{H}_k$ das hyperbolische Axiom erfüllt:

Proposition 5.5 ($\mathbb{E}$). *Das Poincaré'sche Kreismodell* $\mathbb{H}_k$ *erfüllt das hyperbolische Axiom* (H). *Insbesondere ist* $\mathbb{H}_k$ *eine hyperbolische Ebene.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass es zu jedem k-Punkt A und jeder k-Geraden g_k, die nicht durch A geht, unendlich viele k-Geraden durch A gibt, die g_k nicht schneiden. Da $\mathbb{H}_k$ als Hilbertebene genügend viele Bewegungen hat, gibt es eine k-Bewegung, die A auf den Ursprung O abbildet und g_k wegen $A \notin g_k$ auf eine k-Gerade vom zweiten Typ. Es langt also zu zeigen, dass es zu jeder k-Geraden g_k vom zweiten Typ unendlich viele k-Geraden vom ersten Typ gibt, die g_k nicht schneiden.

Sei also g_k eine fest gewählte Gerade vom zweiten Typ, sei $K_r(M)$ der zu K orthogonale Kreis mit $g_k = K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$, und seien P, Q die Endpunkte von g_k.



Die Geraden $\overleftrightarrow{OP}$ und $\overleftrightarrow{OQ}$ sind die beiden Tangenten des Kreises $K_r(M)$, die durch O gehen. Es folgt, dass alle Punkte in $K_r(M) \setminus \{P\}$ auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{OP}$ liegen wie M,

denn: Läge ein $B \in K_r(M)$ auf der M entgegengesetzten Seite von $\overleftrightarrow{OP}$, so gäbe es ein $S \in \overleftrightarrow{MB} \cap \overleftrightarrow{OP}$ mit $M \star S \star B$. Es gälte dann $\|M - S\| < \|M - B\| = r$, so dass S ein innerer Punkt von $K_r(M)$ wäre. Da $\overleftrightarrow{OP}$ eine Tangente an $K_r(M)$ ist und Tangenten nach Proposition 4.9 keine Punkte im Inneren des zugehörigen Kreises besitzen, kann es ein solches B nicht geben. #

Wegen $Q \in K_r(M) \setminus \{P\}$ folgt, dass alle Punkte in $K_r(M) \setminus \{P\}$ auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{OP}$ liegen wie Q. Analog zeigt man, dass alle Punkte in $K_r(M) \setminus \{Q\}$ auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{OQ}$ liegen wie P. Mit Ausnahme von P, Q liegen also alle Punkte von $K_r(M)$ im Inneren des Winkels $\angle POQ$. Es folgt, dass ein Strahl aus O höchstens dann einen Schnittpunkt mit $K_r(M)$ hat, wenn er im Inneren von $\angle POQ$ verläuft oder mit einem der Strahlen $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ übereinstimmt.

Der von P verschiedene Schnittpunkt von $\overleftrightarrow{OP}$ und K ist $-P$. Es ist $\angle QO(-P)$ ein Ergänzungswinkel von $\angle POQ$, und für jeden Punkt A im Inneren von $\angle QO(-P)$ ist die Gerade $\overleftrightarrow{OA}$ die Vereinigung zweier Strahlen, die mit Ausnahme des Punktes O jeweils im Inneren eines Ergänzungswinkels zu $\angle POQ$ liegen. Für jeden Punkt A im Inneren von $\angle QO(-P)$ hat also die Gerade $\overleftrightarrow{OA}$ keinen Schnittpunkt mit $K_r(M)$. Auf der Strecke $\overline{Q(-P)}$ liegen wegen (A_2) unendlich viele Punkte, von denen bis auf Q und $-P$ alle im Inneren des Winkels $\angle QO(-P)$ liegen. Da die Verbindungsgeraden durch O und jeweils einen Punkt von $\overline{Q(-P)} \setminus \{Q, -P\}$ paarweise verschieden sind, erhalten wir durch Schneiden derselben mit $\mathbf{P}_k$ unendlich viele k-Geraden vom ersten Typ, die $K_r(M)$ und insbesondere g_k nicht schneiden. □

Man kann zeigen, dass die k-Innenwinkelsumme eines jeden k-Dreiecks kleiner als π ist. Unter Verwendung der Hyperbelfunktionen lässt sich analog zur klassischen Trigonometrie die hyperbolische Trigonometrie entwickeln.