

Modulformen

WS 2023 / 24 und SS 2024

Vorlesungsskript

Dr. Hendrik Kasten

17. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Möbius-Transformationen | 3 |
| 1.1 | Die Gruppe der Möbius-Transformationen | 3 |
| 1.2 | Fixpunkte von Möbius-Transformationen | 6 |
| 1.3 | Gruppenaktionen via Möbius-Transformationen | 10 |
| 1.4 | Die volle Modulgruppe | 16 |
| 1.5 | Kongruenzuntergruppen | 22 |
| 1.6 | Übungsaufgaben | 39 |
| 2 | Der Begriff der Modulform | 43 |
| 2.1 | Fourier-Entwicklungen | 43 |
| 2.2 | Modularität | 52 |
| 2.3 | Das Petersson-Skalarprodukt | 59 |
| 2.4 | Die Hecke-Abschätzung | 65 |
| 2.5 | Die Valenzformel | 69 |
| 2.6 | Übungsaufgaben | 80 |
| 3 | Modulformen zur vollen Modulgruppe | 83 |
| 3.1 | Eisenstein-Reihen | 83 |
| 3.2 | Der Struktursatz für holomorphe Modulformen | 91 |
| 3.3 | Poincaré-Reihen | 98 |
| 3.4 | Der Struktursatz für meromorphe Modulformen | 104 |
| 3.5 | Übungsaufgaben | 107 |
| 4 | Hecke-Theorie | 109 |
| 4.1 | Die allgemeine Hecke-Algebra | 109 |
| 4.2 | Die Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe | 115 |
| 4.3 | Hecke-Operatoren | 123 |
| 4.4 | Hecke-Eigenformen | 128 |
| 4.5 | Übungsaufgaben | 133 |
| 5 | Der Eichler-Shimura-Isomorphismus | 136 |
| 5.1 | Die Polynomdarstellung | 136 |
| 5.2 | Das Shimura-Produkt | 143 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.3 | Integration in der erweiterten oberen Halbebene | 149 |
| 5.4 | Der Eichler-Shimura-Isomorphismus | 154 |
| 5.5 | Eichler-Kohomologie | 167 |
| 5.6 | Übungsaufgaben | 175 |
| 6 | Manins Periodensatz | 177 |
| 6.1 | Perioden von Spitzenformen | 178 |
| 6.2 | Kettenbrüche | 181 |
| 6.3 | Die Wirkung von Hecke-Operatoren auf Perioden | 185 |
| 6.4 | Das Lemma von Heilbronn | 189 |
| 6.5 | Der Periodensatz | 195 |
| 6.6 | Algebraizität der Fourier-Koeffizienten normierter Hecke-Eigenformen | 205 |
| 6.7 | Übungsaufgaben | 214 |
| 7 | Die Eichler-Selberg-Spurformel | 215 |
| 7.1 | Dirichlet-Reihen | 215 |
| 7.2 | Die Umkehrrsätze von Mellin und Hecke | 222 |
| 7.3 | Perioden von nicht-cuspidalen Modulformen | 225 |
| 7.4 | Die Zagier-Eigenschaften | 233 |
| 7.5 | Periodenunterräume | 241 |
| 7.6 | Der Satz von Popa-Zagier | 252 |
| 7.7 | Die Kronecker-Hurwitz-Klassenzahlformel | 263 |
| 7.8 | Die Spurformel | 272 |
| 7.9 | Übungsaufgaben | 279 |
| 8 | Hecke-Theorie zu Kongruenzuntergruppen | 281 |
| 8.1 | Hecke-Paare | 281 |
| 8.2 | Hecke-Algebren | 284 |
| 8.3 | Hecke-Operatoren | 301 |
| 8.4 | Übungsaufgaben | 302 |

Möbius-Transformationen

In diesem Kapitel behandeln wir mit den Möbius-Transformationen eine spezielle Klasse von Abbildungen, die für die Theorie der Modulformen von grundlegender Bedeutung sind. Erstmals systematisch untersucht wurden die Möbius-Transformationen von ihrem Namensgeber AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790 - 1868).

1.1 Die Gruppe der Möbius-Transformationen

Für eine beliebige invertierbare komplexe (2×2) -Matrix

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \det A \neq 0\}$$

ist durch

$$\varphi_M(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ \infty & \text{für } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

für $c \neq 0$ beziehungsweise

$$\varphi_M(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{d} & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für $c = 0$ eine meromorphe Funktion φ_M auf $\overline{\mathbb{C}}$ gegeben,

denn: Im Fall $c = 0$ ist φ_M offensichtlich ein Polynom von Grad $n = 1$ und insbesondere eine meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$. Im Fall $c \neq 0$ ist $\varphi_M|_{\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}}$ holomorph, und $-\frac{d}{c}$ wegen

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{c} \cdot \frac{1}{z - (-\frac{d}{c})} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(-\frac{d}{c}), r \text{ hinreichend klein,}$$

ein Pol erster Ordnung. Hierbei ist zu beachten, dass $\frac{az+b}{c}$ für $z = -\frac{d}{c}$ wegen $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ von Null verschieden ist. $\varphi_M|_{\mathbb{C}}$ ist also eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} . Desweiteren gilt auf einer kleinen Umgebung von $z = 0$ in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$

$$\hat{\varphi}_M(z) = \varphi_M\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a\frac{1}{z} + b}{c\frac{1}{z} + d} = \frac{a + bz}{c + dz} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{a}{c},$$

die Singularität von φ_M in ∞ ist also hebbar. #

Definition 1.1. Für $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ beliebig heißt die so definierte meromorphe Funktion φ_M eine **Möbius-Transformation**. Für ein gegebenes $z \in \hat{\mathbb{C}}$ schreiben wir dabei oft auch einfacher $M\langle z \rangle$ für $\varphi_M(z)$.

Nach Konstruktion gilt offensichtlich

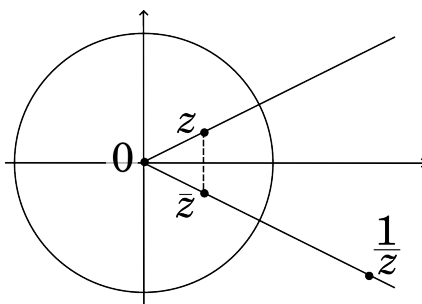
$$\varphi_{\lambda M} = \varphi_M \quad \text{für alle } M \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ und } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Es gibt insbesondere keinen Eins-zu-eins-Zusammenhang zwischen Matrizen aus $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ und Möbius-Transformationen.

Beispiel 1.2. Wählen wir

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}),$$

so erhalten wir die Möbius-Transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$, die insbesondere $M\langle 0 \rangle = \infty$ und $M\langle \infty \rangle = 0$ erfüllt.



Veranschaulichen können wir uns diese als Hintereinanderausführung der Spiegelung an der reellen Achse und der Inversion am Einheitskreis.

Proposition 1.3. (a) Für alle $M, N \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt $\varphi_M \circ \varphi_N = \varphi_{MN}$.

(b) Für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ ist φ_M bijektiv mit Umkehrabbildung $(\varphi_M)^{-1} = \varphi_{M^{-1}}$.

(c) Die Möbius-Transformationen bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Beweis. Behauptung (b) folgt aus (a), wenn man dort M^{-1} für N einsetzt, und Behauptung (c) folgt aus (a) und (b),

denn: Die Assoziativität der Hintereinanderausführung folgt aus (a) und der Assoziativität der Matrizenmultiplikation. $\varphi_{I_2} = \text{id}$ ist offensichtlich das neutrale Element. Nach (b) hat jede Möbius-Transformation schließlich ein Inverses. #

Behauptung (a) kann man schließlich direkt nachrechnen. Mit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

gilt nämlich außerhalb der Sonderfälle

$$\begin{aligned} (\varphi_M \circ \varphi_N)(z) &= \varphi_M\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) = \frac{a \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + b}{c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d} \\ &= \frac{a(a'z + b') + b(c'z + d')}{c(a'z + b') + d(c'z + d')} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \\ &= \varphi_{MN}(z). \end{aligned}$$

Den Rest rechnet man analog nach. (vgl. Übungsaufgabe 1.1) □

Geometrisch sind drei spezielle Typen von Möbius-Transformationen interessant, die wir nun untersuchen wollen. Da man alle anderen Möbius-Transformationen auf diese zurückführen kann, nennt man sie *Elementartypen*. Diese sind

Die Inversion. Der erste Elementartyp ist die bereits studierte Inversion aus Beispiel 1.2.

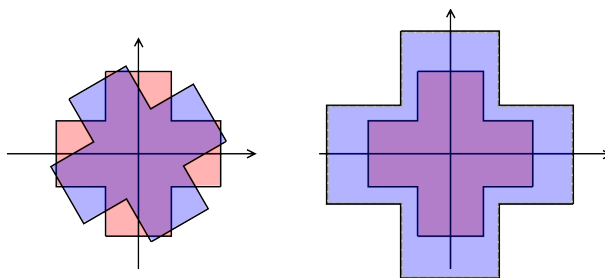
Drehstreckungen. Für

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ist durch

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} az & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

eine Drehstreckung mit Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ und Streckungsfaktor $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben.



Verschiebungen. Für

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit einem beliebigen } b \in \mathbb{C}$$

ist durch

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} z + b & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

eine Verschiebung um den festen Vektor b gegeben.

Proposition 1.4. Die Gruppe der Möbius-Transformationen wird von den Elementartypen erzeugt.

Beweis. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Ist hierbei $c = 0$, so gilt

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & \text{für } z \neq \infty, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

und wir können φ_M als Hintereinanderausführung einer Drehstreckung und einer Translation darstellen.

Ist $c \neq 0$, so errechnet man sofort

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} & \text{für } z \notin \{-\frac{d}{c}, \infty\}, \\ \infty & \text{für } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

Dies lässt sich auf folgende Weise aus Inversionen, Drehstreckungen und Translationen zusammensetzen.

$$z \mapsto cz \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{bc - ad}{c(cz + d)} \mapsto \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \varphi_M(z);$$

die beiden Sonderfälle überprüft man wieder separat. (vgl. Übungsaufgabe 1.2) □

1.2 Fixpunkte von Möbius-Transformationen

Definition 1.5. Sei $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$. Ein Punkt $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ heißt **Fixpunkt** bezüglich der Möbius-Transformation φ_M , falls $\varphi_M(z_0) = z_0$ gilt.

Beispiel 1.6. (a) Für $M = I_2$ ist jeder Punkt Fixpunkt von φ_M .

(b) Für $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat φ_M genau einen Fixpunkt, nämlich $z_0 = \infty$.

(c) Für $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat φ_M genau zwei Fixpunkte, nämlich $z_0 = \infty$ und $z_1 = -1$.

Proposition 1.7. Jede von der Identität verschiedene Möbius-Transformation hat entweder genau einen oder genau zwei Fixpunkte.

Beweis. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $\varphi_M \neq \text{id}$.

Fall 1: $c = 0$. Nach Definition ist dann ∞ ein Fixpunkt von φ_M und wegen $d \neq 0$ können wir

$$\varphi_M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad \text{für alle } z \neq \infty$$

schreiben. Für $a = d$ hat dies keinen weiteren Fixpunkt,

denn: Für $b \neq 0$ ist dies klar, da wir so eine Translation um $\frac{b}{d} \neq 0$ erhalten. Andererseits kann nicht gleichzeitig $c = 0$, $a = d$ und $b = 0$ gelten, da sonst M als skalares Vielfaches der Einheitsmatrix trivial operierte, was wir in unserer Voraussetzung ausgeschlossen hatten. #

Nehmen wir also $a \neq d$ an. Dann gilt

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ Fixpunkt von } \varphi_M \iff \frac{a}{d}z_0 + \frac{b}{d} = z_0 \iff z_0 = \frac{b}{d-a}.$$

In diesem Fall hat also φ_M genau einen oder genau zwei Fixpunkte.

Fall 2: $c \neq 0$. In diesem Fall ist weder ∞ noch $-\frac{d}{c}$ ein Fixpunkt von φ_M . Betrachten wir also $z \notin \{-\frac{d}{c}, \infty\}$. Ähnlich wie in Fall 1 gilt dann

$$\begin{aligned} z_0 \text{ Fixpunkt von } \varphi_M &\iff \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0 \\ &\iff cz_0^2 + (d-a)z_0 - b = 0 \\ &\iff z_0^2 + \frac{d-a}{c}z_0 - \frac{b}{c} = 0 \\ &\iff \left(z_0 + \frac{d-a}{2c}\right)^2 = \frac{b}{c} + \frac{(d-a)^2}{4c^2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat genau dann zwei komplexe Lösungen für $z_0 + \frac{d-a}{2c}$ und somit auch für z_0 , falls die rechte Seite ungleich Null ist. Ist andererseits die rechte Seite gleich Null, so ist offensichtlich $z_0 = -\frac{d-a}{2c}$ die einzige Lösung. Auch in diesem Fall hat also φ_M genau einen oder genau zwei Fixpunkte. \square

Korollar 1.8. Jede Möbius-Transformation ist durch die Angabe der Bilder dreier verschiedener Punkte eindeutig festgelegt.

Beweis. Seien φ und ψ Möbius-Transformationen und seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ mit

$$\varphi(z_k) = \psi(z_k) \quad \text{für } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Da die Möbius-Transformationen nach Proposition 1.3 eine Gruppe bilden, ist $\psi^{-1} \circ \varphi$ wieder eine Möbius-Transformation. Diese hat nach Konstruktion die drei Fixpunkte z_1, z_2, z_3 , ist nach Proposition 1.7 also die Identität. Es folgt $\psi = \varphi$ und somit das Korollar. \square

An dieser Stelle ist die offensichtliche nächste Frage, ob es andersherum auch für vorgegebene Bilder von drei Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ immer eine Möbius-Transformation gibt, die diese annimmt. Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir ein wenig ausholen:

Proposition 1.9. *Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschiedene Punkte und $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ein weiterer Punkt. Seien weiter Abbildungen gegeben wie folgt:*

Für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = z_3, \\ \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2} & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für $z_1 = \infty$:

$$DV(z, \infty, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{z-z_2}{z-z_3} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = z_3, \\ 1 & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für $z_2 = \infty$:

$$DV(z, z_1, \infty, z_3) := \begin{cases} \frac{z_1-z_3}{z-z_3} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = z_3, \\ 0 & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für $z_3 = \infty$:

$$DV(z, z_1, z_2, \infty) := \begin{cases} \frac{z-z_2}{z_1-z_2} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

In jedem Fall ist $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ eine Möbius-Transformation mit

$$DV(z_1, z_1, z_2, z_3) = 1, \quad DV(z_2, z_1, z_2, z_3) = 0 \quad \text{und} \quad DV(z_3, z_1, z_2, z_3) = \infty. \quad (1.1)$$

Für $z \notin \{z_1, z_2, z_3\}$ heißt die Zahl $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ das **Doppelverhältnis** der Punkte z, z_1, z_2, z_3 .

Bemerkung 1.10. (a) Die Spezialfälle für $z_k = \infty$ mit einem $k \in \{1, 2, 3\}$ ergeben sich aus dem endlichen Fall durch den Grenzübergang $z_k \rightarrow \infty$.

(b) Nach Korollar 1.8 ist $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ für gegebene z_1, z_2, z_3 die einzige Möbius-Transformation, die (1.1) erfüllt.

Beweis (Proposition 1.9). Wir zeigen die Proposition nur im Fall $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Die Fälle, in denen einer der Punkte z_1, z_2, z_3 gleich ∞ ist, behandelt man genauso (vgl. Übungsaufgabe 1.4).

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} z_1 - z_3 & -z_2(z_1 - z_3) \\ z_1 - z_2 & -z_3(z_1 - z_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Da nach Voraussetzung die Punkte z_1, z_2, z_3 paarweise verschieden sind, gilt

$$\det M = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3) \neq 0$$

und somit $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$. Wegen

$$\frac{(z_1 - z_3)z - z_2(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)z - z_3(z_1 - z_2)} = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}$$

stimmt $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ in diesem Fall offensichtlich mit der Möbius-Transformation φ_M überein und erfüllt bereits nach Definition

$$DV(z_3, z_1, z_2, z_3) = \infty.$$

Durch Einsetzen in die Formel der Proposition sieht man zudem sofort

$$\begin{aligned} DV(z_1, z_1, z_2, z_3) &= \frac{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_2)} = 1, \\ DV(z_2, z_1, z_2, z_3) &= \frac{(z_2 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_2)} = 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 1.11. Sind (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) jeweils Tripel paarweise verschiedener Punkte aus $\overline{\mathbb{C}}$, so gibt es genau eine Möbius-Transformation φ mit

$$\varphi(z_k) = w_k \quad \text{für } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Beweis. Nach Proposition 1.9 gibt es durch Doppelverhältnisse definierte Möbius-Transformationen φ_1 und φ_2 mit

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= 1, & \varphi_1(z_2) &= 0, & \varphi_1(z_3) &= \infty, \\ \varphi_2(w_1) &= 1, & \varphi_2(w_2) &= 0, & \varphi_2(w_3) &= \infty. \end{aligned}$$

Da die Möbius-Transformationen nach Proposition 1.3 unter Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden, ist auch $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ eine Möbius-Transformation. Nach Konstruktion erfüllt diese die verlangten Eigenschaften. Mit Korollar 1.8 folgt die Eindeutigkeit. □

Proposition 1.12 (Invarianz des Doppelverhältnisses). Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden und $z \in \overline{\mathbb{C}}$ beliebig, und sei φ eine beliebige Möbius-Transformation. Dann gilt

$$DV(\varphi(z), \varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3)) = DV(z, z_1, z_2, z_3).$$

Beweis. Wie im Beweis von Korollar 1.11 eingesehen lässt sich jede Möbius-Transformation φ schreiben als $\varphi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ mit zwei durch Doppelverhältnisse gegebenen Möbius-Transformationen φ_1 und φ_2 , die

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= 1, & \varphi_1(z_2) &= 0, & \varphi_1(z_3) &= \infty, \\ \varphi_2(\varphi(z_1)) &= 1, & \varphi_2(\varphi(z_2)) &= 0, & \varphi_2(\varphi(z_3)) &= \infty. \end{aligned}$$

erfüllen. Das ist äquivalent zu

$$\varphi_2(\varphi(z)) = \varphi_1(z),$$

was nach Einsetzen der Definitionen von φ_1 und φ_2 die Behauptung ergibt. \square

1.3 Gruppenaktionen via Möbius-Transformationen

Spannende Informationen über Möbius-Transformationen erhält man, wenn man sie danach klassifiziert, wie sie auf der RIEMANN'schen Zahlkugel¹ $\bar{\mathbb{C}}$ operieren. Dies untersuchen wir in diesem Abschnitt.

Definition 1.13. Sei $G = (G, \star)$ eine Gruppe und S eine Menge. Man sagt dann, G *operiere* (von links) auf S ,² falls es eine Abbildung

$$\circ : \begin{cases} G \times S & \rightarrow S, \\ (g, s) & \mapsto g \circ s \end{cases}$$

gibt mit

- (i) Das neutrale Element e_G von G erfüllt $e_G \circ s = s$ für alle $s \in S$.
- (ii) Es gilt $(g \star h) \circ s = g \circ (h \circ s)$ für alle $g, h \in G$ und alle $s \in S$.

Weiter nennt man

- $G_s := \{g \in G \mid g \circ s = s\}$ den **Stabilisator** von s in G ,
- $G \circ s := \{g \circ s \mid g \in G\}$ die **Bahn** von s unter G .

Durch $t \sim s :\iff t \in G \circ s$ ist eine Äquivalenzrelation auf S gegeben, und man hat eine disjunkte Zerlegung

$$S = \bigsqcup_j (G \circ s_j),$$

wobei s_j ein Vertretersystem der verschiedenen Bahnen durchläuft. Gibt es dabei nur eine Bahn, so nennt man die Aktion von G auf S auch **transitiv**.

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

²Um nicht mit der Verwendung des Wortes „Operation“ unguete Assoziationen zu wecken, werden wir im Folgenden stets von der **Aktion** der Gruppe G auf der Menge S sprechen, wenn G auf S operiert. Umgekehrt klingt es auch nicht besonders schön zu sagen, die Gruppe G „agiere“ auf S . Unsere Notation ist in diesem Fall also eine zusammengesetzte.

Beispiel 1.14. Die Gruppe $GL_2(\mathbb{C})$ operiert via Möbius-Transformationen

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{C}) \times \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \\ (M, z) &\mapsto \varphi_M(z) \end{aligned}$$

transitiv auf der Riemann'schen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$,

denn: Dass $GL_2(\mathbb{C})$ auf $\overline{\mathbb{C}}$ operiert, folgt mit Teil (a) von Proposition 1.3 und da die Einheitsmatrix offensichtlich trivial operiert. Die Transitivität folgt mit Korollar 1.11. #

Wir wollen nun die Elemente von $GL_2(\mathbb{C})$ danach klassifizieren, wie sie auf $\overline{\mathbb{C}}$ operieren.

Nach dem Satz über die JORDAN'sche Normalform³ ist jedes $M \in GL_2(\mathbb{C})$ zu einer der folgenden Matrizen konjugiert:

- (i) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$,
- (ii) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$,
- (iii) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}^\times$.

In Fall (i) ist hierbei φ_M trivial. In Fall (ii) ist φ_M im Wesentlichen⁴ eine Translation

$$z \mapsto \begin{cases} z + \lambda^{-1} & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

und M heißt *parabolisch*. In Fall (iii) ist die Transformation im Wesentlichen eine Homothetie

$$z \mapsto \begin{cases} cz & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases} \quad \text{mit } c := \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\},$$

und M heißt *elliptisch*, falls $|c| = 1$, *hyperbolisch*, falls $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und *loxodromisch* sonst. Diese Bezeichnungen gelten nicht nur für die jeweilige Matrix M sondern auch für die zugehörige Möbius-Transformation φ_M .

Wir beschränken uns nun auf Matrizen aus $SL_2(\mathbb{C})$ – das ist keine starke Einschränkung, da das Zentrum $\mathbb{C} \cdot I_2$ ja trivial operiert – und können so die Möbius-Transformationen über die Spur der zugehörigen Matrizen klassifizieren.⁵

Proposition 1.15. Sei $M \in SL_2(\mathbb{C}) \setminus \{\pm I_2\}$. Dann gilt

$$M \text{ ist } \begin{cases} \text{parabolisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \in \{\pm 2\}, \\ \text{elliptisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ und } |\operatorname{tr}(M)| < 2, \\ \text{hyperbolisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ und } |\operatorname{tr}(M)| > 2, \\ \text{loxodromisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

³Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

⁴Bis auf den Beitrag der Konjugationsmatrizen: Möbius-Transformationen sind im Allgemeinen nicht konjugationsinvariant. Eine offensichtliche Ausnahme bildet Fall (i), in dem die betrachteten Matrizen im Zentrum liegen.

⁵Das ist naheliegend, da die Spur einer Matrix bekanntlich konjugationsinvariant ist.



Beweis. Wegen $\det M = 1$ und $M \notin \{\pm I_2\}$ ist die Jordan'sche Normalform von M von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C}^\times \setminus \{\pm 1\}.$$

Die erste Äquivalenz ist damit offensichtlich und wir müssen uns nur noch mit Matrizen beschäftigen, deren Normalform vom zweiten Typ ist.

Ist nun M elliptisch, so gilt für das zugehörige λ nach Definition $|\lambda|^2 = \left| \frac{\lambda}{\lambda^{-1}} \right| = 1$; es liegt also auf dem Einheitskreis. Mit $\lambda \notin \{\pm 1\}$ folgt

$$\operatorname{tr}(M) = \lambda + \lambda^{-1} = \lambda + \bar{\lambda} = 2\operatorname{Re}(\lambda) \in (-2, 2) \subseteq \mathbb{R}.$$

Ist M hyperbolisch, so gilt für das zugehörige λ nach Definition $\lambda^2 = \frac{\lambda}{\lambda^{-1}} \in \mathbb{R}_{>0}$ und insbesondere $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es folgt

$$|\operatorname{tr}(M)| = |\lambda| + |\lambda|^{-1} > 2 \iff |\lambda|^2 + 1 > 2|\lambda| \iff (|\lambda| - 1)^2 > 0.$$

Letztere Aussage ist korrekt wegen $\lambda \notin \{\pm 1\}$.

Sei nun umgekehrt M konjugiert zu $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ mit reeller Spur $\lambda + \lambda^{-1}$. Falls λ reell ist, muss M nach Definition hyperbolisch sein. Ist λ nicht reell, so folgt mit $\lambda^{-1} = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2}$ sofort $|\lambda| = 1$ und M ist elliptisch.

Nebenbei haben wir mit dem letzten Argument gezeigt, dass M nicht loxodromisch sein kann, wenn seine Spur reell ist. Die letzte Äquivalenz folgt, da die vier Bedingungen auf der rechten Seite sich paarweise gegenseitig ausschließen. \square

Für unsere Zwecke sind vor allen Dingen reelle Matrizen aus $\operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ von Belang:

Definition 1.16. Für einen Unterring $R \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir die Untergruppe $\operatorname{GL}_2(R)^+ \subseteq \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$ durch

$$\operatorname{GL}_2(R)^+ := \{M \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det M > 0\}.$$

Die Untergruppeneigenschaft $\operatorname{GL}_2(R)^+ \subseteq \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$ begründet sich aus der Tatsache, dass $R^\times \cap (0, \infty)$ eine Untergruppe von R^\times ist. Zu beachten ist, dass für einen Unterring $R \subseteq \mathbb{R}$ die Gruppe $\operatorname{SL}_2(R)$ natürlich eine Untergruppe von $\operatorname{GL}_2(R)^+$ ist. Durch diese reelle Einschränkung gilt:

Proposition 1.17. (a) Die Gruppen $\operatorname{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ operieren transitiv auf der **oberen Halbebene** \mathbb{H} .

(b) Die Gruppen $\operatorname{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ operieren transitiv auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(c) $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})_i = \operatorname{SO}_2(\mathbb{R})$.

(d) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{H}, \\ M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\mapsto M\langle i \rangle \end{aligned}$$

ist eine Bijektion von Mengen.⁶

Beweis. Wegen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ reicht es aus zu zeigen, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ auf der oberen Halbebene \mathbb{H} operiert. Als Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ operiert $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ auf der Riemann'schen Zahlkugel $\bar{\mathbb{C}}$, so dass es sogar genügt zu zeigen, dass für jedes $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und jedes $z \in \mathbb{H}$ der Bildpunkt $M\langle z \rangle$ wieder in \mathbb{H} liegt. Das ist der Fall, denn in dieser Situation gilt

$$\mathrm{Im}(M\langle z \rangle) = \mathrm{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \mathrm{Im} \left(\frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2} \right) = \frac{\det(M) \cdot \mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0. \quad (1.2)$$

Um die Transitivität der Gruppenaktion zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass es für alle $z = x + iy \in \mathbb{H}$ ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M\langle i \rangle = z$ gibt. Das ist der Fall, denn in dieser Situation gilt

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \langle i \rangle = \frac{\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = x + iy = z.$$

Insgesamt haben wir somit Behauptung (a) gezeigt, denn wegen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ ist die Transitivität für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ offensichtlich.

Zum Beweis von Behauptung (b) stellen wir zunächst fest, dass Matrizen aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ wegen ihrer reellen Einträge offensichtlich Elemente aus $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wieder in diese Menge abbilden und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und also auch $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ somit auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ operiert. Die Transitivität der Aktion folgt, da ein beliebiges $s \in \mathbb{R}$ von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ nach ∞ geschickt wird.

Wir wollen nun Behauptung (c) zeigen. Zum Einen gilt für ein $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$$M\langle i \rangle = i \iff a = d \text{ und } b = -c.$$

Zum Anderen folgt in dieser Situation aus $\det(M) = 1$ auch $a^2 + b^2 = 1$ und wir sind fertig.

Behauptung (d) ergibt sich schließlich wie folgt:

$$\mathbb{H} \stackrel{(a)}{\cong} \{ \{ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid M\langle i \rangle = z \} \mid z \in \mathbb{H} \} \stackrel{(c)}{=} \{ M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \mid M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \}.$$

□

Es fällt nun auf, dass es in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ nach Proposition 1.15 keine loxodromischen Elemente geben kann. Die restlichen Typen lassen sich über die Fixpunkte der zugehörigen Möbius-Transformationen klassifizieren:

⁶Versieht man $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$, so wird diese Bijektion sogar zu einem Homöomorphismus.

⁷Da wir $z \in \mathbb{H}$ gewählt haben, entfällt die bei Möbius-Transformationen sonst übliche Fallunterscheidung und wir können einheitlich $M\langle z \rangle = \frac{az+b}{cz+d}$ schreiben.

Proposition 1.18. Sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$. Dann gilt

$$M \text{ ist } \begin{cases} \text{parabolisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau einen Fixpunkt und dieser liegt in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ \text{elliptisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau zwei Fixpunkte, diese sind zueinander konjugiert} \\ & \text{und einer von ihnen liegt in } \mathbb{H}, \\ \text{hyperbolisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau zwei Fixpunkte und diese liegen in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \end{cases}$$

Beweis. Nach Teil (a) von Proposition 1.17 gibt es zu jedem $z \in \mathbb{H}$ ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M\langle i \rangle = z$. Nach Teil (c) derselben Proposition gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_z &= M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \right\} \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \cdot M^{-1}. \end{aligned}$$

Der Stabilisator von z in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ besteht also ausschließlich aus Matrizen, die in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ konjugiert zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi)$$

sind. Mit der Ausnahme von $\pm I_2$ haben daher Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, die ein $z \in \mathbb{H}$ festlassen, je zwei verschiedene Eigenwerte von Betrag 1, sind definitionsgemäß also elliptisch.

Andererseits ist $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ auch der Stabilisator von $-i$, und mit $M\langle i \rangle = z$ gilt offensichtlich auch $M\langle -i \rangle = \bar{z}$. Ein Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, das ein $z \in \mathbb{H}$ stabilisiert, lässt also auch dessen komplex konjugiertes $\bar{z} \in \overline{\mathbb{H}}$ fest.⁸ Nach Proposition 1.7 hat jede nichttriviale Möbius-Transformation höchstens zwei Fixpunkte in $\overline{\mathbb{C}}$. Es folgt, dass jedes Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ höchstens ein $z \in \mathbb{H}$ stabilisieren kann.

Zusammengefasst: Wenn ein Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ein $z \in \mathbb{H}$ stabilisiert, dann ist es entweder $\pm I_2$ oder elliptisch. In letzterem Fall sind z und \bar{z} die einzigen Fixpunkte.

Sei nun $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ nach Teil (b) von Proposition 1.17 transitiv auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ operiert, gibt es ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M\langle \infty \rangle = s$. Wie für die Stabilisatoren in der oberen Halbebene gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_s = M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_\infty \cdot M^{-1}. \quad (1.3)$$

Der Stabilisator von ∞ lässt sich leicht aus Definition 1.1 ablesen; es gilt nämlich

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

⁸ $\overline{\mathbb{H}}$ bezeichnet hier die untere Halbebene der komplexen Zahlen mit negativem Imaginärteil.

Ein Element von $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ mit mindestens einem Fixpunkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ hat demnach reelle Eigenwerte, ist also entweder parabolisch oder hyperbolisch. Eine parabolische Transformation hat als Konjugat einer Translation offensichtlich nur einen Fixpunkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, eine hyperbolische Transformation als Konjugat der Multiplikation mit einem $c \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ zwei.

Da die Zerlegung von $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ in elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente disjunkt ist, folgt die Proposition. \square

Korollar 1.19. *Seien $M \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $M^m \neq \pm I_2$. Dann gilt: M^m ist genau dann elliptisch bzw. parabolisch bzw. hyperbolisch, wenn M es auch ist.*

Beweis. Die Rückrichtung folgt unmittelbar aus Proposition 1.18 und der Tatsache, dass wegen (1.3) jede Potenz einer parabolischen Matrix wieder parabolisch ist. Die Hinrichtung folgt dann mit der vollständigen Zerlegung von $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ in elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente. \square

Definition 1.20. *Sei $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ eine Untergruppe. Dann definieren wir*

- (a) *Ein Punkt $z \in \mathbb{H}$ heißt ein **elliptischer Punkt** bezüglich Γ , wenn es ein elliptisches Element $M \in \Gamma$ gibt mit $M\langle z \rangle = z$.*
- (b) *Ein Punkt $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt ein **parabolischer Punkt** oder eine **Spitze** bezüglich Γ , wenn es ein parabolisches Element $M \in \Gamma$ gibt mit $M\langle s \rangle = s$.*

Proposition 1.21. *Sei $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ eine Untergruppe, und sei $z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein elliptischer bzw. parabolischer Punkt bezüglich Γ mit einem elliptischen bzw. parabolischen $M \in \Gamma$ mit $M\langle z \rangle = z$. Dann ist für alle $A \in \Gamma$ auch $A\langle z \rangle$ wieder elliptisch bzw. parabolisch.*

Beweis. Mit M ist auch AMA^{-1} elliptisch bzw. parabolisch, und es gilt

$$(AMA^{-1})\langle A\langle z \rangle \rangle = A\langle z \rangle.$$

\square

Definition 1.22. *Eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{H}$ heißt **Fundamentbereich** für die Aktion einer Untergruppe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{H} , wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.*

- (i) *F ist abgeschlossen in \mathbb{H} und hat ein zusammenhängendes Inneres.⁹*
- (ii) *Jeder Punkt $z \in \mathbb{H}$ ist zu einem Punkt in F äquivalent.*
- (iii) *Je zwei verschiedene Punkte aus dem Inneren von F sind inäquivalent.*

⁹ \mathbb{H} ist mit der Teilraumtopologie bezüglich $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ausgestattet.

1.4 Die volle Modulgruppe

Wir wollen in diesem Abschnitt die gegen Ende von Abschnitt 1.3 eingeführten Begriffe für die Aktion der *vollen Modulgruppe* $SL_2(\mathbb{Z})$ explizit bestimmen:

Proposition 1.23. (a) Die Menge der Spitzen von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist durch $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gegeben.

(b) Jedes parabolische Element von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist von der Form $M \cdot A \cdot M^{-1}$ mit $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ und

$$A \in SL_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Beweis. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ein beliebiges parabolisches Element von $SL_2(\mathbb{Z})$. Nach Proposition 1.18 hat dann φ_M genau einen Fixpunkt s . Ist $s \neq \infty$, so folgt sofort $c \neq 0$ ¹⁰ und es gilt

$$s = M\langle s \rangle = \frac{as + b}{cs + d}.$$

Der Punkt s ist also eine Nullstelle des quadratischen Polynoms

$$\begin{aligned} cX^2 + (d-a)X - b &= cX^2 + (d-a)X + \frac{1-ad}{c} && (ad-bc = \det(M) = 1) \\ &= cX^2 + (d-a)X + \frac{(a+d)^2 - 4ad}{4c} && ((a+d)^2 = \operatorname{tr}(M)^2 = 4) \\ &= cX^2 + (d-a)X + \frac{(a-d)^2}{4c} \\ &= c \cdot \left(X - \frac{a-d}{2c}\right)^2, \end{aligned}$$

also offensichtlich in \mathbb{Q} . Es folgt, dass die Menge der Spitzen in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ enthalten ist.

Umgekehrt ist der Punkt ∞ tatsächlich eine Spitze von $SL_2(\mathbb{Z})$, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = \infty \quad \text{und} \quad \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Ist weiter $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $\operatorname{ggT}(p, q) = 1$, so finden wir mit dem Lemma von BÉZOUT¹¹ zwei ganze Zahlen u, t mit $pt - uq = 1$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} p & u \\ q & t \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} p & u \\ q & t \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = \frac{p}{q}.$$

¹⁰Ist $c = 0$, so liegt M in

$$SL_2(\mathbb{Z})_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Da parabolische Elemente genau einen Punkt aus $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ stabilisieren, folgt entgegen unserer Annahme $s = \infty$.

Mit Proposition 1.21 ist dann auch $\frac{p}{q}$ eine Spitze, so dass wir nun insgesamt Teil (a) der Proposition gezeigt haben.

Teil (b) folgt sofort, da jedes parabolische Element (genau) eine Spitze stabilisiert und die Stabilisatoren der Spitzen gerade die $SL_2(\mathbb{Z})$ -Konjugate von $SL_2(\mathbb{Z})_\infty$ sind. \square

Bemerkung 1.24. Im Beweis von Proposition 1.23 haben wir sogar mehr gezeigt als behauptet, wir haben nämlich gezeigt, dass die Menge der Spitzen von $SL_2(\mathbb{Z})$ nichts anderes als die $SL_2(\mathbb{Z})$ -Bahn von ∞ ist. Die Spitzen von $SL_2(\mathbb{Z})$ bilden also bezüglich der in Definition 1.13 eingeführten Äquivalenzrelation eine Äquivalenzklasse. Nach Bemerkung 18.9 aus der Algebra gilt zudem

$$SL_2(\mathbb{Z}) / SL_2(\mathbb{Z})_\infty \cong SL_2(\mathbb{Z}) \langle \infty \rangle = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}. \quad (1.4)$$

Proposition 1.25. (a) Die Menge der elliptischen Punkte von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist durch $SL_2(\mathbb{Z}) \langle i \rangle \cup SL_2(\mathbb{Z}) \langle \rho \rangle$ mit $\rho = e^{2\pi i/3}$ gegeben.

(b) Jedes elliptische Element von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist von der Form $M \cdot A \cdot M^{-1}$ mit $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ und

$$A \in (SL_2(\mathbb{Z})_i \cup SL_2(\mathbb{Z})_\rho) \setminus \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beweis. Ist M ein elliptisches Element von $SL_2(\mathbb{Z})$, so ist

$$\operatorname{tr}(M) \in \{-1, 0, 1\}$$

nach Proposition 1.15. Für das charakteristische Polynom von M folgt somit

$$\operatorname{charpoly}(M) = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M) \in \{X^2 + 1, X^2 \pm X + 1\}.$$

Nehmen wir nun an, es gelte $\operatorname{charpoly}(M) = X^2 + 1$, das heißt $\operatorname{tr}(M) = 0$ und $\det(M) = 1$. Zu zeigen ist dann, dass jede Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ mit $\det(M) = -a^2 - bc = 1$ konjugiert zu einer der Matrizen $\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Wir können dabei ohne Einschränkung annehmen, dass a von allen Zahlen $a + c\mathbb{Z}$ den kleinsten Absolutbetrag hat und also $|c| \geq 2|a|$ gilt,

denn: Hat $a + ck$ mit $k \in \mathbb{Z}$ den kleinsten Absolutbetrag aller Zahlen $a + c\mathbb{Z}$, so betrachten wir statt M die dazu konjugierte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ck & -2ak - ck^2 + b \\ c & -(a + ck) \end{pmatrix}.$$

#

Ohne Einschränkung dürfen wir dann außerdem $|b| \leq |a|$ annehmen,

denn: Gilt nämlich $|b| > |a|$, so folgt

$$1 = \det(M) = -a^2 - bc \stackrel{-bc > 0}{=} -a^2 + |b||c| \geq -a^2 + 2|a||b| > -a^2 + 2a^2 = a^2$$

¹¹Étienne Bézout (1730-1783)

und somit $a = 0$. Es folgt $M \in \{\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$, und wir sind fertig. #

Es gibt daher eine Zahl $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, für die die Diagonaleinträge der zu M konjugierten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \varepsilon b & b \\ -2\varepsilon a + c - b & -(a + \varepsilon b) \end{pmatrix}.$$

einen echt kleineren Absolutbetrag haben als a . Ist dieser Betrag gleich Null, so ist die neue Matrix in $\{\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ enthalten, und wir sind fertig. Ansonsten wiederholen wir die gesamte Argumentation rekursiv mit der jeweils neu erhaltenen Matrix. Da der Absolutbetrag der Diagonaleinträge dabei in jedem Schritt echt kleiner wird, terminiert dieser Algorithmus, und die Behauptung ist bewiesen.

Ganz ähnlich zeigt man den Fall $\text{charpoly}(M) = X^2 \pm X + 1$ (*Übung!*) und somit Behauptung (b). Behauptung (a) folgt, indem man für jedes elliptische Element $M \cdot A \cdot M^{-1}$ die quadratische Gleichung $MAM^{-1}\langle z \rangle = z$ löst. Wegen

$$MAM^{-1}\langle M\langle z \rangle \rangle = M\langle z \rangle \iff A\langle z \rangle = z$$

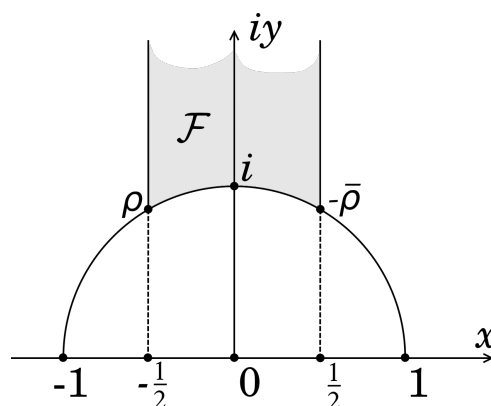
genügt es dabei, die speziellen Matrizen aus Aussage (b) zu betrachten. \square

Bemerkung 1.26. Analog zur Bemerkung nach Proposition 1.23 stellen wir fest, dass es zwei Äquivalenzklassen elliptischer Punkte von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt, die durch i und ρ vertreten werden.

Satz 1.27. Die Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1 \text{ und } |\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

ist ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} und wird auch als **Standardfundamentalbereich** bezeichnet.



Beweis. Wir müssen die drei Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 1.22 überprüfen. Bedingung (i), also die Abgeschlossenheit und der Zusammenhang des Inneren, ist klar.

Wir wollen nun Bedingung (ii) überprüfen und erinnern uns daran, dass nach (1.2)

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gilt. Jede Bahn $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle$ in \mathbb{H} enthält Punkte maximalen Imaginärteils und diese sind charakterisiert durch

$$\operatorname{Im}(w) \text{ maximal in } \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle \iff |cw+d| \geq 1 \text{ für alle } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \operatorname{ggT}(c, d) = 1,$$

denn: Für ein festes $z \in \mathbb{H}$ definiert die Ungleichung $|cz+d| \leq 1$ ein Kompaktum in \mathbb{R}^2 . Der Durchschnitt dieses Kompaktums mit dem Gitter $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$ ist endlich, so dass die Ungleichung nur endlich viele Lösungen $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ hat. Es gilt andererseits

$$|cz+d| \leq 1 \iff \operatorname{Im}(M\langle z \rangle) \geq \operatorname{Im}(z) \quad \text{für alle } M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Da der Imaginärteil von $M\langle z \rangle$ nur von der zweiten Zeile von M abhängt, gibt es innerhalb einer Bahn Punkte maximalen Imaginärteils.

Sei nun $w \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(w) \text{ maximal in } \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle &\iff \operatorname{Im}(w) \geq \operatorname{Im}(M\langle z \rangle) \text{ für alle } M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &\iff \operatorname{Im}(w) \geq \operatorname{Im}(M\langle w \rangle) \text{ für alle } M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &\iff |cw+d| \geq 1 \text{ für alle } \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Äquivalenz benutzt haben, dass w und z in derselben Bahn liegen. Die Behauptung folgt mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \implies ad - bc = \det(M) = 1 \implies \operatorname{ggT}(c, d) = 1$$

und

$$(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } \operatorname{ggT}(c, d) = 1 \implies \exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } ad - bc = 1,$$

wobei sich die letzte Folgerung aus dem Lemma von Bézout ergibt. #

Nun nutzen wir aus, dass der Imaginärteil unter Anwendung von Translationen $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{Z}$ unverändert bleibt. Offensichtlich gibt es für jedes $w \in \mathbb{H}$ ein $b \in \mathbb{Z}$ mit

$$\left| \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle w \rangle\right) \right| = |\operatorname{Re}(w+b)| \leq \frac{1}{2}.$$

Wir haben also gezeigt, dass jeder Punkt $z \in \mathbb{H}$ zu einem Punkt in

$$\mathcal{F}' := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |cz+d| \geq 1 \text{ für alle } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \operatorname{ggT}(c, d) = 1 \text{ und } |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

äquivalent ist. Bedingung (ii) folgt, wenn wir $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ zeigen können. Dem ist aber so,

denn: Wegen $\text{ggT}(1,0) = 1$ ist offensichtlich $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Sei jetzt umgekehrt $z = x + iy \in \mathcal{F}$, und seien $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(c, d) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= (cx + d)^2 + c^2y^2 = c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2 = c^2|z|^2 + 2cd\text{Re}(z) + d^2 \\ &\stackrel{z \in \mathcal{F}}{\geq} c^2 - |cd| + d^2 \geq 1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung gilt, weil die quadratische Form $X^2 - XY + Y^2$ positiv definit ist.¹² #

Es verbleibt Bedingung (iii) zu zeigen. Seien dafür z, w zwei Punkte aus dem Inneren von \mathcal{F} mit $w = M\langle z \rangle$ für ein $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, es gelte

$$\text{Im}(z) \leq \text{Im}(w) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

und somit

$$|c| \cdot \text{Im}(z) = |\text{Im}(cz + d)| \leq |cz + d| \leq 1. \quad (1.5)$$

Nach Definition von \mathcal{F} gilt $\text{Im}(z) > \text{Im}(\rho) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nach (1.5) folgt daraus $|c| \leq 1$.

Fall 1: $|c| = 1$. Aus (1.5) erhalten wir sofort $|z \pm d| \leq 1$. Andererseits gilt

$$|z + \tilde{d}| > 1 \quad \text{für alle } (z + \tilde{d}) \in (\mathcal{F} + \tilde{d}) \text{ mit } \tilde{d} \in \mathbb{Z},$$

so dass der Fall $|c| = 1$ nicht eintreten kann.

Fall 2: $c = 0$. Wegen $\det(M) = ad = 1$ gilt dann $a = d \in \{\pm 1\}$ und somit

$$w = M\langle z \rangle = z \pm b.$$

Da z und w beide im Inneren von \mathcal{F} liegen, folgt $b = 0$ und somit $w = z$.

Insgesamt folgt, dass z und w aus dem Inneren von \mathcal{F} nur dann äquivalent sein können, wenn sie übereinstimmen. \square

¹²Eine (binäre) quadratische Form $q(X, Y)$ heißt *positiv semidefinit*, wenn

$$q(x, y) \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

gilt. Erfüllt sie zusätzlich

$$q(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0),$$

so heißt die Form *positiv definit*. Das ist die von uns benutzte Eigenschaft. In Definition 22.13 aus der Linearen Algebra ist festgelegt, dass $q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ genau dann positiv (semi-)definit ist, wenn die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

diese Eigenschaft hat. Im Fall von $q(X, Y) = X^2 - XY + Y^2$ lassen sich die Eigenwerte leicht zu $\lambda_1 = \frac{1}{2} > 0$ und $\lambda_2 = \frac{3}{2} > 0$ berechnen; die quadratische Form ist also tatsächlich positiv definit.



Korollar 1.28. Die Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ wird erzeugt von den Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei $\langle S, T \rangle \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ die von S und T erzeugte Untergruppe und $z \in \mathbb{H}$. Dann gibt es ein $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$ mit $\tilde{M}\langle z \rangle \in \mathcal{F}$,

denn: Wie im Beweis von Bedingung (ii) in Satz 1.27 sehen wir ein, dass jede $\langle S, T \rangle$ -Bahn in \mathbb{H} Elemente maximalen Imaginärteils enthält, und wählen ein $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$, für das $\tilde{M}\langle z \rangle$ maximalen Imaginärteil hat. Wieder wie im Beweis von Bedingung (ii) in Satz 1.27 finden wir eine ganze Zahl b mit

$$|\operatorname{Re}((T^b \tilde{M})\langle z \rangle)| \leq \frac{1}{2}.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass der Betrag von $w := (T^b \tilde{M})\langle z \rangle$ mindestens 1 ist. Nehmen wir dafür an, es gälte $|w| < 1$. Dann erhielten wir nach Anwendung von $S \in \langle S, T \rangle$

$$\operatorname{Im}(S\langle w \rangle) = \frac{\operatorname{Im}(w)}{|w|^2} > \operatorname{Im}(w),$$

was nicht sein kann, da ja der Imaginärteil von w als maximal in $\langle S, T \rangle\langle z \rangle$ gewählt war. #

Wir wählen nun einen festen Punkt z_0 im Inneren von \mathcal{F} und eine Matrix $M \in SL_2(\mathbb{Z})$. Nach der soeben gezeigten Behauptung gibt es dann ein $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$ mit $(\tilde{M}M)\langle z_0 \rangle \in \mathcal{F}$. Da \mathcal{F} insbesondere Bedingung (iii) für Fundamentalbereiche erfüllt und z_0 im Inneren von \mathcal{F} gewählt war, folgt $(\tilde{M}M)\langle z_0 \rangle = z_0$. Da es nach Proposition 1.25 und der Definition von \mathcal{F} im Inneren von \mathcal{F} keine elliptischen Punkte gibt, folgt $(\tilde{M}M) \in \{\pm I_2\}$ nach Proposition 1.18 und somit

$$M \in \langle -I_2, S, T \rangle \stackrel{S^2 = -I_2}{=} \langle S, T \rangle.$$

□

Korollar 1.29. Für einen Punkt $z \in \mathcal{F}$ ist der Stabilisator in $SL_2(\mathbb{Z})$ gegeben durch

$$SL_2(\mathbb{Z})_z = \begin{cases} \langle S \rangle & \text{falls } z = i, \\ \langle ST \rangle & \text{falls } z = \rho, \\ \langle TS \rangle & \text{falls } z = -\bar{\rho}, \\ \langle -I_2 \rangle & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ordnung der erzeugenden Gruppenelemente ist hierbei 2 im Falle von $-I_2$, 4 im Falle von S und 6 im Falle von ST bzw. TS .

Beweis. Folgt direkt aus Satz 1.27 und Proposition 1.25. □

1.5 Kongruenzuntergruppen

In diesem Abschnitt wollen wir eine besonders wichtige Klasse von Untergruppen der vollen Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ betrachten, die sogenannten Kongruenzuntergruppen. Um diese einzuführen müssen wir ein wenig ausholen. Für jedes $N \in \mathbb{N}^{13}$ ist durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + N\mathbb{Z} & b + N\mathbb{Z} \\ c + N\mathbb{Z} & d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ mit Kern

$$\Gamma(N) := \{M \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid M \equiv I_2 \pmod{N}\}$$

gegeben. Nach **Bemerkung 2.10** aus der Algebra ist daher $\Gamma(N)$ ein *Normalteiler*, es gilt also $M^{-1}\Gamma(N)M = \Gamma(N)$ für alle $M \in SL_2(\mathbb{Z})$. Wir halten fest:

Proposition 1.30. *Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist die kanonische Projektion $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\Gamma(N)$. Insbesondere gilt die Isomorphie von Gruppen*

$$SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N) \cong SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Beweis. Für $N = 1$ ist die Proposition klar, sei im Folgenden also $N > 1$. Weiter gilt offenbar Homomorphie und $\Gamma(N)$ ist nach Konstruktion der Projektionskern. Es verbleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei dafür

$$M = \begin{pmatrix} a + N\mathbb{Z} & b + N\mathbb{Z} \\ c + N\mathbb{Z} & d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

beliebig. Dann gilt $\text{ggT}(c, d, N) = 1$,

denn: Nach Voraussetzung ist $ad - bc + N\mathbb{Z} = 1 + N\mathbb{Z}$, also $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$ und schließlich $\text{ggT}(c, d) \equiv 1 \pmod{N}$. Hieraus folgt $\text{ggT}(\text{ggT}(c, d), N) = 1$ und somit die Behauptung. #

Daher existieren zueinander teilerfremde $\tilde{c} = c + sN$ und $\tilde{d} = d + tN$ mit $s, t \in \mathbb{Z}$,

denn: Im Fall $c \neq 0$ setzen wir $s = 0$ und finden mit dem Chinesischen Restsatz ein $t \in \mathbb{Z}$ mit

$$t \equiv \begin{cases} 1 \pmod{p} & \text{für } p \mid \text{ggT}(c, d), \\ 0 \pmod{p} & \text{für } p \nmid d, p \mid c. \end{cases}$$

Dann teilt einerseits jeder Primfaktor von $\text{ggT}(c, d)$ weder N noch t und daher auch nicht $\text{ggT}(c, d + tN)$. Andererseits ist jeder Primfaktor von c , der d nicht teilt, nach Konstruktion ein Teiler von t und teilt somit ebenfalls nicht $\text{ggT}(c, d + tN)$. Das zeigt die Behauptung in diesem Fall. Im Fall $c = 0$ gilt $d \neq 0$ wegen $N > 1$ und wir können ein analoges Argument angeben. #

¹³In diesem Skript ist Null keine natürliche Zahl und wir schreiben stets $\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ sowie $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.



Zu M betrachten wir nun das Urbild

$$\tilde{M} := \begin{pmatrix} a + kN & b + lN \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$$

unter der kanonischen Projektion, wobei $k, l \in \mathbb{Z}$ zunächst noch beliebig sind. Wegen $a\tilde{d} - b\tilde{c} \equiv 1 \pmod{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$\det(\tilde{M}) = a\tilde{d} - b\tilde{c} + (k\tilde{d} - l\tilde{c})N = 1 + (m + k\tilde{d} - l\tilde{c})N.$$

Da \tilde{c} und \tilde{d} teilerfremd sind, können nun nach dem Lemma von Bézout k und l so gewählt werden, dass $m + k\tilde{d} - l\tilde{c} = 0$ und somit $\tilde{M} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt. Damit ist die Projektion in der Tat surjektiv, und nun folgt die Behauptung mit dem Homomorphiesatz. \square

Korollar 1.31. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist der Index¹⁴ der Untergruppe $\Gamma(N)$ in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ endlich. Genauer gilt

$$[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = |\text{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N^3 \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} (1 - p^{-2}).$$

Beweis. Nach Proposition 1.30 genügt es zum Beweis des Korollars die Ordnung der Gruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ zu bestimmen. Sei dafür $N = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p}$ die Primfaktorzerlegung von N . Nach dem Chinesischen Restsatz gilt dann

$$|\text{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = \prod_{p \text{ prim}} |\text{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})|.$$

Das Korollar folgt also, wenn wir

$$|\text{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})| = p^{3v_p}(1 - p^{-2}) \quad \text{für alle Primzahlen } p \mid N$$

zeigen können. Wegen der offensichtlichen Zerlegung

$$\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z}) = \bigcup_{x+p^{v_p}\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^\times} \begin{pmatrix} x + p^{v_p}\mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 1 + p^{v_p}\mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})$$

nach Nebenklassen gleicher Determinante folgt das Korollar dann genauso aus

$$\begin{aligned} |\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})| &= \varphi(p^{v_p}) \cdot p^{3v_p}(1 - p^{-2}) \\ &= p^{4v_p}(1 - p^{-1})(1 - p^{-2}) \quad \text{für alle Primzahlen } p \mid N. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass letztere Aussage tatsächlich korrekt ist. Zunächst gibt es

$$p^{2v_p} - p^{2v_p-2} = p^{2v_p}(1 - p^{-2})$$

Möglichkeiten, die erste Spalte einer Matrix aus $\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})$ zu wählen,

¹⁴Der **Index** $[G : H]$ einer Untergruppe H in einer Gruppe G ist definiert als die Mächtigkeit der Menge (sic!) $H \backslash G$ der Linksnebenklassen.

denn: Wir müssen genau diejenigen Vektoren ausschließen, die sich vom Nullvektor additiv um ein Element der Menge

$$p \cdot (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x + p^{v_p}\mathbb{Z} \\ y + p^{v_p}\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^2 : p \mid x \text{ und } p \mid y \right\}$$

unterscheiden. Die Behauptung folgt, da $p \cdot (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^2$ offenbar genau p^{2v_p-2} Elemente hat. #

Weiter gibt es

$$p^{2v_p} - p^{2v_p-1} = p^{2v_p}(1 - p^{-1})$$

Möglichkeiten für die zweite Spalte einer solchen Matrix,

denn: Wir müssen genau diejenigen Vektoren ausschließen, die sich von einem skalaren Vielfachen der ersten Spalte additiv um ein Element der Menge $p \cdot (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^2$ unterscheiden. Nach Konstruktion ist mindestens einer der Einträge der ersten Spalte eine Einheit, so dass sich die Produkte der ersten Spalte mit den Skalaren aus $(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})$ paarweise unterscheiden. Modulo $p \cdot (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^2$ stimmen diese Produkte genau dann überein, wenn die zugehörigen Skalare modulo p übereinstimmen. Es folgt, dass wir insgesamt $p \cdot p^{2v_p-2} = p^{2v_p-1}$ Elemente ausschließen, und somit die Behauptung. #

Das Korollar folgt, da wir so die Ordnung von $GL_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})$ in Übereinstimmung mit der oben postulierten Formel berechnet haben. \square

Definition 1.32. Die oben eingeführten Gruppen $\Gamma(N)$ für $N \in \mathbb{N}$ heißen die **Hauptkongruenzuntergruppen** von $SL_2(\mathbb{Z})$. Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$, die eine Hauptkongruenzuntergruppe enthält, nennt man **Kongruenzuntergruppe** von $SL_2(\mathbb{Z})$.

Korollar 1.33. Für jede Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] < \infty,$$

der Index von Γ in $SL_2(\mathbb{Z})$ ist also endlich.

Beweis. Nach Definition 1.32 gibt es zu jeder Kongruenzuntergruppe Γ eine natürliche Zahl N mit

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z}).$$

Es folgt, dass sich jede Linksnebenklasse aus $\Gamma \backslash SL_2(\mathbb{Z})$ als Vereinigung von Linksnebenklassen aus der nach Korollar 1.31 endlichen Menge $\Gamma(N) \backslash SL_2(\mathbb{Z})$ schreiben lässt, und somit das Korollar. \square

Die Umkehrung von Korollar 1.33 ist nicht richtig: Es gibt durchaus auch Untergruppen von endlichem Index in $SL_2(\mathbb{Z})$, die keine Kongruenzuntergruppen von $SL_2(\mathbb{Z})$ sind. Diese werden **Nichtkongruenzuntergruppen** von $SL_2(\mathbb{Z})$ genannt und machen auf geeignete Weise gemessen sogar die Mehrheit der Untergruppen von endlichem Index in $SL_2(\mathbb{Z})$ aus. In der Theorie der Modulformen beschränkt man sich jedoch ihrer reichen Struktur halber zumeist auf das Studium von Kongruenzuntergruppen und das werden wir in diesem Skript auch so halten.

Beispiel 1.34. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sind

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}$$

Kongruenzuntergruppen.

Nach Korollar 1.33 haben Kongruenzuntergruppen endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, es gibt also für jede Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein $n \in \mathbb{N}$ und Matrizen $A_1, \dots, A_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{v=1}^n \Gamma A_v. \quad (1.6)$$

Da die negative Einheitsmatrix $-I_2$ trivial operiert, aber nicht in jeder Kongruenzuntergruppe enthalten sein muss, ist es für viele Anwendungen von Vorteil, sich dieser Matrix zu entledigen. Für eine beliebige Untergruppe $G \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ führen wir daher die Notation

$$\overline{G} := G \cdot \{\pm I_2\} / \{\pm I_2\}$$

ein. Dabei nennen wir bequemlichkeitshalber die Elemente von \overline{G} Matrizen und rechnen mit ihnen wie mit Elementen aus G .¹⁵ Hat G endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, so folgt offensichtlich

$$\varepsilon \cdot [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{G}] = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : G] \quad \text{mit } \varepsilon \in \{1, 2\}.$$

Sei nun $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Statt der Zerlegung (1.6) von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in Γ -Nebenklassen betrachten wir nun eine Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\overline{\Gamma}$ -Nebenklassen

$$\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \bigsqcup_{\mu=1}^m \overline{\Gamma} A_\mu \quad \text{mit } A_1, \dots, A_m \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \quad (1.7)$$

wobei in der oben eingeführten Notation $m = n/\varepsilon$ gilt.

Beispiel 1.35. Sei N eine natürliche Zahl. In diesem Beispiel konstruieren wir im Falle der Kongruenzuntergruppen $\Gamma_0(N)$ bzw. $\Gamma_1(N)$ konkrete Zerlegungen in der Form von (1.6). Hierfür betrachten wir zunächst die Menge

$$P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} c + N\mathbb{Z} \\ d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \mid \text{es gibt } a + N\mathbb{Z}, b + N\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \text{mit } (a + N\mathbb{Z})(d + N\mathbb{Z}) - (b + N\mathbb{Z})(c + N\mathbb{Z}) = 1 + N\mathbb{Z} \right\}$$

¹⁵Offensichtlich lässt sich jeder Matrix aus G ein eindeutiger Vertreter in \overline{G} zuordnen, so dass wir auch sinnhaft eine Multiplikation von Matrizen aus G mit Matrizen aus \overline{G} definieren können, die ihre Werte in \overline{G} annimmt.

und lassen die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ via Skalarmultiplikation darauf operieren. Diese Aktion definiert eine Äquivalenzrelation \sim auf $P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, deren Klassen durch die Bahnen

$$(c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z}) := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \cdot \begin{pmatrix} c + N\mathbb{Z} \\ d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} c + N\mathbb{Z} \\ d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$$

gegeben sind. Für die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen schreiben wir

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) := P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) / \sim.$$

Dann ist die Abbildung

$$\pi_0: \begin{cases} \Gamma_0(N) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \\ \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto (c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z}) \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv,

denn: Für ein beliebiges $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und einen beliebigen Vertreter $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Nebenklasse $\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} \pi_0\left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \pi_0\left(\begin{pmatrix} * & * \\ ar + cs & br + ds \end{pmatrix}\right) \\ &= (ar + cs + N\mathbb{Z} : br + ds + N\mathbb{Z}) \\ &\stackrel{N|r}{=} (cs + N\mathbb{Z} : ds + N\mathbb{Z}) \\ &= (c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

so dass die Abbildung π_0 wohldefiniert ist.

Für ein beliebiges $(c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z}) \in P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ finden wir offensichtlich ein Urbild unter π_0 , indem wir die Einträge $c + N\mathbb{Z}$ und $d + N\mathbb{Z}$ einzeln von $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ nach \mathbb{Z} liften und das so entstandene Paar mit dem Lemma von Bézout zu einer Matrix in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ergänzen. Die Abbildung π_0 ist also auch surjektiv.

Zum Nachweis der Injektivität von π_0 betrachten wir nun zwei Restklassen

$$\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix},$$

deren Bilder unter π_0 übereinstimmen, für die es also ein $\lambda + N\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ mit

$$(\lambda + N\mathbb{Z})(c + N\mathbb{Z}) = (\tilde{c} + N\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad (\lambda + N\mathbb{Z})(d + N\mathbb{Z}) = (\tilde{d} + N\mathbb{Z})$$

gibt. Hieraus folgt sofort

$$\tilde{c}d - c\tilde{d} \equiv \lambda cd - c\lambda d \equiv 0 \pmod{N}.$$

Die Behauptung folgt, da letzteres gleichbedeutend zu

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \in \Gamma_0(N)$$

ist und also dazu, dass die zwei gegebenen Restklassen übereinstimmen. #

Als Spezialfall von (1.6) folgt hieraus sofort

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{(c+N\mathbb{Z}:d+N\mathbb{Z}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

wobei c, d so gewählt seien, dass $(c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z})$ ein Vertretersystem von $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ durchlaufe und a, b im Sinne des Bijektivitätsbeweises von π_0 zu jeder Vorgabe von c, d beliebig so gewählt seien, dass $ad - bc = 1$ erfüllt ist. Es gilt daher

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = |\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad (1.9)$$

denn: Die erste Identität folgt unmittelbar aus dem zuvor Hergeleiteten. Weiter ist die rechte Seite der zweiten Identität offensichtlich schwach multiplikativ und nach dem Chinesischen Restsatz trifft das auf ihre linke Seite zu. Es reicht daher zu zeigen, dass die zweite Identität für $N = p^r$ mit einer beliebigen Primzahl p und einer beliebigen natürlichen Zahl r gilt. In diesem Fall gilt aber offensichtlich

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{j=0}^{p^r-1} \{(j + p^r\mathbb{Z} : 1 + p^r\mathbb{Z})\} \sqcup \bigsqcup_{j=0}^{p^{r-1}-1} \{(1 + p^r\mathbb{Z} : jp + p^r\mathbb{Z})\}$$

und also

$$|\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})| = p^r + p^{r-1} = p^r \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

was auch die zweite Identität zeigt. Tatsächlich erhalten wir im behandelten Spezialfall ein besonders übersichtliches Vertretersystem im Sinne von (1.6), es gilt nämlich:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{j=0}^{p^r-1} \Gamma_0(p^r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix} \sqcup \bigsqcup_{j=0}^{p^{r-1}-1} \Gamma_0(p^r) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & pj \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

#

Weiter lässt sich auch schnell zeigen, dass die Abbildung

$$\pi_1 : \begin{cases} \Gamma_1(N) \setminus \Gamma_0(N) & \rightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, \\ \Gamma_1(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto d + N\mathbb{Z} \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Nach (1.8) und der Konstruktion von $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ folgt hieraus als Spezialfall von (1.6) sofort

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{\substack{(c+N\mathbb{Z}) \\ (d+N\mathbb{Z}) \in P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})}} \Gamma_1(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei c, d so gewählt seien, dass $\begin{pmatrix} c+N\mathbb{Z} \\ d+N\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ ein Vertretersystem von $P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ durchlaufe und a, b zu jeder Vorgabe von c, d beliebig so gewählt seien, dass $ad - bc = 1$ erfüllt ist. Es gilt daher

$$\begin{aligned} [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_1(N)] &= [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] \cdot [\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)] \\ &\stackrel{(1.9)}{=} N \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \varphi(N) \\ &= N \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot N \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= N^2 \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \end{aligned}$$

Da die Kongruenzuntergruppen Teilmengen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sind, müssen auch die zugehörigen Mengen von elliptischen und parabolischen Elementen in den entsprechenden Mengen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ enthalten sein. Das trifft dann nach Definition auch auf die elliptischen bzw. parabolischen Punkte zu. Tatsächlich stimmt die Menge der Spitzen bezüglich einer Kongruenzuntergruppe mit derjenigen bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ überein:

Proposition 1.36. Die Menge der Spitzen bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist durch $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gegeben.

Beweis. Die eine Inklusion ist klar: Jede Spitze bezüglich Γ ist nach Definition insbesondere eine Spitze bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und somit nach Proposition 1.23 in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Wir wollen nun zeigen, dass umgekehrt auch jedes $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ tatsächlich eine Spitze bezüglich Γ ist. Da Γ eine Kongruenzuntergruppe ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, für das die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ in Γ enthalten ist. Mit derselben Argumentation wie gerade eben langt es dann zu zeigen, dass s von einem parabolischen Element aus $\Gamma(N)$ stabilisiert wird. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit $M(\infty) = s$. Dann gilt

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - Nac & Na^2 \\ -Nc^2 & 1 + Nac \end{pmatrix} \in \Gamma(N),$$

wobei wir im letzten Schritt $ad - bc = \det(M) = 1$ verwendet haben. Die Behauptung folgt, da $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ den Punkt ∞ stabilisiert. \square

In Bemerkung 1.24 haben wir gezeigt, dass alle Spitzen in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ in derselben $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Bahn liegen. Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe Γ stimmt das nicht mehr: Hier kann die Menge der Spitzen in mehrere Γ -Bahnen zerfallen. Jede solche Γ -Bahn nennt man eine **Spitzenklasse** bezüglich Γ . Zu einer gegebenen Spitze s bezüglich Γ nennen wir die Spitzenklasse $\mathfrak{s} := \Gamma\langle s \rangle$; die Menge der Spitzenklassen bezüglich Γ bezeichnen wir mit $\mathrm{Cusps}(\Gamma)$.

Proposition 1.37. *Die Menge der Spitzenklassen in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist endlich.*

Beweis. Da der Index von Γ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ endlich ist, können wir in der Notation von (1.7)

$$\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\langle \infty \rangle = \bigcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma}A_\mu\langle \infty \rangle$$

schreiben. Offensichtlich enthält also die Menge $\{A_1\langle \infty \rangle, \dots, A_m\langle \infty \rangle\}$ ein Vertretersystem der Spitzenklassen bezüglich Γ , und die Proposition ist gezeigt. \square

Beispiel 1.38. *Es gilt*

$$\mathrm{Cusps}(\Gamma_0(2)) = \{\Gamma_0(2)\langle \infty \rangle, \Gamma_0(2)\langle 0 \rangle\},$$

denn: Nach (1.10) gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und wegen $-I_2 \in \Gamma_0(2)$ können wir diese Zerlegung unverändert als Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\overline{\Gamma_0(2)}$ -Restklassen übernehmen. Nach den Überlegungen im Beweis von Proposition 1.37 enthält daher die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle \right\} = \{\infty, 1, 0\}$$

ein Vertretersystem der Spitzenklassen bezüglich $\Gamma_0(2)$. Wegen $T \in \Gamma_0(2)$ und $T\langle 0 \rangle = 1$ sind dabei einerseits die Spitzen 0 und 1 äquivalent. Andererseits ist die Menge der Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, die ∞ auf 0 abbilden, durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a = 0 \right\}$$

gegeben und hat offensichtlich leeren Durchschnitt mit $\Gamma_0(2)$. Es folgt, dass ∞ und 0 in verschiedenen Spitzenklassen liegen, und insgesamt die Behauptung. $\#$

Einer gegebenen Spitzenklasse lässt sich mit der sogenannten Breite eine quantifizierende Invariante zuordnen. Diese wollen wir nun einführen und müssen dafür zunächst ein wenig ausholen:

Lemma 1.39. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und seien $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$, $s \in \mathfrak{s}$ sowie $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle\infty\rangle = s$ beliebig. Dann hängt die Menge

$$H_s := H_{\mathfrak{s}} := M^{-1}\Gamma M \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \quad (1.11)$$

nicht von der Wahl von s und M ab und trägt die Struktur einer Untergruppe von endlichem Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$.

Beweis. Seien für diesen Beweis $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$, $s \in \mathfrak{s}$ eine beliebige Spitze und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine beliebige Matrix mit $M\langle\infty\rangle = s$ fest gewählt. Es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{M} \in \Gamma_s &\iff \tilde{M} \in \Gamma \text{ mit } \tilde{M}\langle s \rangle = s \\ &\iff \tilde{M} \in \Gamma \text{ mit } M^{-1}\tilde{M}M\langle\infty\rangle = \infty \\ &\iff \tilde{M} \in \Gamma \text{ mit } M^{-1}\tilde{M}M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \end{aligned}$$

und somit auch

$$\Gamma_s = \Gamma \cap M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}M^{-1}.$$

Offensichtlich erhalten wir so eine injektive Abbildung

$$\Gamma_s \backslash (M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}M^{-1}) \hookrightarrow \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

und wir erkennen, dass die Untergruppe Γ_s endlichen Index in $M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}M^{-1}$ hat. Wir konjugieren mit M und sehen, dass

$$M^{-1}\Gamma_s M = M^{-1}\Gamma M \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} = H_s$$

eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ ist.

Zum Beweis des Lemmas verbleibt zu zeigen, dass H_s als Menge nicht von der Wahl von s und M abhängt. Seien dafür $\tilde{s} \in \mathfrak{s}$ eine weitere Spitze und $\tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine beliebige Matrix mit $\tilde{M}\langle\infty\rangle = \tilde{s}$. Wegen $\tilde{s} \sim s$ gibt es ein $A \in \Gamma$ mit $A\langle\tilde{s}\rangle = s$. Mit diesem gilt $(A\tilde{M}M^{-1})\langle s \rangle = s$ und somit $A\tilde{M}M^{-1} \in \Gamma_s$. Es folgt

$$H_s = M^{-1}\Gamma_s M = M^{-1}(A\tilde{M}M^{-1})^{-1}\Gamma_s(A\tilde{M}M^{-1})M = \tilde{M}^{-1}A^{-1}\Gamma_s A\tilde{M} = \tilde{M}^{-1}\Gamma_{\tilde{s}}\tilde{M},$$

was das Lemma zeigt. \square

Lemma 1.40. Die Untergruppen $H \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ von endlichem Index sind gegeben durch:

- (i) $\langle T^h \rangle$ mit $h \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\langle -(T^{-h}) \rangle$ mit $h \in \mathbb{N}$,
- (iii) $\langle T^h, -I_2 \rangle$ mit $h \in \mathbb{N}$.

In allen drei Fällen gilt $h = \overline{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} : H]}$.

Beweis. Bekanntlich gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\} = \langle T \rangle \oplus \{\pm I_2\}.$$

Die Untergruppen von endlichem Index in $\langle T \rangle$ sind gerade diejenigen von Typ (i), da die Untergruppen von endlichem Index in der zyklischen Gruppe \mathbb{Z} bekanntermaßen von der Gestalt $h\mathbb{Z}$ mit einem $h \in \mathbb{N}$ sind. Hieraus folgt sofort die erste Teilbehauptung. Da weiter in allen drei Fällen $\overline{H} \cong \langle T^h \rangle$ gilt, erhalten wir stets

$$h = [\langle T \rangle : \langle T^h \rangle] = [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty} : \overline{H}]$$

und somit auch die zweite Teilbehauptung. □

Definition 1.41. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und seien $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$ sowie $s \in \mathfrak{s}$ beliebig. Dann heißt die natürliche Zahl

$$h_\Gamma(s) := h_\Gamma(\mathfrak{s}) := [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty} : \overline{H_\mathfrak{s}}]$$

die **Breite** der Spitze s bzw. der Spitzenklasse \mathfrak{s} . Gilt in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40

$$H_\mathfrak{s} = \langle -(T^{-h_\Gamma(s)}) \rangle = \langle -(T^{-h_\Gamma(\mathfrak{s})}) \rangle,$$

so heißt die Spitze s bzw. die Spitzenklasse \mathfrak{s} **irregulär**, ansonsten **regulär**.

Bemerkung 1.42. Ist $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein Normalteiler, so haben offensichtlich alle Spitzenklassen bezüglich Γ dieselbe Breite und sind entweder alle regulär oder alle irregulär. Es reicht hier also aus, die Regularität einer einzigen Spitzenklasse zu überprüfen.

Beispiel 1.43. Irreguläre Spitzen sind extrem selten:

- (a) Sei N eine natürliche Zahl. Dann sind alle Spitzen bezüglich der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ regulär,

denn: Da $\Gamma(N)$ normal in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, reicht es nach Bemerkung 1.42 aus, die Regularität der Spitze ∞ zu untersuchen. Es gilt

$$H_\infty = \Gamma(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \begin{cases} \langle T^N \rangle & \text{für } N > 2, \\ \langle T^N, -I_2 \rangle & \text{für } N \leq 2, \end{cases}$$

was in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40 in Fall (i) bzw. (iii) liegt. #

- (b) Sei N eine natürliche Zahl. Dann sind alle Spitzen bezüglich der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ regulär,

denn: Wegen $-I_2 \in \Gamma_0(N)$ liegt $H_\mathfrak{s}$ für alle Spitzenklassen \mathfrak{s} bezüglich $\Gamma_0(N)$ in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40 in Fall (iii). #

- (c) Sei $N \neq 4$ eine natürliche Zahl. Dann sind alle Spitzen bezüglich der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_1(N)$ regulär,

denn: Seien s eine beliebige Spitze bezüglich $\Gamma_1(N)$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle\infty\rangle = s$. Wir untersuchen nun, welche Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ in H_s liegen und betrachten daher gemäß der Konstruktion von H_s in (1.11) für ein beliebiges $h \in \mathbb{Z}$

$$M \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - ach & a^2h \\ -c^2h & 1 + ach \end{pmatrix},$$

$$\text{bzw. } M \begin{pmatrix} -1 & -h \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 + ach & -a^2h \\ c^2h & -1 - ach \end{pmatrix}.$$

Dass die jeweiligen rechten Seiten in $\Gamma_1(N)$ liegen, erfordert

$$N \mid c^2h \quad \text{sowie} \quad 1 - ach \equiv 1 + ach \equiv 1 \pmod{N},$$

$$\text{bzw. } N \mid c^2h \quad \text{sowie} \quad -1 - ach \equiv -1 + ach \equiv 1 \pmod{N}.$$

Dies lässt sich noch etwas vereinfachen zu

$$N \mid c^2h \quad \text{sowie} \quad N \mid ach,$$

$$\text{bzw. } N \mid c^2h \quad \text{sowie} \quad ach \equiv 2 \equiv -2 \pmod{N}. \tag{1.12}$$

Der zweite Fall, dass also eine Matrix der Form $-T^h$ mit einem $h \in \mathbb{Z}$ in H_s liegt, kann daher offensichtlich nur für $N \mid 4$ auftreten. Für $N \nmid 4$ sind daher alle Spitzen s bezüglich $\Gamma_1(N)$ in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40 in Fall (i). Die Behauptung folgt, da für $N \in \{1, 2\}$ die Matrix $-I_2$ in $\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N)$ enthalten ist und daher alle Spitzen s bezüglich $\Gamma_1(N)$ in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40 in Fall (iii) liegen. #

Bezüglich $\Gamma_1(4)$ ist aber die Spitze $\frac{1}{2}$ tatsächlich irregulär,

denn: Wählen wir in der obigen Argumentation

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{mit} \quad M\langle\infty\rangle = \frac{1}{2},$$

so erhalten wir in (1.12) die Bedingungen

$$4 \mid 4h \quad \text{sowie} \quad 4 \mid 2h,$$

$$\text{bzw. } 4 \mid 4h \quad \text{sowie} \quad 2h \equiv 2 \pmod{4}.$$

Es folgt

$$H_{\frac{1}{2}} = \{T^h : h \in \mathbb{Z} \text{ gerade}\} \cup \{-T^h : h \in \mathbb{Z} \text{ ungerade}\} = \langle -T \rangle,$$

so dass die Spitze $\frac{1}{2}$ bezüglich $\Gamma_1(4)$ in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40 in Fall (ii) liegt. #

Die Breiten der Spitzenklassen der gegebenen Kongruenzuntergruppe Γ erfüllen eine erstaunliche Eigenschaft, für deren Beweis wir noch ein gruppentheoretisches Lemma benötigen, eine Verallgemeinerung der **Bahngleichung 18.10** aus der Algebra:



Lemma 1.44. Sei (G, \star) eine Gruppe, S eine Menge, auf der G über eine Abbildung $\circ : G \times S \rightarrow S$ transitiv operiert, und $U \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Dann gilt:

(a) Für jedes $s \in S$ hat U_s endlichen Index in G_s und es gibt eine Einbettung

$$U_s \backslash G_s \hookrightarrow U \backslash G$$

mit Bild $U \backslash (U \star G_s)$.

(b) Für ein festes $s_0 \in S$ ist durch

$$U \star g \mapsto (U \star g) \circ s_0 = U \circ (g \circ s_0)$$

eine Surjektion $U \backslash G \rightarrow U \backslash S$ gegeben und für jedes $s \in S$ hat das Urbild von $U \circ s$ unter dieser Surjektion die Kardinalität $[G_s : U_s]$.

(c) Es gilt

$$\sum_{s \in U \backslash S} [G_s : U_s] = [G : U],$$

wobei s in der Summe links ein Vertretersystem der Aktion von U auf S durchlaufe.

Beweis. Im Spezialfall, dass $U \trianglelefteq G$ ein Normalteiler ist, folgt Behauptung (a) unmittelbar mit dem **Ersten Isomorphiesatz** für Gruppen. Auf den Fall einer beliebigen Untergruppe $U \subseteq G$ lässt sich der Beweis dort leicht anpassen.

Wir zeigen nun Behauptung (b). Wegen der Transitivität von \circ existiert für jedes $s \in S$ ein $g_s \in G$ mit $g_s \circ s_0 = s$, so dass die angegebene Abbildung tatsächlich surjektiv ist. Bezeichne nun

$$F_{U \circ s} := \{U \star g \in U \backslash G \mid U \circ (g \circ s_0) = U \circ s\}$$

das Urbild von $U \circ s$ unter dieser Surjektion. Da G auf sich selbst via Rechtstranslation transitiv operiert, durchläuft mit g auch $\tilde{g} := g \star g_s^{-1}$ ganz G und es gilt

$$\begin{aligned} F_{U \circ s} &\cong \{U \star \tilde{g} \in U \backslash G \mid U \circ ((\tilde{g} \star g_s) \circ s_0) = U \circ s\} \\ &= \{U \star \tilde{g} \in U \backslash G \mid U \circ (\tilde{g} \circ s) = U \circ s\} \\ &= U \backslash (U \star G_s) \\ &\stackrel{(a)}{\cong} U_s \backslash G_s. \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich die Behauptung über die Kardinalität und somit Behauptung (b).

Behauptung (c) erhalten wir nun durch

$$[G : U] = |U \backslash G| = \sum_{s \in U \backslash S} |F_{U \circ s}| \stackrel{(b)}{=} \sum_{s \in U \backslash S} [G_s : U_s],$$

wobei s jeweils ein Vertretersystem der Aktion von U auf S durchlaufe. □



Proposition 1.45. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Dann gilt

$$\sum_{s \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)} h_\Gamma(s) = [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \bar{\Gamma}].$$

Beweis. Setzen wir in Teil (c) von Lemma 1.44

$$G = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \quad U = \bar{\Gamma}, \quad S = \mathbb{Q} \cup \{\infty\},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \bar{\Gamma}] &= \sum_{s \in \bar{\Gamma} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [(\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})})_s : (\bar{\Gamma})_s] \\ &= \sum_{s \in \bar{\Gamma} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_s : \bar{\Gamma}_s] \\ &= \sum_{s \in \bar{\Gamma} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty : H_s] = \sum_s h_\Gamma(s), \end{aligned}$$

wobei wir beim vorletzten Gleichheitszeichen die beteiligten Gruppen mit einer Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle\infty\rangle = s$ konjugiert haben, was den Wert des Index erhält. \square

Bei den elliptischen Punkten kann verschiedenes passieren, bis dahin, dass es überhaupt keine mehr gibt. Das sieht man gut an dem folgenden Beispiel:

Beispiel 1.46. Für $N \in \mathbb{N}_{>1}$ gibt es bezüglich $\Gamma(N)$ keine elliptischen Punkte,

denn: Nach Proposition 1.25 sind alle elliptischen Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu einer der Matrizen

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

konjugiert. Für $N > 1$ liegt keine dieser Matrizen in $\Gamma(N)$, denn sie sind modulo N nicht kongruent zur Einheitsmatrix I_2 . Die Behauptung folgt, da $\Gamma(N)$ als Normalteiler von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Konjugate seiner Elemente enthält. $\#$

In Analogie zu Proposition 1.37 gilt allerdings auch hier:

Proposition 1.47. Die Menge der Γ -Äquivalenzklassen elliptischer Punkte in \mathbb{H} bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist endlich.

Beweis. Da der Index von Γ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ endlich ist, können wir in der Notation von (1.7)

$$\mathbb{H} = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \langle \mathcal{F} \rangle = \bigcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$$

schreiben. Offensichtlich enthält also die Menge $\bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$ ein Vertretersystem der Γ -Äquivalenzklassen bezüglich Γ elliptischer Punkte in \mathbb{H} . In \mathcal{F} und somit auch in jeder der

endlich vielen Mengen $A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$ liegen dabei genau drei – nicht notwendigerweise $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -inäquivalente – bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ elliptische Punkte. Da bezüglich Γ elliptische Punkte automatisch auch bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ elliptisch sind, haben wir so eine endliche Menge von Punkten in \mathbb{H} gefunden, die ein Vertretersystem der Γ -Äquivalenzklassen bezüglich Γ elliptischer Punkte in \mathbb{H} enthält. Die Proposition folgt. \square

Beispiel 1.48. Die einzige Klasse bezüglich $\Gamma_0(2)$ elliptischer Punkte ist

$$\Gamma_0(2) \left\langle \frac{1+i}{2} \right\rangle,$$

denn: Nach (1.10) gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und wegen $-I_2 \in \Gamma_0(2)$ können wir diese Zerlegung unverändert als Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\overline{\Gamma_0(2)}$ -Restklassen übernehmen. Nach den Überlegungen im Beweis von Proposition 1.47 enthält daher die Menge

$$\begin{aligned} & \left\{ i, \varrho, -\bar{\varrho}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \langle i \rangle, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \langle \varrho \rangle, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \langle -\bar{\varrho} \rangle, S \langle i \rangle, S \langle \varrho \rangle, S \langle -\bar{\varrho} \rangle \right\} \\ &= \left\{ i, \varrho, -\bar{\varrho}, \frac{1+i}{2}, -\bar{\varrho}, \frac{1-\bar{\varrho}}{3}, i, -\bar{\varrho}, \varrho \right\} \\ &= \left\{ i, \varrho, -\bar{\varrho}, \frac{1+i}{2}, \frac{1-\bar{\varrho}}{3} \right\} \end{aligned}$$

ein Vertretersystem der Klassen bezüglich $\Gamma_0(2)$ elliptischer Punkte. Für jeden dieser Punkte untersuchen wir nun, ob es ein elliptisches Element $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ gibt, das diesen fixiert. Wegen $\det(M) = 1$ und $2 \mid c$ gilt für jedes elliptische Element von $\Gamma_0(2)$

(i) a, d ungerade.

Mit $|\mathrm{tr}(M)| \in \{0, 1, -1\}$ folgt daraus sofort

(ii) $d = -a$.

Weiter gilt $bc = ad - \det(M) = -a^2 - 1 \equiv 2 \pmod{4}$ und wegen $2 \mid c$ somit

(iii) b ungerade.

Wir betrachten jetzt die oben hergeleiteten Kandidaten für elliptische Punkte einzeln:

- i ist bezüglich $\Gamma_0(2)$ nicht elliptisch, denn sonst gäbe es ein elliptisches Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \langle i \rangle = i \iff (b+c) + 2ai = 0$$

und wegen $2 \mid c$ und $2 \nmid b$ kann dies nicht sein.

- ϱ ist bezüglich $\Gamma_0(2)$ nicht elliptisch, denn sonst gäbe es ein elliptisches Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \langle \varrho \rangle = \varrho &\iff (a - b - \frac{c}{2}) - (a + \frac{c}{2})\sqrt{3}i = 0 \\ &\iff c = -2a \text{ und } b = 2a \end{aligned}$$

und wegen $2 \nmid b$ kann dies nicht sein.

- $-\bar{\varrho}$ ist bezüglich $\Gamma_0(2)$ nicht elliptisch, denn sonst gäbe es ein elliptisches Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \langle -\bar{\varrho} \rangle = -\bar{\varrho} &\iff (a - b - \frac{c}{2}) - (a - \frac{c}{2})\sqrt{3}i = 0 \\ &\iff c = 2a \text{ und } b = 0 \end{aligned}$$

und wegen $2 \nmid b$ kann dies nicht sein.

- $\frac{1+i}{2}$ ist bezüglich $\Gamma_0(2)$ elliptisch, denn $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$ ist wegen seiner verschwindenden Spur elliptisch und erfüllt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \langle \frac{1+i}{2} \rangle = \frac{\frac{1+i}{2} - 1}{(1+i) - 1} = \frac{1+i}{2}.$$

- $\frac{1-\bar{\varrho}}{3}$ ist bezüglich $\Gamma_0(2)$ nicht elliptisch, denn sonst gäbe es ein elliptisches Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \langle \frac{1-\bar{\varrho}}{3} \rangle = \frac{1-\bar{\varrho}}{3} &\iff (a + b - \frac{c}{6}) - (a - \frac{c}{2})\frac{1}{\sqrt{3}}i = 0 \\ &\iff c = 2a \text{ und } 3b = -2a \end{aligned}$$

und wegen $2 \nmid b$ kann dies nicht sein.

#

Ist ein Vertretersystem einer Kongruenzuntergruppe Γ in der vollen Modulgruppe bekannt, so lässt sich aus dem aus Satz 1.27 bekannten Fundamentalbereich \mathcal{F} ein Fundamentalbereich für die Aktion von Γ auf \mathbb{H} gewinnen. Genauer gilt:

Proposition 1.49. Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sei

$$\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \bigsqcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} A_\mu \quad \text{mit } A_1, \dots, A_m \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$

eine Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\bar{\Gamma}$ -Nebenklassen wie in (1.7) mit der Zusatzbedingung, dass

$$\mathcal{F}_\Gamma := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$$

ein zusammenhängendes Inneres hat. Dann ist \mathcal{F}_Γ ein Fundamentalbereich der Aktion von Γ auf \mathbb{H} .

Beweis. Die Menge \mathcal{F}_Γ ist abgeschlossen, da \mathcal{F} als Fundamentalbereich der Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} abgeschlossen ist, Möbius-Transformationen auf \mathbb{H} als Homöomorphismen operieren und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. Da wir zudem vorausgesetzt haben, dass \mathcal{F}_Γ ein zusammenhängendes Inneres hat, erfüllt dieses somit Eigenschaft (i) in Definition 1.22.

Dass \mathcal{F}_Γ auch Eigenschaft (ii) in Definition 1.22 genügt, ergibt sich unmittelbar aus seiner Konstruktion,

denn: Sei $z \in \mathbb{H}$ beliebig. Da \mathcal{F} ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} ist, gibt es ein $w \in \mathcal{F}$ und ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $z = M \langle w \rangle$. Wegen der vorausgesetzten Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ gibt es ein $\mu \in \{1, \dots, m\}$, ein $M_\mu \in \Gamma$ und ein Vorzeichen $\varepsilon_\mu \in \{\pm 1\}$ mit

$$M = \varepsilon_\mu M_\mu A_\mu.$$

Wir erhalten

$$z = (\varepsilon_\mu M_\mu A_\mu) \langle w \rangle = M_\mu \langle A_\mu \langle w \rangle \rangle \in \Gamma \langle \mathcal{F}_\Gamma \rangle$$

und somit die Behauptung. #

Schließlich erfüllt \mathcal{F}_Γ auch Eigenschaft (iii) in Definition 1.22,

denn: Seien z, w zwei Punkte im Inneren $\mathring{\mathcal{F}}_\Gamma$ von \mathcal{F}_Γ mit $w = M \langle z \rangle$ für ein $M \in \Gamma$. Dann gibt es $\varepsilon, \delta > 0$ mit

$$U_\varepsilon(z), U_\delta(w) \subseteq \mathring{\mathcal{F}}_\Gamma.$$

Da Möbius-Transformationen auf \mathbb{H} als Homöomorphismen operieren, ist mit $U_\varepsilon(z)$ auch $M \langle U_\varepsilon(z) \rangle$ offen. Da letzteres nach Konstruktion den Punkt w enthält, ist somit

$$U := M \langle U_\varepsilon(z) \rangle \cap U_\delta(w) \subseteq \mathring{\mathcal{F}}_\Gamma$$

offen und nichtleer. Daher und wegen $\mathcal{F}_\Gamma = \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$ gibt es ein $\mu \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$U \cap (A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle) \neq \emptyset$$

und insbesondere

$$M \langle U_\varepsilon(z) \rangle \cap (A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle) \neq \emptyset.$$

Da die Möbius-Transformation $\varphi_{M^{-1}}$ auf \mathbb{H} als Homöomorphismus operiert, ist wiederum

$$V := U_\varepsilon(z) \cap ((M^{-1}\mathring{A}_\mu)\langle\mathcal{F}\rangle) \subseteq \mathring{\mathcal{F}}_\Gamma$$

offen und nichtleer. Daher und wegen $\mathcal{F}_\Gamma = \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu\langle\mathcal{F}\rangle$ gibt es ein $\nu \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$V \cap (A_\nu\langle\mathcal{F}\rangle) \neq \emptyset$$

und insbesondere

$$((M^{-1}\mathring{A}_\mu)\langle\mathcal{F}\rangle) \cap (A_\nu\langle\mathcal{F}\rangle) \neq \emptyset.$$

Da \mathcal{F} ein Fundamentalbereich der Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} ist, folgt hieraus, dass $M^{-1}A_\mu$ und A_ν als Elemente von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ übereinstimmen und daraus wegen $M \in \Gamma$ auch

$$\bar{\Gamma}A_\nu = \bar{\Gamma}M^{-1}A_\mu = \bar{\Gamma}A_\mu.$$

Nach Definition unserer $\bar{\Gamma}$ -Nebenklassen gilt somit $\nu = \mu$, so dass $M^{-1}A_\mu$ und A_μ als Elemente von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ übereinstimmen, was $M^{-1} \in \{\pm I_2\}$ und also die Behauptung impliziert. #

□

Beispiel 1.50. Nach (1.10) gilt die Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \Gamma_0(2) \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \Gamma_0(2) \sqcup \Gamma_0(2)TST \sqcup \Gamma_0(2)S \end{aligned}$$

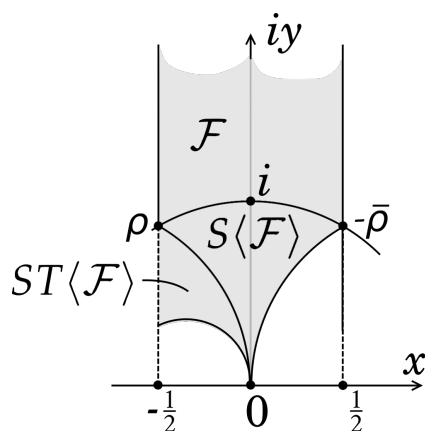
in $\Gamma_0(2)$ -Nebenklassen, welche sich aufgrund von $-I_2 \in \Gamma_0(2)$ identisch auf die zugehörige Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\bar{\Gamma}_0(2)$ -Nebenklassen übertragen lässt. Leider hat aber die korrespondierende Menge

$$\mathcal{F} \cup (TST)\langle\mathcal{F}\rangle \cup S\langle\mathcal{F}\rangle$$

kein zusammenhängendes Inneres. Dies lässt sich jedoch korrigieren, wenn man $TST\langle\mathcal{F}\rangle$ durch $T^{-1} \in \Gamma_0(2)$ um 1 nach links verschiebt. Nach Proposition 1.49 ist dann die so erhaltene Menge

$$\mathcal{F}_{\Gamma_0(2)} = \mathcal{F} \cup (ST)\langle\mathcal{F}\rangle \cup S\langle\mathcal{F}\rangle$$

ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\Gamma_0(2)$ auf \mathbb{H} .



Bemerkung 1.51. Für jede Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es tatsächlich eine Zerlegung von $\overline{\mathbb{H}}$ in $\overline{\Gamma}$ -Nebenklassen, für welche die in Menge \mathcal{F}_Γ ein zusammenhängendes Inneres hat und nach Proposition 1.49 somit ein Fundamentalbereich der Aktion von Γ auf \mathbb{H} ist.

1.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. Beenden Sie den Beweis von Proposition 1.3.

Aufgabe 1.2. Beenden Sie den Beweis von Proposition 1.4.

Aufgabe 1.3. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Kreise und Geraden lassen sich einheitlich schreiben als

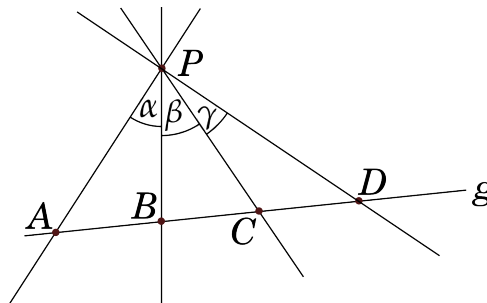
$$\alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \quad \text{mit } \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \text{ und } \beta\bar{\beta} > \alpha\gamma.$$

Im Fall der Kreislinien ist $\alpha \neq 0$, im Fall der Geraden ist $\alpha = 0$. Die Menge aller solchen Kreise und Geraden nennt man auch **verallgemeinerte Kreise**.

(b) Möbius-Transformationen bilden verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.

Aufgabe 1.4. Beenden Sie den Beweis von Proposition 1.9.

Aufgabe 1.5. In der komplexen Ebene seien vier paarweise verschiedene Geraden mit gemeinsamem Schnittpunkt $P \in \mathbb{C}$ gegeben und weiter eine Gerade g , die nicht durch P geht und die anderen Geraden wie in der Abbildung dargestellt in Punkten $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ schneidet.



Zeigen Sie, dass für das Doppelverhältnis der Punkte A, B, C, D dann die Identität

$$\text{DV}(A, B, C, D) = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \sin(\beta)}$$

gilt, wobei die Winkel α , β und γ wie in der Abbildung definiert seien. Insbesondere hängt also das Doppelverhältnis $\text{DV}(A, B, C, D)$ nicht von der genauen Lage von g ab.

Hinweis: Im Beweis dürfen Sie den **Sinussatz** aus der Elementargeometrie verwenden, der besagt, dass in einem beliebigen Dreieck mit Ecken $X, Y, Z \in \mathbb{C}$ und Innenwinkeln φ bei X und ψ bei Y die Gleichung

$$\frac{\sin(\varphi)}{|Y - Z|} = \frac{\sin(\psi)}{|X - Z|}$$

gilt.

Aufgabe 1.6. Sei $s \in \mathbb{C}$, und sei $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ hyperbolisch mit $M\langle s \rangle = s$. Zeigen Sie, dass dann $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt.

Aufgabe 1.7. Seien $M, M' \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ mit $MM' = M'M$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- Ist M parabolisch, so auch M' .
- Gilt $M\langle z \rangle = z$ für ein $z \in \overline{\mathbb{C}}$, so auch $M'\langle z \rangle = z$.

Aufgabe 1.8. Seien z_1, z_2 zwei Punkte in \mathbb{H} , und seien U_1 bzw. U_2 offene Umgebungen von z_1 bzw. z_2 , deren kompakte Abschlüsse in \mathbb{H} liegen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- Für alle bis auf endlich viele teilerfremde Paare $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ gilt die Abschätzung

$$\sup \{ \text{Im}(M\langle z \rangle) \mid M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ und } z \in U_1 \} < \inf_{z \in U_2} \text{Im}(z).$$

- Es gibt nur endlich viele Matrizen $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$M\langle U_1 \rangle \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Tatsache, dass Möbius-Transformationen zu Matrizen aus $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ als Homöomorphismen auf \mathbb{H} operieren.



Aufgabe 1.9. In Korollar 1.28 haben wir gesehen, dass die volle Modulgruppe von den Matrizen T und S erzeugt wird. Für beliebige Kongruenzuntergruppen ist das Auffinden von Erzeugern schwieriger, und die Anzahl der Erzeuger kann beliebig groß werden. Andererseits ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nicht die einzige Kongruenzuntergruppe, die von einer Translation und der Stürzung erzeugt wird. Auch die sogenannte **Thetagruppe** Γ_ϑ , die von T^2 und S erzeugt wird, ist eine Kongruenzuntergruppe. Um das zu einzusehen, zeigen Sie

$$\Gamma_\vartheta := \langle T^2, S \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : a + b + c + d \equiv 0 \pmod{2} \right\},$$

was unmittelbar $\Gamma(2) \subseteq \Gamma_\vartheta$ impliziert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $|a| \neq |b|$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\vartheta$.

Aufgabe 1.10. Zeigen Sie für eine beliebige Primzahl p die folgenden Aussagen:

- (a) Die Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(p)$ besitzt genau 2 Spitzenklassen mit Vertretern ∞ und 0. Dabei gilt

$$h_{\Gamma_0(p)}(\infty) = 1 \quad \text{und} \quad h_{\Gamma_0(p)}(0) = p.$$

- (b) Die Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(p^2)$ besitzt genau $p + 1$ Spitzenklassen mit Vertretern in den Punkten $\infty, 0$ und $-\frac{1}{kp}$ für $k \in \{1, \dots, p-1\}$.

Hinweis: Benutzen Sie Proposition 1.45.

Aufgabe 1.11. Zeigen Sie für eine natürliche Zahl N die folgenden Aussagen:

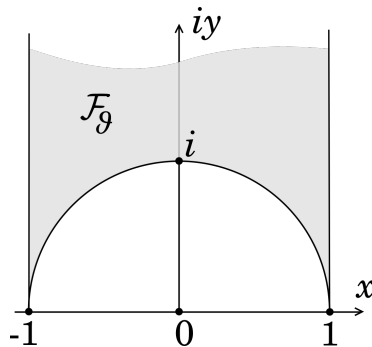
- (a) Ist $N > 3$, so gibt es keine bezüglich $\Gamma_1(N)$ elliptischen Punkte in \mathbb{H} .
- (b) Ist N durch eine Primzahl p mit $p \equiv -1 \pmod{12}$ teilbar, so gibt es keine bezüglich $\Gamma_0(N)$ elliptischen Punkte in \mathbb{H} .

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für $N = p \equiv -1 \pmod{12}$.

Aufgabe 1.12. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Menge

$$\mathcal{F}_\vartheta := \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1, |\mathrm{Re}(z)| \leq 1\}$$

ein Fundamentalbereich der Aktion der bereits in Aufgabe 1 eingeführten Thetagruppe Γ_ϑ auf \mathbb{H} ist.

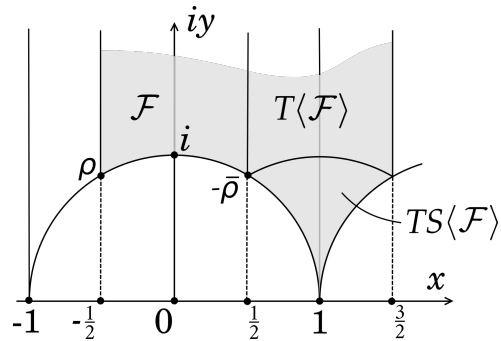




Hinweis: Zum Beweis von Bedingung (iii) aus *Definition 1.22* zeigen Sie zunächst, dass \mathcal{F}_θ genau dann ein Fundamentalbereich für die Aktion von Γ_θ auf \mathbb{H} ist, falls dies auch auf

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\theta = \mathcal{F} \cup T\langle\mathcal{F}\rangle \cup (TS)\langle\mathcal{F}\rangle$$

zutrifft, wobei \mathcal{F} den Standardfundamentalbereich der vollen Modulgruppe bezeichne.



Der Begriff der Modulform

In diesem Kapitel führen wir mit den Modulformen das Hauptstudienobjekt unserer Vorlesung ein. Diese sind meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene \mathbb{H} , die sich unter Möbius-Transformationen wohlverhalten und deshalb eine Fourier-Entwicklung aufweisen. In Abschnitt 2.1 werden wir daher zunächst Fourier-Entwicklungen in diesem Kontext studieren, was uns erlaubt, in Abschnitt 2.2 den Begriff der Modulform zu definieren. Interessante Beispiele werden wir erst in Kapitel 3 kennenlernen; in Abschnitt 2.5 werden wir aber mit der Valenzformel eine beschreibende Eigenschaft für Modulformen nachweisen, mit deren Hilfe wir immerhin zeigen können, zu welchen Parametern es keine Modulformen geben kann.

2.1 Fourier-Entwicklungen

Definition 2.1. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit Periode $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wenn

$$f(x+r) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Beispiel 2.2. Aus der reellen Analysis wissen wir, dass die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus Periode 2π haben.

Bemerkung 2.3. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodisch mit Periode $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann hat die Funktion

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ x & \mapsto f(xr) \end{cases}$$

Periode 1, denn es gilt

$$g(x+1) = f((x+1)r) = f(xr+r) = f(xr) = g(x).$$

In diesem Abschnitt beschränken wir uns daher auf die Untersuchung 1-periodischer Funktionen.

Nun können wir das Konzept der Fourier-Reihen einführen:

Definition 2.4. Zu einer stetigen, 1-periodischen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir den n -ten Fourier-Koeffizienten durch

$$a_n(f) := \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x n} dx.$$

Die **Fourier-Reihe** von f ist definiert¹⁶ durch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n x}.$$

Zu beachten ist der formale Charakter dieser Definition. Während die Koeffizienten $a_n(f)$ wegen der von f geforderten Stetigkeit stets existieren, muss dies auf die Fourier-Reihe keinesfalls zutreffen. Sie kann jedoch abseits jeglicher analytischer Überlegungen als formales Objekt betrachtet werden. So ist etwa im Verband aller Fourier-Reihen eine Addition und mit der Faltung auch eine Multiplikation definiert, ohne dass wir Konvergenz an irgendeiner Stelle voraussetzen müssen – das ist analog zu den Verknüpfungen im Ring der formalen Potenz- oder Laurent-Reihen in der Algebra. Da wir uns nichtsdestotrotz für die analytischen Eigenschaften einiger periodischer Funktionen interessieren, werden wir Kriterien ausarbeiten, die uns garantieren, dass sich die in Definition 2.4 betrachtete Funktion f in die dort angegebene Fourier-Reihe entwickeln lässt. Ein erster Schritt hierzu ist der folgende Satz:

Satz 2.5. Erfüllt eine stetige, 1-periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die Bedingung

$$a_n(f) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

so ist diese bereits die Nullfunktion.

Beweis. Wir nehmen an, f wäre nicht die Nullfunktion, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Wir betrachten zunächst den Fall, dass f seine Werte in den reellen Zahlen annimmt. Ohne Einschränkung könnten wir dann annehmen, dass f auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ definiert ist und $f(0) > 0$ erfüllt,

¹⁶Analog zum Vorgehen bei den LAURENT-Reihen¹⁷ in der Funktionentheorie verstehen wir unter einer **unendlichen Reihe** der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ das Paar

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \right).$$

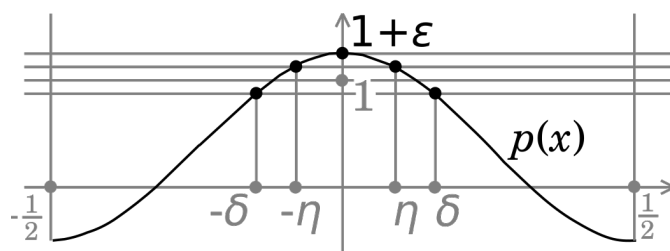
Eine solche Reihe heißt **konvergent**, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ beide konvergieren; in diesem Fall heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ der **Grenzwert** von $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$, und wir schreiben

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}.$$

Im selben Sinn verwenden wir die Begriffe **absoluter Konvergenz** und **gleichmäßiger Konvergenz** bei obigen Reihen.

¹⁷Pierre Alphonse Laurent (1813-1854)

denn: Nach Voraussetzung wäre f nicht die Nullfunktion und nähme somit auf einem $x_0 \in \mathbb{R}$ einen reellen Wert ungleich Null an. Durch Verschieben der Integrationsvariablen um x_0 änderten sich die Werte der Fourier-Koeffizienten nur um einen Vorfaktor ungleich Null und f erfüllte nach eventuellem Multiplizieren mit -1 die gewünschten Eigenschaften. #



Wegen der Stetigkeit von f im Punkt $x_0 = 0$ gäbe es daher ein $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$ mit

$$f(x) > \frac{f(0)}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \delta$$

und wir könnten

$$p(x) := \cos(2\pi x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq \frac{1}{2},$$

$$p_k(x) := p(x)^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq \frac{1}{2}$$

setzen, wobei $\varepsilon > 0$ passend zu δ so klein gewählt wäre, dass

$$|p(x)| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}$$

gälte. Weiter gäbe es natürlich auch ein $\eta \in (0, \delta)$ mit

$$p(x) \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \eta.$$

Dann gälte einerseits

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) p_k(x) dx = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

denn: Nach Konstruktion wären die Funktionen p_k für alle $k \in \mathbb{N}$ Polynome in der Variablen $\cos(2\pi x)$ und also insbesondere Polynome in den Variablen $e^{2\pi i x}$ und $e^{-2\pi i x}$. Die Behauptung folgte somit aus der Linearität des Integrals, der 1-Periodizität des Integranden und da wir $a_n(f) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt haben. #

Andererseits gälte aber auch

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) p_k(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty, \quad (2.2)$$

denn: Als stetige Funktion ist f auf dem Kompaktum $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ betragsmäßig durch ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ beschränkt, es gilt also $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \frac{1}{2}$. Über die Standardabschätzung erhielten wir so

$$\left| \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} f(x) p_k(x) dx \right| \leq M \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k.$$

Ferner wären nach unserer Wahl von δ die Werte $f(x)$ und $p_k(x)$ für $|x| < \delta$ nichtnegativ und es folgte

$$\int_{\eta \leq |x| < \delta} f(x) p_k(x) dx \geq 0.$$

Schließlich hätten wir über die Standardabschätzung nach unten

$$\int_{-\eta}^{\eta} f(x) p_k(x) dx \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k.$$

Durch Aufsummieren dieser drei Ausdrücke erhielten wir eine Abschätzung des zu untersuchenden Integrals, die offensichtlich im Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ gegen unendlich ginge. #

Offensichtlich stehen die beiden von uns hergeleiteten Aussagen (2.1) und (2.2) im Widerspruch zueinander, so dass unsere Annahme, die Funktion f sei im Falle, dass f nur reelle Werte annimmt, nicht die Nullfunktion, nicht wahr sein kann.

Für den Fall, dass f komplexwertig ist, definieren wir die reellwertigen Funktionen

$$u(x) := \frac{f(x) + \bar{f}(x)}{2}, \quad v(x) := \frac{f(x) - \bar{f}(x)}{2i}$$

und erhalten $f = u + iv$. Aus $a_n(\bar{f}) = \overline{a_{-n}(f)}$ folgt, dass die Fourier-Koeffizienten von u und v allesamt verschwinden, und wir können unsere oberen Überlegungen anwenden. Damit ist alles bewiesen. \square

Aus Satz 2.5 ergeben sich zwei wichtige Korollare:

Korollar 2.6 (Identitätssatz für Fourier-Reihen). Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zwei stetige, 1-periodische Funktionen mit

$$a_n(f) = a_n(g) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Dann stimmen f und g bereits auf ganz \mathbb{R} identisch überein.

Beweis. Das folgt unmittelbar durch Anwenden von Satz 2.5 auf die stetige, 1-periodische Funktion $f - g$. \square

Korollar 2.7 (Darstellungssatz für Fourier-Reihen). Konvergiert die Fourier-Reihe einer stetigen, 1-periodischen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig, so konvergiert sie gegen f .

Beweis. Mit den nach Voraussetzung gegebenen Fourier-Koeffizienten $a_n(f)$ definieren wir die Funktion

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n x} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n(f) e^{2\pi i n x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Diese ist nach Voraussetzung wohldefiniert, als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen selbst wieder stetig und natürlich 1-periodisch; ihre Fourier-Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_n(g) = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(f) \int_0^1 e^{2\pi i (m-n)x} dx = a_n(f).$$

Nach dem Identitätssatz für Fourier-Reihen 2.6 gilt damit bereits $f \equiv g$ und die Fourier-Reihe von f konvergiert gleichmäßig gegen f . \square

Für den Fall, dass die betrachtete Funktion mehrfach differenzierbar ist, lässt sich damit schließlich die gleichmäßig absolute Konvergenz der Fourier-Reihe gegen die zugehörige Funktion zeigen:

Satz 2.8. *Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare, 1-periodische Funktion. Dann konvergiert die zu f gehörige Fourier-Reihe gleichmäßig absolut gegen f .*

Beweis. Mit zweifacher partieller Integration folgt für die Fourier-Koeffizienten mit der 1-Periodizität der Funktionen

$$x \mapsto f(x) e^{-2\pi i n x} \quad \text{und} \quad x \mapsto f'(x) e^{-2\pi i n x}$$

die Asymptotik

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \left[-\frac{f(x) e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n} \right]_0^1 + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 f'(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \left[-\frac{f'(x) e^{-2\pi i n x}}{(2\pi i n)^2} \right]_0^1 + \frac{1}{(2\pi i n)^2} \int_0^1 f''(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{für } |n| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Durch Abschätzen mit der bekanntermaßen konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ folgt die gleichmäßig absolute Konvergenz der Fourier-Reihe von f und zwar gegen f , wie der Darstellungssatz für Fourier-Reihen 2.7 besagt. \square

Die Idee der Fourier-Reihen lässt sich auf gewisse Funktionen auf offenen Teilmengen in \mathbb{C} übersetzen, wobei in Hinsicht auf Satz 2.8 der Fokus auf holomorphe Funktionen besonders vielversprechend erscheint. Wir müssen hierfür zunächst den Begriff der Periodizität geeignet anpassen:

Definition 2.9. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **periodisch** mit Periode $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wenn

$$z + \omega \in D \quad \text{und} \quad f(z + \omega) = f(z) \quad \text{für alle } z \in D.$$

gilt.

Beispiel 2.10. Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass die komplexen trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus Periode 2π haben und die komplexe Exponentialfunktion Periode $2\pi i$.

Mit demselben Argument wie in Bemerkung 2.3 können wir uns auch jetzt wieder auf die Untersuchung 1-periodischer Funktionen beschränken.

Betrachten wir nun speziell für $-\infty \leq a < b \leq \infty$ den **Horizontalstreifen**

$$\mathbb{H}_{a,b} := \{z \in \mathbb{C} \mid a < \text{Im}(z) < b\} \quad (2.3)$$

und schreiben dabei kurz $\mathbb{H}_a := \mathbb{H}_{a,\infty}$ sowie $\mathbb{H} := \mathbb{H}_0$. Dieser Horizontalstreifen $\mathbb{H}_{a,b}$ wird offensichtlich durch die Abbildung

$$e: \begin{cases} \mathbb{H}_{a,b} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto q := e^{2\pi iz} \end{cases}$$

auf das Ringgebiet

$$D_{e^{-2\pi b}}^{e^{-2\pi a}} := \{q \in \mathbb{C} \mid e^{-2\pi b} < |q| < e^{-2\pi a}\}$$

in der komplexen q -Ebene abgebildet, wobei wir die Identifikationen $e^{-2\pi \infty} = 0$ und $e^{-2\pi(-\infty)} = \infty$ verwenden. Daraus motiviert sich der folgende Satz:

Satz 2.11 (Fourier-Entwicklung periodischer holomorpher Funktionen). Für gegebene $-\infty \leq a < b \leq \infty$ definiert die Zuordnung¹⁸

$$\left(q \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n \right) \mapsto \left(z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \right),$$

einen Isomorphismus zwischen dem \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{O}(D_{e^{-2\pi b}}^{e^{-2\pi a}})$ der holomorphen Funktionen auf dem Ringgebiet $D_{e^{-2\pi b}}^{e^{-2\pi a}}$ und dem \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{O}_{\text{per},1}(\mathbb{H}_{a,b})$ der 1-periodischen, holomorphen Funktionen auf dem Horizontalstreifen $\mathbb{H}_{a,b}$.

¹⁸Wir werden im Folgenden oft diese Identifikation ausnutzen und abkürzend

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) q^n$$

für die Fourier-Entwicklung einer 1-periodischen Funktion f schreiben. Wir setzen dann also stillschweigend $q := e^{2\pi iz}$.

Insbesondere hat jede 1-periodische, holomorphe Funktion $f: \mathbb{H}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$ eine **Fourier-Entwicklung**¹⁹

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) q^n =: f_{i\infty}(q) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_{a,b}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_n(f) \in \mathbb{C}$. Die Reihe ist gleichmäßig absolut konvergent auf Teilmengen $\overline{\mathbb{H}_{c,d}} \subseteq \mathbb{H}_{a,b}$ mit $a < c < d < b$ und es gilt unabhängig für alle $z_0 \in \mathbb{H}_{a,b}$ die Formel

$$a_n(f) = \int_0^1 f(z_0 + t) e^{-2\pi i n(z_0 + t)} dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Beweis. Offenbar gilt $e^{-2\pi b} < |q| = |e^{2\pi i z}| < e^{-2\pi a}$ genau für $a < \text{Im}(z) < b$, weshalb die Reihen $f_{i\infty}(q)$ und $f(z)$ gegenseitig ihre Konvergenz implizieren. Es ist daher die offenbar lineare Abbildung nach dem Identitätssatz für Potenzreihen wohldefiniert und wegen des Identitätssatzes für Fourier-Reihen 2.6 injektiv. Es verbleibt, die Surjektivität zu zeigen. Ist $f: \mathbb{H}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 1-periodische, holomorphe Funktion, so wird einerseits zu jedem $a < y_1 < b$ eine 1-periodische Abbildung $x \mapsto f(x + iy_1)$ auf den reellen Zahlen \mathbb{R} definiert. Wegen der Holomorphie von f besitzt diese nach Satz 2.8 eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe

$$f(x + iy_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y_1, f) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n y_1} a_n(y_1, f) e^{2\pi i n(x + iy_1)}. \quad (2.5)$$

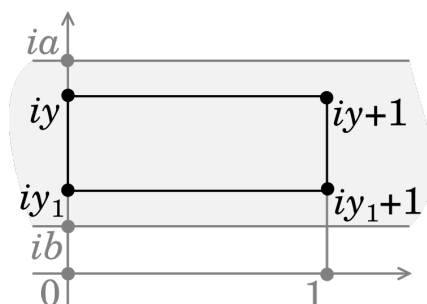
Andererseits ist für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ auch die Funktion $g_n(z) := f(z) e^{-2\pi i n z}$ auf $\mathbb{H}_{a,b}$ holomorph und 1-periodisch. Wenden wir für feste $y_1, y \in (a, b)$ und $n \in \mathbb{Z}$ den CAUCHY'schen Integralsatz²⁰ längs des Randes des Rechtecks mit Ecken $iy_1, iy, iy + 1$ und $iy_1 + 1$ auf die Funktion g_n an, so folgt

$$\begin{aligned} e^{2\pi i n y_1} a_n(y_1, f) &\stackrel{(2.5)}{=} \int_0^1 f(x + iy_1) e^{-2\pi i n(x + iy_1)} dx \\ &= \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi i n(x + iy)} dx \\ &\stackrel{(2.5)}{=} e^{2\pi i n y} a_n(y, f), \end{aligned}$$

da sich die Integrale über die vertikalen Seiten wegen der Periodizität des Integranden gegenseitig wegheben.

¹⁹Im Gegensatz zur Geometrie auf der Riemann'schen Zahlenkugel, die wir in Kapitel 1 im Kontext der Möbius-Transformationen betrachtet haben, hat der Punkt ∞ in der Fourier-Analyse keine einheitliche Bedeutung mehr: Für periodische Funktionen macht es einen Unterschied, aus welcher Richtung sich ihr Argument dem Punkt ∞ nähert. Hintergrund ist, dass nicht die gesamte komplexe Ebene sondern nur ein im Realteil beschränkbarer Streifen konform auf eine geeignete gelochte Kreisscheibe abgebildet wird. Daher geben wir in den ab jetzt folgenden analytischen Aspekten dem Punkt ∞ eine Verortung und bezeichnen ihn als $i\infty$. Dies bedeutet in der Praxis, dass für eine Folge $z_n \rightarrow i\infty$ auch $\text{Im}(z_n) \rightarrow \infty$ gelten muss.

²⁰Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)



Folglich ist $y \mapsto e^{2\pi ny} a_n(y, f)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine konstante Funktion auf dem Intervall (a, b) , deren Wert wir als $a_n(f)$ bezeichnen, und das Integral (2.4) hängt wegen der Periodizität von f nicht von der Wahl z_0 ab. Aus der gleichmäßig absoluten Konvergenz der Laurent-Reihe $f_{i\infty}$ auf den kompakten Teilmengen $\overline{D_{e^{-2\pi c}}^{e^{-2\pi a}}} \subseteq D_{e^{-2\pi d}}^{e^{-2\pi a}}$ folgt ebendiese von f in den Bereichen $\overline{\mathbb{H}_{c,d}} \subseteq \mathbb{H}_{a,b}$ mit $a < c < d < b$, womit alles gezeigt ist. \square

Bemerkung 2.12. Offenbar folgt in der Situation von Satz 2.11 insbesondere die gleichmäßig absolute Konvergenz der Fourier-Reihe auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{H}_{a,b}$, da jedes solche K in einer Menge $\overline{\mathbb{H}_{c,d}}$ mit $a < c < d < b$ enthalten ist.

Das folgende Beispiel einer Fourier-Entwicklung werden wir in Abschnitt 3.1 benötigen:

Beispiel 2.13. Sei $k \geq 2$ eine ganze Zahl, und sei $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{0,\infty}$ die obere Halbebene. Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H},$$

denn: Für eine beliebige kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $K \subseteq \overline{U_c(0)}$, also mit

$$|z - n| \geq |n| - |z| \geq |n| - c \geq \frac{|n|}{2} \quad \text{für alle } n \geq 2c.$$

Es folgt

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2c}} |z - n|^{-k} \leq 2^k \cdot \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2c}} \frac{1}{n^k} < \infty$$

und somit die gleichmäßig absolute Konvergenz der Reihe auf der linken Seite unserer Behauptung auf dem beliebigen Kompaktum $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Insbesondere stellt diese Reihe eine auf \mathbb{H} holomorphe Funktion dar. Wegen der absoluten Konvergenz können wir sie auch umordnen und sehen so ein, dass die untersuchte Funktion 1-periodisch ist. Nach Satz 2.11 hat daher die linke Seite als holomorphe, 1-periodische Funktion auf \mathbb{H} eine Fourier-Entwicklung.

Mit dem Satz von MITTAG-LEFFLER²¹ aus der Funktionentheorie lässt sich die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\pi \cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \leq N}} (z-n)^{-1}\end{aligned}\tag{2.6}$$

des Kotangens und deren absoluter Konvergenz herleiten. Andererseits gilt für alle $z \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}\pi \cot(\pi z) &= \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{2} \frac{2i}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} = \pi i \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\ &= \pi i \frac{(q-1) + 2}{q-1} = \pi i \left(1 + \frac{2}{q-1} \right) \\ &= \pi i \left(1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n,\end{aligned}\tag{2.7}$$

wobei wir die geometrische Reihenformel anwenden dürfen, da für $z \in \mathbb{H}$ die Voraussetzung $|q| < 1$ erfüllt ist. Fügen wir diese beiden Resultate zusammen, so erhalten wir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \leq N}} (z-n)^{-1} = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Da beide Seiten dieser Gleichung auf Kompakta in \mathbb{H} gleichmäßig absolut konvergieren, dürfen wir sie beliebig oft gliedweise ableiten. Wie man leicht überprüft, ergibt $(k-1)$ -maliges Ableiten nach z

$$(-1)^k (k-1)! \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^k} = (2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

und somit die Behauptung. #

Wenn wir darauf achten, dass $f_{i\infty}(q)$ in $q = 0$ keine nicht-isolierte Singularität erhält, können wir Satz 2.11 auf eine meromorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit ganzzahliger Periode anwenden, um für eine solche Funktion eine Fourier-Entwicklung zu erhalten. Tatsächlich definieren wir:

Definition 2.14. (a) Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Zu einer holomorphen, 1-periodischen Funktion $f: \mathbb{H}_a \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es nach Satz 2.11 eine holomorphe Funktion $f_{i\infty}: D_0^{e^{-2\pi a}} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_{i\infty} \circ e = f$. Wir nennen f **holomorph** bzw. **meromorph** in $z = i\infty$, wenn $f_{i\infty}$ in $q = 0$ holomorph bzw. meromorph ist.

²¹Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927)

- (b) Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $h \in \mathbb{N}$. Zu einer holomorphen, h -periodischen Funktion $f: \mathbb{H}_a \rightarrow \mathbb{C}$ ist nach Bemerkung 2.3 die Funktion $g(z) := f(hz)$ holomorph und 1-periodisch. Die Funktion f heißt **holomorph** bzw. **meromorph in $z = i\infty$** , wenn dies im Sinne von (a) auf die Funktion g zutrifft.
- (c) Sei nun speziell $a = 0$, und sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe, h -periodische Funktion mit $h \in \mathbb{N}$. Wir nennen f **holomorph** bzw. **meromorph in $z = i\infty$** , wenn
- die Menge

$$\{y \in \mathbb{R}_{>0} \mid \text{es gibt eine Polstelle von } f \text{ mit Imaginärteil } y\}$$
 nach oben beschränkt ist, so dass die Einschränkung von f auf ein geeignetes \mathbb{H}_a holomorph ist,
 - diese Einschränkung $f|_{\mathbb{H}_a}$ im Sinne von (b) holomorph bzw. meromorph in $z = i\infty$ ist.

2.2 Modularität

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der Modulform bezüglich einer beliebigen, fest vorgegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ einführen. Modulformen sind meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene \mathbb{H} , die sich unter den in Kapitel 1 behandelten Möbius-Transformationen wohlverhalten bzw. invariant unter dem mit diesen verwandten PETERSSON'sche Strichoperator²² sind, den wir nun definieren werden:

Proposition 2.15. Für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ ist über die Zuordnung $(M, f) \mapsto f|_k M$ mit

$$(f|_k M)(z) := \det(M)^{\frac{k}{2}} (cz + d)^{-k} f(M\langle z \rangle)$$

eine Aktion von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ auf der Menge der auf \mathbb{H} meromorphen Funktionen gegeben.²³ Der zugehörige Operator $\cdot|_k$ heißt der (k -te) **Petersson'sche Strichoperator**.

Beweis. Für ein beliebiges $z \in \mathbb{H}$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ setzen wir

$$j(M, z) := cz + d.²⁴$$

Wie man leicht überprüft, gilt dann für beliebige $M, \tilde{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und alle $z \in \mathbb{H}$ die **Kozykelbedingung**

$$j(M\tilde{M}, z) = j(M, \tilde{M}\langle z \rangle)j(\tilde{M}, z).$$

Es folgt für dieselben Matrizen M, \tilde{M} und alle $z \in \mathbb{H}$

$$(f|_k(M\tilde{M}))(z) = \det(M\tilde{M})^{\frac{k}{2}} j(M\tilde{M}, z)^{-k} f(M\tilde{M}\langle z \rangle)$$

²²Hans Petersson (1902-1984)

²³Man beachte, dass die Potenz der Determinante so gewählt wurde, dass das Zentrum von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ trivial operiert. Wir lassen allerdings in diesem Kapitel nur Matrizen mit Determinante 1 operieren, wo dieser Faktor keine Rolle spielt.

$$\begin{aligned}
&= \det(M)^{\frac{k}{2}} \det(\tilde{M})^{\frac{k}{2}} (j(\tilde{M}, z)^{-k} j(M, \tilde{M}\langle z \rangle)^{-k}) f(M\langle \tilde{M}\langle z \rangle \rangle) \\
&= \det(\tilde{M})^{\frac{k}{2}} j(\tilde{M}, z)^{-k} \left(\det(M)^{\frac{k}{2}} j(M, \tilde{M}\langle z \rangle)^{-k} f(M\langle \tilde{M}\langle z \rangle \rangle) \right) \\
&= \det(\tilde{M})^{\frac{k}{2}} j(\tilde{M}, z)^{-k} (f|_k M)(\tilde{M}\langle z \rangle) \\
&= ((f|_k M)|_k \tilde{M})(z).
\end{aligned}$$

Da offensichtlich für alle $z \in \mathbb{H}$ die Beziehung $(f|_k I_2)(z) = f(z)$ gilt, folgt die Proposition. \square

Lemma 2.16. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Ist $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion mit

$$(f|_k \tilde{M})(z) = f(z) \quad \text{für alle } \tilde{M} \in \Gamma,$$

so hat $f|_k M$ für $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M(i\infty) = s \in \mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$ die Periode

$$\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s}) := \tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s}) := \begin{cases} h_\Gamma(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ regulär,} \\ 2h_\Gamma(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ irregulär,} \end{cases}$$

wobei $h_\Gamma(\mathfrak{s})$ die in Definition 1.41 gegebene Breite der Spitzenklasse \mathfrak{s} ist, und eine Fourier-Entwicklung der Form

$$(f|_k M)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (f|_k M) q^{\frac{n}{\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s})}}, \quad (2.8)$$

die in jedem Horizontalstreifen \mathbb{H}_a mit $a \geq 0$ lokal absolut und gleichmäßig konvergiert, in welchem die Einschränkung von $f|_k M$ holomorph ist.

Beweis. Im Beweis von Lemma 1.39 haben wir $H_\mathfrak{s} = M^{-1}\Gamma_\mathfrak{s}M$ eingesehen. Für ein beliebiges $M^{-1}\tilde{M}M \in H_\mathfrak{s}$ gilt daher nach Voraussetzung

$$(f|_k M)|_k(M^{-1}\tilde{M}M) = f|_k(MM^{-1}\tilde{M}M) = f|_k(\tilde{M}M) = f|_k M.$$

Die erste Behauptung des Lemmas folgt daher unmittelbar aus Definition 1.41 und die zweite mit Definition 2.14 aus der ersten. \square

Lemma 2.16 belegt die Sinnhaftigkeit der folgenden Definition:

Definition 2.17. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und sei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig. Eine meromorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(V_1) \quad (f|_k M)(z) = f(z) \quad \text{für alle } M \in \Gamma,$$

$$(V_2) \quad f|_k M \text{ ist meromorph in } z = i\infty \text{ für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

²⁴Diese Schreibweise ist in der Theorie der Modulformen etabliert und hat den Vorteil, ohne Namen für die Einträge der Matrix M auszukommen.

heißt eine **meromorphe Modulform** von **Gewicht** k bezüglich Γ .

Nach Definition ist die Nullfunktion $f \equiv 0$ eine meromorphe Modulform bezüglich Γ und beliebigen Gewichts. Für $f \not\equiv 0$ ist dies anders:

Bemerkung 2.18. Das Gewicht einer meromorphen Modulform $f \not\equiv 0$ bezüglich einer gegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist eindeutig bestimmt,

denn: Sei f eine Modulform bezüglich Γ sowohl von Gewicht k als auch von Gewicht ℓ mit $k \neq \ell \in \mathbb{Z}$ und sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Nach Axiom (V_1) gilt dann

$$(cz + d)^k f(z) = f(M\langle z \rangle) = (cz + d)^\ell f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

und also auch

$$(cz + d)^k = (cz + d)^\ell \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H} \text{ mit } f(z) \neq 0, \quad (2.9)$$

wobei nach einem **Korollar** des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen die Nullstellenmenge von f in \mathbb{H} abgeschlossen ist und aus isolierten Punkten besteht.

Als Kongruenzuntergruppe hat Γ nach Korollar 1.33 endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Wegen (1.4) ist daher Γ nicht vollständig in

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c = 0 \right\}$$

enthalten, weshalb wir ohne Einschränkung $M \notin \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$, also $c \neq 0$, annehmen können. Wenden wir auf Gleichung (2.9) den **Identitätssatz für Potenzreihen** an, so folgt insbesondere die Gleichheit der Grade $k = \ell$ und somit unsere Behauptung. #

Axiom (V_2) lässt sich noch etwas hübscher formulieren. Dafür müssen wir ein wenig ausholen:

Lemma 2.19. Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, die Axiom (V_1) bezüglich einer gegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit einem Gewicht k erfüllt. Seien weiter $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$ eine Spitzenklasse, $s, \tilde{s} \in \mathfrak{s}$ und $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle i\infty \rangle = s$ und $\tilde{M}\langle i\infty \rangle = \tilde{s}$. Dann gilt: Ist $f|_k M$ meromorph in $z = i\infty$, so auch $f|_k \tilde{M}$.

Beweis. Da für $f \equiv 0$ nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, f und damit auch $f|_k M$ und $f|_k \tilde{M}$ seien nicht konstant Null. Nach Lemma 2.16 hat $f|_k M$ dann eine Fourier-Entwicklung

$$(f|_k M)(z) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n(f|_k M) q^{\frac{n}{h_\Gamma(s)}}$$

mit einem $\nu \in \mathbb{Z}$ und Koeffizienten $a_n(f|_k M) \in \mathbb{C}$. Da s und \tilde{s} nach Voraussetzung Γ -äquivalent sind, gibt es ein $A \in \Gamma$ mit $A\langle \tilde{s} \rangle = s$. Offenbar liegt $M^{-1} A \tilde{M}$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$, es gibt also ein $h \in \mathbb{Z}$ mit $M^{-1} A \tilde{M} = \pm T^h$. Es folgt

$$(f|_k \tilde{M})(z) = (f|_k (A \tilde{M}))(z)$$

$$\begin{aligned}
&= (f|_k(MM^{-1}A\tilde{M}))(z) \\
&= ((f|_kM)|_k(M^{-1}A\tilde{M}))(z) \\
&= \pm \sum_{n=-v}^{\infty} a_n(f|_kM) e^{\frac{2\pi i n(z+h)}{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}} \\
&= \sum_{n=-v}^{\infty} (\pm a_n(f|_kM) e^{\frac{2\pi i n h}{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}}) e^{\frac{2\pi i n z}{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die wegen der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung eindeutig bestimmte Fourier-Entwicklung von $f|_k\tilde{M}$ gefunden. Die Funktion $f|_k\tilde{M}$ ist also meromorph in $z = i\infty$ und das Lemma bewiesen. \square

Im Beweis von Lemma 2.19 haben wir noch etwas mehr bewiesen, denn wir haben auch gezeigt, dass der kleinste Index $n \in \mathbb{Z}$, für den der n -te Fourier-Koeffizient nicht verschwindet, in beiden Fourier-Entwicklungen übereinstimmt. Insbesondere können wir wohldefiniert die folgenden Begriffe einführen:

Definition 2.20. Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, die Axiom (V_1) bezüglich einer gegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit einem Gewicht k erfüllt. Seien weiter $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$, $s \in \mathfrak{s}$ und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M(i\infty) = s$.

- (a) Ist dann $(f|_kM)(z)$ in $z = i\infty$ holomorph bzw. meromorph, so nennen wir f **holomorph** bzw. **meromorph in der Spitze** s bzw. der Spitzenklasse \mathfrak{s} .
- (b) Den kleinsten Index $n \in \mathbb{Z}$, für den der Fourier-Koeffizient $a_n(f|_kM)$ in (2.8) nicht verschwindet, nennen wir die **Ordnung** $\mathrm{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})$ bzw. $\mathrm{ord}_{\Gamma}(f; s)$ von f in der Spitze s bzw. der Spitzenklasse \mathfrak{s} .

In dieser Sprache fordert Axiom (V_2) also Meromorphie in allen Spitzen bezüglich Γ ein und nach Lemma 2.19 ist dies äquivalent zu dem folgenden, leichter zu überprüfenden Axiom:

(V'_2) f ist meromorph in jedem $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$.²⁵

Im für uns wichtigsten Fall $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es nach Bemerkung 1.24 nur eine Äquivalenzklasse von Spitzen. Nach (V'_2) genügt es in diesem Fall also, die Meromorphie einer meromorphen Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ in $z = i\infty$ zu überprüfen.

Die Menge der meromorphen Modulformen festen Gewichts zur gegebenen Kongruenzuntergruppe Γ trägt offensichtlich die Struktur eines \mathbb{C} -Vektorraums. Diesen und einige wichtige Untervektorräume wollen wir nun benennen:

Definition 2.21. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und sei $k \in \mathbb{Z}$.

- (a) Für den \mathbb{C} -Vektorraum der meromorphen Modulformen von Gewicht k bezüglich Γ schreiben wir $V_k(\Gamma)$.

²⁵Nach Proposition 1.37 ist dies eine endliche Menge.

- (b) Den Unterraum der auf ganz $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ holomorphen Modulformen aus $V_k(\Gamma)$ bezeichnen wir mit $M_k(\Gamma)$ und nennen seine Elemente die **(ganzen) Modulformen** von Gewicht k bezüglich Γ .
- (c) Für den Unterraum der in allen Spitzen verschwindenden Modulformen aus $M_k(\Gamma)$ schreiben wir $S_k(\Gamma)$; seine Elemente heißen die **Spitzenformen** bzw. die **cuspidalen Modulformen** von Gewicht k bezüglich Γ .

Im Spezialfall $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ schreiben wir auch einfacher V_k, M_k, S_k statt $V_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

Multipliziert man zwei meromorphe Modulformen bezüglich Γ , so erhält man wieder eine meromorphe Modulform bezüglich Γ . Die jeweiligen Gewichte addieren sich hierbei auf. Wir formalisieren diese Entdeckung und erinnern dazu zunächst an ein Konzept aus der Algebra:

Definition 2.22. Seien K ein Körper und $(M, +)$ ein kommutatives Monoid. Eine **M -Graduierung** auf einem gegebenen K -Vektorraum V ist ein System $(V_m)_{m \in M}$ von Untervektorräumen von V mit

$$V = \bigoplus_{m \in M} V_m.$$

Eine **M -Graduierung** auf einer gegebenen K -Algebra A ist eine Graduierung auf A als Vektorraum mit

$$A_m \cdot A_{\tilde{m}} \subseteq A_{m+\tilde{m}} \quad \text{für alle } m, \tilde{m} \in M.$$

Proposition 2.23. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Dann sind

$$V(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\Gamma), \quad M(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma) \quad \text{und} \quad S(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\Gamma)$$

\mathbb{Z} -graduierte \mathbb{C} -Algebren. Im Spezialfall $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ schreiben wir auch einfacher V, M, S statt $V(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), M(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), S(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

Beweis. Nach Bemerkung 2.18 ist das Gewicht einer nichttrivialen meromorphen Modulform eindeutig. Damit folgt, dass

$$V(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\Gamma), \quad M(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma) \quad \text{und} \quad S(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\Gamma)$$

jeweils direkte Summen von \mathbb{C} -Vektorräumen sind. Auf $V(\Gamma)$ – und analog auf $M(\Gamma)$ bzw. $S(\Gamma)$ – lässt sich durch

$$\begin{aligned} V_k(\Gamma) \times V_\ell(\Gamma) &\rightarrow V_{k+\ell}(\Gamma), \\ (f, g) &\mapsto fg \end{aligned}$$

eine Multiplikation definieren,

denn: Als Produkt zweier auf \mathbb{H} meromorphen Funktionen ist fg wieder auf \mathbb{H} meromorph. Zudem gilt für alle $M \in \Gamma$

$$(fg)(M\langle z \rangle) = f(M\langle z \rangle) \cdot g(M\langle z \rangle)$$

$$\begin{aligned}
&= j(M, z)^k f(z) \cdot j(M, z)^\ell g(z) \\
&= j(M, z)^{k+\ell} (fg)(z),
\end{aligned}$$

so dass fg Axiom (V_1) bezüglich Γ mit Gewicht $k + \ell$ erfüllt. Die Fourier-Entwicklung von fg ergibt sich als das Produkt der jeweiligen Fourier-Entwicklungen von f und g . Die Meromorphie in $z = i\infty$ von fg folgt also aus der entsprechenden Eigenschaft von f und g . Das Produkt fg erfüllt daher auch Axiom (V_2') , so dass insgesamt die Behauptung folgt. $\#$

Also haben wir eine wohldefinierte Multiplikation, bezüglich derer sich das Gewicht additiv verhält, was $V(\Gamma)$ – und analog auf $M(\Gamma)$ bzw. $S(\Gamma)$ – zu einer \mathbb{Z} -graduierten \mathbb{C} -Algebra macht. \square

Wir haben noch keine Beispiele für Modulformen angegeben und werden dies auch erst in Kapitel 3 nachholen, weil die Konstruktion der klassischen Beispiele recht aufwändig ist. Erste Überlegungen zu Modulformen können wir jedoch schon hier anstellen:

Proposition 2.24. *Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe mit $-I_2 \in \Gamma$. Dann gilt $V_k(\Gamma) = \{0\}$ für alle ungeraden Werte von k .*

Beweis. Ist $-I_2 \in \Gamma$, so gilt nach (V_1) für ein beliebiges $f \in V_k(\Gamma)$

$$f(z) = (f|_k(-I_2))(z) = (0 \cdot z + (-1))^{-k} f((-I_2)\langle z \rangle) = (-1)^k f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Für ungerades k folgt sofort $f \equiv 0$, wie behauptet. \square

Proposition 2.25. *Sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ gegeben. Dann ist mit Γ auch*

$$(A^{-1}\Gamma A \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

eine Kongruenzuntergruppe und für eine beliebige auf \mathbb{H} holomorphe bzw. meromorphe Funktion f , die Axiom (V_1) bezüglich Γ mit einem Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt, ist

$$g := f|_k A$$

auch holomorph bzw. meromorph auf \mathbb{H} und erfüllt Axiom (V_1) bezüglich der Kongruenzuntergruppe $A^{-1}\Gamma A \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit Gewicht k .

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass es ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{N}A, \tilde{N}A^{-1} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ und $\Gamma(\tilde{N}) \subseteq \Gamma$ gibt. Für $N := \tilde{N}^3$ gilt dann

$$\begin{aligned}
A\Gamma(N)A^{-1} &\subseteq A(I_2 + \tilde{N}^3\mathbb{Z}^{2 \times 2})A^{-1} = I_2 + \tilde{N}(\tilde{N}A)\mathbb{Z}^{2 \times 2}(\tilde{N}A^{-1}) \subseteq I_2 + \tilde{N}\mathbb{Z}^{2 \times 2}, \\
A\Gamma(N)A^{-1} &\subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})
\end{aligned}$$

und also

$$A\Gamma(N)A^{-1} \subseteq \Gamma(\tilde{N}).$$

Nach Konjugieren mit A folgt

$$\Gamma(N) \subseteq A^{-1}\Gamma(\tilde{N})A \subseteq A^{-1}\Gamma A$$

und, indem wir alles mit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ schneiden, also die erste Behauptung.

Die Funktion $f|_k A$ ist holomorph bzw. meromorph auf \mathbb{H} nach Proposition 2.15. Ebenfalls mit Proposition 2.15 gilt

$$(f|_k A)|_k(A^{-1}MA) = f|_k(MA) = (f|_k M)|_k A = f|_k A \quad \text{für alle } M \in \Gamma,$$

womit auch die zweite Behauptung folgt. \square

Korollar 2.26. Sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ gegeben. Liegt dann eine Funktion f in $V_k(\Gamma)$ bzw. $M_k(\Gamma)$ bzw. $S_k(\Gamma)$ für eine Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und ein $k \in \mathbb{Z}$, so liegt $f|_k A$ in $V_k(\tilde{\Gamma})$ bzw. $M_k(\tilde{\Gamma})$ bzw. $S_k(\tilde{\Gamma})$ mit $\tilde{\Gamma} := A^{-1}\Gamma A \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Beweis. Die Holomorphie bzw. Meromorphie der Funktion $f|_k A$ auf \mathbb{H} sowie Axiom (V_1) bezüglich $\tilde{\Gamma}$ mit Gewicht k folgen mit Proposition 2.25. Axiom (V_2) gilt, da offenkundig genau dann $(f|_k A)|_k M = f|_k(AM)$ für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ holomorph bzw. meromorph in $z = i\infty$ ist, wenn dies auf $f|_k M$ zutrifft. Ist f zudem eine Spitzenform, so nach Proposition 1.17 (b) auch $f|_k A$. Damit ist alles bewiesen. \square

Proposition 2.27. Seien $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$ sowie $f \in V_k(\Gamma)$. Ist weiter A_1, \dots, A_n ein Vertretersystem von Γ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wie in (1.6), so gilt

$$\mathrm{tr}(f) := \sum_{v=1}^n f|_k A_v \in V_k \quad \text{und} \quad F := \prod_{v=1}^n f|_k A_v \in V_{kn},$$

wobei wir die durch $f \mapsto \mathrm{tr}(f)$ induzierte Abbildung $V_k(\Gamma) \rightarrow V_k$ auch als **Spurbildung** bezeichnen.

Beweis. Nach Korollar 2.26 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$f|_k A_v \in V_k(\Gamma(N)) \quad \text{für alle } v \in \{1, \dots, n\}$$

und mit Proposition 2.23 folgt

$$\mathrm{tr}(f) \in V_k(\Gamma(N)) \quad \text{und} \quad F \in V_{nk}(\Gamma(N)).$$

Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathrm{tr}(f)$ und F Axiom (V_1) bezüglich ganz $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und nicht nur bezüglich $\Gamma(N)$ erfüllen. Tatsächlich gilt für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(f)(M\langle z \rangle) &= \sum_{v=1}^n (f|_k A_v)(M\langle z \rangle) & F(M\langle z \rangle) &= \prod_{v=1}^n (f|_k A_v)(M\langle z \rangle) \\ &= \sum_{v=1}^n j(M, z)^k ((f|_k A_v)|_k M)(z) & &= \prod_{v=1}^n j(M, z)^k \cdot ((f|_k A_v)|_k M)(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= j(M, z)^k \cdot \sum_{v=1}^n (f|_k(A_v M))(z) &= j(M, z)^{nk} \cdot \prod_{v=1}^n (f|_k(A_v M))(z) \\
&= j(M, z)^k \cdot \operatorname{tr}(f)(z) &= j(M, z)^{nk} \cdot F(z),
\end{aligned}$$

wobei die jeweils letzte Gleichheit gilt, da wegen

$$\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) = \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M = \left(\bigsqcup_{v=1}^n \Gamma A_v \right) \cdot M = \bigsqcup_{v=1}^n \Gamma(A_v M). \quad (2.10)$$

mit A_v auch $A_v M$ ein Vertretersystem von Γ in $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ durchläuft. Insgesamt folgt die Proposition. \square

2.3 Das Petersson-Skalarprodukt



Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Konstruktion eines „natürlichen“ Skalarprodukts auf dem \mathbb{C} -Vektorraum $S_k(\Gamma)$ der Spitzenformen von Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ bezüglich der fest vorgegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$. Hierzu benötigen wir zunächst ein Γ -invariantes Maß (vgl. [hier](#)) auf \mathbb{H} :

Lemma 2.28. *Die Differentialform*

$$d\omega(z) := \frac{dx \wedge dy}{y^2} \quad \text{für alle } z = x + iy \in \mathbb{H}$$

ist invariant unter $\operatorname{GL}_2(\mathbb{R})^+$, es gilt also

$$d\omega(M\langle z \rangle) = d\omega(z) \quad \text{für alle } M \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})^+ \text{ und alle } z = x + iy \in \mathbb{H}.$$

Beweis. Einerseits gilt für alle $z = x + iy \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
d\omega(z) &= \frac{1}{y^2} \cdot (dx \wedge dy) \\
&= \frac{i}{2y^2} \cdot (0 - i \cdot dx \wedge dy - i \cdot dx \wedge dy + 0) \\
&= \frac{i}{2y^2} \cdot (dx \wedge dx - i \cdot dx \wedge dy + i \cdot dy \wedge dx + dy \wedge dy) \\
&= \frac{i}{2y^2} \cdot (dx + i \cdot dy) \wedge (dx - i \cdot dy) \\
&= \frac{i}{2y^2} \cdot (dz \wedge \bar{d}z).
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Andererseits gilt für ein beliebiges $M \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und ein beliebiges $z \in \mathbb{H}$

$$\frac{dM\langle z \rangle}{dz} = \frac{d \frac{az+b}{cz+d}}{dz} = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{\det(M)}{j(M, z)^2}. \quad (2.12)$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
d\omega(M\langle z \rangle) &\stackrel{(2.11)}{=} \frac{i}{2 \cdot \operatorname{Im}(M\langle z \rangle)^2} \cdot (dM\langle z \rangle \wedge \overline{dM\langle z \rangle}) \\
&\stackrel{(2.12)}{=} \frac{i}{2 \cdot \operatorname{Im}(M\langle z \rangle)^2} \cdot \left(\frac{\det(M) \cdot dz}{j(M, z)^2} \wedge \overline{\frac{\det(M) \cdot dz}{j(M, z)^2}} \right) \\
&\stackrel{(1.2)}{=} \frac{i \cdot |j(M, z)|^4}{2 \cdot \det(M)^2 \cdot y^2} \cdot \frac{\det(M)^2}{|j(M, z)|^4} \cdot (dz \wedge \overline{dz}) \\
&\stackrel{(2.11)}{=} d\omega(z)
\end{aligned}$$

und somit das Lemma. □

Lemma 2.29. Sei $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und seien F_1 und F_2 Fundamentalbereiche für die Aktion von Γ auf \mathbb{H} , so dass die Ränder ∂F_1 von F_1 und ∂F_2 von F_2 Nullmengen, also Mengen von Maß Null, sind. Sei $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ messbar (vgl. *hier*) und Γ -invariant, gelte also $g(M\langle z \rangle) = g(z)$ für alle $M \in \Gamma$. Weiter gelte



$$\int_{F_1} |g(z)| d\omega(z) < \infty,$$

also dass $|g|$ über F_1 integrierbar ist – dies impliziert, dass auch g über F_1 integrierbar ist. Dann ist g auch über F_2 integrierbar und es gilt

$$\int_{F_2} g(z) d\omega(z) = \int_{F_1} g(z) d\omega(z).$$

Beweis. Nach Bedingung (ii) in Definition 1.22 gilt

$$\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \bar{\Gamma}} M\langle F_1 \rangle = \bigcup_{M \in \bar{\Gamma}} M\langle F_2 \rangle, \quad (2.13)$$

nach Bedingung (iii) zudem

$$M\langle \mathring{F}_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \mathring{F}_1 \rangle = \emptyset \quad \text{für alle } M \neq \pm \tilde{M} \text{ in } \bar{\Gamma}. \quad (2.14)$$

Da mit ∂F_1 auch für alle $M, \tilde{M} \in \bar{\Gamma}$ die Translate $M\langle \partial F_1 \rangle, \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle$ Nullmengen sind, trifft dies folglich im Fall $M \neq \pm \tilde{M}$ auch auf

$$\begin{aligned}
&M\langle F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle F_1 \rangle \\
&= M\langle \mathring{F}_1 \cup \partial F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \mathring{F}_1 \cup \partial F_1 \rangle \\
&= (M\langle \mathring{F}_1 \rangle \cup M\langle \partial F_1 \rangle) \cap (\tilde{M}\langle \mathring{F}_1 \rangle \cup \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle) \\
&\stackrel{(2.14)}{=} (M\langle \mathring{F}_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle) \cup (M\langle \partial F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \mathring{F}_1 \rangle) \cup (M\langle \partial F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle)
\end{aligned}$$

zu. Es gilt

$$\int_{F_1} g(z) d\omega(z) = \int_{\mathbb{H} \cap F_1} g(z) d\omega(z)$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2.13)}{=} \int_{(\cup_{M \in \Gamma} M(F_2)) \cap F_1} g(z) \, d\omega(z) \\
&= \int_{\cup_{M \in \Gamma} (M(F_2) \cap F_1)} g(z) \, d\omega(z),
\end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, dass es sich hierbei um eine abzählbare Vereinigung messbarer Mengen handelt. Da die paarweisen Durchschnitte nach der obigen Überlegung jeweils Nullmengen sind, gilt die abzählbare Additivität des Integrals und somit

$$\begin{aligned}
\int_{F_1} g(z) \, d\omega(z) &= \sum_{M \in \Gamma} \int_{M(F_2) \cap F_1} g(z) \, d\omega(z) \\
&= \sum_{M \in \Gamma} \int_{F_2 \cap M^{-1}(F_1)} g(M\langle z \rangle) \, d\omega(M\langle z \rangle) \\
&\stackrel{2.28}{=} \sum_{M \in \Gamma} \int_{F_2 \cap M^{-1}(F_1)} g(z) \, d\omega(z) \\
&= \dots = \int_{F_2} g(z) \, d\omega(z).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.30. Der Rand des in Satz 1.27 eingeführten Standardfundamentalbereichs \mathcal{F} für die Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} ist offensichtlich eine Nullmenge. Weiter gilt

$$\mathrm{vol}(\mathcal{F}) := \int_{\mathcal{F}} d\omega(z) = \frac{\pi}{3} < \infty,$$

denn: Setzen wir für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}_{>1}$

$$\mathcal{F}_c := \mathcal{F} \cap \overline{\mathbb{H}_{0,c}} = \{z \in \mathcal{F} : \mathrm{Im}(z) \leq c\},$$

so gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}} d\omega(z) &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} \frac{dx \wedge dy}{y^2} \\
&= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} \frac{d^2x \cdot y - dy \wedge dx}{y^2} + i \cdot \frac{d^2y \cdot y - dy \wedge dy}{y^2} \\
&= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} d\left(\frac{dx + i dy}{y}\right) \\
&= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} d\left(\frac{dz}{y}\right) \\
&= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\partial \mathcal{F}_c} \frac{dz}{y},
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit mit dem Satz von Stokes ergibt. Für das Integral über die Strecke

$$z(t) = t + ic \quad \text{mit } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$



gilt

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d(t+ic)}{c} = \frac{1}{c} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{c} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0.$$

Die Integrale über die beiden Strecken

$$z(t) = \pm \frac{1}{2} + it \quad \text{mit } t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, c \right]$$

heben sich auf, da letztere in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und der Integrand offensichtlich invariant unter der Ersetzung $z \mapsto z + 1$ ist. Es verbleibt das Integral über den Kreisbogen

$$z(t) = e^{it} = \cos(t) + i \sin(t) \quad \text{mit } t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right].$$

Dieses Integral muss reellwertig sein und hat damit den Wert

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dz(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\sin(t)} dt &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{i \cos(t) - \sin(t)}{\sin(t)} dt \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{Re} \left(\frac{i \cos(t) - \sin(t)}{\sin(t)} \right) dt \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (-1) dt \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

#

Nach Lemma 2.29 stimmt das Volumen sämtlicher Fundamentalbereiche für die Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} , deren Rand eine Nullmenge ist, überein, so dass sich der Wert $\operatorname{vol}(\mathcal{F})$ auch als Volumen der Doppelnebenklasse

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \stackrel{1.17}{\cong} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

ansehen lässt, welche die Struktur einer sogenannten kompakten Riemann'schen Fläche trägt.

Wir suchen nun nach einem aus Modulformen bezüglich einer gegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zusammengesetzten Integranden, der Γ -invariant und auf \mathbb{H} beschränkt ist:

Proposition 2.31. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $f \in M_k(\Gamma)$ setzen wir

$$g(z) := y^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Es gelten nun die folgenden Aussagen:

(a) g ist Γ -invariant.

(b) Ist speziell $f \in S_k(\Gamma)$, so ist g auf \mathbb{H} beschränkt.

Beweis. Behauptung (a) können wir einfach nachrechnen. Tatsächlich gilt für jedes $M \in \Gamma$ und jedes $z = x + iy \in \mathbb{H}$

$$g(M\langle z \rangle) = \operatorname{Im}(M\langle z \rangle)^{\frac{k}{2}} \cdot |f(M\langle z \rangle)| \stackrel{(1.2), (V_1)}{=} \frac{y^{\frac{k}{2}}}{|j(M, z)|^k} \cdot |j(M, z)^k \cdot f(z)| = y^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)| = g(z).$$

Zum Beweis von Behauptung (b) genügt es nach (2.13) und Aussage (a), die Beschränktheit von g auf einem Fundamentalbereich der Aktion von Γ auf \mathbb{H} nachzuweisen. Sei

$$\mathcal{F}_\Gamma := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle \quad \text{für } A_1, \dots, A_m \in \overline{\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} \text{ mit } \overline{\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} = \bigsqcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} A_\mu$$

ein solcher Fundamentalbereich, wie wir ihn in Proposition 1.49 eingeführt haben. Sei nun $c \in \mathbb{R}_{>1}$ beliebig. Dann ist g als stetige Funktion auf dem Kompaktum

$$(\mathcal{F}_\Gamma)_c := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F}_c \rangle$$

beschränkt. Es verbleibt also zu zeigen, dass g für $z \rightarrow A_\mu \langle i\infty \rangle$ mit $\mu \in \{1, \dots, m\}$ beschränkt ist, wobei wir $z \in \mathcal{F}_\Gamma$ annehmen dürfen. Wir verlagern diese Fragestellung für die verschiedenen Werte von μ durch Anwenden der jeweiligen Matrix A_μ^{-1} in den Standardfundamentalbereich \mathcal{F} . Die Proposition folgt nun, wenn wir für alle $\mu \in \{1, \dots, m\}$

$$\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle) \rightarrow \infty \text{ für } A_\mu^{-1}\langle z \rangle \in \mathcal{F} \quad \implies \quad g(z) \rightarrow 0$$

zeigen können. Tatsächlich hat nach (V₂) für jedes $\mu \in \{1, \dots, m\}$ die Funktion $f|_k A_\mu$ in $i\infty$ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$(f|_k A_\mu)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_k A_\mu) q^{\frac{n}{h_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Lassen wir auf beiden Seiten A_μ^{-1} operieren, so erhalten wir

$$f(z) = j(A_\mu^{-1}, z)^{-k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_k A_\mu) e^{\frac{2\pi i n A_\mu^{-1}\langle z \rangle}{h_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Für ein beliebiges $z \in A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle \setminus A_\mu \langle \mathcal{F}_c \rangle$ folgt $\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle) > c$ und somit

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |y^{\frac{k}{2}}| \cdot |f(z)| \\ &= |y|^{\frac{k}{2}} \cdot |j(A_\mu^{-1}, z)|^{-k} \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_k A_\mu) e^{\frac{2\pi i n A_\mu^{-1}\langle z \rangle}{h_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \right| \\ &\stackrel{(1.2)}{\leq} |\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)|^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\frac{2\pi \operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)}{h_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f|_k A_\mu)| \cdot e^{-\frac{2\pi(n-1)\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)}{h_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\frac{2\pi\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f|_k A_\mu)| \cdot e^{-\frac{2\pi(n-1)c}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \\
&= \frac{\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)^{\frac{k}{2}}}{e^{\frac{2\pi\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}}} \cdot \left(e^{\frac{2\pi c}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f|_k A_\mu)| \cdot e^{-\frac{2\pi n c}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \right) \\
&\ll \frac{\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)^{\frac{k}{2}}}{e^{\frac{2\pi\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}}} \xrightarrow{\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle) \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Das ist Behauptung (b). □

Definition 2.32. Sei $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $f, g \in M_k(\Gamma)$ mit $f \cdot g \in S_{2k}(\Gamma)$ ist das **Petersson-Skalarprodukt** definiert durch

$$\langle f | g \rangle_\Gamma := \frac{1}{[\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]} \cdot \int_F f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z), \quad (2.15)$$

wobei F einen Fundamentalbereich für die Aktion von Γ auf \mathbb{H} bezeichne, dessen Rand eine Nullmenge in \mathbb{H} ist. Im Fall $\Gamma = \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ schreiben wir auch kurz $\langle \cdot | \cdot \rangle$ statt $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})}$.

Satz 2.33. Seien $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$ und $f, g \in M_k(\Gamma)$ mit $f \cdot g \in S_{2k}(\Gamma)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Das Integral in (2.15) konvergiert absolut und ist unabhängig von der Wahl des benutzten Fundamentalbereichs F .
- (b) Die Zuordnung

$$\begin{aligned}
S_k(\Gamma) \times S_k(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{C}, \\
(f, g) &\mapsto \langle f | g \rangle_\Gamma
\end{aligned}$$

definiert ein Skalarprodukt auf $S_k(\Gamma)$.

- (c) Gilt zusätzlich $f, g \in M_k(\tilde{\Gamma})$ für eine weitere Kongruenzuntergruppe $\tilde{\Gamma} \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$, so gilt

$$\langle f | g \rangle_{\tilde{\Gamma}} = \langle f | g \rangle_\Gamma,$$

das Petersson-Skalarprodukt ist in diesem Sinne also unabhängig von der Wahl von Γ .

Beweis. Wegen $|f(z)\overline{g(z)}y^k| = y^k \cdot |(fg)(z)|$ können wir Proposition 2.31 anwenden und erhalten die Γ -Invarianz und Beschränktheit des Integranden $f(z)\overline{g(z)}y^k$ auf \mathbb{H} . Da \mathcal{F}_Γ eine endliche Vereinigung von Kopien des Standardfundamentalbereichs \mathcal{F} ist, ergibt sich mit Beispiel 2.30

$$\int_{\mathcal{F}_\Gamma} d\omega(z) < \infty$$

und daher auch

$$\int_{\mathcal{F}_\Gamma} |f(z)\overline{g(z)}y^k| d\omega(z) < \infty.$$

Die Unabhängigkeit von der Wahl des Fundamentalbereichs und somit auch Behauptung (a) folgt nun mit Lemma 2.29.

Behauptung (b), dass also das Petersson-Skalarprodukt eingeschränkt auf $S_k(\Gamma) \times S_k(\Gamma)$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt, ist schnell überprüft und soll hier nicht vorgeführt werden.

Es verbleibt Behauptung (c) zu zeigen. Da für je zwei Kongruenzuntergruppen $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ ihr Durchschnitt $\Gamma \cap \tilde{\Gamma}$ wieder eine Kongruenzuntergruppe ist, können wir dabei ohne Einschränkung $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ annehmen. Analog zu (1.7) gilt dann nach Bemerkung 1.51

$$\bar{\Gamma} = \bigsqcup_{\varrho=1}^r \tilde{\Gamma} B_{\varrho} \quad \text{mit } B_1, \dots, B_r \in \bar{\Gamma}$$

und für einen beliebigen Fundamentalbereich \mathcal{F}_{Γ} für die Aktion von Γ auf \mathbb{H} ist analog zu Proposition 1.49 durch

$$\mathcal{F}_{\bar{\Gamma}} := \bigcup_{\varrho=1}^r B_{\varrho} \langle \mathcal{F}_{\Gamma} \rangle$$

ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\tilde{\Gamma}$ auf \mathbb{H} gegeben. Wegen der in Teil (a) gezeigten Wohldefiniertheit des Petersson-Skalarprodukt unter der Wahl eines Fundamentalbereichs gilt nun

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle_{\bar{\Gamma}} &= \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \tilde{\Gamma}]} \cdot \int_{\mathcal{F}_{\bar{\Gamma}}} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\ &= \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \tilde{\Gamma}]} \cdot \int_{\bigcup_{\varrho=1}^r B_{\varrho} \langle \mathcal{F}_{\Gamma} \rangle} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\ &\stackrel{f, g \in M_k(\Gamma)}{=} \frac{[\bar{\Gamma} : \tilde{\Gamma}]}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \tilde{\Gamma}]} \cdot \int_{\mathcal{F}_{\Gamma}} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\ &= \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \bar{\Gamma}]} \cdot \int_{\mathcal{F}_{\bar{\Gamma}}} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\ &= \langle f | g \rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

und somit Behauptung (c). □

2.4 Die Hecke-Abschätzung

In diesem Abschnitt wollen wir uns erstmals in größerem Detail den Fourier-Koeffizienten einer ganzen Modulform widmen. Deren Studium ist damit jedoch nicht abgeschlossen, und wird im weiteren Verlauf der Vorlesung immer wieder aus verschiedenen Perspektiven vorangetrieben. Dennoch liefern vergleichsweise elementare Ansätze bereits sehr nützliche Kriterien, um ganze Modulformen bezüglich einer gegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ innerhalb der auf der oberen Halbebene \mathbb{H} holomorphen Funktionen zu charakterisieren:

Proposition 2.34. Seien $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda > 0$ und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}}$ eine auf \mathbb{H} holomorphe Funktion, die Axiom (V_1) bezüglich Γ mit Gewicht k erfüllt. Gibt es dann eine Konstante $A > 0$ mit

$$|f(x + iy)| = O(y^{-A}) \quad \text{für } y \rightarrow 0^+ \quad (2.16)$$

gleichmäßig in x , so gilt bereits $f \in M_k(\Gamma)$. Im Fall $A < k$ gilt sogar $f \in S_k(\Gamma)$.

Beweis. Seien $s \neq i\infty$ eine beliebige Spitze und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle s \rangle = i\infty$. Nach Proposition 2.25 ist dann $M\Gamma M^{-1}$ wieder eine Kongruenzuntergruppe und es gilt

$$f|_k M^{-1} A = f|_k M^{-1} \quad \text{für alle } A \in M\Gamma M^{-1}.$$

Da f nach Voraussetzung holomorph auf der oberen Halbebene \mathbb{H} ist, gibt es nach Lemma 1.39 und Satz 2.11 somit ein $\mu \in \mathbb{N}$ mit

$$f|_k M^{-1}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (f|_k M^{-1}) q^{\frac{n}{\mu}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Wir zeigen nun $a_n (f|_k M^{-1}) = 0$ für alle $n < 0$, um die Holomorphie von f in s zu folgern. Einerseits gilt nach (2.4) für ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} a_n (f|_k M^{-1}) &= \int_0^1 (f|_k M^{-1})(\mu(z_0 + t)) e^{-2\pi i n(z_0 + t)} dt \\ &= \frac{1}{\mu} \int_{\mu z_0}^{\mu z_0 + \mu} (f|_k M^{-1})(z) e^{-\frac{2\pi i n z}{\mu}} dz. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Andererseits gilt für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ wegen $M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $c \neq 0$ die auf dem Kompaktum $|x| \leq \frac{\mu}{2}$ gleichmäßige Abschätzung

$$\mathrm{Im} \left(M^{-1}\langle z \rangle \right) = \frac{y}{|cz + d|^2} \ll \frac{y}{c^2 y^2} < \frac{1}{y} \quad \text{für } y \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Mit der Voraussetzung folgt

$$\begin{aligned} |(f|_k M^{-1})(z)| &= |(cz + d)^{-k} f(M^{-1}\langle z \rangle)| \\ &\stackrel{(2.16)}{\ll} |(cy)^{-k} \mathrm{Im} \left(M^{-1}\langle z \rangle \right)^{-A}| \\ &\stackrel{(2.18)}{\ll} y^{A-k}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wählen wir nun $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{y}{\mu}i$ in (2.17), so folgt mit der Standardabschätzung für Integrale

$$\begin{aligned} |a_n (f|_k M^{-1})| &\leq \frac{1}{\mu} \int_{-\frac{\mu}{2} + iy}^{\frac{\mu}{2} + iy} |(f|_k M^{-1})(z) e^{-\frac{2\pi i n z}{\mu}}| dz \\ &\ll y^{A-k} e^{\frac{2\pi n y}{\mu}} \quad \text{für } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $y \rightarrow \infty$ erhalten wir also $a_n(f|_k M^{-1}) = 0$ für $n < 0$ und zudem $a_0(f|_k M^{-1}) = 0$, falls zusätzlich $A < k$. Also hat f im Fall $A < k$ eine Nullstelle in s . Die Aussage weitet sich auch auf die Spitze $i\infty$ aus, da es $\Gamma \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ stets nichtleer ist, und somit eine zu $i\infty$ äquivalente Spitze $s \in \mathbb{Q}$ gefunden werden kann. \square

Lemma 2.35. Seien $A > -1$ sowie $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}} \quad \text{für ein } \lambda > 0$$

eine auf \mathbb{H} holomorphe Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Gilt $a_n = O(n^A)$, so auch $f(x + iy) = O(y^{-A-1})$ für $y \rightarrow 0^+$ gleichmäßig in x .
 (b) Gilt umgekehrt $f(x + iy) = O(y^{-A-1})$ für $y \rightarrow 0^+$ gleichmäßig in x , so auch $a_n = O(n^{A+1})$.

Beweis. Zum Beweis von Behauptung (a) schließen wir aus dem Satz über die Laurent-Entwicklung, dass der Hauptteil

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n q^{\frac{n}{\lambda}}$$

der Entwicklung von f um $q = 0$ gleichmäßig auf Kompakta in \mathbb{C} konvergiert. Es genügt also, in den folgenden Abschätzungen lediglich den zugehörigen Nebenteil

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}}$$

zu betrachten. Wegen $a_n = O(n^A)$ erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x + iy)| &\ll_f \sum_{n=1}^{\infty} n^A e^{-\frac{2\pi ny}{\lambda}} \\ &\ll \int_0^{\infty} x^A e^{-\frac{2\pi xy}{\lambda}} dx = \Gamma(A + 1) \left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right)^{-A-1} \end{aligned}$$

und letzteres ist in $O(y^{-A-1})$ für $y \rightarrow 0^+$.

Für den Beweis der Umkehrung (b) benutzen wir die bekannte Formel (2.4) für die Fourier-Koeffizienten und erhalten für alle $y > 0$

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(x + iy) e^{-\frac{2\pi i n(x+iy)}{\lambda}} dx.$$

Durch die Wahl $y = \frac{1}{n}$ bekommen wir damit nach Voraussetzung

$$|a_n| \leq \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} \left| f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right| e^{-\frac{2\pi}{\lambda}} \ll n^{A+1},$$

was die Behauptung zeigt. \square

Bemerkung 2.36. Lemma 2.35 kann für einen eleganten und zugleich offensichtlichen Beweis herangezogen werden, dass die Koeffizienten c_n der Faltung

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n q^n \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n q^n,$$

höchstens polynomiell anwachsen, wenn dies jeweils auf die a_n bzw. b_n zutrifft und beide Faktoren holomorph für $0 < |q| < 1$ sind,

denn: Beschränken $O(y^{-A-1})$ und $O(y^{-B-1})$ das Wachstum für $|q| \rightarrow 1^-$ der jeweiligen Faktoren im Produkt, so beschränkt $O(y^{-A-B-2})$ wiederum das Wachstum des Produkts. #

Diese hübsche Aussage kann natürlich alternativ auch direkt mittels Reihenabschätzungen gezeigt werden.

Möchte man die Modularität einer Funktion zeigen, so muss neben dem Transformationsverhalten noch die Holomorphie in den Spitzen nachgewiesen werden, was bei komplizierten Kongruenzuntergruppen schwierig sein kann. Zum Glück gibt es aber ein einfaches Kriterium, welches diese umständliche Analyse überflüssig macht. Dieses ist Gegenstand des nächsten Satzes:

Satz 2.37. Seien $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$ und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}} \quad \text{für ein } \lambda > 0$$

eine auf \mathbb{H} holomorphe Funktion, die Axiom (V_1) bezüglich Γ mit Gewicht k erfüllt. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Es ist $a_n = 0$ für alle $n < 0$ und $a_n = O(n^k)$ für $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Es gibt ein $A > 0$ mit $a_n = O(n^A)$ für $n \rightarrow \infty$.
- (iii) Es ist $f \in M_k(\Gamma)$.

Beweis. Zunächst impliziert Aussage (i) offensichtlich Aussage (ii), wenn wir $A := k$ wählen.

Gelte nun also Aussage (ii). Mit Lemma 2.35 folgt dann $|f(x + iy)| = O(y^{-A-1})$ für $y \rightarrow 0^+$ gleichmäßig in x und mit Proposition 2.34 hieraus wiederum Aussage (iii).

Zum Beweis der verbleibenden Implikation gelte schließlich Aussage (iii). Wegen der Holomorphie von f in $z = i\infty$ gilt dann bereits $a_n = 0$ für alle $n < 0$. Es verbleibt also $a_n = O(n^k)$ zu zeigen. Dafür betrachten wir eine gegen Null konvergierende Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{H}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.27 gibt es dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $M_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M_n \langle z_n \rangle \in \mathcal{F}$. Nach Korollar 2.26 ist weiter für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $g_n := f|_k M_n^{-1}$ eine Modulform in $M_k(M_n \Gamma M_n^{-1})$, wobei die Menge $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ wegen $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] < \infty$ endlich ist. Da alle g_n eine Fourier-Entwicklung der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(g_n) q^{\frac{k}{\lambda_n}} \quad \text{mit einem } \lambda_n > 0$$

besitzen und auf Kompakta der Form $\mathcal{F}_c = \mathcal{F} \cap \overline{\mathbb{H}_{0,c}}$ für ein $c > 1$ beschränkt sind, gilt insbesondere

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in \mathcal{F}} |g_n(z)| < \infty. \quad (2.20)$$

Dies können wir benutzen, um eine Betragsabschätzung der Funktionswerte $f(z_n)$ zu erhalten, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} f(z_n) &= (f|_k M_n^{-1})(M_n \langle z_n \rangle) \\ &= (c_n z_n + d_n)^{-k} g_n(M_n \langle z_n \rangle) \quad \text{mit } M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $|z_n| < \frac{1}{2}$ für n hinreichend groß und $|M_n \langle z_n \rangle| \leq \frac{1}{2}$ nach Konstruktion können wir dabei ohne Einschränkung $c_n \neq 0$ annehmen. Es gilt dann

$$|f(z_n)| \ll y_n^{-k} |g_n(M_n \langle z_n \rangle)| \stackrel{(2.20)}{\ll} y_n^{-k} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Mit Lemma 2.35 folgt $a_n = O(n^k)$ und somit Aussage (i). \square

Satz 2.37 gibt nicht nur ein einfaches Kriterium für die Eigenschaft, eine ganze Modulform zu sein, sondern liefert auch die Abschätzung $a_n = O(n^k)$ der Fourier-Koeffizienten a_n im Falle des Gewichts k . Die 1937 von HECKE²⁶ bewiesene Abschätzung liefert nun eine Verschärfung für den Fall von Spitzenformen:

Satz 2.38 (Hecke-Abschätzung). *Seien $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$ und*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^{\frac{n}{h_\Gamma(i\infty)}} \in S_k(\Gamma)$$

eine Spitzenform bezüglich Γ vom Gewicht k . Dann gilt bereits $a_n(f) = O(n^{\frac{k}{2}})$.

Beweis. Nach Proposition 2.31 gilt für ein beliebiges $f \in S_k(\Gamma)$ die Asymptotik

$$|f(x + iy)| = O(y^{-\frac{k}{2}}) \quad \text{für } y \rightarrow 0^+ \text{ gleichmäßig in } x.$$

Setzen wir $A := \frac{k}{2} - 1 > -1$ in Lemma 2.35, so folgt damit $a_n = O(n^{A+1}) = O(n^{\frac{k}{2}})$ wie behauptet. \square

2.5 Die Valenzformel

Für meromorphe Modulformen bezüglich der vollen Modulgruppe gilt die folgende bemerkenswerte Formel:

²⁶Erich Hecke (1887-1947)

Satz 2.39. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq f \in V_k$. Dann gilt die **Valenzformel**, auch $\frac{k}{12}$ -**Formel** genannt, die besagt:

$$\text{ord}(f; i\infty) + \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(f; i) + \frac{1}{3} \cdot \text{ord}(f; \rho) + \sum_{z \neq i, \rho} \text{ord}(f; z) = \frac{k}{12}.$$

Hierbei laufe z über die Elemente eines Vertretersystem modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ in \mathbb{H} , die weder zu i noch zu ρ äquivalent sind.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Summe in der Valenzformel stets endlich ist: Nach Definition 2.17 ist jedes $f \in V_k$ meromorph in $z = i\infty$ und nach Definition 2.14 gibt es ein $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$c_1 > y \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ die Imaginärteil einer Polstelle von } f \text{ sind.}$$

Zudem gibt es ein $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$c_2 > y \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ die Imaginärteil einer Nullstelle von } f \text{ sind,}$$

denn: Bekanntermaßen ist f holomorph auf $\mathbb{H}_{c_1, \infty}$ und hat Periode 1. Nach Satz 2.11 hat f daher eine Fourier-Entwicklung, es gibt also eine holomorphe Funktion $f_{i\infty}: D_0^{e^{-2\pi c_1}} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(f_{i\infty} \circ \rho)(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_{c_1, \infty},$$

die sich wegen $f \in V_k$ meromorph nach $U_{e^{-2\pi c_1}}(0)$ fortsetzen lässt. Gäbe es kein c_2 wie in der Behauptung, läge in jeder noch so kleinen Umgebung von $q = 0$ eine Nullstelle von $f_{i\infty}$, so dass $q = 0$ kein Pol von $f_{i\infty}$ sein könnte. Der Punkt $q = 0$ wäre also ein Häufungspunkt von Nullstellen der auf $U_{e^{-2\pi c_1}}(0)$ holomorphen Funktion $f_{i\infty}$, die dort nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen konstant Null sein müsste.

Dies träfe dann offensichtlich auch auf die Einschränkung von f auf $\mathbb{H}_{c_1, i\infty}$ und wieder nach dem Identitätssatz auch für f auf ganz \mathbb{H} ohne die Polstellenmenge von f zu. Im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes erhielten wir nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz $f \equiv 0$. #

Insgesamt folgt, dass sämtliche Null- und Polstellen von f im Horizontalstreifen $\mathbb{H}_{0, c}$ mit

$$c := \max\{c_1, c_2\}$$

liegen. Nach der Definition von Meromorphie und dem Identitätssatz sind die Null- und die Polstellenmenge von f jeweils abgeschlossen in $\mathbb{H}_{0, 2c}$ und bestehen nur aus isolierten Punkten. Die Menge $\mathcal{F}_c = \mathcal{F} \cap \overline{\mathbb{H}_{0, c}}$ ist offensichtlich abgeschlossen in $\mathbb{H}_{0, 2c}$ und beschränkt, also kompakt. Es folgt, dass f nur endlich viele Null- bzw. Polstellen in \mathcal{F}_c hat. Die Endlichkeit der Summe in der Valenzformel folgt, da \mathcal{F}_c nach Konstruktion ein Vertretersystem modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ sämtlicher Punkte in \mathbb{H} mit $\text{ord}(f; z) \neq 0$ enthält und $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -äquivalente Punkte in \mathbb{H} wegen

$$\text{ord}(f; M\langle z \rangle) = \text{ord}(f|_k M^{-1}; M\langle z \rangle) = \text{ord}(f(z); z) \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}), z \in \mathbb{H}$$

dieselbe Ordnung haben, wobei wir für die letzte Gleichheit die Holomorphie des Automorphiefaktors $j(M^{-1}, z)$ auf \mathbb{H} ausgenutzt haben.

Für den Nachweis der Valenzformel nehmen wir nun zunächst an, f habe auf dem Rand $\partial\mathcal{F}$ keine Null- und Polstellen mit der möglichen Ausnahme der Punkte i und ϱ (und dann auch $-\bar{\varrho}$). Sei γ die in Abbildung 2.1 dargestellte stückweise glatte geschlossene Kurve, die in mathematisch positiver Richtung einfach durchlaufen werde.

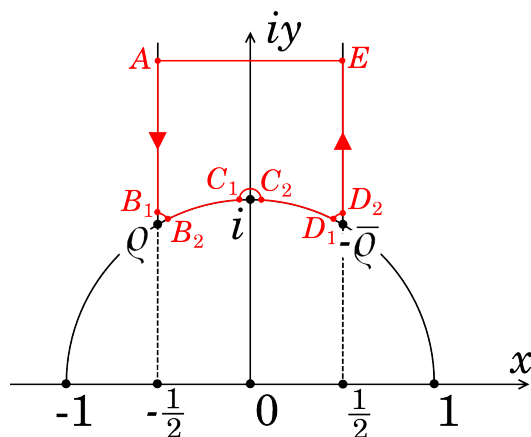


Abbildung 2.1: Die Punkte A und E sind so gewählt, dass es – mit möglicher Ausnahme von $i\infty$, das wir uns hier als $\lim_{y \rightarrow \infty} iy$ vorstellen sollten – keine Null- oder Polstelle von f mit Imaginärteil größer $\text{Im}(A) = \text{Im}(E)$ gibt. Die Punkte B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 bzw. D_1, D_2 sind so gewählt, dass das Kurvenstück von ϱ bzw. i bzw. $-\bar{\varrho}$ bis zu ihnen Länge $\varepsilon > 0$ hat. Hierbei ist ε so klein gewählt, dass im Inneren der Kurve γ von jeder Null- und Polstelle von f – mit möglicher Ausnahme von ϱ und i – jeweils genau ein Vertreter modulo Γ liegt.

Nach Konstruktion und dem Argumentprinzip gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z \in \mathcal{F} \\ z \neq i, \varrho}} \text{ord}(f; z).$$

Wir wollen das Integral nun auch abschnittsweise per Hand ausrechnen und das Ergebnis mit dieser Formel vergleichen.

- (i) Die Geradenstücke $\overline{AB_1}$ und $\overline{ED_2}$ werden unter Anwendung von T aufeinander abgebildet. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{ED_2}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(T\langle z \rangle)}{f(T\langle z \rangle)} dT\langle z \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(z+1)}{f(z+1)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

- (ii) Der Kreisbogen $\widehat{B_1 B_2}$ von B_1 nach B_2 wird parametrisiert durch $z = \varrho + \varepsilon e^{it}$ für $t \in [\alpha(\varepsilon), \frac{\pi}{2}]$ mit einem geeigneten Winkel $\alpha(\varepsilon)$. In einer den Kreisbogen ganz enthalten-

den punktierten Kreisscheibe um ϱ können wir f nach dem Satz von der Laurent-Entwicklung schreiben als

$$f(z) = (z - \varrho)^m g(z)$$

mit $m = \text{ord}(f; \varrho)$ und einer in der ganzen Kreisscheibe holomorphen Funktion g mit $g(\varrho) \neq 0$. In dieser Notation gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - \varrho} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(\varepsilon)} \left(\frac{m}{\varepsilon e^{it}} + \frac{g'(\varrho + \varepsilon e^{it})}{g(\varrho + \varepsilon e^{it})} \right) i \varepsilon e^{it} dt \\ &= \frac{m}{2\pi} \left(\alpha(\varepsilon) - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(\varepsilon)} \frac{g'(\varrho + \varepsilon e^{it})}{g(\varrho + \varepsilon e^{it})} e^{it} dt \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m}{2\pi} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right) + 0 \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \text{ord}(f; \varrho), \end{aligned}$$

denn der Integrand im zweiten Term ist beschränkt. Analog gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{D_1 \hat{D}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{6} \cdot \text{ord}(f; \varrho),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Ordnungen in $-\bar{\varrho}$ wegen der Äquivalenz dieselben wie in ϱ sind, und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \cdot \text{ord}(f; i).$$

- (iii) Die Kreisbögen $B_2 \hat{C}_1$ und $D_1 \hat{C}_2$ werden unter Anwendung von S aufeinander abgebildet, denn auf der Einheitskreislinie gilt

$$S(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = -\bar{z}, \quad \text{also } S(x + iy) = -x + iy.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{f'(S(z))}{f(S(z))} dS(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{f'(S(z))}{z^k f(z)} \left(\frac{\partial S(z)}{\partial z} \right) dz. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Leiten wir die gerade schon benutzte Beziehung $f(S\langle z \rangle) = z^k f(z)$ ab, so erhalten wir

$$f'(S\langle z \rangle) \frac{\partial S\langle z \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} f(S\langle z \rangle) = kz^{k-1} f(z) + z^k f'(z).$$

Eingesetzt in (2.21) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{kz^{k-1} f(z) + z^k f'(z)}{z^k f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \left(\frac{k}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{k}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

Für das erste Integral auf der rechten Seite gilt hierbei

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{k}{z} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{k}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{k}{12}.$$

- (iv) Die Abbildung $e: z \mapsto e^{2\pi iz}$ bildet das Geradenstück \overline{EA} auf eine genau einmal negativ durchlaufene Kreislinie K um $q = 0$ ab, in deren Inneren mit der möglichen Ausnahme von $q = 0$ keine Null- und Polstellen von $f \circ e^{-1}$ liegen. Mit dem bekannten Zusammenhang

$$f(z) = \sum_{n \geq N} a_n(f) e^{2\pi inz} = \sum_{n \geq N} a_n(f) q^n = (f \circ e^{-1})(q)$$

zwischen der Fourier-Entwicklung von f bei $z = i\infty$ und der Laurent-Entwicklung von $f \circ e^{-1}$ um $q = 0$ gilt dann

$$f'(z) = 2\pi i \sum_{n \geq N} n a_n(f) e^{2\pi inz} = 2\pi i q \sum_{n \geq N} n a_n(f) q^{n-1} = 2\pi i q (f \circ e^{-1})'(q)$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{EA} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{2\pi i q (f \circ e^{-1})'(q)}{(f \circ e^{-1})(q)} \frac{dq}{2\pi i q} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{(f \circ e^{-1})'(q)}{(f \circ e^{-1})(q)} dq \\ &= -\text{ord}((f \circ e^{-1}); 0) \\ &= -\text{ord}(f; i\infty), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit mit dem Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral folgt.

Offensichtlich haben wir hiermit die Valenzformel für den Fall bewiesen, dass f auf $\partial\mathcal{F}$ mit der möglichen Ausnahme von i und ρ keine Null- und Polstellen hat. Für den Fall, dass es doch solche Null- und Polstellen gibt, modifiziert man die Integrationskurve wie in Abbildung 2.2 angegeben und verfährt entsprechend.

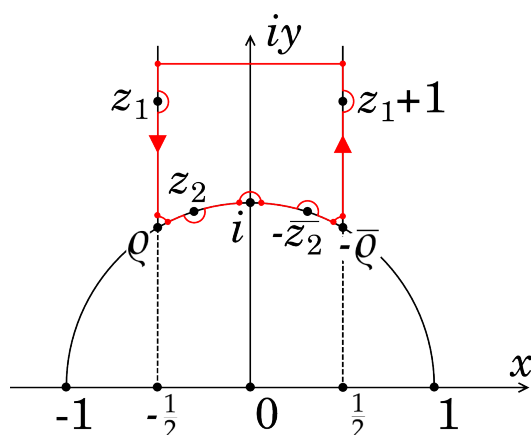


Abbildung 2.2: Die Punkte z_1 und z_2 repräsentieren die beiden möglichen Typen von Null- bzw. Polstellen, die nun noch hinzukommen. Man beachte, dass die jeweiligen Kreisbögen unter T bzw. S aufeinander abgebildet werden.

□

Die Valenzformel 2.39 lässt sich auf meromorphe Modulformen bezüglich der beliebigen Kongruenzuntergruppe Γ verallgemeinern:

Satz 2.40. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq f \in V_k(\Gamma)$. Für ein beliebiges $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$ setzen wir zudem

$$\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}} := \begin{cases} 2 & -I_2 \in \Gamma \text{ oder } \mathfrak{s} \text{ ist irregulär,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt die **Valenzformel**

$$\sum_{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H}} \frac{\text{ord}(f; z)}{|\Gamma_z|} + \sum_{\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}} = \frac{k \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]}{24},$$

wobei z ein Vertretersystem modulo Γ in \mathbb{H} durchläuft.²⁷

Beweis. Seien $n := [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ und A_1, \dots, A_n ein Vertretersystem von Γ in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ wie in (1.6). Nach Proposition 2.27 gilt dann

$$F := \prod_{\nu=1}^n f|_k A_{\nu} \in V_{kn},$$

²⁷Es fällt bei dieser Formel auf, dass die rechte Seite im Falle $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ nicht zum zunächst erwarteten Ergebnis $\frac{k}{12}$, sondern zu $\frac{k}{24}$ führt. Es ist jedoch $-I_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu beachten, womit jeder Summand der linken Seite einen zusätzlichen Faktor $\frac{1}{2}$ hat. Multipliziert man also mit 2, ergibt sich die Formel aus Satz 2.39.

so dass wir die bereits bewiesene Valenzformel 2.39 auf F anwenden können. Nach dieser gilt

$$\text{ord}(F; i\infty) + \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i) + \frac{1}{3} \cdot \text{ord}(F; \rho) + \sum_{\substack{z \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \\ z \neq i, \rho}} \text{ord}(F; z) = \frac{kn}{12},$$

wobei z über die Elemente eines Vertretersystem modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ in \mathbb{H} laufe, die weder zu i noch zu ρ äquivalent sind. Mit Korollar 1.29 lässt sich dies umformulieren zu

$$\frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i\infty) + \sum_{z \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \frac{\text{ord}(F; z)}{|\text{SL}_2(\mathbb{Z})_z|} = \frac{kn}{24} \quad (2.22)$$

wobei z ein vollständiges Vertretersystem modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ in \mathbb{H} durchlaufe.

Für ein festes $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{ord}(F; z) &= \sum_{v=1}^n \text{ord}(f|_k A_v; z) \\ &= \sum_{v=1}^n \text{ord}(f; A_v \langle z \rangle) \\ &= \sum_{w \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle} [\text{SL}_2(\mathbb{Z})_w : \Gamma_w] \cdot \text{ord}(f; w), \end{aligned} \quad (2.23)$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass die Ordnung von f an der Stelle $A_v \langle z \rangle$ nicht von der Wahl von A_v abhängt, und Teil (b) von Lemma 1.44 auf

$$G = \text{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad U = \Gamma, \quad S = \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle$$

angewendet haben. Da $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_w$ endlich und unabhängig von der Wahl von $w \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle$ ist, gilt

$$[\text{SL}_2(\mathbb{Z})_w : \Gamma_w] = \frac{|\text{SL}_2(\mathbb{Z})_z|}{|\Gamma_w|}$$

und eingesetzt in (2.23) somit

$$\frac{\text{ord}(F; z)}{|\text{SL}_2(\mathbb{Z})_z|} = \sum_{w \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle} \frac{\text{ord}(f; w)}{|\Gamma_w|}.$$

Summieren wir über ein Vertretersystem der Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \frac{\text{ord}(F; z)}{|\text{SL}_2(\mathbb{Z})_z|} &= \sum_{z \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \sum_{w \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle} \frac{\text{ord}(f; w)}{|\Gamma_w|} \\ &= \sum_{w \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{\text{ord}(f; w)}{|\Gamma_w|}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Valenzformel 2.40 folgt nun aus (2.22) und (2.24), wenn wir

$$\frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i\infty) = \sum_{\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}} \quad (2.25)$$

zeigen können.

Dafür müssen wir ein wenig ausholen: Wir betrachten den Quotienten $\text{SL}_2(\mathbb{Z})/\langle T \rangle$ mit der natürlichen Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ über Linkstranslation und die Abbildung

$$\pi: \begin{cases} \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\langle T \rangle & \twoheadrightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} & \xrightarrow{\sim} \text{SL}_2(\mathbb{Z})\langle i\infty \rangle = \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}, \\ M \cdot \langle T \rangle & \mapsto M \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} & \mapsto M\langle i\infty \rangle. \end{cases}$$

Diese ist offensichtlich surjektiv, verträglich mit den jeweiligen Aktionen von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und bildet die Klasse $I_2 \cdot \langle T \rangle = \langle T \rangle$ auf $i\infty$ ab. Faktorisieren wir überall von links Γ heraus, erhalten wir die surjektive Abbildung

$$\pi_{\Gamma}: \begin{cases} \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\langle T \rangle & \twoheadrightarrow \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} & \xrightarrow{\sim} \text{Cusps}(\Gamma), \\ \Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle & \mapsto \Gamma \cdot M \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} & \mapsto \Gamma \langle M\langle i\infty \rangle \rangle. \end{cases}$$

Für ein beliebiges $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$ gilt nach Definition von $\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}$

$$|\pi_{\Gamma}^{-1}(\mathfrak{s})| = \frac{2}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}}. \quad (2.26)$$

Betrachten wir nun noch die surjektive Abbildung

$$\pi_{\Gamma, T}: \begin{cases} \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) & \twoheadrightarrow \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\langle T \rangle, \\ \Gamma \cdot M & \mapsto \Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle. \end{cases}$$

Für $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$, $s \in \mathfrak{s}$ und $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle i\infty \rangle = s$ gilt dann

$$|\pi_{\Gamma, T}^{-1}(\Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle)| = \tilde{h}_{\Gamma}(\mathfrak{s}) := \begin{cases} h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ regulär,} \\ 2h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ irregulär,} \end{cases} \quad (2.27)$$

denn: Aus der Definition von $\pi_{\Gamma, T}$ können wir

$$|\pi_{\Gamma, T}^{-1}(\Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle)| = [\langle T \rangle : (M^{-1}\Gamma M) \cap \langle T \rangle]$$

ablesen. Nach Lemma 1.39 gilt

$$H_{\mathfrak{s}} = M^{-1}\Gamma M \cap \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} = M^{-1}\Gamma M \cap \langle T, -I_2 \rangle$$

und nach Lemma 1.40 lassen sich drei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $H_{\mathfrak{s}} = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle$. Dann gilt

$$M^{-1}\Gamma M \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle.$$

Fall 2: $H_{\mathfrak{s}} = \langle -(T^{-h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}) \rangle$. Dann gilt

$$M^{-1}\Gamma M \cap \langle T \rangle = \langle -(T^{-h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}) \rangle \cap \langle T \rangle = \langle T^{2h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle.$$

Fall 3: $H_{\mathfrak{s}} = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}, -I_2 \rangle$. Dann gilt

$$M^{-1}\Gamma M \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}, -I_2 \rangle \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle.$$

Mit Definition 1.41 folgt hieraus die Behauptung. #

Nach Definition 1.32 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Nach Konstruktion ist $\Gamma(N)$ normal in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, so dass nach Bemerkung 1.42 für alle $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma(N))$ der Wert $\tilde{h}_{\Gamma(N)}(\mathfrak{s})$ übereinstimmt. Wir können daher auf die Kennzeichnung der jeweiligen Spitzenklasse verzichten und kurz $\tilde{h}_{\Gamma(N)}$ schreiben. Betrachten wir nun noch die surjektive Abbildung

$$\pi_{\Gamma(N),\Gamma}: \begin{cases} \Gamma(N) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \twoheadrightarrow \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ \Gamma(N) \cdot M & \mapsto \Gamma \cdot M. \end{cases}$$

Mit ähnlichen Überlegungen wie beim Beweis der Isomorphiesätze für Gruppen folgt dann für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$|\pi_{\Gamma(N),\Gamma}^{-1}(\Gamma \cdot M)| = [\Gamma : \Gamma(N)]. \quad (2.28)$$

Schließlich benötigen wir noch eine Möglichkeit, die Ordnungen einer gegebenen meromorphen Modulform in Spitzenklassen bezüglich zweier ineinander enthaltener Kongruenzuntergruppen miteinander zu vergleichen. Seien dafür $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ zwei Kongruenzuntergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und sei $f \in V_k(\Gamma) \subseteq V_k(\tilde{\Gamma})$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Seien weiter $\tilde{\mathfrak{s}} \in \mathrm{Cusps}(\tilde{\Gamma})$ und \mathfrak{s} das Bild von $\tilde{\mathfrak{s}}$ unter der natürlichen Abbildung $\mathrm{Cusps}(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \mathrm{Cusps}(\Gamma)$. Dann gilt zunächst

$$h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) \mid h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}}) \quad \text{und} \quad \tilde{h}_{\Gamma}(\mathfrak{s}) \mid \tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}}), \quad (2.29)$$

denn: Sei $\tilde{\mathfrak{s}} \in \tilde{\mathfrak{s}} \subseteq \mathfrak{s}$ und sei $\tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\tilde{M}\langle i\infty \rangle = \tilde{\mathfrak{s}}$. Dann ist $H_{\tilde{\mathfrak{s}}}$ wegen

$$H_{\tilde{\mathfrak{s}}} = \tilde{M}^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{M} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \subseteq \tilde{M}^{-1}\Gamma\tilde{M} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} = H_{\mathfrak{s}}$$

eine Untergruppe von $H_{\mathfrak{s}}$ und es gilt

$$h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) = [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}} : \overline{H_{\mathfrak{s}}}] \mid [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}} : \overline{H_{\tilde{\mathfrak{s}}}}] = h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}}).$$

Das ist die erste Teilbehauptung. Mit (2.27) folgt hieraus auch die zweite Teilbehauptung außer für den Fall, dass \mathfrak{s} irregulär, $\tilde{\mathfrak{s}}$ aber regulär ist. In letzterem Fall gilt

$$H_{\mathfrak{s}} = \langle -T^{-h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle \not\cong -I_2$$

und wegen $H_{\tilde{\mathfrak{s}}} \subseteq H_{\mathfrak{s}}$ somit auch

$$H_{\tilde{\mathfrak{s}}} = \langle T^{h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})} \rangle.$$

Wieder mit $H_{\mathfrak{s}} \subseteq H_{\mathfrak{s}}$ folgern wir

$$\tilde{h}_{\Gamma}(\mathfrak{s}) = 2h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) \mid h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}}) = \tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})$$

und somit die zweite Teilbehauptung auch in diesem Fall. #

Hieraus folgt

$$\frac{\text{ord}_{\tilde{\Gamma}}(f; \tilde{\mathfrak{s}})}{\tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})} = \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}{\tilde{h}_{\Gamma}(\mathfrak{s})}, \quad (2.30)$$

denn: Sei wieder $\tilde{\mathfrak{s}} \in \tilde{\mathfrak{s}} \subseteq \mathfrak{s}$ und sei $\tilde{M} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\tilde{M}\langle i\infty \rangle = \tilde{\mathfrak{s}}$. Nach (2.8) und Teil (b) von Definition 2.20 hat die Funktion $f|_k \tilde{M}$ bezüglich $\tilde{\Gamma}$ bzw. Γ die Fourier-Entwicklungen

$$\begin{aligned} (f|_k \tilde{M})(z) &= \sum_{n=\text{ord}_{\tilde{\Gamma}}(f; \tilde{\mathfrak{s}})}^{\infty} \tilde{a}_n(f|_k \tilde{M}) q^{\frac{n}{h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})}}, \\ (f|_k \tilde{M})(z) &= \sum_{n=\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}^{\infty} a_n(f|_k \tilde{M}) q^{\frac{n}{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}}. \end{aligned}$$

Wegen (2.29) und Satz 2.11 lassen sich diese Reihen identifizieren. Insbesondere stimmen die kleinsten Exponenten von q mit nichtverschwindenden Koeffizienten überein, woraus sofort die Behauptung folgt. #

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i\infty) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{ord}(F; i\infty)}{\tilde{h}_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}} \\ &\stackrel{(2.30)}{=} \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma(N)}(F; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\ &= \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma(N)}(\prod_{v=1}^n f|_k A_v; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\ &= \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\sum_{v=1}^n \text{ord}_{\Gamma(N)}(f|_k A_v; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \end{aligned}$$

Nach Teil (b) von Definition 2.20 gilt

$$\text{ord}_{\Gamma(N)}(f|_k A_v; \mathfrak{s}_N) = \text{ord}_{\Gamma(N)}(f; A_v \langle \mathfrak{s}_N \rangle) \quad \text{für alle } \mathfrak{s}_N \in \text{Cusps}(\Gamma(N)).$$

Da $\Gamma(N)$ normal in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, gilt

$$\begin{aligned} A_v \langle (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M) \rangle &= (A_v \Gamma(N)M) \langle i\infty \rangle \\ &= (\Gamma(N)A_v M) \langle i\infty \rangle \end{aligned}$$

$$= (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)A_v M).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i\infty) \\ &= \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\sum_{v=1}^n \text{ord}_{\Gamma(N)}(f; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)A_v M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\ &= \sum_{v=1}^n \left(\sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma(N)}(f; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)A_v M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \right) \\ &= \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] \cdot \text{ord}_{\Gamma(N)}(f; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\ &\stackrel{(2.30)}{=} \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; (\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T} \circ \pi_{\Gamma(N),\Gamma})(\Gamma(N)M))}{2 \cdot [\Gamma : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma}((\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T} \circ \pi_{\Gamma(N),\Gamma})(\Gamma(N)M))} \\ &\stackrel{(2.28)}{=} \frac{1}{2} \cdot \sum_{\Gamma M \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; (\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T})(\Gamma M))}{\tilde{h}_{\Gamma}((\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T})(\Gamma M))} \\ &\stackrel{(2.27)}{=} \frac{1}{2} \cdot \sum_{\Gamma M \langle T \rangle \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) / \langle T \rangle} \text{ord}_{\Gamma}(f; \pi_{\Gamma}(\Gamma M \langle T \rangle)) \\ &\stackrel{(2.26)}{=} \sum_{\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}}, \end{aligned}$$

also (2.25) und somit auch die Valenzformel 2.40. \square

Eine wichtige Anwendung der Valenzformel ist, dass wir mit ihr eine Aussage über die Struktur der Vektorräume $M_k(\Gamma)$ und $S_k(\Gamma)$ treffen können. Für nicht-positive Werte von k werden wir dies gleich durchführen und zeigen, dass es dort nicht sehr viele holomorphe Modulformen gibt. In Kapitel 3 werden wir diese Methode wieder aufgreifen und im Spezialfall $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mithilfe der sogenannten EISENSTEINREIHEN²⁸ interessantere Aussagen für allgemeines k beweisen.

Korollar 2.41. Es gilt $M_k(\Gamma) = \begin{cases} \{0\} & \text{für } k < 0, \\ \mathbb{C} & \text{für } k = 0. \end{cases}$

Beweis. Gäbe es für ein $k < 0$ eine ganze Modulform $f \in M_k(\Gamma)$ ungleich 0, so wäre aufgrund der Holomorphie von f die linke Seite der Valenzformel 2.40 nicht-negativ, die rechte nach Voraussetzung jedoch negativ. Ein solches f kann es also nicht geben.

Die Inklusion $\mathbb{C} \subseteq M_0(\Gamma)$ ist klar. Andererseits liegt für jedes $f \in M_0(\Gamma)$ und jedes $z_0 \in \mathbb{H}$ auch

$$g(z) := f(z) - f(z_0) \in M_0(\Gamma).$$

²⁸Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852)

Wegen der Holomorphie von g und $g(z_0) = 0$ kann g die Valenzformel 2.40 nicht erfüllen. Es folgt $g \equiv 0$ und somit $f \equiv f(z_0) \in \mathbb{C}$. \square

Im Beweis von Korollar 2.41 haben wir gesehen, dass wir eine holomorphe Modulform negativen Gewichts zu Null erkennen können, weil sie sonst die Valenzformel 2.40 nicht erfüllen kann. Diese Überlegung lässt sich auf Modulformen verallgemeinern, deren Nullstellenordnung bei $i\infty$ größer ist als die zugehörige rechte Seite der Valenzformel. Dieser einfache Gedanke liefert eine nützliche Schranke dafür, die wie viel ersten Fourier-Koeffizienten einer gegebenen Modulform Null sein müssen, damit diese die Nullfunktion ist. Bewiesen wurde dieses Resultat – ausgehend von der Valenzformel für die volle Modulgruppe – zuerst 1987 von STURM²⁹:

Korollar 2.42. Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $f \in M_k(\Gamma)$. Gilt dann

$$\text{ord}(f; i\infty) > \frac{k \cdot \varepsilon_{\Gamma, i\infty} \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]}{24} \quad (2.31)$$

oder etwas schwächer

$$\text{ord}(f; i\infty) > \frac{k \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]}{12} =: B_{\Gamma, k}, \quad (2.32)$$

so ist f die konstante Nullfunktion. Die nur von Γ und k abhängige Konstante $B_{\Gamma, k}$ heißt auch die **Sturm-Schranke** für $M_k(\Gamma)$.

Beweis. Gäbe es eine ganze Modulform $f \in M_k(\Gamma)$ ungleich 0, welche eine der Voraussetzungen (2.31) oder (2.32) erfüllt, so wäre aufgrund der Holomorphie von f die linke Seite der Valenzformel 2.40 echt größer als die rechte. Ein solches f kann es also nicht geben. \square

2.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. Wir betrachten eine Familie von auf $[0, 1]$ differenzierbaren Funktionen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die sich rekursiv wie folgt definieren lassen:

- (i) $P_0 \equiv 1$,
- (ii) $P'_{n+1} = P_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,
- (iii) $\int_0^1 P_n(x) dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Funktionen P_n durch die Bedingungen (i) bis (iii) eindeutig bestimmte Polynome. Normiert zu $B_n := n!P_n$ nennt man sie auch die **Bernoulli-Polynome**.
- (b) Für alle $n \geq 2$ gilt $P_n(0) = P_n(1)$, so dass sich P_n zu einer stetigen, 1-periodischen Funktion auf ganz \mathbb{R} fortsetzen lässt, die wir wieder P_n nennen.

²⁹Jacob Sturm (* ???)

(c) Für alle $n \geq 2$ gilt

$$a_k(P_n) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2\pi i k}\right)^n & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

für die Fourier-Koeffizienten von P_n . Die zugehörige Fourier-Reihe

$$-\frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^n}$$

konvergiert absolut gleichmäßig auf ganz \mathbb{R} .

Hinweis: Führen Sie zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten eine Induktion nach n durch!

(d) Für alle $n \in 2\mathbb{N}$ und alle $x \in [0, 1]$ gilt

$$P_n(x) = -\frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^n} = \frac{2(-1)^{\frac{n+2}{2}}}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k x)}{k^n}.$$

Nach Berechnung von P_2 , P_4 und P_6 erhalten wir so die bemerkenswerten Identitäten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie für eine beliebige Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und ein beliebige Gewichte $k, \ell \in \mathbb{Z}$ die folgenden Aussagen über Modulformen und Ableitungen:

- (a) $f \in V_0(\Gamma) \implies f' \in V_2(\Gamma)$.
 (b) $f \in V_k(\Gamma), g \in V_\ell(\Gamma) \implies \ell f'g - kf'g' \in V_{k+\ell+2}(\Gamma)$.
 (c) $f \in V_k(\Gamma), g \in V_\ell(\Gamma) \implies \ell(\ell+1)f''g - 2(k+1)(\ell+1)f'g' + k(k+1)fg'' \in V_{k+\ell+4}(\Gamma)$.

Bemerkung: Die aufgeführten Modulformen sind Beispiele sogenannter RANKIN-COHEN-Klammerm. ³⁰ Diese wurden 1994 von ZAGIER ³¹ benannt, als dieser Rankin-Cohen-Algebren als theoretischen Überbau für diese einführte.

Aufgabe 2.3. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede Modulform $f \in M_k \setminus S_k$ mindestens eine Nullstelle in \mathbb{H} besitzt.

Aufgabe 2.4. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

³⁰Robert Alexander Rankin (1915-2001), Henri Cohen (* 1946)

³¹Don Bernard Zagier (* 1951)

eine holomorphe Funktion darstellt, für $\text{Im}(z) > 1$ beschränkt ist und den Transformationsformeln

$$\vartheta(z+2) = \vartheta(z) \quad \text{und} \quad \vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \vartheta(z)$$

genügt, wobei die Quadratwurzel aus $\frac{z}{i}$ über den Hauptzweig des Logarithmus definiert ist. Folgern Sie daraus

$$\vartheta^8 \in M_4(\Gamma_\vartheta),$$

wobei $\Gamma_\vartheta = \langle S, T^2 \rangle$ die in Übungsaufgabe 1.9 eingeführte Thetagruppe bezeichne.

Aufgabe 2.5. Sei $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, sei k eine ganze Zahl und seien $f, g \in M_k(\Gamma)$ mit $f \cdot g \in S_{2k}(\Gamma)$. Sei weiter

$$\Omega(f, g)(z) := f(z)\overline{g(z)}(\text{Im}z)^k d\omega(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})^+$ gilt

$$\Omega(f|_k M, g|_k M)(z) = \Omega(f, g)(M\langle z \rangle).$$

(b) Für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ mit $M\Gamma M^{-1} \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$[\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}] = [\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{M\Gamma M^{-1}}].$$

Seien ab sofort f und g bereits beide Spitzenformen. Zeigen Sie dann auch die folgenden Aussage:

(c) Für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ mit $M\Gamma M^{-1} \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $f, g \in M_k(M\Gamma M^{-1})$, sowie ihre **Adjunkte** $M^\# := \det(M) \cdot M^{-1}$ gilt

$$\langle f|_k M | g|_k M \rangle_\Gamma = \langle f | g \rangle_\Gamma \quad \text{und} \quad \langle f|_k M | g \rangle_\Gamma = \langle f | g|_k M^\# \rangle_\Gamma.$$

Modulformen zur vollen Modulgruppe

In Kapitel 2 haben wir den Begriff der Modulform eingeführt, aber keine interessanten Beispiele kennengelernt. Mit den Eisenstein-Reihen und den Thetareihen gibt es zwei Hauptklassen holomorpher Modulformen bezüglich der vollen Modulgruppe, aus denen sich jeweils die komplette Algebra dieser Modulformen erzeugen lässt. In diesem Kapitel studieren wir die Eisenstein-Reihen und leiten mit ihrer Hilfe aus der Valenzformel 2.39 mit den Struktursätzen 3.13 und 3.24 explizite Beschreibungen der Vektorräume M_k und V_k der holomorphen bzw. meromorphen Modulformen von Gewicht k bezüglich der vollen Modulgruppe her. In Abschnitt 3.3 verallgemeinern wir die Eisenstein-Reihen zu POINCARÉ-Reihen³² und zeigen, dass sich mit diesen und dem in Abschnitt 2.3 eingeführten Petersson'schen Skalarprodukt die Fourier-Koeffizienten von Spitzenformen auslesen lassen.

3.1 Eisenstein-Reihen

In Proposition 2.27 haben wir mit der Spurbildung eine Möglichkeit kennengelernt, aus einer Modulform bezüglich einer Kongruenzuntergruppe Γ eine Modulform bezüglich der vollen Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ zu konstruieren. Der Gedanke hierbei war, durch Summation über ein Vertretersystem die Invarianz unter dem Petersson'schen Strichoperator und also Axiom (V_1) bezüglich der vollen Modulgruppe zu erzwingen.

Mit einer ähnlichen Idee betrachten wir für ein gerades³³ $k \in \mathbb{Z}$ die Reihe

$$\sum_{M \in SL_2(\mathbb{Z})} (1|_k M)(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

³²Henri Poincaré (1854-1912)

³³Da wir ein nichttriviales Element von M_k suchen, dürfen wir uns nach Proposition 2.24 ohne Einschränkung auf gerade Werte von k beschränken.

In ihrem Konvergenzgebiet erfüllt diese automatisch Axiom (V_1) . Da wegen $(1|_k T^b)(z) = 1$ für alle $b \in \mathbb{Z}$ unabhängig von z unendlich viele Summanden Betrag 1 haben, ist dieses Konvergenzgebiet allerdings leer. Wir wollen dies verbessern. Tatsächlich gilt für zwei Matrizen $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$(1|_k M)(z) = (1|_k \tilde{M})(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \iff \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \cdot M = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \cdot \tilde{M},$$

denn: Die linke Seite der Behauptung ist offensichtlich äquivalent zu

$$j(M\tilde{M}^{-1}, z)^{-k} = (1|_k(M\tilde{M}^{-1}))(z) = 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Da wir k als gerade vorausgesetzt haben, ist dies äquivalent zu

$$M\tilde{M}^{-1} \in \langle T, -I_2 \rangle = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty,$$

was die Behauptung zeigt. #

Davon inspiriert definieren wir:

Definition 3.1. Sei $k \geq 4$ eine gerade ganze Zahl. Dann heißt

$$E_k(z) := \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} (1|_k M)(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{H},$$

wobei M ein Vertretersystem von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durchläuft, die (**normierte**) Eisenstein-Reihe vom Gewicht k .

Mit den Eisenstein-Reihen erhalten wir unsere erste systematisch eingeführte Klasse von Beispielen nichttrivialer holomorpher Modulformen:

Satz 3.2. Für jede gerade ganze Zahl $k \geq 4$ liegt die Eisenstein-Reihe E_k in M_k .

Wir beweisen Satz 3.2 in den folgenden Resultaten, führen aber keinen geschlossenen Beweis.

Wieder mit den Argumenten aus dem Beweis von Proposition 2.27 sehen wir, dass auch die durch $E_k(z)$ gegebene Funktion in ihrem Konvergenzgebiet Axiom (V_1) erfüllt. Wir untersuchen daher nun die Konvergenz von $E_k(z)$ und stellen dafür zunächst

$$E_k(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} j(M, z)^{-k} = 1 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(c,d)=1, c>0}} (cz + d)^{-k} \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \quad (3.1)$$

fest. Dies gilt, da offensichtlich jeder Summand links die Gestalt $(cz + d)^{-k}$ mit $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$ hat. An dieser Stelle lässt sich auch die Wohldefiniertheit von E_k klären: Da k als gerade vorausgesetzt war, gilt

$$j(-M, z)^{-k} = j(M, z)^{-k}.$$

Dass auf beiden Seiten über dieselben Paare (c, d) aufsummiert wird, ergibt sich nun unmittelbar aus (1.4).

Lemma 3.3. Für jede gerade ganze Zahl $k \geq 4$ konvergiert E_k gleichmäßig absolut auf Bereichen der Form

$$D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(z) \geq \varepsilon, \operatorname{Re}(z)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\} \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Insbesondere ist die durch E_k gegebene Funktion nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß auf \mathbb{H} holomorph, da sich jedes Kompaktum in \mathbb{H} in einem der Bereiche D_ε wiederfindet.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für ein festes $z \in \mathbb{H}$ die Reihe $E_k(z)$ konvergiert. Dafür betrachten wir die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto \left| \frac{xz+y}{xi+y} \right|^k. \end{cases}$$

Diese hat offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

- $f(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- f nimmt auf dem Kompaktum $\mathcal{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ sein Minimum an, ist dort also durch eine Konstante $C > 0$ nach unten beschränkt.

Erinnern wir uns an die Polarkoordinatendarstellung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und wenden diese drei Eigenschaften von f an, so erhalten wir

$$f(x,y) \geq C \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Diese Abschätzung gilt natürlich insbesondere für $(x,y) = (c,d) \in \mathbb{Z}^2$ mit teilerfremden c,d , so dass wir

$$|cz + d|^{-k} \leq \frac{1}{C} \cdot |ci + d|^{-k}$$

erhalten. Die Konvergenz von $E_k(z)$ für festes $z \in \mathbb{H}$ folgt also mit dem Majorantenkriterium, wenn wir

$$\sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \operatorname{ggT}(c,d)=1}} |ci + d|^{-k} < \infty$$

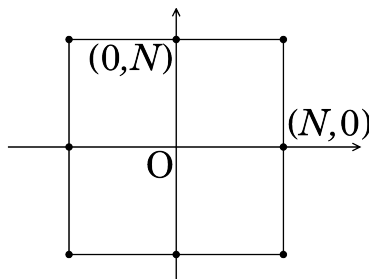
zeigen können. Hierbei haben wir die euklidische Norm $|ci + d| = \sqrt{c^2 + d^2}$ verwendet. Das müssen wir jedoch nicht, da in \mathbb{R}^2 alle Normen äquivalent sind. Insbesondere dürfen wir statt der euklidischen die *Maximumsnorm*

$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$$

verwenden und es genügt

$$\sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \operatorname{ggT}(c,d)=1}} \|(c,d)\|_\infty^{-k} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{|\{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \operatorname{ggT}(c,d)=1 \text{ und } \|(c,d)\|_\infty = N\}|}{N^k} < \infty$$

zu zeigen. Wie man der Abbildung



entnimmt, gilt hierbei

$$|\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{ggT}(c, d) = 1 \text{ und } \|(c, d)\|_\infty = N\}| \leq 8N.$$

Die Konvergenz von $E_k(z)$ für festes $z \in \mathbb{H}$ folgt mit

$$8 \cdot \sum_{N=1}^{\infty} N^{1-k} < \infty \quad \text{für } k > 2.$$

Zum Beweis des Lemmas genügt es wegen $k > 2$, der soeben gezeigten Konvergenz von $E_k(z)$ für festes $z \in \mathbb{H}$ und dem Majorantenkriterium zu zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|cz + d|^2 \geq \delta |ci + d|^2 = \delta(c^2 + d^2) \quad \text{für alle } z \in D_\varepsilon \text{ und alle } c, d \in \mathbb{Z}.$$

Schreiben wir wie üblich $z = x + iy$, so lässt sich dies äquivalent umformen dazu, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$(x^2 + y^2 - \delta)c^2 + 2xcd + (1 - \delta)d^2 \geq 0 \quad \text{für alle } z \in D_\varepsilon \text{ und alle } c, d \in \mathbb{Z}.$$

Etwas algebraischer formuliert heißt das nichts anderes als, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in D_\varepsilon$ die quadratische Form

$$(x^2 + y^2 - \delta)X^2 + 2xXY + (1 - \delta)Y^2$$

positiv semidefinit ist.¹² Es gilt also zu zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in D_\varepsilon$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - \delta & x \\ x & 1 - \delta \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist, also für die Hauptminoren gilt

- (i) $x^2 + y^2 - \delta \geq 0$,
- (ii) $(x^2 + y^2 - \delta)(1 - \delta) - x^2 = -\delta x^2 + (1 - \delta)y^2 - \delta(1 - \delta) \geq 0$.

Nach Definition von D_ε genügt es $\delta < \varepsilon^2$ zu setzen, um Bedingung (i) zu erfüllen. Für Bedingung (ii) nehmen wir nun ohne Einschränkung $\delta < 1$ an. Dann gilt für alle $z \in D_\varepsilon$ die Abschätzung

$$-\delta x^2 + (1-\delta)y^2 - \delta(1-\delta) \geq -\delta\varepsilon^{-1} + (1-\delta)\varepsilon^2 - \delta(1-\delta),$$

und Bedingung (ii) folgt, wenn wir zeigen können, dass es ein $\delta \in (0, 1)$ gibt mit

$$\varepsilon^2 \geq \delta \frac{\varepsilon^{-1} + (1-\delta)}{1-\delta}.$$

Das Lemma folgt, da die rechte Seite offensichtlich für $\delta \rightarrow 0$ gegen Null geht. \square

Zum Beweis von Satz 3.2 verbleibt (V'_2) , also die Holomorphie von E_k in $z = i\infty$, nachzuweisen:

Lemma 3.4. Für jede gerade ganze Zahl $k \geq 4$ ist die Eisenstein-Reihe E_k holomorph in $z = i\infty$ und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} E_k(z) = 1.$$

Beweis. Zu zeigen ist nach Definition 2.14 und dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz, dass $E_k \circ e^{-1}$ in einer kleinen Umgebung von $q = 0$ beschränkt ist. Das ist sicherlich richtig, wenn

$$\lim_{q \rightarrow 0} (E_k \circ e^{-1})(q) = \lim_{z \rightarrow i\infty} E_k(z)$$

existiert. Sei also $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in \mathbb{H} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im}(z_n) = \infty$. Wegen $E_k(z+1) = E_k(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$ können wir ohne Einschränkung $|\text{Re}(z_n)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Dann liegen alle Punkte z_n ab einem hinreichend großen n in

$$D_1 := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) \geq 1, \text{Re}(z)^2 \leq 1\}.$$

Nach Lemma 3.3 konvergiert die Eisenstein-Reihe E_k auf D_1 gleichmäßig, so dass wir den Grenzübergang gliedweise vollziehen dürfen. Wir erhalten

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} E_k(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_k(z_n) = 1 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1, c>0}} \lim_{n \rightarrow \infty} (cz_n + d)^{-k} = 1,$$

womit das Lemma gezeigt ist. \square

Da nun Satz 3.2 bewiesen ist und wir wissen, dass die Eisenstein-Reihe E_k für jede gerade ganze Zahl $k \geq 4$ in M_k liegt, interessieren wir uns für ihre Fourier-Entwicklung, die interessante zahlentheoretische Informationen kodiert:

Satz 3.5. Die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihe E_k mit $k \geq 4$ ganz und gerade ist durch

$$E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

gegeben, wobei die Reihe

$$\zeta(k) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$$

wegen $k > 1$ bekanntlich zu einer positiven reellen Zahl konvergiert³⁴ und σ_{k-1} die $(k-1)$ -te Teilersummenfunktion bezeichnet.

Beweis. Da die Reihe nach Lemma 3.3 absolut konvergiert, dürfen wir sie in einen Teil mit $c = 0$ und einen Teil mit $c \neq 0$ aufspalten und erhalten so

$$E_k(z) = 1 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1, c>0}} (cz+d)^{-k} = 1 + \frac{1}{\zeta(k)} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d \in \mathbb{Z}} (cz+d)^{-k}.$$

Desweiteren gilt für alle ganzen $k \geq 2$

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} (w+d)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} e^{2\pi i d w} \quad \text{für alle } w \in \mathbb{H},$$

wie wir in Beispiel 2.13 eingesehen haben. Wenden wir dies mit $w = cz$ an, und nutzen wieder aus, dass k gerade ist, so erhalten wir

$$E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} q^{cd}.$$

Setzen wir nun $n := cd$, so durchläuft d alle positiven Teiler von n , und es gilt

$$E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{k-1} \right) q^n.$$

Nach Definition der $(k-1)$ -ten Teilersummenfunktion haben wir somit den Satz bewiesen. \square

Mithilfe der im Folgenden eingeführten BERNOULLI-Zahlen³⁵ lässt sich die Fourier-Entwicklung aus Satz 3.5 noch etwas systematischer darstellen:

Lemma 3.6. Die *Bernoulli-Zahlen* B_n für $n \in \mathbb{N}_0$ sind definiert durch die Taylor-Entwicklung von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n := \frac{z}{e^z - 1}, \quad \text{für alle } z \in U_{2\pi}(0).$$

Für sie gelten die folgenden Eigenschaften:

³⁴Sie ist ein spezieller Funktionswert der berühmten Riemann'schen Zetafunktion ζ .

³⁵Jakob I. Bernoulli (1655-1705), wobei die Bezeichnung „I.“ zur Abgrenzung von seinem ebenfalls in der Mathematik tätigen Großneffen Jakob II. Bernoulli (1759-1789) dient.

- (a) $B_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Speziell gelten $B_0 = 1$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$.
- (b) Es gilt die Rekursionsformel $(-1)^n B_n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_\nu$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Für ungerades $n > 1$ gilt $B_n = 0$.
- (d) Für gerades $n \geq 2$ gilt $B_n = \frac{(-1)^{n/2-1} n!}{2^{n-1} \pi^n} \zeta(n)$.

Beweis. Zunächst gilt es den Konvergenzbereich der Taylor-Reihe aus dem Lemma zu bestimmen. Dafür betrachten wir die Funktion $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$. Diese hat in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität und nimmt dort den Wert 1 an. Desweiteren hat sie Polstellen in den Punkten $z_\nu = 2\pi i\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Das sind alle Singularitäten von f . Nach dem **Potenzreihenentwicklungssatz** aus der Funktionentheorie konvergiert also die Taylor-Reihe von f um $z = 0$ in $U_{2\pi}(0)$.

Sei also $z \in U_{2\pi}(0)$. Dann gilt zum Einen

$$1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} z^n = B_0.$$

zum Anderen haben wir

$$\begin{aligned} -z &= z \left(\frac{1 - e^z}{e^z - 1} \right) = z \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{e^z}{e^z - 1} \right) = z \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{1 - e^{-z}} \right) \\ &= \frac{z}{e^z - 1} - \frac{-z}{e^{-z} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (1 - (-1)^n) z^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{2B_n}{n!} z^n, \end{aligned}$$

so dass wir nach Koeffizientenvergleich

$$B_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad B_n = 0 \quad \text{für alle ungeraden } n > 1$$

und insbesondere (c) erhalten. Daraus, aus $B_0 = 1$ und aus der Rekursionsformel (b) für $n + 1$ folgt $B_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit Behauptung (a).

Die Rekursionsformel (b) wiederum folgt mit Koeffizientenvergleich aus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_\nu \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{B_\nu}{\nu!(n-\nu)!} z^n \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!\mu!} z^{\nu+\mu} \\ &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu \right) \cdot \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu!} \right) \\ &= \frac{z}{e^z - 1} \cdot e^z \\ &= \frac{-z}{e^{-z} - 1} \end{aligned}$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Es verbleibt Behauptung (d) zu zeigen. Dafür setzen wir $z = 2\pi iw$. Für $w \in U_1(0)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2\pi iw)^n &= \frac{2\pi iw}{e^{2\pi iw} - 1} \\ &= \pi iw \frac{2}{e^{2\pi iw} - 1} \\ &= \pi iw \left(\frac{e^{2\pi iw} + 1}{e^{2\pi iw} - 1} - \frac{e^{2\pi iw} - 1}{e^{2\pi iw} - 1} \right) = \pi iw \left(\frac{e^{\pi iw} + e^{-\pi iw}}{e^{\pi iw} - e^{-\pi iw}} - 1 \right) \\ &= \pi w (\cot(\pi w) - i). \end{aligned}$$

Mit $B_1 = -\frac{1}{2}$ folgt

$$\pi w \cot(\pi w) = 1 + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^n B_n}{n!} w^n \quad \text{für alle } w \in U_1(0).$$

Andererseits gilt mit der Partialbruchzerlegung (2.6) des Kotangens

$$\begin{aligned} \pi w \cot(\pi w) &= 1 + w \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{w - m} + \frac{1}{m} \right) = 1 + w \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w - m} + \frac{1}{w + m} \right) \\ &= 1 + 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{w^2 - m^2} = 1 - 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{w}{m})^2} \\ &= 1 - 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{m} \right)^{2n} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n+2}} \right) w^{2n+2} \\ &= 1 - 2 \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \zeta(n) w^n. \end{aligned}$$

Behauptung (d) folgt aus einem weiteren Koeffizientenvergleich. □

Beispiel 3.7. Die Werte der ersten nicht-trivialen Bernoulli-Zahlen sind:

| | | | | | | | | | | | |
|-------|---|----------------|---------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|---------------------|---------------|---------------------|---------------------|
| n | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| B_n | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{5}{66}$ | $-\frac{691}{2730}$ | $\frac{7}{6}$ | $-\frac{3617}{510}$ | $\frac{43867}{798}$ |

Nach Lemma 3.6 ist die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihen durch

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \tag{3.2}$$

gegeben. Mit $B_4 = -\frac{1}{30}$ und $B_6 = \frac{1}{42}$ gilt also im Speziellen

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n \quad \text{und} \quad E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n.$$

Bemerkung 3.8. Da die Bernoulli-Zahlen nach Lemma 3.6 rationale Zahlen sind, trifft dies auch auf die Fourier-Koeffizienten der normierten Eisenstein-Reihen E_k mit $k \geq 4$ ganz und gerade zu. In den Spezialfällen E_4 und E_6 sehen wir, dass die Koeffizienten sogar ganzzahlig sind.

3.2 Der Struktursatz für holomorphe Modulformen

Eine wichtige Anwendung der Valenzformel 2.39 ist, dass wir mit ihr und unserem Wissen um die Eisenstein-Reihen eine Aussage über die Struktur der Vektorräume M_k und S_k treffen können. Um diese übersichtlicher präsentieren zu können, führen wir zunächst eine weitere Modulform ein:

Proposition 3.9. Die Diskriminante

$$\Delta(z) := \frac{1}{1728} (E_4^3(z) - E_6^2(z)) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

ist eine Funktion in S_{12} . Ihre Fourier-Entwicklung ist von der Form

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n = 0 + q - 24q^2 + O(q^3).$$

Die hierdurch definierte Zuordnung $n \mapsto \tau(n)$ heißt die RAMANUJAN- τ -Funktion.³⁶

Beweis. Wegen der Algebrenstruktur von M liegen E_4^3 und E_6^2 und somit auch Δ im Vektorraum M_{12} . Der Rest der Proposition ergibt sich, wenn wir die explizit bekannten Fourier-Entwicklungen von E_4 und E_6 dazu benutzen, um ebensolche für E_4^3 und E_6^2 zu bestimmen. In der Tat gelten

$$\begin{aligned} E_4^3(z) &= 1 + 720q + 179280q^2 + \text{Terme höherer Ordnung,} \\ E_6^2(z) &= 1 - 1008q + 220752q^2 \pm \text{Terme höherer Ordnung.} \end{aligned}$$

□

In Übungsaufgabe 3.1 zeigen wir, dass die Fourier-Koeffizienten von Δ ganze Zahlen sind.

Proposition 3.10. (a) Für gerades³⁷ k gilt

$$M_k = \begin{cases} \{0\} & \text{für } k < 0, \\ \mathbb{C} & \text{für } k = 0, \\ \{0\} & \text{für } k = 2, \\ \mathbb{C}E_k \oplus S_k & \text{für } k \geq 4. \end{cases}$$

³⁶Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

³⁷Dass die Vektorräume M_k für ungerades k nur aus der Null bestehen, hatten wir schon in Proposition 2.24 eingesehen.

(b) Die Abbildung $f \mapsto f \cdot \Delta$ ist ein \mathbb{C} -Vektorraumisomorphismus von M_{k-12} nach S_k .

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Die Fälle für $k \leq 0$ haben wir bereits in Korollar 2.41 gezeigt. Im Fall $k = 2$ ist die Lösbarkeit der Valenzformel gleichbedeutend damit, nicht-negative ganze Zahlen n_q, n_i und n_{sonst} mit

$$\frac{n_q}{3} + \frac{n_i}{2} + n_{\text{sonst}} = \frac{1}{6}$$

zu finden. Da es solche Zahlen nicht gibt, folgt die Behauptung auch in diesem Fall. Für $k \geq 4$ betrachten wir eine Modulform $f \in M_k$ mit Fourier-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)q^n$ und setzen $g := f - a_0(f)E_k$. Nach Definition hat E_k konstanten Fourier-Koeffizienten 1, so dass g in S_k liegt. Es folgt $f = a_0(f)E_k + g \in \mathbb{C}E_k \oplus S_k$.

Zum Beweis von Behauptung (b) genügt es, die Surjektivität der Zuordnung $f \mapsto f \cdot \Delta$ zu überprüfen; die Injektivität ist klar. Für eine beliebige Spitzenform $g \in S_k$ setzen wir $f := g/\Delta$. Es gilt

$$0\text{-ord}(\Delta; \infty) = 1 \quad \text{und} \quad 0\text{-ord}(\Delta; z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}, \quad (3.3)$$

denn: Nach Proposition 3.9 ist der Koeffizient von q bei der Fourier-Entwicklung von Δ gerade 1; es gilt also $0\text{-ord}(\Delta; i\infty) = 1$. Der Rest der Behauptung ist eine direkte Anwendung der Valenzformel 2.39. #

Einerseits folgt die Holomorphie von f auf \mathbb{H} , andererseits wegen $g \in S_k$ die Abschätzung

$$0\text{-ord}(f; i\infty) = 0\text{-ord}(g; i\infty) - 0\text{-ord}(\Delta; i\infty) = 0\text{-ord}(g; i\infty) - 1 \geq 0$$

und somit die Holomorphie von f in $i\infty$. Wegen $g \in M_k$ und $\Delta \in M_{12}$ gilt $f \in M_{k-12}$, und wir haben ein Urbild gefunden. \square

Korollar 3.11 (Dimensionsformel). Sei $k \geq 0$ gerade. Dann gilt

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{für } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

Beweis. Nach Proposition 3.10 gilt

$$S_k = \{0\} \quad \text{und somit} \quad M_k = \mathbb{C}E_k \quad \text{für } k \in \{4, 6, 8, 10\}.$$

Zusammen mit den in der Proposition explizit angegebenen Fällen $k \in \{0, 2\}$ folgt so die Behauptung für $0 \leq k \leq 10$. Wieder nach Proposition 3.10 gilt

$$\dim M_k = 1 + \dim S_k = 1 + \dim M_{k-12} \quad \text{für alle } k \geq 4$$

und somit induktiv die Behauptung. \square

Korollar 3.12. Sei $k \geq 4$ gerade. Dann gilt bezüglich des Petersson-Skalarprodukts

$$\mathbb{C}E_k = S_k^\perp := \{f \in M_k \mid \langle f \mid g \rangle = 0 \text{ für alle } g \in S_k\}.$$

Beweis. Nach Teil (b) von Satz 2.33 ist das Petersson-Skalarprodukt eingeschränkt auf S_k ein Skalarprodukt und somit insbesondere nicht ausgeartet. Daher folgt

$$S_k^\perp \cap S_k = \{0\}.$$

Andererseits gilt nach Teil (a) von Proposition 3.10

$$M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k.$$

Damit und wegen der Linearität des Petersson-Skalarprodukts genügt es zum Beweis des Korollars

$$\langle g \mid E_k \rangle = 0 \quad \text{für alle } g \in S_k$$

zu zeigen. Nach den Definitionen 2.32 und 3.1 gilt

$$\begin{aligned} \langle g \mid E_k \rangle &= \int_{\mathcal{F}} \overline{E_k(z)} g(z) y^k d\omega(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \overline{(1|_k M)(z)} g(z) \mathrm{Im}(z)^k \right) d\omega(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \overline{(1|_k M)(z)} g(M\langle z \rangle) (1|_k M)(z) \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^k \right. \\ &\quad \left. \cdot |(1|_k M)(z)|^{-2} \right) d\omega(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} g(M\langle z \rangle) \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^k \right) d\omega(z). \end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe gilt

$$\begin{aligned} \langle g \mid E_k \rangle &= \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\int_{\mathcal{F}} g(M\langle z \rangle) \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^k d\omega(z) \right) \\ &= \int_{\bigcup_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} M\langle \mathcal{F} \rangle} g(z) \mathrm{Im}(z)^k d\omega(z). \end{aligned}$$

Für geeignete Wahlen eines Vertretersystems von $SL_2(\mathbb{Z})_\infty$ in $SL_2(\mathbb{Z})$ ist analog zu Proposition 1.49 die Menge

$$\mathcal{F}_\infty := \bigcup_{M \in \overline{SL_2(\mathbb{Z})_\infty} \setminus \overline{SL_2(\mathbb{Z})}} M\langle \mathcal{F} \rangle = \bigcup_{M \in SL_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus SL_2(\mathbb{Z})} M\langle \mathcal{F} \rangle$$

ein Fundamentalbereich für die Aktion von $SL_2(\mathbb{Z})_\infty$ auf \mathbb{H} , wobei analog zu Lemma 2.29 das Integral nicht von der Wahl dieses Vertretersystems abhängt. Wählen wir speziell

$$\mathcal{F}_\infty = \{z \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\},$$

so erhalten wir mit $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)q^n$

$$\begin{aligned} \langle g \mid E_k \rangle &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(z) (\operatorname{Im}z)^k d\omega(z) \\ &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) e^{-2\pi ny} y^{k-2} e^{2\pi inx} \right) dx \wedge dy \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi inx} dx \right) a_n(g) e^{-2\pi ny} y^{k-2} dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Satz 3.13 (Struktursatz für holomorphe Modulformen). Für $k \geq 0$ gerade gilt

$$M_k = \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \mathbb{C} E_4^\alpha E_6^\beta.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die angegebenen Funktionen den \mathbb{C} -Vektorraum M_k erzeugen.

Fall 1: $k \leq 6$. Das haben wir bereits im Beweis von Korollar 3.11 eingesehen.

Fall 2: $k = 8$. Nach Korollar 3.11 gilt $\dim M_8 = 1$. Andererseits sind die konstanten Terme der Fourier-Entwicklungen von $E_8, E_4^2 \in M_8$ definitionsgemäß beide 1. Es folgt $E_8 = E_4^2$ und somit die Behauptung für $k = 8$.

Fall 3: $k = 10$. Nach Korollar 3.11 gilt $\dim M_{10} = 1$. Andererseits sind die konstanten Terme der Fourier-Entwicklungen von $E_{10}, E_4 E_6 \in M_{10}$ nach Definition beide 1. Es folgt $E_{10} = E_4 E_6$ und somit die Behauptung für $k = 10$.

Fall 4: $k \geq 12$. In diesem Fall gibt es offenbar stets $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ mit $4\alpha + 6\beta = k$, und die Fourier-Entwicklung der zugehörigen Modulform $g := E_4^\alpha E_6^\beta$ hat den konstanten Term 1. Sei nun $f \in M_k$ eine beliebige Modulform mit Fourier-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)q^n$. Dann ist $f - a_0(f)g \in S_k$, nach Teil (b) von Proposition 3.10 gibt es also ein $h \in M_{k-12}$ mit

$$f - a_0(f)g = h\Delta.$$

Nach Definition ist die Diskriminante eine \mathbb{C} -Linearkombination von E_4^3 und E_6^2 . Wir können nun annehmen, schon gezeigt zu haben, dass sich h als \mathbb{C} -Linearkombination von „Monomen“ $E_4^\gamma E_6^\delta$ mit $4\gamma + 6\delta = k - 12$ schreiben lässt. Tatsächlich stellt dieser Fall den Schritt von $k - 12$ auf k eines Induktionsbeweises dar, dessen Anfang wir in den Fällen $k \leq 10$ behandelt haben.

Nun wollen wir zeigen, dass die Menge

$$\{E_4^\alpha E_6^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 4\alpha + 6\beta = k\}$$

\mathbb{C} -linear unabhängig ist. Für den Beweis unterscheiden wir die Fälle $k \equiv 0 \pmod{4}$ und $k \equiv 2 \pmod{4}$. Wir zeigen hier nur den ersten Fall; der zweite geht sehr ähnlich. Nehmen wir also an, es gelte

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \lambda_{\alpha, \beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0 \quad \text{mit gewissen } \lambda_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}. \quad (3.4)$$

Wegen $4\alpha + 6\beta = k$ ist im von uns behandelten Fall β gerade, es gibt also ein $\beta' \in \mathbb{N}_0$ mit $\beta = 2\beta'$. Für dieses gilt dann $\alpha = \frac{k}{4} - 3\beta'$ und somit

$$E_4^\alpha E_6^\beta = E_4^{\frac{k}{4} - 3\beta'} E_6^{2\beta'} = E_4^{\frac{k}{4}} \left(\frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'}.$$

Eingesetzt in (3.4) erhalten wir so

$$E_4^{\frac{k}{4}} \sum_{\beta' \in \mathbb{N}_0} \lambda_{\frac{k}{4} - 3\beta', 2\beta'} \left(\frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'} = 0.$$

Nehmen wir nun an, es gäbe einen Koeffizienten ungleich Null in dieser Gleichung. Dann wäre E_6^2/E_4^3 Nullstelle eines von Null verschiedenen Polynoms aus $\mathbb{C}[X]$ und somit gleich einer Konstanten,

denn: Die meromorphen Funktionen auf \mathbb{H} bilden nach [Proposition 6.23](#) aus der Funktionentheorie einen Körper $\mathcal{M}(\mathbb{H})$, der \mathbb{C} umfasst. Ein von Null verschiedenes Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ hat also in $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ höchstens $\deg(P)$ Nullstellen.

Es folgt, dass alle Nullstellen von P in $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ konstant sind, da es nach dem [Fundamentalsatz der Algebra](#) aus der Funktionentheorie bereits $\deg(P)$ Nullstellen von P in \mathbb{C} gibt. #

Diese Konstante wäre gleich Null,

denn: Zum Einen gilt

$$E_6(i) = (E_6|_6 S)(i) = i^{-6} E_6\left(-\frac{1}{i}\right) = -E_6(i)$$

und somit $E_6(i) = 0$. Zum Anderen gilt nach (3.2)

$$E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{-2\pi n} > 0.$$

#

Es folgte $E_6 \equiv 0$, was nicht sein kann. Es gibt also keinen Koeffizienten ungleich Null, und wir haben die lineare Unabhängigkeit im Fall $k \equiv 0 \pmod{4}$ bewiesen. \square

Der Struktursatz 3.13 liefert uns eine konkrete Basis des Vektorraums M_k , deren Elemente – wichtig für zahlentheoretische Anwendungen – nach Bemerkung 3.8 ganzzahlige Fourier-Koeffizienten aufweisen. Für rechnerische Zwecke ist diese Basis jedoch nicht besonders praktisch. Gemäß einer zuerst 1975 von MILLER³⁸ publizierten Idee lässt sich die Situation allerdings verbessern. Um uns gedanklich darauf vorzubereiten, formulieren wir die Aussage des Struktursatzes zunächst ein wenig um:

Korollar 3.14. Für $k \geq 0$ gerade gilt

$$M_k = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta' \in \mathbb{N}_0 \\ 4\alpha + 12\beta' = k}} \mathbb{C} E_4^\alpha \Delta^{\beta'} & \text{für } k \equiv 0 \pmod{4}, \\ \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta' \in \mathbb{N}_0 \\ 4\alpha + 12\beta' = k-6}} \mathbb{C} E_4^\alpha E_6 \Delta^{\beta'} & \text{für } k \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Beweis. Nach dem Struktursatz 3.13 ist

$$\mathcal{B} := \{E_4^\alpha E_6^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, 4\alpha + 6\beta = k\}$$

eine \mathbb{C} -Basis von M_k . Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: $k \equiv 0 \pmod{4}$. Dann ist β für alle Elemente von \mathcal{B} gerade und lässt sich also als $\beta = 2\beta'$ mit einem $\beta' \in \mathbb{N}_0$ schreiben. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= \left| \{E_4^\alpha E_6^{2\beta'} : \alpha, \beta' \in \mathbb{N}_0, 4\alpha + 3\beta' = k\} \right| \\ &= \left| \{E_4^\alpha \Delta^{\beta'} : \alpha, \beta' \in \mathbb{N}_0, 4\alpha + 3\beta' = k\} \right|, \end{aligned}$$

so dass es zum Beweis der Behauptung in diesem Fall genügt zu zeigen, dass sich jedes Element von \mathcal{B} als \mathbb{C} -Linearkombination der Monome in der Behauptung darstellen lässt. Wegen

$$\begin{aligned} E_4^\alpha E_6^\beta &= E_4^\alpha E_6^{2\beta'} \\ &= E_4^\alpha (1728\Delta - E_4^3)^{\beta'} \\ &= E_4^\alpha \sum_{\beta''=0}^{\beta'} \binom{\beta'}{\beta''} (1728\Delta)^{\beta''} (-E_4^3)^{\beta'-\beta''} \end{aligned}$$

ist dem aber offensichtlich so.

Fall 2: $k \equiv 2 \pmod{4}$. Für $k = 2$ steht auf beiden Seiten der Behauptung der Nullraum, so dass nichts zu zeigen ist. Ansonsten enthält in diesem Fall jedes Element von \mathcal{B} mindestens einen Faktor E_6 und nach Ausklammern desselben folgt das Korollar für k aus der bereits in Fall 1 gezeigten Aussage für $k - 6$. \square

³⁸Victor Saul Miller (*1947)

Das Interessante an der in Korollar 3.14 angegebenen neuen Basis von M_k ist, dass ihre Elemente paarweise unterschiedliche Nullstellenordnungen bei $i\infty$ aufweisen. Das ist der Ansatzpunkt für das Resultat von Miller:

Satz 3.15. Für $k \geq 0$ gerade besitzt M_k eine Basis $\{f_0, \dots, f_{\dim S_k}\}$ aus Formen mit ganzzahligen Fourier-Koeffizienten, die der Bedingung

$$a_m(f_j) = \delta_{mj} \quad \text{für alle } 0 \leq m, j \leq \dim S_k$$

genügen.³⁹ Eine solche Basis bezeichnen wir auch als **Miller-Basis** von M_k . Durch Weglassen des Elements f_0 erhalten wir in dieser Situation stets eine Basis von S_k . Jede solche Basis nennen wir eine **Miller-Basis** von S_k .

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $k \geq 12$ annehmen,

denn: Nach Proposition 3.10 ist M_k für $k < 12$ stets höchstens eindimensional und die jeweils im Beweis des Struktursatzes explizit angegebenen Produkte aus (normierten) Eisenstein-Reihen sind eine mögliche Wahl für f_0 . #

Für $k \geq 12$ gilt nach der Dimensionsformel 3.11

$$\begin{aligned} 12 \dim S_k &= 12 \cdot \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor - 1 & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{für } k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases} \\ &= \begin{cases} k - 14 & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ k - r \text{ mit } 0 \leq r < 12 \text{ und } r \equiv k \pmod{12} & \text{für } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases} \end{aligned}$$

Wenden wir dies auf die Formel in Korollar 3.14 an, so können wir dort im Index nach α auflösen und erhalten dort

$$M_k = \bigoplus_{j=0}^{\dim S_k} \mathbb{C}g_j$$

mit

$$g_j := \begin{cases} E_4^{3(\dim S_k - j) + \frac{r}{4}} \Delta^j & \text{für } k \equiv 0 \pmod{4}, \\ E_4^{3(\dim S_k - j) + \frac{r-6}{4}} E_6 \Delta^j & \text{für } k \equiv 2 \pmod{4} \text{ und } k \not\equiv 2 \pmod{12}, \\ E_4^{3(\dim S_k - j) + 2} E_6 \Delta^j & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

³⁹Hierbei bezeichne wie üblich

$$\delta_{a,b} := \begin{cases} 1 & \text{für } a = b, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}$$

das nach Leopold KRONECKER (1823-1891) benannte **Kronecker-Delta**.

für alle $j \in \{0, \dots, \dim S_k\}$. Mit den bekannten Fourier-Entwicklungen von E_4 , E_6 und Δ erhalten wir die Formel

$$a_m(g_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } m < j, \\ 1 & \text{für } m = j. \end{cases}$$

Die gesuchte Miller-Basis $\{f_0, \dots, f_{\dim S_k}\}$ erreichen wir nun analog zum Rückwärtseinsetzen im Gauß-Verfahren in der Linearen Algebra iterativ durch

$$\begin{aligned} f_{\dim S_k} &:= g_{\dim S_k}, \\ f_j &:= g_j - \sum_{m=j+1}^{\dim S_k} a_m(g_j) f_m \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, \dim S_k - 1\}. \end{aligned}$$

□

3.3 Poincaré-Reihen

In diesem Abschnitt wollen wir ein Phänomen untersuchen, dem wir in einem Spezialfall bereits in Abschnitt 3.2 begegnet sind. In Korollar 3.12 haben wir für gerades $k \geq 4$

$$a_0(g) = 0 = \langle g | E_k \rangle \quad \text{für alle } g \in S_k$$

festgestellt, wobei $a_0(g)$ den 0-ten Fourier-Koeffizienten von g bezeichne. Mit Methoden aus der Funktionalanalysis stellt man fest, dass sich dieser Zusammenhang verallgemeinern lässt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung

$$\begin{cases} S_k & \rightarrow \mathbb{C}, \\ g & \mapsto a_n(g) = n\text{-ter Fourier-Koeffizient von } g \end{cases}$$

ist ein lineares Funktional. Nach dem Darstellungssatz von FRÉCHET-RIESZ⁴⁰ existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutig bestimmtes $\tilde{P}_{n,k} \in S_k$ mit der (n, k) -Fréchet-Riesz-Eigenschaft

$$a_n(g) = \langle g | \tilde{P}_{n,k} \rangle \quad \text{für alle } g \in S_k.$$

Wir geben nun $\tilde{P}_{n,k}$ explizit an und weisen diese Eigenschaft nach:

Definition 3.16. Seien $k \geq 4$ eine gerade ganze Zahl und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt die formale Reihe

$$P_{n,k}(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} (e^{2\pi i n \cdot} |_{kM})(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} j(M, z)^{-k} e^{2\pi i n M(z)},$$

wobei M ein Vertretersystem von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durchläuft, die n -te **Poincaré-Reihe** vom Gewicht k bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Der Begriff der Poincaré-Reihe ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl des Vertretersystems, das M durchläuft, da die Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ als Translationen um ganze Zahlen operieren und die Exponentialfunktion $2\pi i$ -periodisch ist.

⁴⁰Maurice René Fréchet (1878-1973) und Frigyes Riesz (1880-1956)

Beispiel 3.17. Offensichtlich gilt $P_{0,k} = E_k \in M_k \setminus S_k$. Nach dem eingangs erwähnten Korollar 3.12 erfüllt $P_{0,k}$ also die $(0,k)$ -Fréchet-Riesz-Eigenschaft.

Satz 3.18. Für $n \geq 1$ und gerades $k \geq 4$ gilt $P_{n,k} \in S_k$.

Beweis. Wie schon im Fall der Eisenstein-Reihe ist nach Konstruktion klar, dass die durch $P_{n,k}$ gegebene Funktion in ihrem Konvergenzgebiet Axiom (V_1) erfüllt. Tatsächlich konvergiert $P_{n,k}$ auf ganz \mathbb{H} ,

denn: Wegen $M\langle z \rangle \in \mathbb{H}$ für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und alle $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$|e^{2\pi i n M\langle z \rangle}| < 1$$

und daher auch

$$\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} |j(M, z)|^{-k} |e^{2\pi i n M\langle z \rangle}| < \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} |j(M, z)|^{-k},$$

sodass die Reihe der Absolutbeträge bezüglich $P_{n,k}$ durch die Reihe der Absolutbeträge bezüglich E_k majorisiert wird. Letztere konvergiert nach Lemma 3.3 auf Kompakta in \mathbb{H} gleichmäßig. Da die Teilsummen in $P_{n,k}$ offensichtlich auf \mathbb{H} holomorphe Funktionen darstellen, folgt die Holomorphie von $P_{n,k}$ auf \mathbb{H} mit dem **Approximationssatz von Weierstraß** aus der Funktionentheorie. #

Es verbleibt zu zeigen, dass $P_{n,k}$ in $z = i\infty$ und somit in allen Spitzen verschwindet. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gilt für $z \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} P_{n,k}(z) &\stackrel{(3.1)}{=} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(e^{2\pi i n z} + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(c,d)=1, c>0 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \right) \\ &= 0 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(c,d)=1, c>0 \\ ad-bc=1}} \lim_{z \rightarrow \infty} \left((cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Summiert wird hierbei über die Paare (c, d) und zu jedem Paar ist ein Paar $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ mit $ad - bc = 1$ zu bestimmen. Der Funktionswert ist dabei unabhängig von der Wahl von $a, b \in \mathbb{Z}$, denn ist auch $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbb{Z}^2$ ein solches Paar, so gilt $\tilde{a} = a + mc$ und $\tilde{b} = b + md$ für ein $m \in \mathbb{Z}$,

denn: Für $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gilt

$$ad - bc = (a+k)d - (b+\ell)c = (ad - bc) + (kd - \ell c) \iff kd - \ell c = 0.$$

Wegen $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$ bedingt dies $c \mid k$ und $d \mid \ell$, wir erhalten also

$$\frac{k}{c} \cdot cd - \frac{\ell}{d} \cdot cd = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{k}{c} = \frac{\ell}{d} =: m \in \mathbb{Z}.$$

Die Behauptung folgt, da umgekehrt die angegebenen Werte für $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{Z}$ offensichtlich die Determinantenbedingung erfüllen. #

In (3.5) gilt

$$\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H} \quad \text{und also} \quad |e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}}| < 1,$$

so dass wegen $(cz+d)^{-k} \rightarrow 0$ jeder einzelne Summand verschwindet. Insgesamt haben wir den Satz gezeigt. \square

Satz 3.19. Für $n \geq 1$ und gerades $k \geq 4$ erfüllt

$$\tilde{P}_{n,k} := \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} \cdot P_{n,k}$$

die (n, k) -Fréchet-Riesz-Eigenschaft.

Beweis. Für ein beliebiges

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(g) q^m \in S_k$$

zeigt man analog zum Beweis von Korollar 3.12

$$\begin{aligned} \langle g | P_{n,k} \rangle &= \int_0^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(z) \overline{e^{2\pi i n z}} (\operatorname{Im} z)^k d\omega(z) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(g) e^{2\pi i m z} \overline{e^{2\pi i n z}} y^{k-2} \right) dx \wedge dy \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(m-n)x} dx \right) a_m(g) e^{-2\pi(m+n)y} y^{k-2} dy. \end{aligned}$$

Offenkundig gilt

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i r x} dx = \delta_{r,0} \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Z}$$

und somit auch

$$\begin{aligned} \langle g | P_{n,k} \rangle &= \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{m,n} a_m(g) e^{-2\pi(m+n)y} y^{k-2} dy \\ &= \int_0^{\infty} a_n(g) e^{-4\pi n y} y^{k-2} dy \\ &= \frac{a_n(g)}{(4\pi n)^{k-1}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-y} y^{k-2} dy. \end{aligned}$$

Nach Übungsaufgabe 3.2 nimmt das Integral auf der rechten Seite den Wert $(k-2)!$ an, so dass wir den Satz gezeigt haben. \square

Korollar 3.20. Für $k \geq 4$ gerade bilden die Poincaré-Reihen $P_{1,k}, \dots, P_{\dim S_k, k}$ eine Basis von S_k , es gilt also

$$S_k = \langle P_{1,k}, \dots, P_{\dim S_k, k} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Beweis. Dass die genannten Poincaré-Reihen Spitzenformen sind, haben wir in Satz 3.18 gezeigt. Das Korollar folgt, wenn wir zeigen können, dass sie auch \mathbb{C} -linear unabhängig sind. Nehmen wir also an, es gelte

$$\sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j P_{j,k} = 0 \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_{\dim S_k} \in \mathbb{C}.$$

Für jede Miller-Basis $\{f_1, \dots, f_{\dim S_k}\}$ von S_k wie in Satz 3.15 gilt dann bereits

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j P_{j,k} \mid f_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j \langle P_{j,k} \mid f_\ell \rangle \\ &\stackrel{3.15, 3.19}{=} \lambda_\ell \frac{(k-2)!}{(4\pi\ell)^{k-1}} \quad \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, \dim S_k\} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Satz 3.21. Für $n \geq 1$ und $k \geq 4$ gerade hat die Poincaré-Reihe $P_{n,k}$ die Fourier-Entwicklung

$$P_{n,k}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(n, k) q^m$$

mit den Koeffizienten

$$g_m(n, k) := \delta_{m,n} + 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c} \cdot K(m, n, c) \cdot J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right)$$

und der **KLOOSTERMAN-Summe**⁴¹

$$K(m, n, c) := \sum_{\substack{d \bmod (c) \\ \text{ggT}(c,d)=1}} e^{2\pi i \frac{md+nd'}{c}} \quad \text{mit } dd' \equiv 1 \pmod{c},$$

sowie der **BESSEL-Funktion**⁴²

$$J_{k-1}(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^\ell}{\ell!(k-1+\ell)!}.$$

⁴¹Hendrik Douwe Kloosterman (1900-1968)

⁴²Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 P_{n,k}(z) &\stackrel{(3.5)}{=} e^{2\pi i n z} + \sum_{\substack{(c,\tilde{d}) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,\tilde{d})=1, c>0 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \\
 &= e^{2\pi i n z} + \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{\tilde{d} \bmod (c) \\ \text{ggT}(c,\tilde{d})=1 \\ a\tilde{d}-bc=1}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+\tilde{d})^{-k} e^{2\pi i n \frac{a(z+m)+\tilde{b}}{c(z+m)+\tilde{d}}}, \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

denn: Zu einem festen $c > 0$ und einem festen Vertretersystem $\tilde{d} \bmod (c)$ schreiben wir jedes $d \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(c,d) = 1$ in der Form

$$d = \tilde{d} + mc \quad \text{mit } \tilde{d} \text{ im vorgegebenen Vertretersystem und } m \in \mathbb{Z}.$$

Mit $\tilde{b} = b - ma$ folgt

$$1 = ad - bc = a(\tilde{d} + mc) - (\tilde{b} + ma)c = a\tilde{d} - \tilde{b}c$$

und die obige Darstellung folgt durch Ausklammern von c und a . #

Im Folgenden schreiben wir wieder d und b statt \tilde{d} und \tilde{b} . Wir wollen nun die innere Summe auf der rechten Seite von (3.6) genauer untersuchen und holen dafür ein wenig aus. Für beliebiges $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $z \in \mathbb{H}$ gilt zunächst

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (z+m)^{-k} e^{-2\pi i \nu \frac{1}{z+m}} = 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(4\pi\sqrt{m\nu}) \cdot e^{2\pi i m z}, \tag{3.7}$$

denn: Die linke Seite von (3.7) konvergiert gleichmäßig absolut auf Kompakta in \mathbb{H} und geht für $z \rightarrow \infty$ gegen Null – das zeigt man wie im Beweis von Satz 3.18. Sie hat daher nach Satz 2.11 eine Fourier-Entwicklung

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\mu} q^{\mu} \quad \text{mit } c_{\mu} = \int_{ic}^{ic+1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (z+m)^{-k} e^{-2\pi i \nu \frac{1}{z+m}} \right) e^{2\pi i \mu z} dz.$$

Man kann nachweisen, dass es sich hierbei im Wesentlichen um eine Integraldarstellung eines bestimmten Wertes der Bessel-Funktion handelt, genauer gilt

$$c_{\mu} = 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(4\pi\sqrt{\mu\nu}),$$

was die Behauptung zeigt. Die benötigten Formeln finden sich in den üblichen Integraltabellen; der Nachweis ist uns hier zu mühsam. #

Sei nun $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige Matrix in $SL_2(\mathbb{R})$. Ersetzen wir in (3.7) erst z durch $z + \frac{d}{c}$ sowie ν durch $\frac{\nu}{c^2}$ und multiplizieren dann mit $c^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c}}$, so erhalten wir für beliebiges $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a(z+m)+b}{c(z+m)+d}} \\ &= \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\nu}}{c}\right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(va+md)} e^{2\pi i m z}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

denn: Die linke Seite von (3.7) wird so zu

$$\begin{aligned} & c^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c}} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left((z + \frac{d}{c}) + m\right)^{-k} e^{-2\pi i \frac{\nu}{c^2} \frac{1}{(z + \frac{d}{c}) + m}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c} - 2\pi i \frac{\nu}{c} \frac{1}{cz+d+cm}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \frac{\nu}{c} \left(\frac{a(cz+d+cm)-1}{cz+d+cm}\right)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \frac{\nu}{c} \left(\frac{ac(z+m)+(ad-1)}{c(z+m)+d}\right)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \frac{\nu}{c} \left(\frac{ac(z+m)+bc}{c(z+m)+d}\right)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \nu \left(\frac{a(z+m)+b}{c(z+m)+d}\right)} \end{aligned}$$

und die rechte Seite zu

$$\begin{aligned} & c^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c}} \cdot 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{mc^2}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(4\pi\sqrt{\frac{m\nu}{c^2}}\right) \cdot e^{2\pi i m(z + \frac{d}{c})} \\ &= \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\nu}}{c}\right) \cdot e^{2\pi i \nu \frac{a}{c}} e^{2\pi i m(z + \frac{d}{c})} \\ &= \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\nu}}{c}\right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(va+md)} e^{2\pi i m z}. \end{aligned}$$

#

Setzen wir nun (3.8) mit $\nu = n$ in (3.6) ein, so erhalten wir unter Beachtung von $ad = 1 - bc \equiv 1 \pmod{c}$

$$P_{n,k}(z) = e^{2\pi i n z} + \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{d \pmod{c} \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(na+md)} e^{2\pi i m z}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2\pi iz} + \sum_{c=1}^{\infty} 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{c} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \cdot \sum_{\substack{d \bmod(c) \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} e^{\frac{2\pi i}{c}(na+md)} \cdot q^m \\
&= e^{2\pi iz} + \sum_{c=1}^{\infty} 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{c} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \cdot K(m, n, c) \cdot q^m.
\end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz lassen sich die Summen über c und über m vertauschen. Das führt zu

$$\begin{aligned}
P_{n,k}(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\delta_{m,n} + \sum_{c=1}^{\infty} 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{1}{c} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \cdot K(m, n, c) \right) q^m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\delta_{m,n} + 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c} \cdot K(m, n, c) \cdot J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \right) q^m.
\end{aligned}$$

□

Kloosterman-Summen spielen aufgrund der oberen Beobachtung eine wichtige Rolle in der Theorie der Modulformen, sie tauchen aber auch in der analytischen Zahlentheorie auf. Bemerkenswert ist die von André Weil gezeigte Weil-Schranke

$$|K(a, b, p)| \leq 2\sqrt{p} \quad \text{für alle } 1 \leq a, b \leq p-1$$

mit Primzahlen p , die schwierig zu beweisen ist.

3.4 Der Struktursatz für meromorphe Modulformen

Mithilfe der Eisenstein-Reihen lassen sich ohne Mühe auch meromorphe Modulformen einführen:

Proposition 3.22. *Die j -Invariante oder auch absolute Invariante*

$$j(z) := \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$$

liegt in V_0 , ist holomorph auf \mathbb{H} und hat einen einfachen Pol in $z = i\infty$.

Beweis. Wegen $\Delta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ ist j holomorph auf \mathbb{H} . Zudem gilt

$$\text{ord}(j; i\infty) = \text{ord}(E_4^3; i\infty) - \text{ord}(\Delta; i\infty) = 0 - 1 = -1.$$

Da sowohl E_4^3 als auch Δ in M_{12} liegen, folgt $j \in V_0$ aus der Algebrenstruktur von V . □

Vermöge der j -Invarianten und des Struktursatzes 3.13 können wir die Vektorräume V_k der meromorphen Modulformen von Gewicht k bezüglich der vollen Modulgruppe beschreiben. Dazu holen wir ein wenig aus:

Proposition 3.23. j liefert eine Bijektion $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$.

Beweis. Nach Proposition 3.22 liegt für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion $j_\lambda := j - \lambda$ in V_0 , ist holomorph auf \mathbb{H} und hat einen einfachen Pol in $z = i\infty$. Da für $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$ die Funktionen j_λ und j_μ offenbar keine gemeinsame Nullstelle haben können, langt es zum Beweis der Proposition nun zu zeigen, dass j_λ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ eine modulo $SL_2(\mathbb{Z})$ eindeutig bestimmte Nullstelle hat. Dafür wenden wir auf j_λ die Valenzformel 2.39 an und erhalten

$$-1 + \frac{n}{2} + \frac{n'}{3} + n'' = \text{ord}(j_\lambda; i\infty) + \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(j_\lambda; i) + \frac{1}{3} \cdot \text{ord}(j_\lambda; \rho) + \sum_{z \neq i, \rho} \text{ord}(j_\lambda; z) = \frac{0}{12} = 0$$

mit drei geeigneten Zahlen $n, n', n'' \in \mathbb{N}_0$. Man kann leicht überprüfen, dass die einzigen Lösungen $(n, n', n'') \in \mathbb{N}_0^3$ dieser DIOPHANTischen Gleichung⁴³ durch $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ und $(0, 0, 1)$ gegeben sind. Die Proposition folgt. \square

Satz 3.24 (Struktursatz für meromorphe Modulformen). *Für k gerade gilt*

$$V_k = \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}}.$$

Beweis. Wir zeigen etwas mehr, dass nämlich für eine meromorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $f \in V_k$.
- (ii) Es gibt ein $\ell \in \mathbb{Z}$ mit $f \in \frac{M_{\ell+k}}{M_\ell}$.
- (iii) $f \in \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}}$.

Gelte zunächst Aussage (iii). Dann gibt es Polynome

$$P(X) = \sum_{\mu=0}^m a_\mu X^\mu, \quad Q(X) = \sum_{\nu=0}^n b_\nu X^\nu \quad \in \mathbb{C}[X]$$

mit

$$f = \frac{P(j)}{Q(j)} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \quad \text{und} \quad Q(j)(z) \neq 0.$$

Setzen wir die Definition der j -Invarianten ein, so erhalten wir

$$f = \frac{\sum_{\mu=0}^m a_\mu \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^\mu}{\sum_{\nu=0}^n b_\nu \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^\nu} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} = \frac{\Delta^n \cdot \sum_{\mu=0}^m a_\mu (E_4^3)^\mu \Delta^{m-\mu}}{\Delta^m \cdot \sum_{\nu=0}^n b_\nu (E_4^3)^\nu \Delta^{n-\nu}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}}.$$

⁴³Diophantos von Alexandria (Lebensdaten nicht genau bekannt, zwischen -100 und 350)

Wir unterscheiden nun in Abhängigkeit von Vorzeichen von k zwei Fälle:

Fall 1: $k \geq 0$. Dann sind Zähler und Nenner holomorphe Modulformen vom Gewicht $12(m+n) + 4k$ bzw. $12(m+n) + 3k$.

Fall 2: $k < 0$. Dann schreiben wir

$$f = \frac{\Delta^n \cdot \sum_{\mu=0}^m a_\mu (E_4^3)^\mu \Delta^{m-\mu}}{\Delta^m \cdot \sum_{\nu=0}^n b_\nu (E_4^3)^\nu \Delta^{n-\nu}} \cdot \frac{E_6^{-k}}{E_4^{-k}}.$$

Hier sind Zähler und Nenner holomorphe Modulformen vom Gewicht $12(m+n) - 3k$ bzw. $12(m+n) - 4k$.

In beiden Fällen folgt sofort Aussage (ii).

Dass Aussage (ii) Aussage (i) impliziert, ist klar.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass aus Aussage (i) wieder Aussage (iii) folgt. Sei dafür $f \in V_k$ nicht konstant Null und seien weiter $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ Vertreter der Äquivalenzklassen modulo $SL_2(\mathbb{Z})$ der Polstellen von f sowie $-m_\varrho := \text{ord}(f; z_\varrho)$ für $\varrho \in \{1, \dots, r\}$. Dann erfüllt die Funktion

$$P(z) := \prod_{\varrho=1}^r (j(z) - j(z_\varrho))^{m_\varrho} \in \mathbb{C}(j) \subseteq V_0$$

für alle $\varrho \in \{1, \dots, r\}$ die Eigenschaft

$$\text{ord}(P; z_\varrho) \stackrel{3.23}{=} \text{ord}((j(z) - j(z_\varrho))^{m_\varrho}; z_\varrho) = m_\varrho \cdot \text{ord}(j(z) - j(z_\varrho); z_\varrho) \geq m_\varrho.$$

Es folgt, dass Pf in V_k liegt und auf \mathbb{H} holomorph ist. Wegen $P \in \mathbb{C}[j]$ dürfen wir daher zum Beweis von Aussage (iii) ohne Einschränkung annehmen, f sei auf \mathbb{H} holomorph, und sonst Pf statt f untersuchen. Wegen $\text{ord}(\Delta; i\infty) = 1$ ist $g := \Delta^{-\text{ord}(f; i\infty)} f$ in $z = i\infty$ holomorph und somit eine Modulform aus $M_{k-12\text{ord}(f; i\infty)}$. Nach dem Struktursatz 3.13 ist g daher eine Linearkombination von Monomen $E_4^\alpha E_6^\beta$ mit $4\alpha + 6\beta = k - 12\text{ord}(f; i\infty)$.⁴⁴ Wegen $f = \frac{g}{\Delta^{-\text{ord}(f; i\infty)}}$ genügt es also, die Behauptung für Funktionen vom Typ

$$\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^{-\text{ord}(f; i\infty)}} \quad \text{mit } 4\alpha + 6\beta = k - 12\text{ord}(f; i\infty)$$

zu zeigen. Für Zahlen α, β , die hier vorkommen, gilt insbesondere

$$\alpha \equiv k \pmod{3} \quad \text{und} \quad 2\beta \equiv -k \pmod{4},$$

⁴⁴So etwas gibt es nach Konstruktion. Man bemerke, dass wegen der vorausgesetzten Holomorphie von f in \mathbb{H} die Valenzformel 2.39 für f

$$\text{ord}(f; i\infty) \leq \frac{k}{12}$$

besagt.

so dass wir $\alpha = 3\tilde{\alpha} + k$ und $\beta = 2\tilde{\beta} - \frac{k}{2}$ schreiben können. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^{-\text{ord}(f; i\infty)}} &= \frac{(E_4^3)^{\tilde{\alpha}} E_4^k (E_6^2)^{\tilde{\beta}} E_6^{-\frac{k}{2}}}{\Delta^{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}} \\ &= \frac{(E_4^3)^{\tilde{\alpha}}}{\Delta^{\tilde{\alpha}}} \cdot \frac{(E_6^2)^{\tilde{\beta}}}{\Delta^{\tilde{\beta}}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \\ &= j^{\tilde{\alpha}} \cdot \left(\frac{E_4^3}{\Delta} - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} \right)^{\tilde{\beta}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \\ &= j^{\tilde{\alpha}} \cdot (j - 1728)^{\tilde{\beta}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \in \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Bemerkung 3.25. Schreiben wir kurz $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Dann gilt: Der Quotient $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$ lässt sich auf natürliche Weise mit der Struktur einer kompakten Riemann'schen Fläche ausstatten, indem man die Ränder des Standardfundamentalbereichs \mathcal{F} identifiziert. In dieser Sprache besagt Proposition 3.23, dass j einen Isomorphismus Riemann'scher Flächen

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^* \cong \overline{\mathbb{C}}$$

liefert, so dass sich $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$ topologisch mit der 2-Sphäre S^2 in \mathbb{R}^3 identifizieren lässt. Im Spezialfall $k = 0$ entspricht Satz 3.24 dann der Tatsache, dass die einzigen meromorphen Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$ die rationalen Funktionen sind.

3.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten der Spitzenform $\Delta \in S_{12}$ ganze Zahlen sind.

Hinweis: Zeigen Sie dafür zunächst

$$\sigma_3(n) \equiv \sigma_5(n) \pmod{12} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3.2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Das Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(z) > 0$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Diese nennen wir die **Gammafunktion**.

Hinweis: Zerlegen Sie das Integral in ein Integral von 0 bis 1 und eines von 1 bis ∞ und behandeln Sie diese gesondert.

(b) Es gilt die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration.

(c) Es gilt $\Gamma(1) = 1$ und mit (b) also $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.3. In dieser Aufgabe zeigen wir die **Ramanujan-Kongruenzen**

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für die Fourier-Koeffizienten $\tau(n)$ der Diskriminante $\Delta \in S_{12}$. Zeigen Sie dafür zunächst die Aussagen

(a) $E_{12}(z) = 1 + \frac{65520}{691} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n)q^n$.

(b) $691 \cdot (E_{12} - E_6^2) = (65520 + 691 \cdot 1008) \cdot \Delta$.

und folgern Sie die Behauptung durch Vergleich der Fourier-Koeffizienten auf beiden Seiten. Beachten Sie hierbei Übungsaufgabe 3.1.

Aufgabe 3.4. (a) Drücken Sie E_{16} als Polynom in E_4 und E_6 aus.

(b) Nach Übungsaufgabe 2.2 gilt

$$f := E'_{12}\Delta - E_{12}\Delta' \in V_{26}.$$

Zeigen Sie $f \in M_{26}$ und drücken Sie f als Polynom in E_4 und E_6 aus.

Aufgabe 3.5. Sei $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n$ die Fourier-Entwicklung der Diskriminante $\Delta \in S_{12}$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Äquivalenz

$$\tau(n) = 0 \iff P_{n,12} \equiv 0 \iff g_n(n,12) = 0.$$

Bemerkung: Einer Vermutung von LEHMER⁴⁵ zufolge gilt $\tau(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

⁴⁵Derrick Henry Lehmer (1905-1991)

Hecke-Theorie

Die Hecke-Theorie studiert für alle $n \in \mathbb{N}$ spezielle Endomorphismen T_n auf dem Vektorraum M_k der holomorphen Modulformen eines festen Gewichts k . Als lineare Abbildungen auf Räumen von Modulformen operieren sie auf den Fourier-Koeffizienten, was später für die Zahlentheorie von Bedeutung ist. Entdeckt wurden Hecke-Operatoren durch MORDELL⁴⁶ im Jahr 1917, als dieser die von Ramanujan vermutete schwache Multiplikativität der τ -Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n =: \Delta(z)$$

nachwies. Aber erst Hecke erkannte in den 1930er-Jahren die universelle Bedeutung dieser Konstruktion. Wie zuerst 1959 von SHIMURA⁴⁷ beschrieben, lässt sich den Hecke-Operatoren eine Algebra zuordnen, die sogenannte Hecke-Algebra. Letztere stellt ein zunächst rein algebraisches Objekt dar, das wir in Abschnitt 4.1 in größerer Allgemeinheit behandeln wollen, um dann in Abschnitt 4.2 den Spezialfall einer Hecke-Algebra zur vollen Modulgruppe zu studieren. Hierbei folgen wir jeweils der Darstellung einer 1990 erschienenen Abhandlung von KRIEG.⁴⁸ In den Abschnitten 4.3 und 4.4 wenden wir schließlich die Elemente der Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe als Hecke-Operatoren auf holomorphe Modulformen an und studieren Eigenformen in dieser Situation.

4.1 Die allgemeine Hecke-Algebra

Definition 4.1. Ein Paar (R, S) aus einem Monoid S und einer darin enthaltenen Gruppe $R \subseteq S$, so dass für alle $s \in S$ die Doppelnebenklasse RsR aus nur endlich vielen R -Linksnebenklassen besteht, nennen wir ein **Hecke-Paar**.

⁴⁶Louis Joel Mordell (1888-1972)

⁴⁷Goro Shimura (1930-2019)

⁴⁸Aloys Krieg (*1955)

Beispiel 4.2. Ein Paar (R, S) zweier Gruppen $R \subseteq S$ ist trivialerweise ein Hecke-Paar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) R ist eine endliche Untergruppe von S ,
- (b) R ist in S normal.

Wir führen in Beispiel 4.4 ein erstes interessantes Beispiel eines Hecke-Paares ein, benötigen dafür aber zunächst das folgende Lemma:

Lemma 4.3. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{M}^n := \{M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det(M) = n\} = \bigsqcup_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod (d)}} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

wobei b ein volles Vertretersystem modulo d durchläuft, also etwa $b \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Beweis. Offensichtlich ist die rechte Seite in der linken enthalten. Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion und betrachten dazu eine beliebige Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^n.$$

Wegen $ad - bc = n > 0$ können a und c nicht gleichzeitig Null sein. Mit $g := \mathrm{ggT}(a, c) \in \mathbb{N}$ sind daher $-\frac{c}{g}$ und $\frac{a}{g}$ teilerfremd und nach dem Lemma von Bézout gibt es $e, f \in \mathbb{Z}$ mit $e\frac{a}{g} + \frac{c}{g}f = 1$ und

$$\begin{pmatrix} e & f \\ -\frac{c}{g} & \frac{a}{g} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

so dass wir ohne Einschränkung $c = 0$ annehmen können. Wegen $\det M = n$ gilt dann $ad = n$. Nach möglicher Multiplikation mit $-I_2$ dürfen wir zudem ohne Einschränkung $d > 0$ annehmen. Für ein beliebiges $h \in \mathbb{Z}$ gilt weiter

$$T^h \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + dh \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

so dass wir ohne Einschränkung annehmen können, dass b in einem geeigneten Restesystem modulo d liegt.

Es verbleibt zu zeigen, dass die Vereinigung in der Behauptung disjunkt ist – die Endlichkeit ist nach Konstruktion klar. Angenommen, für zwei Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

mit $ad = n = \tilde{a}\tilde{d}$, $d, \tilde{d} > 0$ und b, \tilde{b} Vertreter zweier Restklassen modulo d bzw. \tilde{d} existiere ein $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Dann folgt, dass der untere linke Eintrag von U Null ist, also $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$. Es gibt also ein Vorzeichen \pm und ein $h \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & h \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm a & \pm b + hd \\ 0 & \pm d \end{pmatrix}.$$

Einerseits folgt $\tilde{d} = \pm d$ und wegen $d, \tilde{d} > 0$ bereits $\tilde{d} = d$ und somit $U = T^h$. Andererseits gilt dann auch $\tilde{b} = b + hd$. Wegen $\tilde{d} = d$ stammen b, \tilde{b} aus dem gleichen Restesystem modulo d . Da sie sich nur um ein Vielfaches von d unterscheiden, folgt $\tilde{b} = b$ und $U = I_2$. Insbesondere haben wir die behauptete Disjunktheit nachgewiesen. \square

Beispiel 4.4. Sei

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ := \{Q \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid \det(Q) > 0\}.$$

Dann ist $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$ ein Hecke-Paar,

denn: Für ein beliebiges $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $mQ \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ und $n := \det(mQ) > 0$. Es gilt deshalb

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot Q \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \frac{1}{m} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot (mQ) \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \frac{1}{m} \cdot \mathbb{M}^n.$$

Die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklasse $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot Q \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zerfällt (disjunkt) in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Linksnebenklassen. Nach Lemma 4.3 ist diese Zerlegung endlich und explizit bekannt. $\#$

Bezüglich eines gegebenen Hecke-Paares (R, S) schreiben wir

- $\mathcal{L}(R, S)$ für den \mathbb{Z} -Modul aller formalen endlichen \mathbb{Z} -Linearkombinationen von R -Linksnebenklassen von S ,
- $\mathcal{H}(R, S)$ für den \mathbb{Z} -Modul aller formalen endlichen \mathbb{Z} -Linearkombinationen von R -Doppelnebenklassen von S .

Nach Voraussetzung ist jede R -Doppelnebenklasse RsR in S die disjunkte Vereinigung endlich vieler R -Linksnebenklassen

$$RsR = Rs_1 \sqcup \dots \sqcup Rs_\ell \quad \text{für ein geeignete } s_1, \dots, s_\ell \in S.$$

Wir ordnen RsR das Element

$$\iota(RsR) := \sum_{j=1}^{\ell} Rs_j \in \mathcal{L}(R, S)$$

zu und setzen ι zu der eindeutig bestimmten \mathbb{Z} -linearen Abbildung

$$\iota: \mathcal{H}(R, S) \rightarrow \mathcal{L}(R, S)$$

fort. Letztere ist offenkundig injektiv; wir wollen nun ihr Bild studieren. Die Gruppe R operiert per Rechtsmultiplikation auf der Menge der R -Linksnebenklassen von S und in \mathbb{Z} -linearer Fortsetzung auf $\mathcal{L}(R, S)$. Den Untermodul der R -Invarianten unter dieser Aktion bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(R, S)^R$. Dann ist

$$\iota: \mathcal{H}(R, S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(R, S)^R$$

ein Isomorphismus von \mathbb{Z} -Moduln,

denn: Ein Element

$$\sum_{s \in R \backslash S} a_s R s \in \mathcal{L}(R, S)$$

ist genau dann R -rechtsinvariant, wenn für alle s, t mit $R s R = R t R$ die Koeffizienten a_s und a_t übereinstimmen. Genau dann können wir

$$\sum_{s \in R \backslash S} a_s R s = \sum_{s \in R \backslash S / R} \sum_{\substack{s_j \in R \backslash S \\ R s_j \subseteq R s R}} a_s R s_j = \sum_{s \in R \backslash S / R} a_s \iota(R s R) = \iota \left(\sum_{s \in R \backslash S / R} a_s R s R \right) \quad (4.1)$$

schreiben. #

Wir werden von nun an $\mathcal{L}(R, S)^R$ mit $\mathcal{H}(R, S)$ identifizieren.

Wir definieren ein Produkt

$$(R s R)(R t) := \left(\bigsqcup_{j=1}^{\ell} R s_j \right) (R t) := \sum_{j=1}^{\ell} R s_j t \in \mathcal{L}(R, S) \quad (4.2)$$

von R -Doppelnebenklassen mit R -Linksnebenklassen. Dieses hängt offensichtlich nicht von der Wahl der Vertreter s_j und t ab und lässt sich \mathbb{Z} -bilinear zu einer Verknüpfung

$$\mathcal{H}(R, S) \times \mathcal{L}(R, S) \rightarrow \mathcal{L}(R, S) \quad (4.3)$$

fortsetzen.

Proposition 4.5. *Sei (R, S) ein Hecke-Paar. Dann ist die in (4.3) definierte Verknüpfung in dem Sinne assoziativ, dass*

$$(\mathfrak{D} \tilde{\mathfrak{D}}) \mathfrak{L} = \mathfrak{D} (\tilde{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}) \quad \text{für alle } \mathfrak{D}, \tilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{H}(R, S) \text{ und } \mathfrak{L} \in \mathcal{L}(R, S)$$

*gilt. Außerdem ist das Produkt zweier Elemente aus $\mathcal{H}(R, S)$ wieder in $\mathcal{H}(R, S)$ enthalten. Es folgt, dass $\mathcal{H}(R, S)$ die Struktur einer assoziativen \mathbb{Z} -Algebra mit Einselement $R = R e_S R$ trägt. Diese nennen wir ab sofort die **Hecke-Algebra** des Hecke-Paares (R, S) .*

Beweis. Das Produkt zweier R -Doppelnebenklassen $RsR = \bigsqcup Rs_j$ und $RtR = \bigsqcup Rt_k$ wird durch die Formel

$$(RsR)(RtR) = \sum_{j,k} Rs_j t_k$$

gegeben. Die Assoziativität ist nun klar. Rechtsmultiplikation mit einem Element $r \in R$ permutiert nur die R -Linksnebenklassen Rt_k , das Produkt bleibt also invariant und liegt somit in $\mathcal{L}(R, S)^R \cong \mathcal{H}(R, S)$ wie behauptet. \square

Wir wollen das Produkt in der Hecke-Algebra noch ein wenig besser kennenlernen:

Proposition 4.6. *Sei (R, S) ein Hecke-Paar. Das Produkt zweier R -Doppelnebenklassen $RsR = \bigsqcup Rs_j$ und $RtR = \bigsqcup Rt_k$ wird durch die Formel*

$$(RsR)(RtR) = \sum a_u RuR$$

gegeben. Dabei durchläuft u ein Vertretersystem derjenigen R -Doppelnebenklassen, die in $RsRtR$ enthalten sind, und es gilt

$$a_u = |\{(j, k) : Ru = Rs_j t_k\}|.$$

a_u hängt nicht von der Wahl der Vertreter s_j, t_k und u ab und ist von 0 verschieden, wenn RuR in $RsRtR$ enthalten ist.

Beweis. Mit den Überlegungen von (4.1) ist das trivial. \square

Bemerkung 4.7. *Man kann die Koeffizienten a_u des Produkts in Proposition 4.6 auch wie folgt beschreiben. Sei $\deg(u)$ die Anzahl aller in RuR enthaltenen Linksnebenklassen. Dann gilt*

$$\deg(u)a_u = |\{(j, k) \mid RuR = Rs_j t_k R\}|.$$

Definition 4.8. *Sei (R, S) ein Hecke-Paar. Ein **Antiautomorphismus** von (R, S) ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S, \\ s &\mapsto s'. \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

- $(s')' = s,$ (Involutorisizität)
- $(st)' = t's',$ (Antihomomorphie)
- $s \in R \implies s' \in R.$ (R-Abgeschlossenheit)

Ausgehend von einer R -Doppelnebenklasse $\mathfrak{D} = RsR = \bigsqcup Rs_j$ ist auch

$$\mathfrak{D}' := \{s \in S \mid s' \in \mathfrak{D}\} = Rs'R = \bigsqcup Rs'_j$$

wieder eine R -Doppelnebenklasse. Die so gegebene Zuordnung $\mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{D}'$ lässt sich \mathbb{Z} -linear zu einer Abbildung auf $\mathcal{H}(R, S)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist nicht zwangsläufig antihomomorph, aber es gilt

Proposition 4.9. Für ein Hecke-Paar (R, S) besitze jede R -Doppelnebenklasse RsR mit $s \in S$ ein simultanes Vertretersystem der R -Rechts- und R -Linksnebenklassen

$$RsR = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} Rs_j = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} s_j R.$$

Dann definiert jeder Antiautomorphismus $s \mapsto s'$ des Hecke-Paares (R, S) einen Antiautomorphismus auf $\mathcal{H}(R, S)$.

Beweis. Seien

$$\mathfrak{D} = RsR = \bigsqcup Rs_j = \bigsqcup s_j R \quad \text{und} \quad \tilde{\mathfrak{D}} = RtR = \bigsqcup Rt_k = \bigsqcup t_k R.$$

Dann gilt nach Bemerkung 4.7

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}} &= \sum a_u RuR & \text{mit } \deg(u)a_u &= |\{(j, k) : RuR = Rs_j t_k R\}|, \\ \tilde{\mathfrak{D}}'\mathfrak{D}' &= \left(\bigsqcup Rt'_k\right) \left(\bigsqcup Rs'_j\right) = \sum b_u RuR & \text{mit } \deg(u)b_u &= |\{(j, k) : RuR = Rt'_k s'_j R\}|. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mit $(Rs_j t_k R)' = Rt'_k s'_j R$ und $\deg(u') = \deg(u)$. \square

Bemerkung 4.10. Die Voraussetzung von Proposition 4.9 ist schon erfüllt, wenn für alle $s \in S$ die Anzahl der R -Rechts- und R -Linksnebenklassen in RsR übereinstimmt,

denn: Gelte $RsR = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} Rs_j = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} t_j R$. Die Behauptung ist offensichtlich gezeigt, wenn wir für jedes j ein u_j finden können mit

$$Rs_j = Ru_j \quad \text{und} \quad t_j R = u_j R.$$

Nach Voraussetzung ist $s_j \in RsR = Rt_j R$, also

$$s_j = rt_j \tilde{r} \quad \text{mit } r, \tilde{r} \in R.$$

Eine mögliche Wahl für u_j ist also $u_j := r^{-1}s_j = t_j \tilde{r}$. $\#$

Satz 4.11. Besitzt das Hecke-Paar (R, S) einen Antiautomorphismus $s \mapsto s'$ mit der Eigenschaft

$$RsR = Rs'R \quad \text{für alle } s \in S,$$

so ist die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(R, S)$ kommutativ.

Beweis. Besitzt der Antiautomorphismus die geforderte Eigenschaft, so ist er die Identität auf $\mathcal{H}(R, S)$. Insbesondere stimmt die Anzahl der R -Rechts- und R -Linksnebenklassen überein, so dass wir nach Bemerkung 4.10 Proposition 4.9 anwenden können. Es gilt dann

$$\mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}})' = \tilde{\mathfrak{D}}'\mathfrak{D}' = \tilde{\mathfrak{D}}\mathfrak{D}$$

und also der Satz. \square

Beispiel 4.12. Nach Beispiel 4.4 ist $(R, S) = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$ ein Hecke-Paar; es lässt sich also jede Doppelnebenklasse als disjunkte Vereinigung endlich vieler Linksnebenklassen schreiben. Die zugehörige Hecke-Algebra

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$$

ist kommutativ,

denn: Offensichtlich ist hier das Transponieren ein Antiautomorphismus. Nach dem Elementarteilersatz gibt es zu einer beliebigen Matrix $M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ Matrizen $U, \tilde{U} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ und eindeutig bestimmte Elementarteiler $e_1, e_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $e_1 \mid e_2$ und

$$UM\tilde{U} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Hat M positive Determinante, so können wir dabei ohne Einschränkung $U, \tilde{U} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$ annehmen. Durch Transponieren der Gleichung ergibt sich

$${}^t\tilde{U} {}^tM {}^tU = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$$

und somit die Gleichheit der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklassen

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) {}^tM\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Diese Überlegung gilt offensichtlich auch für ein beliebiges $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$, so dass tatsächlich die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$ kommutativ ist. #

4.2 Die Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe

Wir bestimmen in diesem Abschnitt die Struktur der Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe.

Lemma 4.13. Gilt für $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ eine der Bedingungen

- (a) $N = r \cdot I_2$ mit $r \in \mathbb{Q}$,
- (b) $M, N \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ mit $\mathrm{ggT}(\det(M), \det(N)) = 1$,

so gilt in $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$

$$(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot MN \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Beweis. In Fall (a) ist die Behauptung klar, da N dann mit beliebigen Matrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ kommutiert.

In Fall (b) seien für $X \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ die Elementarteiler mit $e_1^{(X)}, e_2^{(X)}$ bezeichnet. Dabei gilt nach Konstruktion stets

$$\begin{aligned} e_1^{(X)} &= \mathrm{ggT}\{\text{Einträge von } X\}, \\ e_2^{(X)} &= \frac{\det(X)}{e_1^{(X)}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Behauptung in diesem Fall ist dann äquivalent zur Gültigkeit der Identitäten

$$e_1^{(M)} \cdot e_1^{(N)} = e_1^{(MUN)} \quad \text{und} \quad e_2^{(M)} \cdot e_2^{(N)} = e_2^{(MUN)} \quad \text{für alle } U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Nach dem bereits bewiesenen Fall (a) dürfen wir die Matrix M durch $(e_1^{(M)})^{-1} \cdot M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ und die Matrix N durch $(e_1^{(N)})^{-1} \cdot N \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ ersetzen. Wegen

$$\det(M) \cdot \det(N) = \det(M) \cdot \det(U) \cdot \det(N) = \det(MUN)$$

genügt es daher, unter diesen Voraussetzungen

$$e_1^{(MUN)} = 1 \tag{4.5}$$

zu zeigen. Schreiben wir

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

so gilt

$$MUN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \det(N)b \\ \det(M)c & \det(M)\det(N)d \end{pmatrix}.$$

Jeder gemeinsame Primteiler p der Einträge dieser Matrix erfüllt insbesondere

$$p \mid a, \quad p \mid \det(N)b \quad \text{und} \quad p \mid \det(M)c.$$

Wegen $\det(U) = 1$ gilt aber

$$p \nmid b \quad \text{und} \quad p \nmid c$$

und also

$$p \mid \det(N) \quad \text{und} \quad p \mid \det(M).$$

Das steht im Widerspruch zur Teilerfremdheit von $\det(M)$ und $\det(N)$; einen solchen gemeinsamen Primteiler der Einträge von MUN kann es also nicht geben. Insgesamt haben wir (4.5) und somit Fall (b) des Lemmas gezeigt. \square

Bemerkung 4.14. Schreiben wir in der Situation von Teil (b) von Lemma 4.13

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j,$$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_i \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i,$$

so gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot MN \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{ij} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i,$$

denn: Nach Teil (b) von Lemma 4.13 gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot MN \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \\ &= \left(\bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \right) \cdot \left(\bigsqcup_i \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i \right). \end{aligned}$$

Für ein beliebiges aber festes i ist nun

$$\begin{aligned} \left(\bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \right) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i) &= \bigcup_j (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot N_i \\ &= \bigcup_j (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot N_i \\ &= (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot N_i \\ &= \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, dass die jeweiligen Mengen auf der rechten Seite für verschiedene Werte von i disjunkt sind. Sei dafür $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$M_j N_i = U M_{\tilde{j}} N_{\tilde{i}} \quad \text{für geeignete } j, \tilde{j}, i, \tilde{i}.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$N_i (N_{\tilde{i}})^{-1} = (M_j)^{-1} U M_{\tilde{j}}.$$

Die Nenner der Einträge auf der linken Seite sind Teiler von $|\det(N_{\tilde{i}})| = |\det(N)|$, die auf der rechten Seite Teiler von $|\det(M_j)| = |\det(M)|$. Wegen der Teilerfremdheit von $\det(M)$ und $\det(N)$ sind also alle Einträge ganze Zahlen und somit $j = \tilde{j}$ und $i = \tilde{i}$. #

Wir nehmen Teil (a) von Lemma 4.13 zum Anlass, nur noch Doppelnebenklassen ganzzahliger Matrizen zu betrachten, also

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) \quad \text{mit } \mathbb{M} := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \cap \mathbb{Z}^{2 \times 2} = \{M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det(M) > 0\}.$$

Hierbei ist offensichtlich, dass $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ in Analogie zu Beispiel 4.4 ein Hecke-Paar ist. In Satz 4.16 werden wir Teil (b) von Lemma 4.13 benutzen, um uns das Studium der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ durch eine geeignete Zerlegung zu erleichtern. Wir führen zunächst die passende Notation ein:

Definition 4.15. Für jede Primzahl p setzen wir

$$\mathbb{M}_p := \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathbb{M}^{p^r}.$$

Offensichtlich ist dann auch $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$ in Analogie zu Beispiel 4.4 ein Hecke-Paar. Die zugehörige Hecke-Algebra

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$$

heißt die p -primäre Komponente der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$.

Satz 4.16. Die Hecke-Algebra des Paares $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ ist das Tensorprodukt⁴⁹

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) = \bigotimes_{p \text{ prim}} \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$$

ihrer p -primären Komponenten.

Beweis. Wir können für die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ und für jede ihrer p -Komponenten $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$ die jeweilig passenden $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklassen als Basis wählen. Jede Doppelnebenklasse $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M \in \mathbb{M}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen eindeutig bestimmten Vertreter der Form

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } e_1, e_2 \in \mathbb{N}, e_1 e_2 = n, e_1 \mid e_2.$$

Jede solche Matrix lässt sich eindeutig als Produkt von ebensolchen Matrizen schreiben, deren Einträge jeweils nur Potenzen einer (jeweils nur einmal auftretenden) festen Primzahl sind. Der Satz folgt daher mit Teil (b) von Lemma 4.13. \square

Offenbar genügt es also zum Studium der Hecke-Algebra die einzelnen p -Komponenten zu betrachten. Bevor wir dies tun, führen wir Kurzschreibweisen für bestimmte Elemente der Hecke-Algebra ein, nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(a, d) &:= \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) && \text{für } a, d \in \mathbb{N}, \\ \mathfrak{D}(n) &:= \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^n / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) && \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wie wir im Beweis von Beispiel 4.12 eingesehen haben, beschreibt dabei die erste Zeile nach dem Elementarteilersatz eine ganz allgemeine Doppelnebenklasse. In dieser Sprache lassen sich nun einige unserer bisherigen Ergebnisse neu formulieren:

Lemma 4.17. Für alle $a, d, n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Aussagen:

$$(a) \quad \mathfrak{D}(n) = \sum_{\substack{ad=n \text{ mit } a \mid d \\ a, d > 0}} \mathfrak{D}(a, d).$$

$$(b) \quad \mathfrak{D}(a, d) \mathfrak{D}(n, n) = \mathfrak{D}(an, dn).$$

Beweis. Behauptung (a) folgt unmittelbar aus dem Elementarteilersatz und Behauptung (b) ist eine Umformulierung von Teil (a) von Lemma 4.13. \square

⁴⁹Das Tensorprodukt einer gegebenen Menge von \mathbb{Z} -Moduln $\{M_p \mid p \text{ prim}\}$ mit jeweils zugehörigen Basen B_p kann als der \mathbb{Z} -Modul mit Basis

$$\bigoplus_{p \text{ prim}} B_p = \bigcup_{\substack{I \text{ endliche Menge} \\ \text{von Primzahlen}}} \left(\prod_{p \in I} B_p \right)$$

interpretiert werden, vgl. Satz 13.3 aus der Algebra.



Wir wollen nun die Struktur von $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$ untersuchen. Wie wir bereits im Beweis von Satz 4.16 eingesehen haben, ist dort nach dem Elementarteilersatz jede $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklasse von der Gestalt

$$\mathfrak{D}(p^{k_1}, p^{k_2}) \quad \text{mit } 0 \leq k_1 \leq k_2. \quad (4.6)$$

Für diese gelten die folgenden Rechenregeln:

Lemma 4.18. Für eine beliebige Primzahl p gilt:

- (a) $\mathfrak{D}(1, p) = \mathfrak{D}(p) = \mathbb{M}^p$.
- (b) $\mathfrak{D}(1, p^r) = \mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2})$ für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.
- (c) $\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) = \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1})$ für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.
- (d) $\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(1, p^r) = \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(1, p^{r-1})$ für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.
- (e) $\mathfrak{D}(p^r)\mathfrak{D}(p^s) = \sum_{i=0}^{\min\{r,s\}} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i})$ für alle $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Beweis. Behauptung (a) ist ein Spezialfall von Teil (a) von Lemma 4.17.

Behauptung (b) lässt sich elementar nachweisen; für p prim und $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2}) &= \sum_{\substack{ad=p^r \text{ mit } a|d \\ a, d > 0}} \mathfrak{D}(a, d) - \mathfrak{D}(p, p) \cdot \sum_{\substack{a\tilde{d}=p^{r-2} \text{ mit } a|\tilde{d} \\ \tilde{a}, \tilde{d} > 0}} \mathfrak{D}(\tilde{a}, \tilde{d}) \\ &\stackrel{4.17(b)}{=} \sum_{\alpha+\delta=r \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq \delta} \mathfrak{D}(p^\alpha, p^\delta) - \sum_{\tilde{\alpha}+\tilde{\delta}=r-2 \text{ mit } 0 \leq \tilde{\alpha} \leq \tilde{\delta}} \mathfrak{D}(p^{\tilde{\alpha}+1}, p^{\tilde{\delta}+1}) \\ &= \mathfrak{D}(1, p^r). \end{aligned}$$

Für Behauptung (c) stellen wir zunächst $\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r)$ als Linearkombination

$$\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^{p^{r+1}} / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} a_M \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \quad \text{mit } a_M \in \mathbb{Z}$$

von geeigneten Doppelnebenklassen dar. Nach Aussage (a) und Lemma 4.3 ist ein Vertretersystem von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Linksnebenklassen in $\mathfrak{D}(p)$ gegeben durch die Matrizen

$$M_j := \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad \text{mit } j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \quad \text{und} \quad M_p := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für ein $M \in \mathbb{M}^{p^{r+1}}$, das in der Notation von (4.4) die Teilbarkeitsbedingung $p \mid e_1^{(M)}$ erfüllt, führt die Ganzzahligkeit sämtlicher pM_j^{-1} zu

$$MM_j^{-1} \in \mathbb{M}^{p^r} \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, p\},$$

also zu $a_M = p + 1$. Es gibt nur eine Doppelnebenklasse $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in $\mathbb{M}^{p^{r+1}}$ mit $p \nmid e_1^{(M)}$ und für diese ist

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{r+1} \end{pmatrix}$$

ein möglicher Vertreter. Für diesen ist

$$MM_j^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{j}{p} \\ 0 & p^r \end{pmatrix} & \text{für } j < p, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & p^{r+1} \end{pmatrix} & \text{für } j = p \end{cases}$$

ganzzahlig genau für $j = 0$; es gilt hier also $a_M = 1$. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) &= \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + (p+1) \cdot \sum_{\substack{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^{p^{r+1}} / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ p \nmid e_1^{(M)}}} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &\stackrel{4.17(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + (p+1)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) \\ &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}). \end{aligned}$$

Behauptung (d) folgt aus dem bisher Gezeigten. Im Fall $r = 2$ gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(1, p^2) &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(p)(\mathfrak{D}(p^2) - \mathfrak{D}(p, p)) \\ &= \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^2) - \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p) \\ &\stackrel{(c)}{=} \mathfrak{D}(p^3) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p) - \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p) \\ &\stackrel{4.12}{=} \mathfrak{D}(p^3) + (p-1)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p) \\ &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^3) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p) \\ &\stackrel{(a)}{=} \mathfrak{D}(1, p^3) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(1, p) \end{aligned}$$

und im Fall $r \geq 3$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(1, p^r) &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(p)(\mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2})) \\ &= \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2}) \\ &\stackrel{4.12(c)}{=} \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - \mathfrak{D}(p, p)(\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^{r-2})) \\ &\stackrel{(c)}{=} \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - \mathfrak{D}(p, p)(\mathfrak{D}(p^{r-1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-3})) \\ &= \mathfrak{D}(p^{r+1}) + (p-1)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - p\mathfrak{D}(p, p)^2\mathfrak{D}(p^{r-3}) \\ &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - p\mathfrak{D}(p, p)^2\mathfrak{D}(p^{r-3}) \\ &= \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)(\mathfrak{D}(p^{r-1}) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-3})) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(1, p^{r-1}).$$

Behauptung (e) zeigen wir über eine Induktion nach r , wobei der Fall $r = 0$ trivial ist und der Fall $r = 1$ durch Aussage (c) gegeben ist. Sei also nun $2 \leq r \leq s$ ⁵⁰ und sei als Induktionsvoraussetzung (IV) die Behauptung für $r - 1$ und $r - 2$ bereits gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(p^r)\mathfrak{D}(p^s) &\stackrel{(c)}{=} (\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2}))\mathfrak{D}(p^s) \\ &\stackrel{(IV)}{=} \sum_{i=0}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{(r-1)+s-2i}) - p\mathfrak{D}(p, p) \cdot \sum_{i=0}^{r-2} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{(r-2)+s-2i}) \\ &\stackrel{4.12}{=} \sum_{i=0}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^{r+s-2i-1}) - \sum_{i=1}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i}) \\ &\stackrel{(c)}{=} \sum_{i=0}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i (\mathfrak{D}(p^{r+s-2i}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r+s-2i-2})) - \sum_{i=1}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i}) \\ &= \sum_{i=0}^r p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i}). \end{aligned}$$

□

Zusammen mit Teil (b) von Lemma 4.13 ergibt sich:

Korollar 4.19. $\mathfrak{D}(m)\mathfrak{D}(n) = \sum_{\substack{d|\text{ggT}(m,n) \\ d>0}} d\mathfrak{D}(d, d)\mathfrak{D}\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir zerlegen m und n in Primzahlpotenzen. Dazu betrachten wir für jede ganze Zahl a und jede Primzahl p die p -adische Bewertung, vgl. Definition 15.1 aus der Algebraischen Zahlentheorie,

$$v_p(a) := \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : p^k \mid a\}. \quad (4.7)$$

Es gilt dann

$$m = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(m)} \quad \text{und} \quad n = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(n)}$$

und nach Teil (b) von Lemma 4.13 und der in Beispiel 4.12 gezeigten Kommutativität der Hecke-Algebra also auch

$$\mathfrak{D}(m) = \prod_{p \text{ prim}} \mathfrak{D}(p^{v_p(m)}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}(n) = \prod_{p \text{ prim}} \mathfrak{D}(p^{v_p(n)}).$$

Es folgt

$$\mathfrak{D}(m)\mathfrak{D}(n) \stackrel{4.12}{=} \prod_{p \text{ prim}} \mathfrak{D}(p^{v_p(m)})\mathfrak{D}(p^{v_p(n)})$$

⁵⁰Wegen der in Beispiel 4.12 gezeigten Kommutativität der Hecke-Algebra ist das keine echte Einschränkung.

$$\stackrel{4.18(e)}{=} \prod_{p \text{ prim}} \sum_{i=0}^{\min\{v_p(m), v_p(n)\}} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{v_p(m)+v_p(n)-2i})$$

Nach Teil (a) von Lemma 4.13 gilt für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl i die Rechenregel

$$\mathfrak{D}(p, p)^i = \mathfrak{D}(p^i, p^i).$$

Wenden wir dies an, so erhalten wir

$$\mathfrak{D}(m)\mathfrak{D}(n) = \prod_{p \text{ prim}} \sum_{\substack{d | \text{ggT}(p^{v_p(m)}, p^{v_p(n)}) \\ d > 0}} d \mathfrak{D}(d, d) \mathfrak{D}\left(\frac{p^{v_p(m)} p^{v_p(n)}}{d^2}\right).$$

Das Korollar folgt durch Ausmultiplizieren und unter nochmaliger Anwendung von Teil (b) von Lemma 4.13. \square

Die Aussagen von Lemma 4.18 münden in folgenden

Satz 4.20. Für eine beliebige Primzahl p gilt

$$\mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p) = \mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)],$$

wobei $\mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)]$ ein freier \mathbb{Z} -Modul mit Basis $\{\mathfrak{D}(p, p)^m \mathfrak{D}(p)^n \mid m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ ⁵¹ ist (vgl. Definition 29.11 aus der Linearen Algebra).



Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(1, p^2) &\stackrel{4.18(b)}{=} \mathfrak{D}(p^2) - \mathfrak{D}(p, p) \\ &\stackrel{4.18(c)}{=} (\mathfrak{D}(p)^2 - p\mathfrak{D}(p, p)) - \mathfrak{D}(p, p) \\ &= \mathfrak{D}(p)^2 - (p+1)\mathfrak{D}(p, p). \end{aligned}$$

Mit Teil (d) von Lemma 4.18 folgern wir daraus induktiv

$$\mathfrak{D}(1, p^r) \in \mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)] \quad \text{für alle } r \in \mathbb{N}.$$

Mit Teil (b) von Lemma 4.17 und (4.6) erhalten wir, dass alle in $\mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$ enthaltenen Doppelnebenklassen bereits in $\mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)]$ liegen. Hieraus folgt sofort

$$\mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p) = \mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)].$$

Um zu zeigen, dass die Monome vom Typ $\mathfrak{D}(p, p)^m \mathfrak{D}(p)^n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Basis von $\mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)]$ bilden, genügt es nun, ihre \mathbb{Z} -lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Hierfür genügt es für $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ beliebig diejenigen dieser Monome zu untersuchen, die sich als \mathbb{Z} -Linearkombination von Doppelnebenklassen in \mathbb{M}^{p^r} schreiben lassen, die also $2m + n = r$ erfüllen. Die Anzahl solcher Monome ist $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$. Die \mathbb{Z} -lineare Unabhängigkeit folgt, da es in \mathbb{M}^{p^r} offensichtlich genau $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ Doppelnebenklassen gibt. \square

⁵¹Elemente von $\mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$ lassen sich also als Polynome in den Variablen $\mathfrak{D}(p, p)$ und $\mathfrak{D}(p)$ verstehen.

Korollar 4.21. *Die rationale Hecke-Algebra*

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) := \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) \otimes \mathbb{Q}$$

erfüllt

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) = \mathbb{Q}[\mathfrak{D}(n) : n \in \mathbb{N}].$$

Beweis. Nach Teil (c) von Lemma 4.18 gilt

$$\mathfrak{D}(p, p) = \frac{1}{p}(\mathfrak{D}(p)^2 - \mathfrak{D}(p^2))$$

und nach Satz 4.20 also

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p) \otimes \mathbb{Z}[p^{-1}] = \mathbb{Z}[p^{-1}][\mathfrak{D}(p)].$$

Das Korollar folgt nun mit Satz 4.16. □

4.3 Hecke-Operatoren

Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $M \in \mathbb{M}$ beliebig und sei

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j$$

eine disjunkte Zerlegung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Linksnebenklassen. Dann ist durch

$$T_M := T_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \begin{cases} M_k & \rightarrow M_k, \\ f & \mapsto f|_k T_M := \sum_{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) M \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_k N \end{cases}$$

eine lineare Abbildung vom Vektorraum M_k der holomorphen Modulformen von Gewicht k bezüglich der vollen Modulgruppe in sich selbst definiert,

denn: Da f nach Voraussetzung (V_1) erfüllt und $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ ein Hecke-Paar ist, ist die Summe in der Definition wohldefiniert und endlich. Nach Proposition 2.15 und wegen der Endlichkeit der Summe ist $f|_k T_M$ holomorph auf \mathbb{H} . Wegen

$$(f|_k T_M)|_k A = \sum_{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) M \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_k (NA) = \sum_{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) M \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_k N = f|_k T_M$$

für alle $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllt $f|_k T_M$ zudem (V_1) . Um zu zeigen, dass $f|_k T_M$ auch Axiom (V_2) erfüllt, genügt es nun, Axiom (V'_2) und also die Holomorphie in $z = i\infty$ nachzuweisen. Nach Lemma 4.3 können wir dafür in der Definition von T_M die Matrizen N ohne Einschränkung in der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $ad = \det(M)$, $d > 0$ und $b \in \{0, \dots, d-1\}$ wählen. Da f nach Voraussetzung (V_2) erfüllt, ist dann aber $f|_k T_M$ mit den (endlich vielen) Summandenfunktionen

$$(f|_k N)(z) = \left(f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) (z) = \left(\frac{a}{d} \right)^{\frac{k}{2}} \cdot f\left(\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \right)$$

offensichtlich holomorph in $z = i\infty$. Die Linearität von T_M ist trivial. #

In der Sprache der Funktionalanalysis nennt man eine \mathbb{C} -lineare Abbildung zwischen zwei \mathbb{C} -Vektorräumen auch einen **linearen Operator**; speziell nennt man T_M auch den **Hecke-Operator** zur Doppelnebenklasse $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Durch \mathbb{Q} -lineares Fortsetzen erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{Z}$ und jedes $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, den **Hecke-Operator**

$$T_{\mathfrak{D}} : M_k \rightarrow M_k$$

zu \mathfrak{D} . In Hinsicht auf Korollar 4.21 interessieren wir uns besonders zu jedem $n \in \mathbb{N}$ für den **(normierten) n -ten Hecke-Operator**

$$T_n : \begin{cases} M_k & \rightarrow M_k \\ f & \mapsto (f|_k T_n)(z) := n^{\frac{k}{2}-1} \cdot (f|_k T_{\mathfrak{D}(n)})(z). \end{cases} \quad (4.8)$$

Wir studieren zunächst die Wirkung des n -ten Hecke-Operators in einem Beispiel:

Beispiel 4.22. Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 4$ gerade. Dann gilt

$$P_{m,k}|_k T_n = \sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} P_{\frac{mn}{d^2},k},$$

denn: Es gilt

$$\begin{aligned} & (P_{m,k}|_k T_n)(z) \\ & \stackrel{(4.8)}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{M}^n} (P_{m,k}|_k N)(z) \\ & \stackrel{3.16}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{\substack{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{M}^n \\ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}} (e^{2\pi i m \cdot} |_k MN)(z) \\ & = n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathbb{M}^n} (e^{2\pi i m \cdot} |_k M)(z). \end{aligned}$$

Nach Übungsaufgabe 4.4 ist die Menge

$$\left\{ NM \mid N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad = n, d > 0, b \bmod(d) \text{ und} \right. \\ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mit } (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2, \text{ so dass } (\gamma > 0, \mathrm{ggT}(\gamma, \delta) = 1) \text{ oder } (\gamma = 0, \delta = 1) \text{ gilt,} \\ \left. (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \text{ fix mit } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}$$

ein Vertretersystem von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ in \mathbb{M}^n . Somit können wir die Matrizen im Exponenten im Prinzip vertauschen und es folgt

$$(P_{m,k}|_k T_n)(z)$$

$$\begin{aligned}
&= n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod d}} e^{2\pi i m \cdot} \Big|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) \Big|_k M \right) (z) \\
&= n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d>0 \\ b \bmod d}} n^{\frac{k}{2}} d^{-k} e^{2\pi i m (\frac{n}{d^2} \cdot + \frac{b}{d})} \right) \Big|_k M \right) (z).
\end{aligned}$$

Dies lässt sich noch vereinfachen, denn es gilt

$$\sum_{b \bmod d} \left(e^{2\pi i \frac{m}{d}} \right)^b = \begin{cases} \sum_{b \bmod d} 1 = d & \text{für } d \mid m, \\ \frac{1 - e^{2\pi i m}}{1 - e^{2\pi i \frac{m}{d}}} = 0 & \text{für } d \nmid m. \end{cases} \quad (4.9)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
&(P_{m,k} \Big|_k T_n)(z) \\
&= \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left(\frac{n}{d} \right)^{k-1} e^{2\pi i m (\frac{n}{d^2} \cdot)} \right) \Big|_k M \right) (z) \\
&= \sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left(\frac{n}{d} \right)^{k-1} \cdot \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} e^{2\pi i \frac{mn}{d^2} \cdot} \Big|_k M \right) (z)
\end{aligned}$$

und mit Definition 3.16 somit die Behauptung. #

Ganz allgemein gilt:

Satz 4.23. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), M) &\rightarrow \mathrm{End}(M_k), \\
\mathfrak{D} &\mapsto (f \mapsto f \Big|_k T_{\mathfrak{D}})
\end{aligned}$$

ein \mathbb{Q} -Algebrenhomomorphismus, so dass sich die in Abschnitt 4.2 gezeigten Rechenregeln für Elemente der Hecke-Algebra auf die Hecke-Operatoren übertragen. Dabei bildet jeder Hecke-Operator Spitzenformen auf Spitzenformen ab. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) q^m \in M_k$ gilt speziell

$$(f \Big|_k T_n)(z) := (n^{\frac{k}{2}-1} \cdot f \Big|_k T_{\mathfrak{D}(n)})(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) \right) q^m.$$

Beweis. Schreiben wir für zwei Doppelnebenklassen

$$\mathfrak{D}_M := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j,$$

$$\mathfrak{D}_N := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_i \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i,$$

so gilt wie in Bemerkung 4.14

$$\begin{aligned} \iota(\mathfrak{D}_M \mathfrak{D}_N) &= \iota\left(\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\right) \cdot \left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\right)\right) \\ &= \sum_{j,i} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i, \end{aligned}$$

wobei nicht ausgeschlossen ist, dass verschiedene Summanden in der Summe rechts übereinstimmen. Es folgt für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $f \in M_k$

$$f|_k T_{\mathfrak{D}_M \mathfrak{D}_N} = \sum_{j,i} f|_k M_j N_i = \sum_i \left(\sum_j f|_k M_j\right)|_k N_i = (f|_k T_{\mathfrak{D}_M})|_k T_{\mathfrak{D}_N}$$

und in linearer Fortsetzung, dass die Abbildung aus dem Satz ein \mathbb{Q} -Algebrenhomomorphismus ist.

Für alle $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ und alle $f \in M_k$ gilt speziell

$$\begin{aligned} (f|_k T_n)(z) &\stackrel{(4.8)}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{M}^n} (f|_k N)(z) \\ &\stackrel{4.3}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod(d)}} \left(f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)(z) \\ &= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod(d)}} d^{-k} \cdot f\left(\frac{az+b}{d}\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Setzen wir $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) q^m \in M_k$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (f|_k T_n)(z) &= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \sum_{b \bmod(d)} d^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) e^{2\pi i m \frac{az+b}{d}} \\ &= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) e^{2\pi i \frac{am}{d} z} \sum_{b \bmod(d)} \left(e^{2\pi i \frac{m}{d}}\right)^b, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die absolute Konvergenz der Fourier-Entwicklung von f ausgenutzt haben. Die innerste Summe auf der rechten Seite lässt sich noch mit (4.9) vereinfachen; dann gilt:

$$\begin{aligned} (f|_k T_n)(z) &= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^{1-k} \cdot \sum_{\substack{m=0 \\ d|m}}^{\infty} a_m(f) e^{2\pi i \frac{am}{d} z} \\ &\stackrel{m \rightarrow md}{=} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} a^{k-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_{md}(f) e^{2\pi i am z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{am \rightarrow m}{=} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \sum_{\substack{m=0 \\ a|m}}^{\infty} a^{k-1} \cdot a_{\frac{mn}{a^2}}(f) e^{2\pi imz} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{a|\text{ggT}(m,n) \\ a>0}} a^{k-1} \cdot a_{\frac{mn}{a^2}}(f) \right) q^m.
\end{aligned}$$

Hiermit ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die behauptete Fourier-Entwicklung von $f|_k T_n$ nachgewiesen. Dass Hecke-Operatoren Spitzenformen auf Spitzenformen abbilden, ergibt sich nun aus dem Spezialfall

$$a_0(f|_k T_n) = \sigma_{k-1}(n) a_0(f) = 0$$

und Korollar 4.21. □

Wie Petersson im Jahr 1939 können wir nun die Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren bezüglich des Petersson-Skalarprodukts nachweisen:

Satz 4.24. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist die Einschränkung eines beliebigen Hecke-Operators $T_{\mathfrak{D}}$ mit $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ auf S_k selbstadjungiert bezüglich des Petersson-Skalarprodukts; es gilt also

$$\langle f|_k T_{\mathfrak{D}} | g \rangle = \langle f | g|_k T_{\mathfrak{D}} \rangle \quad \text{für alle } f, g \in S_k.$$

Beweis. Nach Korollar 4.21 genügt es, den Satz für die n -ten Hecke-Operatoren zu beweisen. Normalerweise untersucht man dafür zunächst den Spezialfall $n = p$ prim, indem man das Skalarprodukt über einer geeigneten Kongruenzuntergruppe auswertet, und nutzt dann den durch Korollar 4.19 induzierten Zusammenhang zwischen den Hecke-Operatoren aus, um iterativ die allgemeine Behauptung zu beweisen. Ein alternativer Beweis ergibt sich jedoch unmittelbar aus den uns bereits bekannten Resultaten zu Poincaré-Reihen:

Nach Korollar 3.20 genügt es sogar,

$$\langle f|_k T_n | P_{m,k} \rangle = \langle f | P_{m,k}|_k T_n \rangle \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

zu zeigen. Tatsächlich gilt für die linke Seite der Behauptung

$$\begin{aligned}
\langle f|_k T_n | P_{m,k} \rangle &\stackrel{3.19}{=} \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} a_m(f|_k T_n) \\
&\stackrel{4.23}{=} \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{\substack{d|\text{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f)
\end{aligned}$$

und für die rechte Seite

$$\langle f | P_{m,k}|_k T_n \rangle \stackrel{4.22}{=} \sum_{\substack{d|\text{ggT}(m,n) \\ d>0}} \binom{n}{d}^{k-1} \langle f | P_{\frac{mn}{d^2},k} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{3.19}{=} \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \frac{(k-2)!}{(4\pi \frac{mn}{d^2})^{k-1}} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) \\
&= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f).
\end{aligned}$$

□

4.4 Hecke-Eigenformen

Definition 4.25. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine Modulform $0 \neq f \in M_k$ heißt eine (*simultane*) **Hecke-Eigenform**, wenn es für jeden Hecke-Operator $T_{\mathfrak{D}}$ mit $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ ein $\lambda_{\mathfrak{D}}(f) \in \mathbb{C}$ mit

$$T_{\mathfrak{D}}f = \lambda_{\mathfrak{D}}(f)f$$

gibt.

Nach Korollar 4.21 und Satz 4.23 genügt es, die definierende Eigenschaft einer Hecke-Eigenform für alle $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ nachzuweisen. Für eine Hecke-Eigenform $f \in M_k$ und ein $n \in \mathbb{N}$ heißt der Eigenwert

$$\lambda_n(f) := n^{\frac{k}{2}-1} \lambda_{\mathfrak{D}(n)}(f)$$

zum n -ten Hecke-Operator der *n -te Hecke-Eigenwert* von f . Aus Satz 4.23 folgt durch Koeffizientenvergleich zwischen den Fourier-Entwicklungen von f und $f|_k T_n$ sofort:

Lemma 4.26. Für alle $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ und jede Hecke-Eigenform $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$ mit Hecke-Eigenwerten $\lambda_n(f)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_n(f)a_m(f) &= \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) && \text{für allgemeines } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\
\lambda_n(f)a_1(f) &= a_n(f) && \text{für } m = 1.
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt die sogenannte **Multiplizität-Eins-Eigenschaft**: Die Dimension des (simultanen) Eigenraums der Hecke-Operatoren T_n mit $n \in \mathbb{N}$ zu den jeweiligen Eigenwerten $\lambda_n(f)$ ist genau 1.

Lemma 4.26 bedingt unmittelbar, dass sich die in Korollar 4.19 hergeleitete Rechenregel in der Hecke-Algebra im Wesentlichen auf die Fourier-Koeffizienten einer gegebenen Hecke-Eigenform überträgt. Genauer gilt:

Satz 4.27. Für $k \in \mathbb{Z}$ und ein nichtkonstantes $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist eine Hecke-Eigenform.

(ii) Es ist $a_1(f) \neq 0$ und es gilt

$$a_m(f)a_n(f) = a_1(f) \cdot \sum_{d|\text{ggT}(m,n)} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \quad (4.11)$$

mit den Spezialfällen

$$\begin{aligned} a_m(f)a_n(f) &= a_1(f) \cdot a_{mn}(f) && \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(m, n) = 1, \\ a_p(f)a_{p^r}(f) &= a_1(f) \cdot (a_{p^{r+1}}(f) + p^{k-1}a_{p^{r-1}}(f)) && \text{für } p \text{ prim und } r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweis. Gilt Aussage (i), so auch (4.11) nach Lemma 4.26. Wäre nun $a_1(f) = 0$, so folgte wieder mit dem Lemma

$$a_n(f) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

und also $f \in \mathbb{C}$, was im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen steht. Es gilt daher $a_1(f) \neq 0$ und somit insgesamt Aussage (ii).

Gelte umgekehrt Aussage (ii). Summieren wir Gleichung (4.11) für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ über alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ auf, so folgt mit der aus Satz 4.23 bekannten Fourier-Entwicklung von $f|_k T_n$ die Identität

$$a_1(f) \cdot f|_k T_n = a_n(f) \cdot f.$$

Dividieren wir diese durch $a_1(f) \neq 0$, so erhalten wir, dass f eine Hecke-Eigenform mit Hecke-Eigenwerten

$$\lambda_n(f) = \frac{a_n(f)}{a_1(f)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (4.12)$$

ist, also Aussage (i). □

Beispiel 4.28. Für jedes gerade $k \geq 4$ ist die Eisenstein-Reihe $E_k \in M_k$ eine Hecke-Eigenform mit Hecke-Eigenwerten $\lambda_n(E_k) = \sigma_{k-1}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

denn: Wir zeigen die Behauptung zunächst für $n = p$ prim. Hier gilt für alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} a_m(E_k|_k T_p) &\stackrel{4.23}{=} \begin{cases} a_{pm}(E_k) & \text{für } p \nmid m, \\ a_{pm}(E_k) + p^{k-1}a_{\frac{m}{p}}(E_k) & \text{für } p \mid m \end{cases} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \begin{cases} -\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(pm) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot (\sigma_{k-1}(pm) + p^{k-1}\sigma_{k-1}(\frac{m}{p})) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit der (elementar nachweisbaren) schwachen Multiplikativität

$$\sigma_{k-1}(m)\sigma_{k-1}(n) = \sigma_{k-1}(mn) \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(m, n) = 1,$$

der $(k-1)$ -ten Teilersummenfunktion ergibt sich

$$a_m(E_k|_k T_p) \stackrel{(4.7)}{=} \begin{cases} -\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(p) \cdot \sigma_{k-1}(m) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot (\sigma_{k-1}(p^{v_p(m)+1}) + p^{k-1}\sigma_{k-1}(p^{v_p(m)-1})) \cdot \sigma_{k-1}(\frac{m}{p^{v_p(m)}}) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \sigma_{k-1}(p) \cdot \left(-\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m)\right) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot \left(\sum_{i=0}^{v_p(m)+1} p^{i(k-1)} + \sum_{i=1}^{v_p(m)} p^{i(k-1)}\right) \cdot \sigma_{k-1}\left(\frac{m}{p^{v_p(m)}}\right) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) \cdot 1 & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma_{k-1}(p) \cdot \left(-\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m)\right) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(p) \cdot \sigma_{k-1}(p^{v_p(m)}) \cdot \sigma_{k-1}\left(\frac{m}{p^{v_p(m)}}\right) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) \cdot 1 & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases} \\
&\stackrel{(3.2)}{=} \sigma_{k-1}(p) \cdot a_m(E_k).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$E_k|_k T_p = \sigma_{k-1}(p) \cdot E_k$$

und haben somit die Behauptung im Fall $n = p$ prim bewiesen. Mit Korollar 4.19 sieht man nun schnell ein, dass E_k dann auch für alle $n \in \mathbb{N}$ Eigenform des n -ten Hecke-Operators und nach Korollar 4.21 also Hecke-Eigenform ist. Der jeweilige n -te Hecke-Eigenwert ergibt sich aus der Formel für $a_0(E_k|_k T_n)$ in Satz 4.23. #

Umgekehrt gilt sogar: Jede (simultane) Hecke-Eigenform $f \in M_k$ mit $a_0(f) = 1$ ist bereits identisch mit der Eisenstein-Reihe E_k ,

denn: Wegen $a_0(f) = 1 \neq 0$ impliziert der Spezialfall $n = 0$ von (4.11) unmittelbar

$$\lambda_m(f) a_1(f) \stackrel{4.26}{=} a_m(f) = \sigma_{k-1}(m) a_1(f) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Nach Satz 4.27 gilt $a_1(f) \neq 0$ und somit

$$\lambda_m(f) = \sigma_{k-1}(m) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Die Behauptung folgt nun mit der Multiplizität-Eins-Eigenschaft 4.26 und der Normierung $a_0(f) = 1$. #

Beispiel 4.29. Die Diskriminante $\Delta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) q^m \in S_{12}$ ist eine Hecke-Eigenform mit Hecke-Eigenwerten $\lambda_n(\Delta) = \tau(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ihre Fourier-Koeffizienten genügen den Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\tau(m)\tau(n) &= \tau(mn) & \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(m, n) = 1, \\
\tau(p^r)\tau(p) &= \tau(p^{r+1}) + p^{11}\tau(p^{r-1}) & \text{für } p \text{ prim und } r \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

denn: Nach Satz 4.23 gilt $\Delta|_{12} T_n \in S_{12}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und nach der Dimensionsformel 3.11 und Teil (b) von Proposition 3.10 gilt $\dim_{\mathbb{C}} S_{12} = 1$. Folglich besitzt Δ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Hecke-Eigenwert $\lambda_n(\Delta) \in \mathbb{C}$ und ist daher eine Hecke-Eigenform. Nach Proposition 3.9 gilt zudem $\tau(1) = 1$ und nach Lemma 4.26 also $\lambda_n(\Delta) = \tau(n)$. Die Rechenregeln ergeben sich unmittelbar aus Satz 4.27. #

Nach Satz 4.27 gilt für eine nichtkonstante Hecke-Eigenform $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) q^m \in M_k$ stets $a_1(f) \neq 0$, so dass wir statt f auch $a_1(f)^{-1} \cdot f$ betrachten können. Für diese Funktion gelten analog zur Diskriminante in Beispiel 4.29 noch etwas schönere Rechenregeln für die Fourier-Koeffizienten. Wir führen daher die folgende Sprechweise ein:

Definition 4.30. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine Hecke-Eigenform $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$ mit $a_1(f) = 1$ heißt eine **normierte Hecke-Eigenform**.⁵²

Aus der in Satz 4.24 gezeigten Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren bezüglich des Petersson-Skalarprodukts lassen sich starke Eigenschaften cuspidaler normierter Hecke-Eigenformen herleiten:

Proposition 4.31. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Für jede Hecke-Eigenform $f \in S_k$ und jeden Hecke-Operator $T_{\mathfrak{D}}$ mit $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ ist der Hecke-Eigenwert $\lambda_{\mathfrak{D}}(f)$ eine reelle Zahl.
- (b) Jede normierte Hecke-Eigenform $f \in S_k$ hat reelle Fourier-Koeffizienten und liegt somit im \mathbb{R} -Vektorraum der **reellen Spitzenformen**

$$S_k^{\mathbb{R}} := \{f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f)q^m \in S_k \mid a_m(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } m \geq 1\}.$$

- (c) Für je zwei normierte Hecke-Eigenformen $f, g \in S_k$ gilt

$$f \neq g \iff \langle f \mid g \rangle = 0.$$

Beweis. Sei $f \in S_k$ eine Hecke-Eigenform und sei $T_{\mathfrak{D}}$ mit $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$. Da das Petersson-Skalarprodukt auf S_k eine hermitesche Bilinearform ist, gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathfrak{D}}(f) \cdot \langle f \mid f \rangle &= \langle \lambda_{\mathfrak{D}}(f) \cdot f \mid f \rangle = \langle f|_k T_{\mathfrak{D}} \mid f \rangle \\ &\stackrel{4.24}{=} \langle f \mid f|_k T_{\mathfrak{D}} \rangle = \langle f \mid \lambda_{\mathfrak{D}}(f) \cdot f \rangle = \overline{\lambda_{\mathfrak{D}}(f)} \cdot \langle f \mid f \rangle. \end{aligned}$$

Mit der positiven Definitheit des Petersson-Skalarprodukts und $f \neq 0$ folgt nun Behauptung (a).

Dies impliziert sofort Behauptung (b), denn nach Definition 4.30 und (4.12) gilt für jede normierte Hecke-Eigenform $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f)q^m \in S_k$ die Identität

$$\lambda_n(f) = a_n(f) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Es verbleibt Behauptung (c) zu zeigen. Seien also $f, g \in S_k$ normierte Hecke-Eigenformen. Nach (4.13) gilt dann

$$f|_k T_n = a_n(f) \cdot f \quad \text{und} \quad g|_k T_n = a_n(g) \cdot g \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit

$$a_n(f) \cdot \langle f \mid g \rangle = \langle f|_k T_n \mid g \rangle \stackrel{4.24}{=} \langle f \mid g|_k T_n \rangle = \overline{a_n(g)} \cdot \langle f \mid g \rangle \stackrel{(b)}{=} a_n(g) \cdot \langle f \mid g \rangle.$$

Aus $\langle f \mid g \rangle \neq 0$ folgt somit $a_n(f) = a_n(g)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und also $f = g$. Behauptung (c) folgt, da umgekehrt $f = g$ wegen der positiven Definitheit des Petersson-Skalarprodukts unmittelbar $\langle f \mid g \rangle = \langle f \mid f \rangle > 0$ bedingt. \square

⁵²**Vorsicht:** Wegen $a_1(E_k) = -\frac{2k}{B_k} \neq 1$ sind die (normierten) Eisenstein-Reihen E_k keine normierten Hecke-Eigenformen, die jeweiligen Normierungsbegriffe unterscheiden sich also!

Die Orthogonalitätsaussage aus Teil (c) von Proposition 4.31 lässt sich zu folgendem Satz verschärfen:

Satz 4.32. *Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann besitzt S_k eine Orthogonalbasis aus Hecke-Eigenformen. Diese ist bis auf Permutation und Multiplikation mit Skalaren aus \mathbb{C}^\times eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Eindeutigkeitsaussage ist gerade Teil (c) von Proposition 4.31. Die Existenz einer Orthogonalbasis aus gemeinsamen Eigenformen folgt unmittelbar aus dem folgenden, allgemeinen Lemma 4.33 über selbstadjungierte Operatoren mit $V = S_k$ und $\{T(j)\}_{j \in J} = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Lemma 4.33. *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer HILBERT-Raum⁵³ mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ und sei $\{T(i)\}_{i \in I}$ eine Familie miteinander kommutierender selbstadjungierter Operatoren auf V . Dann besitzt V eine Orthogonalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren aller $T(i)$ mit $i \in I$.*

Beweis. Wegen $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ gilt auch $\dim_{\mathbb{R}} \text{End}_{\mathbb{C}}(V) < \infty$. Die Operatoren $T(i)$ mit $i \in I$ erzeugen daher einen endlichdimensionalen \mathbb{R} -Untervektorraum von $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$, so dass es ohne Einschränkung genügt, das Lemma für eine endliche Menge $\{T(1), \dots, T(r)\}$ von Operatoren zu zeigen.

In V gibt es einen gemeinsamen (nichttrivialen) Eigenvektor der $T(i)$ mit $i \in \{1, \dots, r\}$,

denn: Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach r . Da selbstadjungierte Operatoren normal sind, folgt die Behauptung für $r = 1$ aus dem **Spektralsatz für normale Endomorphismen** aus der Linearen Algebra. Das ist der Induktionsanfang. Sei also nun $r \geq 2$ und gelte die Behauptung für $r - 1$. Sei weiter λ ein Eigenwert von $T(1)$ mit zugehörigem Eigenraum

$$V_\lambda := \{v \in V \mid T(1)v = \lambda \cdot v\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $T(i)T(1) = T(1)T(i)$ für alle $i \in \{2, \dots, r\}$ und insbesondere

$$T(i)V_\lambda \subseteq V_\lambda \quad \text{für alle } i \in \{2, \dots, r\}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt nun V_λ einen gemeinsamen (nichttrivialen) Eigenvektor der $T(i)$ mit $i \in \{2, \dots, r\}$. Die Behauptung folgt, da dieser nach Definition von V_λ auch ein Eigenvektor von $T(1)$ ist. $\#$

Wir zeigen nun das Lemma per Induktion nach $\dim_{\mathbb{C}} V$. Für $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ ist die Aussage klar; sei also $\dim_{\mathbb{C}} V \geq 2$. Wir schreiben

$$V = \mathbb{C}v \oplus (\mathbb{C}v)^\perp \quad \text{für einen gemeinsamen Eigenvektor } v \text{ von } T(i) \text{ mit } i \in \{1, \dots, r\}.$$

Da die $T(i)$ selbstadjungiert sind und $\mathbb{C}v$ fixieren, lassen sie auch $(\mathbb{C}v)^\perp$ invariant. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $(\mathbb{C}v)^\perp$ bereits eine Orthogonalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren aller $T(i)$ mit $i \in \{1, \dots, r\}$. Hieraus folgt die Behauptung. \square

⁵³David Hilbert (1862-1943)



Korollar 4.34. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann besitzen sowohl S_k als auch $S_k^{\mathbb{R}}$ eine Zerlegung in eindimensionale Untervektorräume, die unter allen Hecke-Operatoren T_n mit $n \in \mathbb{N}$ invariant sind.

Beweis. Nach Satz 4.32 besitzt S_k eine Basis (f_0, \dots, f_r) aus normierten Hecke-Eigenformen. Da für diese die Hecke-Eigenwerte nach (4.13) durch die jeweiligen Fourier-Koeffizienten gegeben sind, haben keine zwei Formen aus dieser Basis dieselben Hecke-Eigenwerte. Die Zerlegung von S_k in seine Hecke-Eigenräume liefert also eine Zerlegung von S_k in eindimensionale Untervektorräume, die unter allen Hecke-Operatoren T_n mit $n \in \mathbb{N}$ invariant sind.

Dass wir so auch eine Hecke-invariante Zerlegung von $S_k^{\mathbb{R}}$ erhalten, folgt, wenn wir zeigen können, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der n -te Hecke-Operator T_n den Vektorraum $S_k^{\mathbb{R}}$ auf sich selbst abbildet. Dass zumindest für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $f \in S_k^{\mathbb{R}}$ auch $f|_k T_n$ in $S_k^{\mathbb{R}}$ enthalten ist, folgt sofort mit der Formel aus Satz 4.23. Wir zeigen nun, dass das Bild jedes Hecke-Operators der komplette Raum ist: Sei

$$f := \sum_{j=0}^r \lambda_j f_j \in S_k^{\mathbb{R}}$$

beliebig. Da nach Teil (a) von Proposition 4.31 für alle $j \in \{0, \dots, r\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Hecke-Eigenwerte $\lambda_n(f_j)$ reell sind, gilt dann auch

$$g := \sum_{j=0}^r \frac{\lambda_j}{\lambda_n(f_j)} f_j \in S_k^{\mathbb{R}}$$

und

$$g|_k T_n = \sum_{j=0}^r \frac{\lambda_j}{\lambda_n(f_j)} (f_j|_k T_n) = \sum_{j=0}^r \lambda_j f_j = f.$$

Das zeigt die Surjektivität von T_n und insgesamt also das Korollar. \square

4.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. Zeigen Sie, dass $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ kein Hecke-Paar ist.

Aufgabe 4.2. In der Herleitung von Satz 4.11 haben wir Hecke-Paare (R, S) studiert, in denen für alle $s \in S$ die Anzahl der R -Rechts- und R -Linksnebenklassen in RsR übereinstimmt. Zeigen Sie, dass diese Voraussetzung für

$$(R, S) = (\langle T \rangle, \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_{\infty}) = \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid ad \neq 0 \right\} \right)$$

nicht erfüllt ist.

Aufgabe 4.3. (a) Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten der Spitzenform

$$(E_6 \cdot \Delta)(z) = q - 528q^2 - 4284q^3 + O(q^4) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_{18}$$

die (schwache) Multiplikativitätseigenschaft

$$a_n a_m = a_{nm} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(n, m) = 1$$

erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass durch die Spitzenformen

$$\begin{aligned} f(z) &:= (E_6^2 \cdot \Delta)(z) = q - 1032q^2 + 245196q^3 - 22072640q^4 + O(q^5) \\ \tilde{f}(z) &:= \Delta^2(z) = q^2 - 48q^3 + 1080q^4 + O(q^5) \end{aligned}$$

eine Basis des \mathbb{C} -Vektorraums S_{24} gegeben ist. Bestimmen Sie bezüglich dieser Basis die Darstellungsmatrix des Hecke-Operators T_2 auf S_{24} .

Aufgabe 4.4. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\begin{aligned} \{NM \mid N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad = n, d > 0, b \bmod (d) \text{ und} \\ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mit } (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2, \text{ so dass } (\gamma > 0, \text{ggT}(\gamma, \delta) = 1) \text{ oder } (\gamma = 0, \delta = 1) \text{ gilt,} \\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \text{ fix mit } \alpha\delta - \beta\gamma = 1\} \end{aligned}$$

ein Vertretersystem von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ in \mathbb{M}^n ist.

Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis von Lemma 4.3.

Aufgabe 4.5. Sei $0 \neq f \in S_k$ eine Hecke-Eigenform. Zeigen Sie, dass dann in Präzisierung der Hecke-Abschätzung 2.38 für die Hecke-Eigenwerte die Abschätzung

$$|\lambda_n(f)| \leq n^{\frac{k}{2}} \sigma_{-1}(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, wobei $\sigma_{-1}(n) = \sum_{0 < d|n} \frac{1}{d}$ die (-1) -te Teilersummenfunktion bezeichnet.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $g(z) := \text{Im}(z)^{\frac{k}{2}} |f(z)|$ nach dem Beweis von Proposition 2.31 auf \mathbb{H} sein Maximum annimmt.

Aufgabe 4.6. Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann für alle Hecke-Eigenformen $f \in S_k$ der n -te Hecke-Eigenwert $\lambda_n(f)$ in einem (von f unabhängigen) Körper K_n mit

$$\mathbb{Q} \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad [K_n : \mathbb{Q}] \leq \dim S_k$$

liegt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Darstellungsmatrix des auf S_k eingeschränkten Hecke-Operators T_n bezüglich einer Miller-Basis von S_k rationale Koeffizienten hat.

Aufgabe 4.7. Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k$ eine normierte Hecke-Eigenform. Wir geben in dieser Aufgabe eine geometrische Beschreibung für die Folge von (reellen) Fourier-Koeffizienten $(a_{p^r}(f))_{r \in \mathbb{N}}$ mit p prim an und leiten daraus her, dass diese Folge sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Glieder enthält. Eine ausführlichere Version dieses Resultats wurde 2014 von KOHNEN⁵⁴ und MARTIN⁵⁵ veröffentlicht.

Zeigen Sie also für eine fest gegebene Primzahl p die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $\theta_p \in [0, \pi]$ mit

$$a_p(f) = 2p^{\frac{k-1}{2}} \cos \theta_p \quad \text{und} \quad a_p(f) \neq 2p^{\frac{k-1}{2}} \quad \text{für alle } \theta_p \notin \{0, \pi\}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die (nichttriviale) Abschätzung

$$|a_p(f)|^2 \leq 4p^{k-1}$$

benutzen, die DELIGNE⁵⁶ 1974 als Nebenprodukt seines Beweises des WEIL-Vermutungen⁵⁷ herleitete.

(b) Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{p^r}(f) \\ a_{p^{r-1}}(f) \end{pmatrix} = A^{r-1} \cdot \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } A := \begin{pmatrix} a_p(f) & -p^{k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Für $\theta_p \notin \{0, \pi\}$ gilt

$$\begin{pmatrix} a_{p^r}(f) \\ a_{p^{r-1}}(f) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{r+1} - \lambda_2^{r+1} \\ \lambda_1^r - \lambda_2^r \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_{1/2} := \frac{a_p(f) \pm \sqrt{a_p(f)^2 - 4p^{k-1}}}{2}.$$

Hinweis: Bringen Sie die Matrix A aus Teil (b) in Diagonalgestalt, um A^{r-1} besser berechnen zu können.

(d) Für $\theta_p \notin \{0, \pi\}$ gilt

$$a_{p^r}(f) = p^{r \cdot \frac{k-1}{2}} \frac{\sin((r+1) \cdot \theta_p)}{\sin \theta_p} \quad \text{für alle } r \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Drücken Sie $\lambda_{1/2}$ in Termen von θ_p aus.

(e) Für $\theta_p \notin 2\pi \cdot \mathbb{Q}$ enthält die Folge $(a_{p^r}(f))_{r \in \mathbb{N}}$ sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Glieder.

⁵⁴Winfried Kohnen *1953

⁵⁵Yves Leopoldo Martin Gonzalez * ?

⁵⁶Pierre Deligne *1944

⁵⁷André Weil (1906-1998)

Der Eichler-Shimura-Isomorphismus

Im Jahr 1957 führte EICHLER⁵⁸ mit der nach ihm benannten *Eichler-Kohomologie* eine Kohomologietheorie Kongruenzuntergruppen der vollen Modulgruppe ein. Diese ist eine Variante der Gruppenkohomologie, die dem Bild der Kohomologie mit kompaktem Träger in der gewöhnlichen Kohomologiegruppe entspricht. Der *Eichler-Shimura-Isomorphismus*, den Eichler für komplexe und Shimura zwei Jahre später für reelle Kohomologiegruppen herleiteten, ist ein Isomorphismus zwischen einer Eichler-Kohomologiegruppe und einem Raum von Spitzenformen. Wir gehen in der Herleitung des Eichler-Shimura-Isomorphismus möglichst elementar vor und thematisieren das Thema der Kohomologie erst ganz am Ende des Kapitels. Den Ansatz für die Herleitung des Eichler-Shimura-Isomorphismus liefert die *Periodenabbildung*, die jeder Spitzenform $f \in S_k$ mit einem geraden $k \geq 2$ einen Vektor von Integralwerten längs f zugeordneter Differentialformen zuweist. Nach technischen Vorüberlegungen in den Abschnitten 5.1, 5.2 und 5.3 führen wir die Periodenabbildung in Abschnitt 5.4 ein und modellieren aus ihr einen Isomorphismus zwischen S_k und einem explizit beschriebenen Quotienten V/U mit Untervektorräumen $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$. Diesen Isomorphismus nennen wir bereits den Eichler-Shimura-Isomorphismus und bringen ihn in Abschnitt 5.5 mit der Eichler-Kohomologie in Verbindung.

5.1 Die Polynomdarstellung

Sei in diesem Kapitel stets $\mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}[X, Y]$ der \mathbb{R} -Untervektorraum der homogenen Polynome von Grad $w \in \mathbb{N}$. Eine Basis von $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ ist offensichtlich durch die Monome

$$\{Y^w, XY^{w-1}, \dots, X^{w-1}Y, X^w\}$$

gegeben; insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) = w + 1$.

⁵⁸Martin Maximilian Emil Eichler (1912-1992)

Für ein beliebiges $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ definieren wir

$$(X, Y) \cdot M := (X, Y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (aX + cY, bX + dY)$$

und damit eine Abbildung

$$\mathbb{P}(M): \begin{cases} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{P}_w(\mathbb{R}), \\ P(X, Y) & \mapsto P((X, Y) \cdot M). \end{cases}$$

Lemma 5.1. *Durch die Zuordnung*

$$\mathbb{P}: \begin{cases} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R})), \\ M & \mapsto \mathbb{P}(M) \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus gegeben, die **Polynomdarstellung** von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis. Zunächst gilt $\mathbb{P}(M) \in \mathrm{End}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R}))$ für alle $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$,

denn: Offensichtlich ist $\mathbb{P}(M)$ wohldefiniert. Da zudem für alle $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X, Y) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)((X, Y) \cdot M) \\ &= \lambda_1 P_1((X, Y) \cdot M) + \lambda_2 P_2((X, Y) \cdot M) \\ &= \lambda_1 \mathbb{P}(M)(P_1(X, Y)) + \lambda_2 \mathbb{P}(M)(P_2(X, Y)) \end{aligned}$$

gilt, ist $\mathbb{P}(M)$ auch linear. #

Weiter gilt für alle $M, \tilde{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und alle $P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(\tilde{M}))(P)(X, Y) &= \mathbb{P}(M)(\mathbb{P}(\tilde{M})(P))(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(\tilde{M})(P))((X, Y) \cdot M) \\ &= P((X, Y) \cdot M\tilde{M}) \\ &= \mathbb{P}(M\tilde{M})(P)(X, Y). \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\mathbb{P}(M) \in \mathrm{GL}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R}))$ für alle $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und die Homomorphie, so dass das Lemma folgt. □

Für ein beliebiges $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ definieren wir nun die Matrix $\pi(M) \in \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$ durch

$$\pi(M) \cdot \begin{pmatrix} X^w Y^0 \\ X^{w-1} Y^1 \\ \vdots \\ X^0 Y^w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}({}^t M) (X^w Y^0) \\ \mathbb{P}({}^t M) (X^{w-1} Y^1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}({}^t M) (X^0 Y^w) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Lemma 5.2. *Durch die Zuordnung*

$$\pi: \begin{cases} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R}), \\ M & \mapsto \pi(M) \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus gegeben, die **Matrixdarstellung** von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit von π gilt nach Konstruktion, so dass es zum Beweis des Lemmas ausreicht zu zeigen, dass π ein Gruppenhomomorphismus ist. Seien dafür

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \pi(M\tilde{M}) \cdot \begin{pmatrix} X^w Y^0 \\ X^{w-1} Y^1 \\ \vdots \\ X^0 Y^w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{P}({}^t(M\tilde{M})) (X^w Y^0) \\ \mathbb{P}({}^t(M\tilde{M})) (X^{w-1} Y^1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}({}^t(M\tilde{M})) (X^0 Y^w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((a\tilde{a} + b\tilde{c})X + (a\tilde{b} + b\tilde{d})Y)^w & ((c\tilde{a} + d\tilde{c})X + (c\tilde{b} + d\tilde{d})Y)^0 \\ ((a\tilde{a} + b\tilde{c})X + (a\tilde{b} + b\tilde{d})Y)^{w-1} & ((c\tilde{a} + d\tilde{c})X + (c\tilde{b} + d\tilde{d})Y)^1 \\ \vdots & \vdots \\ ((a\tilde{a} + b\tilde{c})X + (a\tilde{b} + b\tilde{d})Y)^0 & ((c\tilde{a} + d\tilde{c})X + (c\tilde{b} + d\tilde{d})Y)^w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + b(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^w & (c(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + d(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^0 \\ (a(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + b(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^{w-1} & (c(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + d(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^1 \\ \vdots & \vdots \\ (a(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + b(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^0 & (c(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + d(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^w \end{pmatrix} \\ &= \pi(M) \cdot \begin{pmatrix} (\tilde{a}X + \tilde{b}Y)^w & (\tilde{c}X + \tilde{d}Y)^0 \\ (\tilde{a}X + \tilde{b}Y)^{w-1} & (\tilde{c}X + \tilde{d}Y)^1 \\ \vdots & \vdots \\ (\tilde{a}X + \tilde{b}Y)^0 & (\tilde{c}X + \tilde{d}Y)^w \end{pmatrix} \\ &= \pi(M)\pi(\tilde{M}) \cdot \begin{pmatrix} X^w Y^0 \\ X^{w-1} Y^1 \\ \vdots \\ X^0 Y^w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Lemma folgt. □

Beispiel 5.3. Sei $w = 2$. Wegen

$$\mathbb{P}({}^t S)(P(X, Y)) = P((X, Y) \cdot {}^t S) = P(-Y, X)$$

gilt dann

$$\pi(S) \cdot \begin{pmatrix} X^2 Y^0 \\ X^1 Y^1 \\ X^0 Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}({}^t S)(X^2 Y^0) \\ \mathbb{P}({}^t S)(X^1 Y^1) \\ \mathbb{P}({}^t S)(X^0 Y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-Y)^2 X^0 \\ (-Y)^1 X^1 \\ (-Y)^0 X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^0 Y^2 \\ -X^1 Y^1 \\ X^2 Y^0 \end{pmatrix}$$

und also

$$\pi(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist die Koordinatenabbildung

$$C: \begin{cases} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j & \mapsto C(P) := {}^t(a_w, \dots, a_0) \end{cases}$$

ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen. Im Spezialfall

$$P_{(s_1, s_2)}(X, Y) := \sum_{j=0}^w s_1^{w-j} s_2^j X^{w-j} Y^j \quad \text{für } s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

gilt

$$C(s_1, s_2) := C(P_{(s_1, s_2)}(X, Y)) = {}^t(s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w). \quad (5.2)$$

Lemma 5.4. Der \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ hat eine Basis aus Polynomen der Form $P_{(s_1, s_2)}$ mit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Beweis. Da C ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen ist, können wir zum Beweis des Lemmas äquivalent auch zeigen, dass es in \mathbb{R}^{w+1} eine Basis aus Vektoren der Form $C(s_1, s_2)$ mit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ gibt. Das ist aber der Fall, denn für paarweise verschiedene Werte $s_2^{(0)}, \dots, s_2^{(w)}$ ist

$$\left(C(1, s_2^{(0)}), \dots, C(1, s_2^{(w)}) \right)$$

eine Vandermonde-Matrix und hat nach **Aufgabe 1** von Übungsblatt 1 aus der Algebraischen Zahlentheorie vollen Rang. \square

Proposition 5.5. Es gilt

$$C(P(M)P) = \pi(M) \cdot C(P) \quad \text{für alle } M \in \text{GL}_2(\mathbb{R}), P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R}).$$



Beweis. Wegen Lemma 5.4 und der Linearität der Abbildungen C , $\pi(M)$ und $\mathbb{P}(M)$ für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ reicht es aus, den Beweis für $P = P_{(s_1, s_2)}$ mit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ zu führen.

Wir definieren nun durch

$$L(X^{w-j}Y^j) := \binom{w}{j}^{-1} X^{w-j}Y^j \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\}$$

eine lineare Abbildung $L: \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_{(s_1, s_2)}(X, Y) &= L((s_1X + s_2Y)^w) \\ &= L\left(\left((s_1, s_2)^t(X, Y)\right)^w\right) \quad \text{für } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

denn: Nach dem binomischen Lehrsatz und der Definition von L gilt

$$\begin{aligned} L((s_1X + s_2Y)^w) &= L\left(\sum_{j=0}^w \binom{w}{j} (s_1X)^{w-j} (s_2Y)^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} s_1^{w-j} s_2^j L(X^{w-j}Y^j) \\ &= \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} s_1^{w-j} s_2^j \binom{w}{j}^{-1} X^{w-j}Y^j \\ &= P_{(s_1, s_2)}(X, Y) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. #

Für eine beliebige Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ gilt nun

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M)(P_{(s_1, s_2)})(X, Y) &= P_{(s_1, s_2)}(aX + cY, bX + dY) \\ &\stackrel{(5.3)}{=} L\left(\left(s_1(aX + cY) + s_2(bX + dY)\right)^w\right) \\ &= L\left(\left((s_1a + s_2b)X + (s_1c + s_2d)Y\right)^w\right) \\ &= L\left(\left((s_1, s_2)^t M^t(X, Y)\right)^w\right) \\ &\stackrel{(5.3)}{=} P_{(s_1, s_2)^t M}(X, Y). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &C(\mathbb{P}(M)(P_{(s_1, s_2)})(X, Y)) \\ &\stackrel{(5.4)}{=} C(P_{(s_1, s_2)^t M}(X, Y)) \\ &= C(P_{(as_1 + bs_2, cs_1 + ds_2)}(X, Y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(5.2)}{=} {}^t((as_1 + bs_2)^w(cs_1 + ds_2)^0, \dots, (as_1 + bs_2)^0(cs_1 + ds_2)^w) \\
&= {}^t(\mathbb{P}({}^tM)(s_1^w s_2^0), \dots, \mathbb{P}({}^tM)(s_1^0 s_2^w)) \\
&= \pi(M) \cdot {}^t(s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w) \\
&= \pi(M) \cdot C(P_{(s_1, s_2)}(X, Y))
\end{aligned}$$

und somit die Proposition. \square

Satz 5.6. Für jedes gerade w existiert eine eindeutig bestimmte symmetrische Bilinearform $[\cdot | \cdot]$ auf $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ mit

$$[P_{(s_1, s_2)} | P_{(t_1, t_2)}] = (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w \quad \text{für alle } s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Für eine beliebige Matrix $D = (d_{ij})_{i,j=0}^w \in \mathbb{R}^{(w+1) \times (w+1)}$ gilt

$$(s^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1) = \sum_{i,j=0}^w d_{ij} s^{w-i} t^{w-j} \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Es gibt daher genau eine solche Matrix mit

$$(s^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1) = (s - t)^w \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

und deren Einträge d_{ij} sind sämtlich ganzzahlig. Wir setzen nun

$$[P | Q] := {}^t C(P) \cdot D \cdot C(Q) \quad \text{für alle } P, Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$$

und nennen D die **Darstellungsmatrix** von $[\cdot | \cdot]$. Aufgrund der Linearität von C ist $[\cdot | \cdot]$ eine Bilinearform auf $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$. Die Symmetrie von D und somit auch die von $[\cdot | \cdot]$ folgt mit

$$\begin{aligned}
(s^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1) &\stackrel{(5.5)}{=} (s - t)^w \\
&\stackrel{w \text{ gerade}}{=} (t - s)^w \\
&\stackrel{(5.5)}{=} (t^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(s^w, \dots, 1) \\
&= (s^w, \dots, 1) \cdot {}^t D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1),
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt gültig ist, weil wir hier nur ein Skalar transponieren. Es verbleibt nachzuweisen, dass $[\cdot | \cdot]$ die im Satz verlangte Eigenschaft erfüllt und mit dieser eindeutig bestimmt ist. Dafür ersetzen wir in (5.5) die Variablen s, t durch $\frac{s_1}{s_2}, \frac{t_1}{t_2}$ mit $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ und multiplizieren die Gleichung anschließend mit $(s_2 t_2)^w$.⁵⁹ Für alle $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ erhalten wir so

$$(s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w) \cdot D \cdot {}^t(t_1^w t_2^0, \dots, t_1^0 t_2^w) = (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w \quad (5.6)$$

⁵⁹Dieses Vorgehen ist natürlich strenggenommen nur für $s_2 \neq 0 \neq t_2$ erlaubt, lässt sich aber problemlos stetig in die Ausnahmefälle fortsetzen.

und daher auch

$$\begin{aligned} \left[P_{(s_1, s_2)} \mid P_{(t_1, t_2)} \right] &= {}^t C(P_{(s_1, s_2)}) \cdot D \cdot C(P_{(t_1, t_2)}) \\ &= (s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w) \cdot D \cdot (t_1^w t_2^0, \dots, t_1^0 t_2^w) \\ &\stackrel{(5.6)}{=} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w; \end{aligned}$$

die Eindeutigkeit folgt schließlich mit der Eindeutigkeit von D . \square

Korollar 5.7. Sei w gerade. Dann erfüllt die eindeutig bestimmte Bilinearform $[\cdot \mid \cdot]$ aus Satz 5.6 die Invarianzeigenschaft

$$[\mathbb{P}(M)(P) \mid \mathbb{P}(M)(Q)] = [P \mid Q] \quad \text{für alle } P, Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \text{ und } M \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Beweis. Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Proposition 5.5 reicht es aus, den Beweis für $P = P_{(s_1, s_2)}$ und $Q = P_{(t_1, t_2)}$ mit $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ zu führen.

Für eine beliebige Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ schreiben wir

$$\begin{aligned} (s'_1, s'_2) &:= (s_1, s_2) \cdot {}^t M = (as_1 + bs_2, cs_1 + ds_2), \\ (t'_1, t'_2) &:= (t_1, t_2) \cdot {}^t M = (at_1 + bt_2, ct_1 + dt_2). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &\left[\mathbb{P}(M)(P_{(s_1, s_2)}) \mid \mathbb{P}(M)(P_{(t_1, t_2)}) \right] \\ &\stackrel{(5.4)}{=} \left[P_{(s'_1, s'_2)} \mid P_{(t'_1, t'_2)} \right] \\ &\stackrel{5.6}{=} (s'_1 t'_2 - s'_2 t'_1)^w \\ &= ((as_1 + bs_2)(ct_1 + dt_2) - (cs_1 + ds_2)(at_1 + bt_2))^w \\ &= ((ad - bc)(s_1 t_2 - s_2 t_1))^w \\ &\stackrel{M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})}{=} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w \\ &\stackrel{5.6}{=} \left[P_{(s_1, s_2)} \mid P_{(t_1, t_2)} \right] \end{aligned}$$

und somit das Korollar. \square

Korollar 5.8. Sei w gerade. Die Darstellungsmatrix D der eindeutig bestimmten Bilinearform $[\cdot \mid \cdot]$ aus Satz 5.6 erfüllt

$${}^t \pi(M) \cdot D \cdot \pi(M) = D \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Beweis. Für alle $P, Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ und alle $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ gilt

$${}^t C(P) \cdot D \cdot C(Q) = [P \mid Q]$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{5.7}{=} [\mathbb{P}(M)(P) \mid \mathbb{P}(M)(Q)] \\
&= {}^t C(\mathbb{P}(M)(P)) \cdot D \cdot C(\mathbb{P}(M)(Q)) \\
&\stackrel{5.5}{=} {}^t (\pi(M) \cdot C(P)) \cdot D \cdot (\pi(M) \cdot C(Q)) \\
&= {}^t C(P) \cdot ({}^t \pi(M) \cdot D \cdot \pi(M)) \cdot C(Q)
\end{aligned}$$

und also das Korollar. □

5.2 Das Shimura-Produkt

In diesem Abschnitt führen wir mit dem Shimura-Produkt ein Werkzeug zur Untersuchung von Differentialformen auf der oberen Halbebene \mathbb{H} ein. An die dafür benötigten Grundlagen zu Differentialformen erinnern wir nur kurz und auf die Erfordernisse des uns interessierenden Spezialfalls reduziert.

Wir nennen im Weiteren

$$\Omega^1(\mathbb{H}) := \{f(z) dz \mid f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$$

die Menge der *holomorphen Differentialformen (erster Ordnung)* auf \mathbb{H} .

Definition 5.9. Für ein $f(z) dz \in \Omega^1(\mathbb{H})$ und eine holomorphe Funktion $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ heißt die holomorphe Differentialform auf \mathbb{H}

$$F^*(f(z) dz) := f(F(z)) dF(z) = f(F(z))F'(z) dz$$

der *Rücktransport* von $f(z) dz$ unter F .

Sei $w \in \mathbb{N}$ gegeben und $k := w + 2$. Für $f \in S_k$ und $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist dann $f(z)z^j dz$ eine holomorphe Differentialform auf \mathbb{H} . Für ihren Rücktransport unter der Möbius-Transformation φ_M mit einem beliebigen $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\varphi_M^*(f(z)z^j dz) &= f(\varphi_M(z))\varphi_M(z)^j \varphi_M'(z) dz \\
&= f(M\langle z \rangle) \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^j \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} dz \\
&= f(z)(cz+d)^k \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^j (cz+d)^{-2} dz \\
&= f(z)(az+b)^j (cz+d)^{w-j} dz.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

An dieser Stelle sehen wir auch, warum wir $k = w + 2$ gewählt haben: Wir erhalten so in der Formel für den Rücktransport Monome in den Variablen $(az + b)$ und $(cz + d)$, die wir mit den in Abschnitt 5.1 studierten Methoden behandeln können:

Proposition 5.10. Sei $w \in \mathbb{N}$ gegeben, $k = w + 2$ und $f \in S_k$. Für eine beliebige Matrix $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt dann

$$\varphi_M^*(f(z)z^{(w)} dz) = \pi(M) \cdot (f(z)z^{(w)} dz),$$

wobei wir

$$f(z)z^{(w)} dz := \begin{pmatrix} f(z)z^w dz \\ \vdots \\ f(z)z^0 dz \end{pmatrix}.$$

schreiben und der Rücktransport zeilenweise zu verstehen ist.

Beweis. Die Übersetzung in die Sprache der Darstellungen aus Abschnitt 5.1 gelingt, wenn wir dort $X = z$ und $Y = 1$ einsetzen. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_M^*(f(z)z^{(w)} dz) &\stackrel{(5.7)}{=} \begin{pmatrix} f(z)(az+b)^w(cz+d)^0 dz \\ \vdots \\ f(z)(az+b)^0(cz+d)^w dz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(z)\mathbb{P}({}^t M)(z^w 1^0) dz \\ \vdots \\ f(z)\mathbb{P}({}^t M)(z^0 1^w) dz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{P}({}^t M)f(z)(z^w 1^0) dz \\ \vdots \\ \mathbb{P}({}^t M)f(z)(z^0 1^w) dz \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \pi(M) \cdot \begin{pmatrix} f(z)(z^w 1^0) dz \\ \vdots \\ f(z)(z^0 1^w) dz \end{pmatrix} = \pi(M) \cdot (f(z)z^{(w)} dz). \end{aligned}$$

□

Wir werden im Folgenden den Realteil von $f(z)z^{(w)} dz$ untersuchen und dabei insbesondere Proposition 5.10 auf diesen anwenden. Um dies tun zu können, müssen wir zunächst weitere Differentialformen einführen und den Rücktransport auf diesen definieren. Wir nennen also

$$\mathcal{E}^1(\mathbb{H}) := \{g(x, y) dx + h(x, y) dy \mid g, h: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt}\}$$

die Menge der C^∞ -Differentialformen erster Ordnung auf \mathbb{H} und für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{E}^n(\mathbb{H}) := \{\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \mid \omega_1, \dots, \omega_n \in \mathcal{E}^1(\mathbb{H})\}$$

die C^∞ -Differentialformen von Ordnung n auf \mathbb{H} . Mit den Rechenregeln für das äußere Produkt gilt dabei unmittelbar $\mathcal{E}^n(\mathbb{H}) = \{0\}$ für alle $n > 2$. Die C^∞ -Differentialformen von Ordnung 0 auf \mathbb{H} sind gerade die glatten Funktionen.

Definition 5.11. Für ein $g(x, y) dx + h(x, y) dy \in \mathcal{E}^1(\mathbb{H})$ und eine glatte Funktion

$$F: \begin{cases} \mathbb{H} & \rightarrow \mathbb{H}, \\ x + iy & \mapsto u(x, y) + iv(x, y) \end{cases} \quad \text{mit reellwertigen Funktionen } u, v$$

heißt die C^∞ -Differentialform erster Ordnung auf \mathbb{H}

$$F^*(g(x, y) dx + h(x, y) dy) := g(F(x, y)) du(x, y) + h(F(x, y)) dv(x, y)$$

der **Rücktransport** von $g(x, y) dx + h(x, y) dy$ unter F . Der Rücktransport eines $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathcal{E}^2(\mathbb{H})$ erklärt sich durch

$$F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) := F^*(\omega_1) \wedge F^*(\omega_2),$$

der Rücktransport eines $f(x, y) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{H})$ durch

$$F^*(f(x, y)) := f(F(x, y)).$$

Wir erhalten nun das folgende Korollar:

Korollar 5.12. *Unter den Voraussetzungen von Proposition 5.10 gilt*

$$\begin{aligned} \varphi_M^*(\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz)) &= \pi(M) \cdot (\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz)), \\ \varphi_M^*(\operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) &= \pi(M) \cdot (\operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)). \end{aligned}$$

Beweis. Wegen $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ und (5.1) sind die Einträge von $\pi(M)$ ganzzahlig und insbesondere reell. Es folgt

$$\begin{aligned} &\varphi_M^*(\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz)) + i \varphi_M^*(\operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) \\ &= \varphi_M^*(\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + i \operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) \\ &\stackrel{5.10}{=} \pi(M) \cdot (\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + i \operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) \\ &= \pi(M) \cdot \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + i \pi(M) \cdot \operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz) \end{aligned}$$

und nach Vergleich von Real- und Imaginärteilen rechts und links somit das Korollar. \square

Definition 5.13. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gegeben und sei D die Darstellungsmatrix der Bilinearform aus Satz 5.6. Weiter sei*

$$\omega := {}^t(\omega_w, \dots, \omega_0) \quad \text{bzw.} \quad \eta := {}^t(\eta_w, \dots, \eta_0)$$

ein Spaltenvektor mit C^∞ -Differentialformen von Ordnung $\operatorname{ord}(\omega) \in \{0, 1, 2\}$ bzw. $\operatorname{ord}(\eta) \in \{0, 1, 2\}$ auf \mathbb{H} als Einträgen. Dann ist das **Shimura-Produkt** von ω und η definiert als

$$[\omega \mid \eta] := {}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta}) = ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta}, \quad (5.8)$$

wobei das äußere Produkt zwischen Vektoren von Differentialformen komponentenweise genommen und dann aufaddiert wird.

Bemerkung 5.14. Unmittelbar aus Definition 5.13 folgt, dass das Shimura-Produkt eine Sesquilinearform über \mathbb{R} ist. Es ist zudem insofern wohldefiniert als das zweite Gleichheitszeichen in (5.8) tatsächlich gilt,

denn: Schreiben wir $D = (d_{ij})_{i,j=w}^0$, so gilt

$$\begin{aligned} {}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta}) &= {}^t\omega \wedge \begin{pmatrix} \sum_{j=w}^0 d_{wj} \bar{\eta}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=w}^0 d_{0j} \bar{\eta}_j \end{pmatrix} = \sum_{i=w}^0 \omega_i \wedge \left(\sum_{j=w}^0 d_{ij} \bar{\eta}_j \right) \\ &\parallel \\ &\sum_{i,j=w}^0 d_{ij} (\omega_i \wedge \bar{\eta}_j) \\ &\parallel \\ ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta} &= \left(\sum_{i=w}^0 \omega_i d_{iw}, \dots, \sum_{i=w}^0 \omega_i d_{i0} \right) \wedge \bar{\eta} = \sum_{j=w}^0 \left(\sum_{i=w}^0 \omega_i d_{ij} \right) \wedge \bar{\eta}_j. \end{aligned}$$

#

Satz 5.15. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei

$$\omega := {}^t(\omega_w, \dots, \omega_0) \quad \text{bzw.} \quad \eta := {}^t(\eta_w, \dots, \eta_0)$$

ein Spaltenvektor mit C^∞ -Differentialformen auf \mathbb{H} von Ordnung $\text{ord}(\omega) \in \{0, 1, 2\}$ beziehungsweise $\text{ord}(\eta) \in \{0, 1, 2\}$ als Einträgen. Dann erfüllt das Shimura-Produkt von ω und η die folgenden Eigenschaften:

- (SP₁) $\varphi_M^*([\omega \mid \eta]) = [\varphi_M^*(\omega) \mid \varphi_M^*(\eta)]$ für alle $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$.
- (SP₂) $([\pi(M) \cdot \omega \mid \pi(M) \cdot \eta]) = [\omega \mid \eta]$ für alle $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$.
- (SP₃) $d[\omega \mid \eta] = [d\omega \mid \eta] + (-1)^{\text{ord}(\omega)} [\omega \mid d\eta]$.
- (SP₄) $[\omega \mid \eta] = (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} \overline{[\eta \mid \omega]}$.

Seien nun weiter $k := w + 2$ und $f, g \in S_k$. Schreiben wir

$$\Omega(f, g)(z) := f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z)$$

für den Integranden des Petersson-Skalarprodukts auf S_k , so erfüllt das Shimura-Produkt zudem:

- (SP₅) $\left[f(z) z^{(w)} dz \mid g(z) z^{(w)} dz \right] = -(2i)^{w+1} \Omega(f, g)(z)$.
- (SP₆) $4 \left[\text{Re}(f(z) z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z) z^{(w)} dz) \right]$
 $= -(2i)^{w+1} \cdot (\Omega(f, if)(z) - \Omega(if, f)(z))$
 $= (2i)^{w+2} \cdot \Omega(f, f)(z)$.

Beweis. Sei $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ beliebig. Da definitionsgemäß für zwei C^∞ -Differentialformen der Rücktransport unter φ_M und das äußere Produkt kommutieren, gilt

$$\varphi_M^*([\omega \mid \eta]) = \varphi_M^*({}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta})) = \varphi_M^*({}^t\omega) \wedge \varphi_M^*(D \cdot \bar{\eta}).$$

Die Linearität des Rücktransports bedingt $\varphi_M^*(D \cdot \bar{\eta}) = D \cdot \varphi_M^*(\bar{\eta})$. Ferner gilt $\varphi_M^*({}^t\omega) = {}^t\varphi_M^*(\omega)$, da der Rücktransport eintragsweise auf den Spalten- bzw. Zeilenvektor wirkt, und $\varphi_M^*(\bar{\eta}) = \overline{\varphi_M^*(\eta)}$, da die Aktion des Rücktransports durch die Möbius-Transformation $z \mapsto M\langle z \rangle$ gegeben ist. Insgesamt erhalten wir damit

$$\varphi_M^*([\omega \mid \eta]) = {}^t\varphi_M^*(\omega) \wedge D \cdot \overline{\varphi_M^*(\eta)} = [\varphi_M^*(\omega) \mid \varphi_M^*(\eta)],$$

so dass wir insgesamt Eigenschaft (SP_1) nachgewiesen haben.

Zum Beweis von Eigenschaft (SP_2) betrachten wir für eine beliebige Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ das Shimura-Produkt

$$\begin{aligned} [\pi(M) \cdot \omega \mid \pi(M) \cdot \eta] &= {}^t(\pi(M) \cdot \omega) \wedge D \cdot \overline{(\pi(M) \cdot \eta)} \\ &= ({}^t\omega \cdot {}^t\pi(M)) \wedge (D \cdot \pi(M) \cdot \bar{\eta}). \end{aligned}$$

Im Beweis der Wohldefiniertheit in Bemerkung 5.14 haben wir keine besondere Eigenschaft der Matrix D benutzt. Wir können daher dieselbe Argumentation auf die Matrix $D \cdot \pi(M)$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} [\pi(M) \cdot \omega \mid \pi(M) \cdot \eta] &= ({}^t\omega \cdot {}^t\pi(M) \cdot D \cdot \pi(M)) \wedge \bar{\eta} \\ &\stackrel{5.8}{=} ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta} = [\omega \mid \eta] \end{aligned}$$

und somit Eigenschaft (SP_2) .

Wir zeigen nun Eigenschaft (SP_3) . Mit den allgemeinen Rechenregeln der äußeren Ableitung d gilt

$$d[\omega \mid \eta] = d({}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta})) = d({}^t\omega) \wedge (D \cdot \bar{\eta}) + (-1)^{\mathrm{ord}\omega} \cdot {}^t\omega \wedge d(D \cdot \bar{\eta}).$$

Da die Einträge von D ganze Zahlen sind, kann die Matrix D aus $d(D \cdot \bar{\eta})$ herausgezogen werden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} d[\omega \mid \eta] &= {}^t(d\omega) \wedge (D \cdot \bar{\eta}) + (-1)^{\mathrm{ord}\omega} \cdot {}^t\omega \wedge (D \cdot d\bar{\eta}) \\ &= [d\omega \mid \eta] + (-1)^{\mathrm{ord}(\omega)} \cdot [\omega \mid d\eta], \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Umformung $d\bar{\eta} = \overline{d\eta}$ verwendet haben. Dies gilt wegen

$$d\bar{\eta} = d(\overline{\mathrm{Re}(\eta) + i\mathrm{Im}(\eta)}) = \overline{d\mathrm{Re}(\eta) - i \cdot d\mathrm{Im}(\eta)} = \overline{d\eta}.$$

Insgesamt haben wir nun Eigenschaft (SP_3) nachgewiesen.

Im Beweis von Eigenschaft (SP_4) nutzen wir aus, dass D reelle Einträge hat, so dass

$$\overline{[\eta \mid \omega]} = \overline{{}^t\eta \wedge (D \cdot \bar{\omega})} = {}^t\bar{\eta} \wedge (D \cdot \omega)$$

gilt. Mit den allgemeinen Rechenregeln des äußeren Produkts folgt

$$\overline{[\eta \mid \omega]} = (-1)^{\mathrm{ord}(\omega) \mathrm{ord}(\eta)} \cdot {}^t(D \cdot \omega) \wedge \bar{\eta}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} \cdot ({}^t\omega \cdot {}^tD) \wedge \bar{\eta} \\
&= (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} \cdot ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta} \\
&= (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} \cdot [\omega \mid \eta],
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Umformung die Symmetrie von D ausgenutzt haben.

Eigenschaft (SP_5) lässt sich einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\left[f(z)z^{(w)} dz \mid g(z)z^{(w)} dz \right] &= {}^t(f(z)z^{(w)} dz) \wedge D(\overline{g(z)\bar{z}^{(w)}}\bar{dz}) \\
&= f(z) {}^t z^{(w)} (dx + i dy) \wedge D\overline{g(z)\bar{z}^{(w)}}(dx - i dy) \\
&= -2if(z)\overline{g(z)} {}^t z^{(w)} D\bar{z}^{(w)} \cdot dx \wedge dy \\
&\stackrel{(5.5)}{=} -2if(z)\overline{g(z)}(z - \bar{z})^w \cdot dx \wedge dy \\
&= -(2i)^{w+1} f(z)\overline{g(z)} y^w \cdot dx \wedge dy \\
&= -(2i)^{w+1} \Omega(f, g)(z).
\end{aligned}$$

Zum Beweis von Eigenschaft (SP_6) nutzen wir zunächst die Beziehung $\text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ aus. Es gilt also

$$\begin{aligned}
&4 \left[\text{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] \\
&= \left[f(z)z^{(w)} dz + \overline{f(z)z^{(w)} dz} \mid if(z)z^{(w)} dz + \overline{if(z)z^{(w)} dz} \right].
\end{aligned}$$

Da das Shimura-Produkt sesquilinear ist, können wir ausmultiplizieren, wobei zwei der Terme wegen $dz \wedge dz = 0 = \bar{dz} \wedge \bar{dz}$ verschwinden. Wir erhalten so

$$\begin{aligned}
&4 \left[\text{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] \\
&= \left[f(z)z^{(w)} dz \mid if(z)z^{(w)} dz \right] + \left[\overline{f(z)z^{(w)} dz} \mid \overline{if(z)z^{(w)} dz} \right].
\end{aligned}$$

Aus der Definition des Shimura-Produkts und der Ganzzahligkeit der Einträge von D können wir ablesen, dass für zwei Spaltenvektoren ω, η mit C^∞ -Differentialformen die Rechenregel

$$\overline{[\omega \mid \eta]} = \overline{{}^t\omega \wedge D\bar{\eta}} = {}^t\bar{\omega} \wedge D\eta = [\bar{\omega} \mid \bar{\eta}]$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
&4 \left[\text{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] \\
&= \left[f(z)z^{(w)} dz \mid if(z)z^{(w)} dz \right] + \overline{\left[f(z)z^{(w)} dz \mid if(z)z^{(w)} dz \right]} \\
&\stackrel{(SP_5)}{=} -(2i)^{w+1} \Omega(f, if)(z) + \overline{-(2i)^{w+1} \Omega(f, if)(z)} \\
&= -(2i)^{w+1} \cdot (\Omega(f, if)(z) - \Omega(if, f)(z)),
\end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass w gerade ist. Wir haben nun die erste der behaupteten Gleichheiten nachgewiesen. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & - (2i)^{w+1} \cdot (\Omega(f, if)(z) - \Omega(if, f)(z)), \\ & = - (2i)^{w+1} \cdot (f(z)\overline{if(z)}y^w dx \wedge dy - if(z)\overline{f(z)}y^w dx \wedge dy), \\ & = - (2i)^{w+1} \cdot (-2if(z)\overline{f(z)}y^w dx \wedge dy), \\ & = (2i)^{w+2} \cdot \Omega(f, f)(z) \end{aligned}$$

und somit auch die zweite behauptete Gleichheit von Eigenschaft (SP_6) . \square

5.3 Integration in der erweiterten oberen Halbebene

In diesem Abschnitt lernen wir, geeignete holomorphe Differentialformen auf \mathbb{H} längs Kurven in der oberen Halbebene \mathbb{H} zwischen Spitzen in $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ zu integrieren, um in Abschnitt 5.4 die Periodenabbildung über solche Integralwerte definieren zu können.

Um zwischen Spitzen integrieren zu können, setzen wir zunächst die auf \mathbb{H} definierte Standardtopologie auf die erweiterte obere Halbebene $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ fort. Passend zum in Definition 2.14 eingeführten Konzept der Holomorphie bzw. Meromorphie in $i\infty$ wählen wir dafür im Punkt $i\infty$ die Menge der Vereinigungen

$$U'_\varepsilon(i\infty) := \mathbb{H}_\varepsilon \cup \{i\infty\} \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

der einpunktigen Menge $\{i\infty\}$ mit je einem wie in (2.3) definierten Horizontalstreifen als Umgebungsbasis. In einem beliebigen Punkt $s \in \mathbb{Q}$ wählen wir die Menge der Bilder

$$M\langle U'_\varepsilon(i\infty) \rangle \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ und alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ mit } M\langle i\infty \rangle = s$$

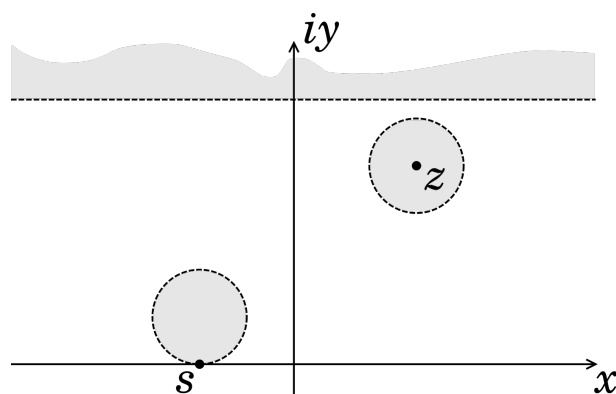
als Umgebungsbasis.⁶⁰ Im folgenden Lemma lernen wir diese Topologie noch etwas besser kennen und zeigen, dass sich je zwei Punkte in \mathbb{H}^* durch offene Umgebungen trennen lassen:

Lemma 5.16. *Die erweiterte obere Halbebene \mathbb{H}^* zusammen mit der oben eingeführten Topologie ist ein HAUSDORFF-Raum.⁶¹*

Beweis. Offensichtlich folgt das Lemma, wenn wir zeigen können, dass die Elemente der oben eingeführten Umgebungsbasen der Punkte $s \in \mathbb{Q}$ gerade durch die Vereinigungen von $\{s\}$ mit denjenigen offenen Kreisscheiben in \mathbb{H} gegeben sind, die die reelle Achse im jeweils gegebenen Punkt s berühren.

⁶⁰So wird die Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H}^* stetig und ermöglicht es, den Quotienten $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$ mit der Struktur einer Riemann'schen Fläche zu versehen, vergleiche auch Bemerkung 3.25.

⁶¹Felix Hausdorff (1868-1942)



Nach Übungsaufgabe 1.3 bilden Möbius-Transformationen verallgemeinerte Kreise in $\bar{\mathbb{C}}$ auf verallgemeinerte Kreise in $\bar{\mathbb{C}}$ ab. Da weiter für jedes $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Möbius-Transformation φ_M nach Proposition 1.17 auf \mathbb{H} operiert, enthält für alle M mit $M(i\infty) = s \in \mathbb{Q}$ und alle $\epsilon > 0$ das φ_M -Bild von

$$g_\epsilon \cup \{i\infty\} \quad \text{mit } g_\epsilon := \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = \frac{1}{\epsilon} \right\} \quad (5.9)$$

den Punkt $i\infty$ nicht und ist somit ein Kreis $K_{\epsilon, s}$ durch s . Für jedes solche M ist φ_M eine bijektive holomorphe Funktionen auf \mathbb{H} und nach dem Biholomorphiekriterium somit in $\text{Aut}(\mathbb{H})$. Da die Menge $U'_\epsilon(i\infty) \setminus \{i\infty\}$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{H} \setminus g_\epsilon$ ist, ist ihr φ_M -Bild daher eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{H} \setminus K_{\epsilon, s}$, also entweder das Innere oder das Äußere des Kreises $K_{\epsilon, s}$ in \mathbb{H} . Tatsächlich ist

$$M\langle U'_\epsilon(i\infty) \setminus \{i\infty\} \rangle = \text{Inneres von } K_{\epsilon, s},$$

denn: Schreiben wir $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \neq 0$ wegen $M \notin \text{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$, so erhalten wir für alle $z \in U'_\epsilon(i\infty) \setminus \{i\infty\}$

$$\begin{aligned} \text{Im}(M(z)) &= \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{(c\text{Re}(z) + d)^2 + c^2\text{Im}(z)^2} \\ &\leq \frac{\text{Im}(z)}{c^2\text{Im}(z)^2} \leq \frac{1}{\text{Im}(z)} < \epsilon. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Menge $M\langle U'_\epsilon(i\infty) \setminus \{i\infty\} \rangle$ ist also in ihren Imaginärteilen beschränkt und kann somit nicht das Äußere des Kreises $K_{\epsilon, s}$ in \mathbb{H} sein. #

Die Elemente der gewählten Umgebungsbasis von $s \in \mathbb{Q}$ sind also offene Kreisscheiben in \mathbb{H} , welche die reelle Achse im Punkt s berühren. Das Lemma folgt, da wir für $\epsilon \rightarrow 0$ offenbar beliebig kleine Kreisscheiben erhalten. \square

Als nächstes definieren wir einen geeigneten Begriff einer Kurve zwischen Punkten in \mathbb{H}^* , wobei wir wieder auf Verträglichkeit mit dem Konzept der Holomorphie bzw. Meromorphie in $i\infty$ achten. Zum Parametrisieren solcher Kurven erweitern wir zunächst die reellen Zahlen geeignet:

Definition 5.17. Für zwei Symbole „ $-\infty$ “ und „ ∞ “ heißt

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

die Menge der **erweiterten reellen Zahlen**. Durch

$$-\infty < a < \infty \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

lässt sich die natürliche Anordnung der reellen Zahlen auf $\overline{\mathbb{R}}$ fortsetzen und durch Angabe der Mengen von Intervallen

$$\begin{aligned} [-\infty, b) &:= \{-\infty\} \cup (-\infty, b) && \text{für alle } b \in \mathbb{R}, \\ \text{bzw. } (a, \infty] &:= (a, \infty) \cup \{\infty\} && \text{für alle } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

als Umgebungsbasen von $-\infty$ bzw. ∞ lässt sich die Standardtopologie der reellen Zahlen zu einer Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ ausdehnen. Im Weiteren werden wir für die erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$ stets von dieser Anordnung und dieser Topologie ausgehen.

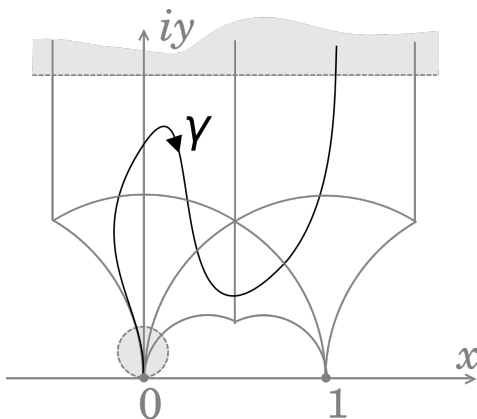
Definition 5.18. Eine (**stückweise glatte**) **Kurve** in \mathbb{H}^* mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1 ist eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^*$ mit geeigneten $-\infty \leq a < b \leq \infty \in \overline{\mathbb{R}}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Eingeschränkt auf jedes abgeschlossene Teilintervall von $[a, b] \cap \mathbb{R}$ ist γ eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{H} .
- Es gilt $\gamma([a, b] \cap \{\pm\infty\}) \subseteq \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Liegt z_0 bzw. z_1 in $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$, so verläuft für alle Matrizen $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M \langle i\infty \rangle = z_0$ bzw. $M \langle i\infty \rangle = z_1$ die Einschränkung von $M^{-1} \langle \gamma \rangle$ auf

$$\begin{aligned} [c, \infty) & \quad \text{für ein hinreichend großes } c \in \mathbb{R}, \\ \text{bzw. } (-\infty, d] & \quad \text{für ein hinreichend kleines } d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

in einem Vertikalstreifen endlicher Breite und wird unter $e: z \mapsto e^{2\pi iz}$ auf eine glatte Kurve in $U_1(0)$ mit Endpunkt 0 bzw. Anfangspunkt 0 abgebildet.

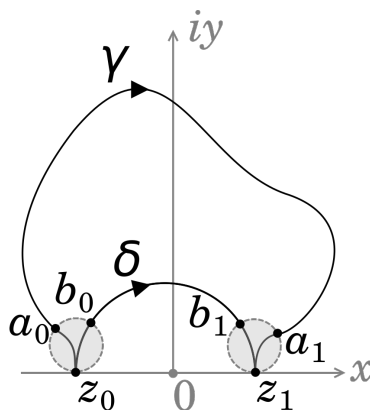
Bemerkung 5.19. Die in Definition 5.18 geforderte Analytizitätsbedingung in Anfangs- und Endpunkten in $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ bedingt, dass eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{H}^* in einer kleinen Umgebung eines solchen Punktes nur durch endlich viele Kopien des Standardfundamentalbereichs \mathcal{F} verläuft und sich dort anschaulich also im Wesentlichen senkrecht auf diesen zubewegt.



Das Bild unter der Abbildung e bzw. $e \circ \varphi_{M^{-1}}$ umläuft so den Nullpunkt in $U_1(0)$ nur endlich oft. Wäre dies nicht der Fall, so erhielten wir in Definition 5.18 auch in ihren Anfangs- bzw. Endpunkten nicht rektifizierbare Kurven, über die wir nicht integrieren könnten.

Lemma 5.20. Je zwei stückweise glatte Kurven in \mathbb{H}^* , deren Anfangspunkte und Endpunkte übereinstimmen, sind homotop.

Beweis. Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{H}^*$ und seien γ, δ zwei stückweise glatte Kurven in \mathbb{H}^* von z_0 nach z_1 . Wie in der Abbildung dargestellt zerlegen wir jede der Kurven in drei Teile: jeweils einen Teil in einer ε -Umgebung von z_0 bzw. z_1 und den von z_0 und z_1 weg beschränkten Rest. Dann sind die Teile von z_0 nach a_0 und von z_0 nach b_0 sowie die Teile von z_1 nach a_1 und von z_1 nach b_1 in den jeweiligen Kreisscheiben homotop und die Restkurven von a_0 nach a_1 und von b_0 nach b_1 in der oberen Halbebene \mathbb{H} . Das Lemma folgt unmittelbar.



□

Wir sind nun bereit, das komplexe Kurvenintegral auf der erweiterten oberen Halbebene einzuführen:

Definition 5.21. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^*$ für $-\infty \leq a < b \leq \infty$ geeignet eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{H}^* und sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

wobei das Integral zur Rechten wie üblich als uneigentliches Integral interpretiert wird.

Von Lemma 5.20 inspiriert leiten wir nun für geeignete holomorphe Differentialformen aus $\Omega^1(\mathbb{H})$ eine Version des Cauchy'schen Integralsatzes auf der erweiterten oberen Halbebene \mathbb{H}^* her:

Satz 5.22. Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in allen Spitzen $s \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ exponentiell abklingt,⁶² und sei γ eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{H}^* . Dann konvergiert das (uneigentliche) Integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ und hängt im Wert nur vom Anfangspunkt und vom Endpunkt von γ ab.

Beweis. Seien z_0 der Anfangspunkt und z_1 der Endpunkt der Kurve γ . Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1: $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$. In diesem Fall folgt der Satz unmittelbar aus dem Cauchy'schen Integralsatz in $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$.

Fall 2: $z_0, z_1 \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Indem wir das Integral additiv auseinanderziehen, folgt der Satz in diesem Fall, wenn wir den dritten Fall gezeigt haben.

Fall 3: $z_0 \in \mathbb{H}$ und $z_1 \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit $M\langle i\infty \rangle = z_1$. Da wir den ersten Fall bereits gezeigt haben, können wir ohne Einschränkung annehmen, es gelte zusätzlich $M\langle i \rangle = z_0$. In der Sprache von Abschnitt 5.2 erhalten wir so

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\varphi_M^{-1} \circ \gamma} \varphi_M^*(f(z) dz) \\ &\stackrel{(5.7)}{=} \int_{\varphi_M^{-1} \circ \gamma} (f \circ \varphi_M)(z) j(M, z)^{-2} dz. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Der Integrand dieses Integrals ist wieder eine auf \mathbb{H} holomorphe Funktion, die in allen Spitzen $s \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ exponentiell abklingt, und $\varphi_M^{-1} \circ \gamma$ eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{H}^* , so dass wir für den Rest des Beweises ohne Einschränkung $z_0 = i$ und $z_1 = i\infty$ annehmen können. Sei weiter ohne Einschränkung γ auf $[1, \infty]$ definiert. Dann liegt für ein hinreichend großes $c \in \mathbb{R}_{>1}$ die Einschränkung von γ auf $[c, \infty]$ in einem Vertikalstreifen \mathcal{S} endlicher Breite. Da nach Voraussetzung die Funktion f für $z \rightarrow i\infty$ exponentiell abklingt, gibt es schließlich Konstanten $R, C > 0$ mit

$$|f(z)| < R e^{-C \mathrm{Im}(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_1 \quad (5.12)$$

Für ein beliebiges $T > c$ folgt daher unter Ausnutzung des Cauchy'schen Integralsatzes auf $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$ und der Standardabschätzung für Kurvenintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma|_{[1, T]}} f(z) dz &= \int_i^{\gamma(T)} f(z) dz \\ &= \int_i^{i \mathrm{Im}(\gamma(T))} f(z) dz + \int_{i \mathrm{Im}(\gamma(T))}^{\gamma(T)} f(z) dz \\ &\stackrel{(5.12)}{=} \int_1^{\mathrm{Im}(\gamma(T))} f(it) i dt + O_{\mathcal{S}}(e^{-C \mathrm{Im}(\gamma(T))}), \end{aligned}$$

⁶²Hierunter verstehen wir, dass für jedes $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle i\infty \rangle = s$ die Funktion $f \circ \varphi_M$ für $\mathrm{Im}(z) \rightarrow \infty$ exponentiell abklingt.

wobei wir im letzten Schritt die endliche Breite des Vertikalstreifens \mathcal{S} ausgenutzt haben. Wegen $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Im}(\gamma(T)) = \infty$ verschwindet im Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ der zweite Summand rechts und der erste Summand geht gegen $\int_1^\infty f(it)i dt$. Letzteres ist unabhängig von der genauen Wahl von γ und konvergiert aufgrund von

$$\left| \int_1^\infty f(it)i dt \right| \leq \int_1^\infty |f(it)| dt \stackrel{(5.12)}{\leq} \int_1^\infty Re^{-Ct} dt = \frac{R}{C} e^{-C} < \infty.$$

Es folgt der Satz in diesem und somit allen Fällen. \square

Bemerkung 5.23. Analog zum Vorgehen bei Kurvenintegralen in der komplexen Ebene verzichten wir bei Kurvenintegralen wie in Satz 5.22 künftig oft auf die explizite Angabe einer Integrationskurve und sagen nur noch, von welchem Punkt zu welchem Punkt wir in \mathbb{H}^* integrieren.

Beispiel 5.24. Hat in der Situation von Satz 5.22 die Funktion f eine Fourier-Entwicklung der Art

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^{\frac{n}{\lambda}} \quad \text{für ein } \lambda > 0,$$

so können wir für ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{H}$ konkret berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{i\infty} f(z) dz &= \int_{z_0}^{i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^{\frac{n}{\lambda}} dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \int_{z_0}^{i\infty} q^{\frac{n}{\lambda}} dz \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f) \lambda}{2\pi i n} e^{\frac{2\pi i z_0}{\lambda}}, \end{aligned}$$

wobei wir wegen gleichmäßig absoluten Konvergenz der Fourier-Reihe gliedweise integrieren dürfen.

5.4 Der Eichler-Shimura-Isomorphismus

Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$ und $f \in S_k$. Nach Satz 5.22 konvergiert dann für ein beliebiges $j \in \{0, \dots, w\}$ das *Periodenintegral*

$$r_j(f) := \int_0^{i\infty} f(z) z^j dz \tag{5.13}$$

und wir können nun wohldefiniert den Begriff der Periodenabbildung einführen:

Definition 5.25. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und $k := w + 2$. Dann heißt die \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$r: \begin{cases} S_k & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ f & \mapsto \int_0^{i\infty} \text{Re}(f(z) z^w) dz \end{cases}$$

die *Periodenabbildung*.

Lemma 5.26. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und $k := w + 2$. Dann liegt für alle $f \in S_k$ das Bild $r(f)$ unter der Periodenabbildung im Untervektorraum

$$V := \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(S)) \cap \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \subseteq \mathbb{R}^{w+1}.$$

Beweis. Für $z_0, z_1 \in \mathbb{H}^*$ und $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ beliebig gilt

$$\begin{aligned} \pi(M) \cdot \int_{z_0}^{z_1} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz &= \int_{z_0}^{z_1} (\pi(M) \cdot \text{Re}(f(z)z^{(w)})) dz \\ &\stackrel{5.12}{=} \int_{z_0}^{z_1} \varphi_M^*(\text{Re}(f(z)z^{(w)})) dz \\ &= \int_{M(z_0)}^{M(z_1)} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz. \end{aligned} \quad (5.14)$$

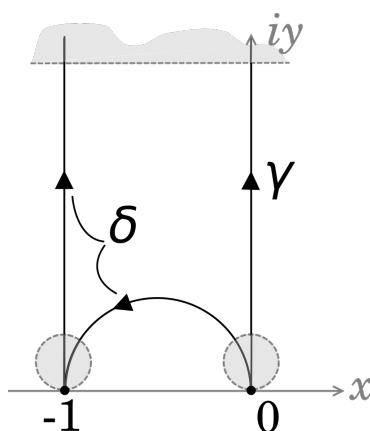
Das Bild von f unter r liegt genau dann in V , wenn $r(f)$ jeweils im Kern der durch $I_{w+1} + \pi(S)$ bzw. $I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)$ gegebenen linearen Abbildung liegt. Dies können wir mithilfe von (5.14) leicht überprüfen: Es gelten

$$\begin{aligned} &(I_{w+1} + \pi(S)) \cdot r(f) \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int_0^{i\infty} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz + \int_{S(0)}^{S(i\infty)} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &= \int_0^{i\infty} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz + \int_{i\infty}^0 \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot r(f) \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int_0^{i\infty} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz + \int_{ST(0)}^{ST(i\infty)} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &\quad + \int_{(ST)^2(0)}^{(ST)^2(i\infty)} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &= \text{Re} \left(\int_0^{i\infty} f(z)z^{(w)} dz + \int_{-1}^0 f(z)z^{(w)} dz + \int_{i\infty}^{-1} f(z)z^{(w)} dz \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei man das letzte Gleichheitszeichen erhält, indem man im Beweis von Satz 5.22 erlaubt, dass die Integrationskurven γ, δ endlich viele Spitzen durchlaufen und diese Stellen genauso behandelt wie z_0 und z_1 .



□

Lemma 5.27. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Dann ist der Untervektorraum

$$U := (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot \text{Kern}(I_{w+1} - \pi(T)) \subseteq \mathbb{R}^{w+1}$$

in V enthalten, so dass der Faktorraum V/U wohldefiniert ist.

Beweis. Jedes $u \in U$ erfüllt

$$u = (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \quad \text{mit einem } t \in \mathbb{R}^{w+1} \text{ mit } (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t = 0. \quad (5.15)$$

Es gilt daher einerseits $u \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(S))$,

denn:

$$\begin{aligned} (I_{w+1} + \pi(S)) \cdot u &\stackrel{(5.15)}{=} (I_{w+1} + \pi(S)) \cdot (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \\ &= (I_{w+1} - \pi(S) + \pi(S) - \pi(S)\pi(S)) \cdot t \\ &\stackrel{5.2}{=} (I_{w+1} - \pi(S^2)) \cdot t \\ &= (I_{w+1} - \pi(-I_2)) \cdot t \\ &\stackrel{(5.1)}{=} 0, \\ &\quad \text{w gerade} \end{aligned}$$

#

und andererseits $u \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2))$,

denn:

$$\begin{aligned} &(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot u \\ &\stackrel{(5.15)}{=} (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \\ &= (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST) - \pi(S) - \pi(ST)\pi(S) - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S)) \cdot t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5.1)}{\underset{w \text{ gerade}}{=}} (\pi(-I_2) + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST) - \pi(S) - \pi(ST)\pi(S) - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S)) \cdot t \\
& \stackrel{5.2}{=} (\pi(ST)\pi(ST)\pi(ST) + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST) - \pi(S) - \pi(ST)\pi(S) \\
& \quad - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S)) \cdot t \\
& = ((\pi(ST) - \pi(S)) + (\pi(ST)\pi(ST) - \pi(ST)\pi(S)) + (\pi(ST)\pi(ST)\pi(ST) \\
& \quad - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S))) \cdot t \\
& = (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST)) \cdot (\pi(ST) - \pi(S)) \cdot t \\
& \stackrel{5.2}{=} (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST)) \cdot \pi(S) \cdot (\pi(T) - I_{w+1}) \cdot t \\
& \stackrel{(5.15)}{=} 0.
\end{aligned}$$

#

Insgesamt haben wir das Lemma gezeigt. □

Unmittelbar folgt:

Korollar 5.28. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann induziert die Periodenabbildung r eine \mathbb{R} -lineare Abbildung von S_k nach V/U .*

Wir wollen im Folgenden nachweisen, dass die induzierte lineare Abbildung aus Korollar 5.28 injektiv ist. Hierfür müssen wir ein wenig ausholen:

Definition 5.29. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Ein **Kozykel** bezüglich der Darstellung $\pi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$ ist eine Abbildung $\phi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}$ mit der **Kozykelbedingung***

$$\phi(M\tilde{M}) = \phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M}) \quad \text{für alle } M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Nach Korollar 1.28 wird die volle Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von den Matrizen S und T erzeugt. Mit der Kozykelbedingung folgt daher, dass je zwei Kozykel gleich sind, wenn ihre Werte auf S und T übereinstimmen.

Lemma 5.30. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Sei weiter $f \in S_k$ mit $r(f) \in U$, so dass es einen Vektor $t \in \mathbb{R}^{w+1}$ gibt mit*

$$r(f) = (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \quad \text{und} \quad (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t = 0. \quad (5.16)$$

Für ein beliebiges $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt dann

$$\int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f)).$$

Beweis. Nach der oben beschriebenen Eigenschaft von Kozykeln genügt es zu zeigen, dass die Abbildungen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nach \mathbb{R}^{w+1} , die durch

$$\phi(M) := \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \quad \text{und} \quad \tilde{\phi}(M) := (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f))$$

gegeben sind, Kozykel sind und ihre Werte für die Matrizen S und T übereinstimmen. Tatsächlich erfüllen sie die Kozykelbedingung,

denn: Für alle $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt einerseits analog zur Argumentation im Beweis von Lemma 5.26

$$\begin{aligned} \phi(M\tilde{M}) &= \int_0^{(M\tilde{M})\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= \int_0^{M\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz + \int_{M\langle 0 \rangle}^{(M\tilde{M})\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int_0^{M\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz + \pi(M) \cdot \int_0^{\tilde{M}\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= \phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M}) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(M\tilde{M}) &= (I_{w+1} - \pi(M\tilde{M})) \cdot (-t + r(f)) \\ &= I_{w+1} \cdot (-t + r(f)) - \pi(M)\pi(\tilde{M}) \cdot (-t + r(f)) \\ &= I_{w+1} \cdot (-t + r(f)) - \pi(M) \cdot (-t + r(f)) + \pi(M) \cdot (-t + r(f)) \\ &\quad - \pi(M)\pi(\tilde{M}) \cdot (-t + r(f)) \\ &= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f)) + \pi(M)(I_{w+1} - \pi(\tilde{M})) \cdot (-t + r(f)) \\ &= \tilde{\phi}(M) + \pi(M)\tilde{\phi}(\tilde{M}). \end{aligned}$$

#

Weiter gelten

$$\begin{aligned} \phi(S) &= \int_0^{S\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= - \int_{S\langle 0 \rangle}^{S\langle i\infty \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &\stackrel{(5.14)}{=} -\pi(S) \cdot \int_0^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &\stackrel{(5.16)}{=} r(f) - (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t - \pi(S) \cdot r(f) \\ &= (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot (-t + r(f)) \\ &= \tilde{\phi}(S) \end{aligned}$$

und analog zur Argumentation im Beweis von Lemma 5.26

$$\begin{aligned} \phi(T) &= \int_0^{T\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= \int_0^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz + \int_{i\infty}^{T\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= \int_0^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz - \int_{T\langle 0 \rangle}^{T\langle i\infty \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(5.14)}{=} (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot r(f) \\
&\stackrel{(5.16)}{=} -(I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t + (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot r(f) \\
&= (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot (-t + r(f)) \\
&= \tilde{\phi}(T)
\end{aligned}$$

und insgesamt also das Lemma. \square

Lemma 5.31. Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade und $k := w + 2$. Seien weiter $f \in S_k$ mit $r(f) \in U$, $t \in \mathbb{R}^{w+1}$ wie in Lemma 5.30 und

$$s := -t + r(f) = -\pi(S) \cdot t. \quad (5.17)$$

Für die beiden C^∞ -Funktionen

$$\begin{aligned}
F(z) &:= -s + \int_0^z \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta) && \text{mit } dF(z) = \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz), \\
G(z) &:= \int_0^z \operatorname{Re}(if(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta) && \text{mit } dG(z) = \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz)
\end{aligned}$$

und ein beliebiges $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt dann

$$\pi(M) \cdot F(z) = \varphi_M^*(F)(z) \quad \text{und} \quad \pi(M) \cdot dG(z) = \varphi_M^*(dG(z)).$$

Beweis. Sei $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt analog zur Argumentation im Beweis von Lemma 5.26

$$\begin{aligned}
\pi(M) \cdot F(z) &= \pi(M) \cdot \left(-s + \int_0^z \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta)\right) \\
&\stackrel{(5.14)}{=} -\pi(M) \cdot s + \int_{M(0)}^{M(z)} \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta) \\
&= -\pi(M) \cdot s - \int_0^{M(0)} \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta) + \int_0^{M(z)} \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta)
\end{aligned}$$

Mit Lemma 5.30 und der Definition von F folgt

$$\begin{aligned}
\pi(M) \cdot F(z) &= -\pi(M) \cdot s - (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f)) + F(M\langle z \rangle) + s \\
&\stackrel{(5.17)}{=} -\pi(M) \cdot s - (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot s + F(M\langle z \rangle) + s \\
&= \varphi_M^*(F)(z)
\end{aligned}$$

und somit die erste behauptete Gleichung. Die zweite Behauptung des Lemmas folgt unmittelbar aus Korollar 5.12 mit if statt f . \square

Wir können nun das angestrebte Injektivitätsresultat beweisen:

Proposition 5.32. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann gilt

$$r(f) \in U \implies f \equiv 0 \quad \text{für alle } f \in S_k.$$

Beweis. Es reicht zum Beweis der Proposition aus,

$$\int_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] = 0 \quad (5.18)$$

zu zeigen,

denn: Nach (SP_6) gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] &= \frac{(2i)^{w+2}}{4} \int_{\mathcal{F}} \Omega(f, f)(z) \\ &= \frac{(2i)^{w+2}}{4} \langle f \mid f \rangle \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] = 0 &\iff \langle f \mid f \rangle = 0 \\ &\iff f \equiv 0. \end{aligned}$$

#

Um das Verschwinden des Integrals in (5.18) zu zeigen, formen wir geeignet um:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] &\stackrel{5.31}{=} \int_{\mathcal{F}} [dF \mid dG] \\ &\stackrel{(SP_3)}{=} \int_{\mathcal{F}} d[F \mid dG], \end{aligned}$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen die allgemeine Rechenregel $d \circ d = 0$ der äußeren Ableitung ausgenutzt haben. Wenden wir nun noch den Satz von Stokes an, so erhalten wir

$$\int_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] = \int_{\partial\mathcal{F}} [F \mid dG].$$

Nach Lemma 5.31 folgt die Proposition daher aus Übungsaufgabe 5.2. \square

Wir wollen nun noch zeigen, dass die von der Periodenabbildung induzierte lineare Abbildung auch surjektiv ist. Dazu weisen wir nach, dass die reelle Dimension des Bildes von r und die Dimension des \mathbb{R} -Vektorraums V/U übereinstimmen. Aufgrund der in Proposition 5.32 gezeigten Injektivität ist dies äquivalent zu

Proposition 5.33. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann gilt*

$$\dim_{\mathbb{R}} S_k = \dim_{\mathbb{R}} V/U = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U.$$

Für den Beweis von Proposition 5.33 benötigen wir eine genauere Untersuchung des \mathbb{C} -Vektorraums $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ der homogenen Polynome von Grad w in $\mathbb{C}[X, Y]$:

Lemma 5.34. Für $w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ beliebig sind die Polynome

$$(X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \quad \text{mit } j \in \{0, \dots, w\}$$

Eigenvektoren zum Operator $\mathbb{P}(ST)$ mit den (nicht notwendigerweise verschiedenen) Eigenwerten $(-1)^w \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j$ und es gilt

$$\mathbb{P}_w(\mathbb{C}) = \bigoplus_{j=0}^w \langle (X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Beweis. Es gilt

$$ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(ST)(X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \\ &= (Y + \varrho(Y - X))^{w-j}(Y + \bar{\varrho}(Y - X))^j \\ &= ((-\varrho)X + (1 + \varrho)Y)^{w-j}((-\bar{\varrho})X + (1 + \bar{\varrho})Y)^j \\ &= (-1)^w \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j \cdot \left(X + \frac{-1 - \varrho}{\varrho} Y\right)^{w-j} \left(X + \frac{-1 - \bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} Y\right)^j \\ &= (-1)^w \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j \cdot (X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass die primitiven dritten Einheitswurzeln ϱ und $\bar{\varrho}$ Nullstellen des Polynoms

$$\frac{X^3 - 1}{X - 1} = X^2 + X + 1$$

sind. Die Polynome

$$(X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \quad \text{mit } j \in \{0, \dots, w\}$$

sind also Eigenvektoren zum Operator $\mathbb{P}(ST)$, womit wir die erste Behauptung des Lemmas nachgewiesen haben. Zum Beweis der zweiten Behauptung genügt es nun offenbar zu zeigen, dass die $w + 1$ Eigenvektoren ganz $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ aufspannen. Dies zeigen wir per Induktion nach w . Für $w = 0$ ist nichts zu zeigen und für $w = 1$ sind die Eigenvektoren linear unabhängig, weil sich ihre Eigenwerte $-\varrho$ und $-\bar{\varrho}$ voneinander unterscheiden. Nehmen wir nun für ein $w \geq 2$ an, die Behauptung gelte für alle $\ell \in \{0, \dots, w - 1\}$. Für ein beliebiges Polynom

$$P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C})$$

gilt dann

$$P(X, Y) = a_0 Y^w + \sum_{j=0}^{w-1} a_{w-j} X^{w-j} Y^j$$

$$= Y \cdot (a_0 Y^{w-1}) + X \cdot \left(\sum_{j=0}^{w-1} a_{w-j} X^{w-1-j} Y^j \right).$$

Die beiden Polynome X, Y liegen in $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, die beiden an X bzw. Y heranmultiplizierten Polynome in $\mathbb{P}_{w-1}(\mathbb{C})$. Nach Induktionsannahme gibt es daher Koeffizienten $a_0(X), a_1(X), a_0(Y), a_1(Y) \in \mathbb{C}$ und $a'_j(X), a'_j(Y) \in \mathbb{C}$ mit $j \in \{0, \dots, w-1\}$, so dass

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= (a_0(Y)(X + \varrho Y) + a_1(Y)(X + \bar{\varrho} Y)) \cdot \sum_{j=0}^{w-1} a'_j(Y)(X + \varrho Y)^{w-1-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \\ &\quad + (a_0(X)(X + \varrho Y) + a_1(X)(X + \bar{\varrho} Y)) \cdot \sum_{j=0}^{w-1} a'_j(X)(X + \varrho Y)^{w-1-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \end{aligned}$$

gilt. Die Behauptung ergibt sich durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen gleicher Terme. \square

Beweis von Proposition 5.33. Für die im Beweis vorkommenden Rechnungen ist es von Vorteil, statt der Räume $U, V \subseteq \mathbb{R}^{w+1}$ ihre Urbilder $C^{-1}(U), C^{-1}(V) \subseteq \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ unter der Koordinatenabbildung C zu betrachten. Nach Proposition 5.5 gilt dabei

$$\begin{aligned} C^{-1}(V) &= \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S)) \cap \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(ST) + \mathbb{P}((ST)^2)), \\ C^{-1}(U) &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T)). \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun nach und nach die in diesen beiden Formeln vorkommenden Ausdrücke. Zunächst gilt

$$\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T)) = \langle X^w \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (5.19)$$

denn: Für $P \in \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$ gilt

$$(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))(P)(X, Y) = P(X, Y) - P(X, X + Y) = 0$$

und nach Mehrfachenwendung dieses Zusammenhangs

$$P(X, Y) = P(X, Y + nX) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt, dass das Polynom P die Variable Y nicht enthalten kann und also in $\langle X^w \rangle_{\mathbb{R}}$ liegt. $\#$

Hieraus ergibt sich

$$C^{-1}(U) = \langle X^w - Y^w \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{und also} \quad U = \langle {}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (5.20)$$

denn: Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} C^{-1}(U) &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) \cdot \langle X^w \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle X^w - \mathbb{P}(S)(X^w Y^0) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle X^w - Y^w \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

#

Als nächstes berechnen wir die Dimension des \mathbb{R} -Vektorraums $C^{-1}(V)$. Dieser ist als der Durchschnitt der zwei Untervektorräume

$$\begin{aligned} E &:= \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S)), \\ F &:= \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(ST) + \mathbb{P}((ST)^2)) \end{aligned}$$

definiert. Nach der Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} C^{-1}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(E \cap F) = \dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - \dim_{\mathbb{R}}(E + F). \quad (5.21)$$

Um diese Dimensionen besser berechnen zu können, reformulieren wir zunächst E und F . Für diese gilt

$$\begin{aligned} E &= \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)), \\ F &= \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST)), \end{aligned} \quad (5.22)$$

denn: Wir zeigen nur die Behauptung über E ; die Behauptung über F beweist man komplett analog und gilt nach Übungsaufgabe 5.3. Wegen

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S)) \cdot (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) &= \mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)\mathbb{P}(S) \\ &\stackrel{5.1}{=} \mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S^2) \\ &= \mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(-I_2) \\ &\stackrel{w \text{ gerade}}{=} 0 \end{aligned}$$

liegt $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))$ in E . Umgekehrt gilt für ein beliebiges $P \in E$ definitionsgemäß

$$P(X, Y) + P(Y, -X) = (\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S))(P)(X, Y) = 0.$$

Folglich liegt

$$P(X, Y) = \frac{1}{2} \cdot (P(X, Y) - P(Y, -X)) = (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))\left(\frac{1}{2} \cdot P\right)(X, Y)$$

in $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))$. #

Es folgt

$$E + F = \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \quad \text{und also} \quad \dim_{\mathbb{R}}(E + F) = w + 1, \quad (5.23)$$

denn: Wegen $\mathbb{P}(S) \in \text{GL}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R}))$ ist $E + F$ als \mathbb{R} -Vektorraum isomorph zu seinem Bild $\mathbb{P}(S)(E + F)$. Mit (5.22) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S)(E + F) &= \mathbb{P}(S)(\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) + \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))) \\ &= \text{Bild}(\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2)) + \text{Bild}(\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T)), \end{aligned} \quad (5.24)$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen wieder $\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S^2) = \mathbb{P}(-I_2) = \mathbb{P}(I_2)$ ausgenutzt haben.

Betrachten wir nun ein beliebiges $P \in \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$. Für dieses gibt es ein $Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))(Q)(X, Y) + (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2))(-Q)(X, Y) + (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y). \end{aligned}$$

Mit (5.24) folgt also

$$\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T)) \subseteq \mathbb{P}(S)(E + F). \quad (5.25)$$

Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(E + F) &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(S)(E + F) \\ &\geq \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))) \\ &\stackrel{(5.19)}{=} (w + 1) - 1 = w. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass die Inklusion (5.25) keine Gleichheit ist, dass es also in $\mathbb{P}(S)(E + F)$ ein Element gibt, das nicht in $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$ liegt. Tatsächlich gilt wegen der Geradheit von w

$$\begin{aligned} X^w - Y^w &= (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2)) \cdot Y^w \in \text{Bild}(\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2)) \\ &\stackrel{(5.24)}{\subseteq} \mathbb{P}(S)(E + F). \end{aligned}$$

Läge $X^w - Y^w$ auch in $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$, so gäbe es ein

$$P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$$

mit

$$\begin{aligned} X^w - Y^w &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))(P)(X, Y) \\ &= P(X, Y) - P(X, X + Y) \\ &= \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j - \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} (X + Y)^j \\ &= \sum_{j=1}^w a_{w-j} X^{w-j} (Y^j - (X + Y)^j). \end{aligned}$$

Da das Monom X^w auf der rechten Seite dieser Gleichung nicht vorkommt, ist das nicht möglich und wir haben mit $X^w - Y^w$ ein Element in $\mathbb{P}(S)(E + F) \setminus \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$ gefunden. Es ist daher $\dim_{\mathbb{R}}(E + F) = w + 1$ und die Behauptung gezeigt. #

Weiter gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} E = \begin{cases} \frac{w}{2} + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \text{ ungerade,} \\ \frac{w}{2} & \text{für } \frac{w}{2} \text{ gerade} \end{cases} = 2 \cdot \lfloor \frac{w+2}{4} \rfloor, \quad (5.26)$$

denn: Ein Polynom

$$P(X, Y) := \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$$

liegt genau dann im Untervektorraum $E = \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S))$, wenn

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j + \sum_{j=0}^w a_{w-j} (-1)^j Y^{w-j} X^j \\ &= \sum_{j=0}^w (a_{w-j} + (-1)^{w-j} a_j) X^{w-j} Y^j = 0 \end{aligned}$$

gilt und somit auch die Relationen

$$a_{w-j} + (-1)^{w-j} a_j = 0 \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\}. \quad (5.27)$$

Offensichtlich sind nach (5.27) die Koeffizienten $a_{\frac{w}{2}+1}, \dots, a_w$ bereits eindeutig durch die Koeffizienten $a_0, \dots, a_{\frac{w}{2}-1}$ bestimmt. Zusätzlich gilt

$$a_{\frac{w}{2}} + (-1)^{\frac{w}{2}} a_{\frac{w}{2}} = 0,$$

was für gerades $\frac{w}{2}$ den Koeffizienten $a_{\frac{w}{2}}$ auf den Wert 0 festlegt und für ungerades $\frac{w}{2}$ keine Einschränkung darstellt. Das erste Gleichheitszeichen in der Behauptung folgt nun sofort durch Abzählen. Die zweite Gleichheit erhalten wir mit

$$2 \cdot \lfloor \frac{w+2}{4} \rfloor = 2 \cdot \lfloor \frac{\frac{w}{2}+1}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{w}{2} + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \text{ ungerade,} \\ \frac{w}{2} & \text{für } \frac{w}{2} \text{ gerade.} \end{cases}$$

#

Schließlich gilt noch

$$\dim_{\mathbb{R}} F = w + 1 - \begin{cases} \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 & \text{für } w \equiv 0, 2 \pmod{3}, \\ \lfloor \frac{w}{3} \rfloor & \text{für } w \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} = w - 2 \cdot \lfloor \frac{w}{6} \rfloor, \quad (5.28)$$

denn: Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} F &= \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))) \\ &= w + 1 - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Offensichtlich wird $\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))$ von den Eigenvektoren zum Eigenwert 1 aufgespannt. Nach Lemma 5.34 ist die Dimension des Kerns daher durch die Anzahl

$$\begin{aligned}
& \left| \{j \in \{0, \dots, w\} \mid \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j = 1\} \right| \\
& \stackrel{\varrho \bar{\varrho} = 1}{=} \left| \{j \in \{0, \dots, w\} \mid \varrho^{w-2j} = 1\} \right| \\
& \stackrel{\text{ord}(\varrho)=3}{=} \left| \{j \in \{0, \dots, w\} \mid w \equiv 2j \pmod{3}\} \right| \\
& = \left| \{j \in \{0, \dots, w\} \mid j \equiv 2w \pmod{3}\} \right| \\
& = \begin{cases} |\{0, 3, \dots, w\}| & \text{für } w \equiv 0 \pmod{3}, \\ |\{1, 4, \dots, w-1\}| & \text{für } w \equiv 2 \pmod{3}, \\ |\{2, 5, \dots, w-2\}| & \text{für } w \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

gegeben. Das erste Gleichheitszeichen der Behauptung folgt nun sofort durch Abzählen und Einsetzen in (5.29). Die zweite Gleichheit erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
2 \cdot \lfloor \frac{w}{6} \rfloor + 1 &= 2 \cdot \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 \\
&= \begin{cases} 2 \cdot \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 0 \pmod{3}, \\ 2 \cdot \lfloor \frac{\frac{w}{2}-1}{3} + \frac{1}{3} \rfloor + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2 \cdot \lfloor \frac{\frac{w}{2}-2}{3} + \frac{2}{3} \rfloor + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{w+3}{3} & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{w+1}{3} & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{w-1}{3} & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 & \text{für } w \equiv 0 \pmod{3}, \\ \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 & \text{für } w \equiv 2 \pmod{3}, \\ \lfloor \frac{w}{3} \rfloor & \text{für } w \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases}
\end{aligned}$$

#

Wir zeigen nun die Proposition und führen dazu die bisher gezeigten Resultate zusammen:

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U &\stackrel{(5.20),(5.21)}{=} (\dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - \dim_{\mathbb{R}}(E + F)) - 1 \\
&\stackrel{(5.23)}{=} \dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - w - 2 \\
&\stackrel{(5.26),(5.28)}{=} 2 \cdot \lfloor \frac{w+2}{4} \rfloor - 2 \cdot \lfloor \frac{w}{6} \rfloor - 2
\end{aligned}$$

Berechnen wir diesen Ausdruck und führen eine Fallunterscheidung bezüglich w modulo 12 durch, so erhalten wir

$$\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U = 2 \cdot \begin{cases} \lfloor \frac{w+2}{12} \rfloor - 1 & \text{für } w \equiv 0 \pmod{12}, \\ \lfloor \frac{w+2}{12} \rfloor & \text{für } w \not\equiv 0 \pmod{12} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{3.11}{=} 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} S_k \\ &= \dim_{\mathbb{R}} S_k. \end{aligned}$$

□

Insgesamt haben wir in diesem Abschnitt den folgenden Satz gezeigt:

Satz 5.35. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann induziert die Periodenabbildung r einen \mathbb{R} -Isomorphismus $\tilde{r} : S_k \rightarrow V/U$, den **Eichler-Shimura-Isomorphismus**.

5.5 Eichler-Kohomologie

Definition 5.36. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Ein Kozykel $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}$ bezüglich der Darstellung $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$ heißt **cuspidal**, wenn es für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ ein $t_M \in \mathbb{R}^{w+1}$ gibt mit

$$\phi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t_M.$$

Die Menge der cuspidalen Kozykel bezeichnen wir mit $Z^1(\pi)$.

Lemma 5.37. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Die Menge $Z^1(\pi)$ der cuspidalen Kozykel bezüglich der Darstellung $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$ bildet mit der elementweisen Addition als Verknüpfung eine (kommutative) Gruppe.

Beweis. Wir zeigen, dass $Z^1(\pi)$ eine Untergruppe der Gruppe der Abbildungen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nach \mathbb{R}^{w+1} mit der elementweisen Addition ist.

Die konstante Abbildung $\phi \equiv 0$ ist ein cuspidaler Kozykel und die Menge $Z^1(\pi)$ somit nicht leer,

denn: Es gilt

$$\begin{aligned} \phi(M\tilde{M}) &= 0 = \phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M}) && \text{für alle } M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ \phi(M) &= 0 = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot 0 && \text{für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}. \end{aligned}$$

#

Für je zwei cuspidale Kozykel $\phi, \tilde{\phi} \in Z^1(\pi)$ gilt $\phi + \tilde{\phi} \in Z^1(\pi)$,

denn: Wegen der Kozykelbedingung für ϕ und $\tilde{\phi}$ gilt für alle $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} (\phi + \tilde{\phi})(M\tilde{M}) &= \phi(M\tilde{M}) + \tilde{\phi}(M\tilde{M}) \\ &= (\phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M})) + (\tilde{\phi}(M) + \pi(M)\tilde{\phi}(\tilde{M})) \\ &= (\phi + \tilde{\phi})(M) + \pi(M)(\phi + \tilde{\phi})(\tilde{M}), \end{aligned}$$

so dass auch $\phi + \tilde{\phi}$ die Kozykelbedingung erfüllt. Wegen der Cuspidalität von ϕ und $\tilde{\phi}$ gibt es zudem für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ Vektoren $t_M, \tilde{t}_M \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$(\phi + \tilde{\phi})(M) = \phi(M) + \tilde{\phi}(M)$$

$$\begin{aligned}
&= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t_M + (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot \tilde{t}_M \\
&= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (t_M + \tilde{t}_M),
\end{aligned}$$

so dass auch $\phi + \tilde{\phi}$ cuspidal ist. #

Für einen beliebigen cuspidalen Kozykel $\phi \in Z^1(\pi)$ gilt $-\phi \in Z^1(\pi)$,

denn: Wegen der Kozykelbedingung gilt für alle $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$(-\phi)(M\tilde{M}) = -(\phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M})) = (-\phi)(M) + \pi(M)(-\phi)(\tilde{M})$$

und wegen der Cuspidalität von ϕ gibt es für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ ein $t_M \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$(-\phi)(M) = -((I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t_M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t_M).$$

#

□

Definition 5.38. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Ein **Korand** bezüglich der Darstellung $\pi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$ ist eine Abbildung $\psi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}$, für die ein $t \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$\psi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t \quad \text{für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

existiert. Die Menge der Koränder bezeichnen wir mit $B^1(\pi)$.

Lemma 5.39. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Die Menge $B^1(\pi)$ zusammen mit der elementweisen Addition ist eine Untergruppe von $Z^1(\pi)$.

Beweis. Es gilt $\emptyset \neq B^1(\pi) \subseteq Z^1(\pi)$,

denn: Offensichtlich liegt die konstante Abbildung $\psi \equiv 0$ in $B^1(\pi)$, so dass letzteres nicht leer ist. Zudem gibt es für jedes $\psi \in B^1(\pi)$ ein $t \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$\psi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t \quad \text{für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Für alle $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt daher

$$\begin{aligned}
\psi(M\tilde{M}) &= (I_{w+1} - \pi(M\tilde{M})) \cdot t \\
&= (I_{w+1} - \pi(M) + \pi(M) - \pi(M\tilde{M})) \cdot t \\
&= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t + \pi(M) \cdot (I_{w+1} - \pi(\tilde{M})) \cdot t \\
&= \psi(M) + \pi(M)\psi(\tilde{M}),
\end{aligned}$$

so dass ψ ein Kozykel ist. Zudem gilt für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$

$$\psi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t$$

und somit sofort die Cuspidalität. #

Für je zwei Koränder $\psi, \tilde{\psi} \in B^1(\pi)$ gilt $\psi - \tilde{\psi} \in B^1(\pi)$,

denn: Nach Voraussetzung gibt es $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}^{w+1}$, so dass für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} (\psi - \tilde{\psi})(M) &= \psi(M) - \tilde{\psi}(M) \\ &= (I_{w+1} - \pi(M))(t) - (I_{w+1} - \pi(M))(\tilde{t}) \\ &= (I_{w+1} - \pi(M))(t - \tilde{t}) \end{aligned}$$

gilt.

#

□

Definition 5.40. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Die Faktorgruppe

$$H^1(\pi) := Z^1(\pi) / B^1(\pi)$$

heißt die *cuspidale Kohomologiegruppe* oder auch die *Eichler-Kohomologiegruppe*. Die Restklasse eines beliebigen cuspidalen Kozykels $\phi \in Z^1(\pi)$ in $H^1(\pi)$ bezeichnen wir mit $[\phi]$.

Es stellt sich heraus, dass es zum Studium der Eichler-Kohomologie ausreicht cuspidale Kozykel zu betrachten, die den Stabilisator $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ von $i\infty$ annullieren:

Für den Erzeuger $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ schreiben wir

$$\begin{aligned} Z^1(\pi, T) &:= \{\phi \in Z^1(\pi) : \phi(T) = 0\}, \\ B^1(\pi, T) &:= \{\psi \in B^1(\pi) : \psi(T) = 0\}, \\ H^1(\pi, T) &:= Z^1(\pi, T) / B^1(\pi, T) \end{aligned}$$

Die Restklasse eines beliebigen cuspidalen Kozykels $\phi \in Z^1(\pi, T)$ in $H^1(\pi, T)$ bezeichnen wir mit $[\phi]_T$. Dann ist die durch

$$n: \begin{cases} H^1(\pi, T) & \rightarrow H^1(\pi), \\ [\phi]_T & \mapsto [\phi] \end{cases} \quad (5.30)$$

gegebene natürliche Abbildung wohldefiniert,

denn: Für $\phi, \tilde{\phi} \in Z^1(\pi, T)$ mit $[\phi]_T = [\tilde{\phi}]_T$ gilt

$$\phi - \tilde{\phi} \in B^1(\pi, T) \subseteq B^1(\pi)$$

und somit $[\phi] = [\tilde{\phi}]$.

#

Zusammen mit der offensichtlichen Inklusion $i: Z^1(\pi, T) \rightarrow Z^1(\pi)$ und den kanonischen Projektionen der jeweiligen Kozykel auf die Kohomologie erhalten wir so das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\pi, T) & \xhookrightarrow{i} & Z^1(\pi) \\ \downarrow & \cong & \downarrow \\ H^1(\pi, T) & \xrightarrow{n} & H^1(\pi) \end{array}$$

Proposition 5.41. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Die natürliche Abbildung $n: H^1(\pi, T) \rightarrow H^1(\pi)$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Injektivität von n zeigen wir wie folgt: Ein beliebiges Element von $H^1(\pi, T)$ ist von der Form $[\phi]_T$ mit $\phi \in Z^1(\pi, T)$ und wegen der Kommutativität des Diagramms gilt

$$\begin{aligned} [\phi]_T \in \text{Kern}(n) &\iff [i(\phi)] = 0 \\ &\iff i(\phi) \in B^1(\pi) \\ &\iff \phi \in B^1(\pi, T) \\ &\iff [\phi]_T = 0. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Surjektivität von n betrachten wir einen beliebigen Vertreter $\phi \in Z^1(\pi)$ eines gegebenen Elements $[\phi]$ von $H^1(\pi)$. Wir können zu ϕ ein beliebiges Element aus $B^1(\pi)$ addieren, ohne seine Restklasse zu verändern. Definieren wir

$$\psi(M) := (I_{w+1} - \pi(M))t_T \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

mit dem Vektor $t_T \in \mathbb{R}^{w+1}$ aus der Definition der Cuspidalität von ϕ , so liegt ψ nach Definition in $B^1(\pi)$. Der Kozykel

$$\begin{aligned} (\phi - \psi)(M) &:= \phi(M) - \psi(M) \\ &= \phi(M) - (I_{w+1} - \pi(M))t_T \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

erfüllt also

$$[\phi - \psi] = [\phi].$$

Andererseits gilt definitionsgemäß

$$\begin{aligned} (\phi - \psi)(T) &= \phi(T) - (I_{w+1} - \pi(T))t_T \\ &\stackrel{5.36}{=} (I_{w+1} - \pi(T))t_T - (I_{w+1} - \pi(T))t_T \\ &= 0 \end{aligned}$$

und also

$$\phi - \psi \in Z^1(\pi, T).$$

Mit der Kommutativität des Diagramms folgt

$$n([\phi - \psi]_T) = [i(\phi - \psi)] = [\phi - \psi] = [\phi],$$

so dass wir ein Urbild von $[\phi]$ in $H^1(\pi, T)$ gefunden haben. \square

Wir stellen nun einen Zusammenhang zwischen der Eichler-Kohomologie und den in Abschnitt 5.4 betrachteten Vektorräumen $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^{w+1}$ her:

Lemma 5.42. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gelten für die Abbildung

$$h: \begin{cases} Z^1(\pi, T) & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ \phi & \mapsto \phi(S) \end{cases}$$

die Inklusionen

$$h(Z^1(\pi, T)) \subseteq V \quad \text{und} \quad h(B^1(\pi, T)) \subseteq U.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $h(Z^1(\pi, T)) \subseteq V$ und betrachten dafür ein beliebiges $\phi \in Z^1(\pi, T)$. Dann gilt

$$h(\phi) = \phi(S) \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(S)),$$

denn: Mit der Kozykelbedingung gilt

$$(I_{w+1} + \pi(S)) \cdot \phi(S) = \phi(S) + \pi(S)\phi(S) = \phi(S^2) = \phi(-I_2).$$

Wegen $-I_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ und der Cuspidalität von ϕ folgt daraus die Existenz eines $t_{-I_2} \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$(I_{w+1} + \pi(S)) \cdot \phi(S) = (I_{w+1} - \pi(-I_2))t_{-I_2} \stackrel{w \text{ gerade}}{=} 0.$$

#

Zudem gilt

$$h(\phi) = \phi(S) \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)),$$

denn: Mit der Kozykelbedingung gilt

$$\phi(ST) = \phi(S) + \pi(S)\phi(T) = \phi(S), \quad (5.31)$$

$$\phi((ST)^n) = \phi((ST)^{n-1}) + \pi((ST)^{n-1})\phi(ST) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (5.32)$$

Hieraus folgt sofort

$$\begin{aligned} (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot \phi(S) &= \phi(S) + \pi(ST)\phi(S) + \pi((ST)^2)\phi(S) \\ &\stackrel{(5.31)}{=} \phi(ST) + \pi(ST)\phi(ST) + \pi((ST)^2)\phi(ST) \\ &\stackrel{(5.32)}{=} \phi((ST)^2) + \pi((ST)^2)\phi(ST) \\ &\stackrel{(5.32)}{=} \phi((ST)^3) = \phi(-I_2) \stackrel{s.o.}{=} 0. \end{aligned}$$

#

Wir zeigen nun $h(B^1(\pi, T)) \subseteq U$ und betrachten dafür ein beliebiges $\psi \in B^1(\pi, T)$. Dann gilt $\psi(T) = 0$ und es gibt ein $t \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$\psi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

und insbesondere

$$\begin{aligned}\psi(S) &= (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t, \\ 0 = \psi(T) &= (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t.\end{aligned}$$

Es folgt

$$h(\psi) = \psi(S) \in (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot \text{Kern}(I_{w+1} - \pi(T)) = U.$$

□

Lemma 5.43. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Bezeichnet h die Abbildung aus Lemma 5.42, so ist

$$\begin{aligned}h: Z^1(\pi, T) &\rightarrow V && \text{injektiv,} \\ h: B^1(\pi, T) &\rightarrow U && \text{bijektiv.}\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir auf natürliche Weise eine Injektion $\tilde{h}: H^1(\pi, T) \rightarrow V/U$.

Beweis. Die Injektivität von $h: Z^1(\pi, T) \rightarrow V$ ergibt sich, da ein $\phi \in Z^1(\pi, T)$ mit $\phi(S) = 0$ sowohl in S als auch in T verschwindet und daher gemäß der Feststellung nach Definition 5.29 konstant Null ist.

Hieraus folgt sofort die Injektivität der Einschränkung $h: B^1(\pi, T) \rightarrow U$. Zum Nachweis der Surjektivität betrachten wir ein beliebiges $u \in U$. Für dieses gilt nach Definition

$$u = (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \quad \text{mit} \quad (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t = 0.$$

Die Abbildung

$$\psi_u: \begin{cases} \text{SL}_2(\mathbb{Z}) & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ M & \mapsto (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t \end{cases}$$

ist ein Korand und erfüllt $\psi_u(T) = 0$. Somit gibt es für alle $u \in U$ ein $\psi_u \in B^1(\pi, T)$ mit $h(\psi_u) = \psi_u(S) = u$ und die Abbildung $h: B^1(\pi, T) \rightarrow U$ ist surjektiv.

Wir beweisen nun die Wohldefiniertheit von \tilde{h} und betrachten dafür zwei Vertreter $\phi, \tilde{\phi} \in Z^1(\pi, T)$ derselben Restklasse in $H^1(\pi, T)$. Für diese existiert ein $\psi \in B^1(\pi, T)$ mit $\phi - \tilde{\phi} = \psi$ und nach Lemma 5.42 gilt

$$\phi(S), \tilde{\phi}(S) \in V \quad \text{und} \quad \phi(S) - \tilde{\phi}(S) = \psi(S) \in U.$$

Es folgt, dass $h(\phi) = \phi(S)$ und $h(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}(S)$ in derselben Restklasse von V/U liegen und somit die Wohldefiniertheit von \tilde{h} .

Abschließend zeigen wir die Injektivität von \tilde{h} . Dafür betrachten wir zwei Elemente $[\phi]_T, [\tilde{\phi}]_T \in H^1(\pi, T)$ mit Vertretern $\phi, \tilde{\phi} \in Z^1(\pi, T)$, die

$$h(\phi) - h(\tilde{\phi}) = h(\phi - \tilde{\phi}) =: u \in U$$

erfüllen. Wegen der Injektivität von $h: Z^1(\pi, T) \rightarrow V$ und der Bijektivität von $h: B^1(\pi, T) \rightarrow U$ folgt

$$\phi - \tilde{\phi} \in B^1(\pi, T)$$

und also $[\phi]_T = [\tilde{\phi}]_T$. □

Fassen wir die Aussagen von Satz 5.35, Proposition 5.41 und Lemma 5.43 zusammen, haben wir jetzt einen Zusammenhang zwischen dem Raum S_k der Spitzenformen von Gewicht $k := w + 2$ und der cuspidalen Kohomologiegruppe $H^1(\pi) \cong H^1(\pi, T)$ hergeleitet. Abschließend für diesen Abschnitt wollen wir diesen noch präzisieren:

Wir definieren eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$g: \begin{cases} S_k & \rightarrow H^1(\pi), \\ f & \mapsto [\phi_f] \end{cases} \quad \text{mit} \quad \phi_f: \begin{cases} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ M & \mapsto \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz). \end{cases}$$

Diese ist wohldefiniert,

denn: Für beliebige $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$\begin{aligned} \phi_f(M\tilde{M}) &= \int_0^{(M\tilde{M})(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + \int_{M(0)}^{(M\tilde{M})(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + \pi(M) \cdot \int_0^{\tilde{M}(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= \phi_f(M) + \pi(M)\phi_f(\tilde{M}) \end{aligned}$$

und somit die Kozykelbedingung für ϕ_f . Weiter gilt für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$

$$\begin{aligned} \phi_f(M) &= \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= \int_0^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) - \int_{M(0)}^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot r(f), \end{aligned} \tag{5.33}$$

so dass ϕ_f auch cuspidal ist und also in $Z^1(\pi)$ liegt. #

Satz 5.44. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S_k & \xrightarrow{g} & H^1(\pi) & \xrightarrow{n^{-1}} & H^1(\pi, T) \\ & \searrow \tilde{r} & & \swarrow \tilde{h} & \\ & & V/U & & \end{array}$$

antikommutativ, das heißt, es gilt

$$\tilde{h} \circ n^{-1} \circ g = -\tilde{r},$$

und alle vorkommenden Abbildungen sind Isomorphismen; insbesondere gilt

$$S_k \cong H^1(\pi) \cong H^1(\pi, T).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Antikommutativität und betrachten dafür ein $f \in S_k$. Da die durch

$$\psi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot r(f)$$

definierte Abbildung ψ in $B^1(\pi)$ liegt, gilt

$$g(f) = [\phi_f] = [\phi_f - \psi].$$

Wegen (5.33) mit $M = T$ gilt $\phi_f - \psi \in Z^1(\pi, T)$ und also

$$(n^{-1} \circ g)(f) = [\phi_f - \psi]_T.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & (\tilde{h} \circ n^{-1} \circ g)(f) \\ &= \phi_f(S) - \psi(S) \bmod U \\ &= \int_0^{S\langle 0 \rangle} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) - (I_{w+1} - \pi(S)) \int_0^{i\infty} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \bmod U \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int_{S\langle 0 \rangle}^{S\langle i\infty \rangle} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \bmod U \\ &= \int_{i\infty}^0 \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \bmod U \\ &= -\tilde{r}(f) \end{aligned}$$

und somit die Antikommutativität.

Es verbleibt zu zeigen, dass alle vorkommenden Abbildungen Isomorphismen sind. Für den Eichler-Shimura-Isomorphismus \tilde{r} ist dies gerade Satz 5.35. Die Bijektivität von n^{-1} haben wir in Proposition 5.41 gezeigt. Die Injektivität von \tilde{h} haben wir in Lemma 5.43 hergeleitet und die Injektivität von g folgt nun mit der Antikommutativität des Diagramms. Mit der Antikommutativität des Diagramms, der Bijektivität von \tilde{r} , n^{-1} und der Injektivität von \tilde{h} , g folgt

$$\dim_{\mathbb{R}} V/U = \dim_{\mathbb{R}} S_k \leq \dim_{\mathbb{R}} H^1(\pi) = \dim_{\mathbb{R}} H^1(\pi, T) \leq \dim_{\mathbb{R}} V/U.$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$\dim_{\mathbb{R}} S_k = \dim_{\mathbb{R}} H^1(\pi) \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{R}} H^1(\pi, T) = \dim_{\mathbb{R}} V/U$$

und somit die Surjektivität von g und \tilde{h} . □

5.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. In dieser Aufgabe wollen wir die Polynomdarstellung von $GL_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ in einen allgemeineren Kontext stellen. Hierfür betreiben wir zunächst ein wenig multilineare Algebra:

Ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und V ein Vektorraum über einem Körper K mit Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$, so ist

- $T^w(V) := \langle b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_w} \mid i_1, \dots, i_w \in \{1, \dots, n\} \rangle_{\mathbb{R}}$ für $w \in \mathbb{N}$
das w -fache Tensorprodukt von V .

- $T(V) := \bigoplus_{w=1}^{\infty} T^w(V)$ mit der durch

$$\begin{cases} T^w(V) \times T^v(V) & \rightarrow T^{w+v}(V), \\ (b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_w}, b_{j_1} \otimes \dots \otimes b_{j_v}) & \mapsto b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_w} \otimes b_{j_1} \otimes \dots \otimes b_{j_v} \end{cases} \quad \text{für alle } w, v \in \mathbb{N}$$

definierten Multiplikation die **Tensoralgebra** von V .

- $\text{Sym}(V) := T(V)/I(V)$ mit dem homogenen Ideal $I(V) := \langle v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V \rangle_K$
die **symmetrische Algebra** von V ; für das Produkt von zwei Elementen $v, w \in \text{Sym}(V)$ schreiben wir $v \cdot w$.
- $\text{Sym}^w(V)$, das Bild von $T^w(V)$ unter der Projektion auf $\text{Sym}(V)$,
die w -te **symmetrische Potenz** von V ; es gilt $\text{Sym}(V) = \bigoplus_{w=1}^{\infty} \text{Sym}^w(V)$.

Zeigen Sie nun für $n, w \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen:

- (a) $GL_n(\mathbb{R})$ operiert auf $\text{Sym}^w(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) &\rightarrow GL(\text{Sym}^w(\mathbb{R}^n)), \\ M &\mapsto (v_1 \cdot \dots \cdot v_w \mapsto (Mv_1) \cdot \dots \cdot (Mv_w)). \end{aligned}$$

- (b) Der Vektorraum $\text{Sym}^w(\mathbb{R}^n)$ ist isomorph zum Untervektorraum $\mathbb{P}_w^{(n)}(\mathbb{R})$ der homogenen Polynome vom Grad w in $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Aufgabe 5.2. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und seien $F, G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}$ zwei C^∞ -Funktionen mit

$$\varphi_M^*(F(x, y)) = \pi(M) \cdot F(x, y), \quad \varphi_M^*(dG(x, y)) = \pi(M) \cdot dG(x, y) \quad \text{für alle } M \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\partial \mathcal{F}} [F \mid dG] = 0$$

gilt, wobei einfach und im positiven Sinne längs des Randes des Standardfundamentaltbereichs \mathcal{F} der Aktion von $SL_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} integriert werde.

Hinweis: Unterteilen Sie die Integrationskurve geschickt in Teilstücke und integrieren Sie einzeln längs derselben.

Aufgabe 5.3. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Zeigen Sie, dass dann

$$\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST)) = \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(ST) + \mathbb{P}((ST)^2))$$

gilt.

Aufgabe 5.4. Mit dieser Aufgabe wollen wir die Gültigkeit des Eichler-Shimura-Isomorphismus 5.35 explizit im Fall $k = 12$ überprüfen.

- (a) Berechnen Sie die Matrizen $\pi(S)$, $\pi(ST)$ und $\pi((ST)^2)$.
 (b) Ermitteln Sie aus den Berechnungen in Teil (a) eine konkrete Basis für den \mathbb{R} -Untervektorraum

$$V = \text{Kern}(I_{11} + \pi(S)) \cap \text{Kern}(I_{11} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \in \mathbb{R}^{11}.$$

- (c) Folgern Sie mithilfe ihrer Basisvektoren eine Beschreibung des Faktorraums V/U .

Aufgabe 5.5. Sei $k \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$ gerade und sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k$ eine Spitzenform. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Die DIRICHLET-Reihe⁶³

$$L(f; s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)n^{-s}$$

konvergiert gleichmäßig absolut auf Kompakta in der durch $\text{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$ gegebenen Halbebene und stellt dort eine holomorphe Funktion dar, die **Hecke-L-Funktion** von f .

Hinweis: Benutzen Sie die Hecke-Abschätzung 2.38.

- (b) Es gilt

$$\int_0^{i\infty} f(z)z^s dz = i^{s+1}(2\pi)^{-s-1}\Gamma(s+1) \cdot L(f; s+1) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \text{Re}(s) > \frac{k}{2},$$

wobei Γ die in Übungsaufgabe 3.2 eingeführte Funktion bezeichne.

Da das Integral links auf ganz \mathbb{C} konvergiert, haben wir eine holomorphe Fortsetzung von $L(f; s)$ auf ganz \mathbb{C} gefunden.

⁶³Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Manins Periodensatz

In Kapitel 5 haben wir im Rahmen der Herleitung der Periodenabbildung für ein gegebenes gerades $w \in \mathbb{N}$ zu jeder Spitzenform $f \in S_{w+2}$ sogenannte *Periodenintegrale* $r_0(f), \dots, r_w(f)$ eingeführt. In diesem Kapitel untersuchen wir diese im Spezialfall normierter Hecke-Eigenformen genauer und stellen fest, dass es dort interessante Relationen zwischen ihnen gibt. Erste Beispiele hierfür wurden bereits 1957 von Eichler beschrieben und 1959 von Shimura ergänzt. Die entsprechenden Resultate stehen in engem Zusammenhang zum Eichler-Shimura-Isomorphismus 5.35 und finden sich bei uns in Abschnitt 6.1. Wir folgen hierbei sowie in den Abschnitten 6.3 und 6.5 den 1973 erschienenen Überlegungen von MANIN,⁶⁴ der weitere Relationen entdeckte und diese mit denen von Eichler und Shimura zu seinem *Periodensatz* zusammenführte. Letzterer besagt, dass für eine normierte Hecke-Eigenform $f \in S_{w+2}$ die Quotienten

$$\frac{r_j(f)}{r_{j+2}(f)} \quad \text{für } j \in \{0, \dots, w-2\}$$

stets im von den Fourier-Koeffizienten von f über \mathbb{Q} erzeugten Körper $\mathbb{Q}(f)$ liegen, sobald der jeweilige Nenner nicht verschwindet. Für konkrete Beispiele von f lassen sich dabei die Werte der Quotienten mit den benutzten Methoden explizit bestimmen, so leiten wir etwa in Beispiel 6.26 für die Diskriminante $\Delta \in S_{12}$ die rationalen Verhältnisse

$$\begin{aligned} (r_0(\Delta) : r_2(\Delta) : r_4(\Delta)) &= \left(1 : -\frac{691}{1620} : \frac{691}{2520} \right), \\ (r_1(\Delta) : r_3(\Delta) : r_5(\Delta)) &= \left(1 : -\frac{25}{48} : \frac{5}{12} \right) \end{aligned}$$

her. Manins Beweis benutzt Hecke-Theorie und Ergebnisse zu Kettenbrüchen, welche wir in den Abschnitten 6.2 und 6.4 aneignen.

⁶⁴Yuri Manin (*1937)

6.1 Perioden von Spitzenformen

Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$ und $f \in S_k$. Wie in (5.13) schreiben wir dann für alle $j \in \{0, \dots, w\}$

$$r_j(f) := \int_0^{i\infty} f(z)z^j dz$$

für die *Periodenintegrale* – oder kürzer auch *Perioden* – von f . Diese erfüllen eine Reihe von Relationen, die wir in folgender Proposition zusammenfassen:

Proposition 6.1. *Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$ und $f \in S_k$. Dann ist das Tupel $(r_0(f), \dots, r_w(f))$ für alle Werte $j \in \{0, \dots, w\}$ Nullstelle der Polynome*

$$\begin{aligned} ES_j^\perp(X_0, \dots, X_w) &:= X_j + (-1)^j X_{w-j}, \\ ES_j^+(X_0, \dots, X_w) &:= X_j + (-1)^j \left(\sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \text{ gerade}}}^j \binom{j}{\lambda} X_{w-j+\lambda} + \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda+j \text{ gerade}}}^{w-j} \binom{w-j}{\lambda} X_\lambda \right), \\ ES_j^-(X_0, \dots, X_w) &:= \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \text{ ungerade}}}^j \binom{j}{\lambda} X_{w-j+\lambda} + \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda+j \text{ ungerade}}}^{w-j} \binom{w-j}{\lambda} X_\lambda. \end{aligned}$$

Beweis. Analog zu unseren Überlegungen im Beweis von Lemma 5.26 zeigt man

$$\begin{aligned} (I_{w+1} + \pi(S)) \cdot \int_0^{i\infty} f(z)z^{(w)} dz &= 0, \\ (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \int_0^{i\infty} f(z)z^{(w)} dz &= 0. \end{aligned}$$

Mit Proposition 5.10 lässt sich dies zu

$$\begin{aligned} \int_0^{i\infty} f(z)z^{(w)} dz + \int_0^{i\infty} \varphi_S^* (f(z)z^{(w)}) dz &= 0, \\ \int_0^{i\infty} f(z)z^{(w)} dz + \int_0^{i\infty} \varphi_{ST}^* (f(z)z^{(w)}) dz + \int_0^{i\infty} \varphi_{(ST)^2}^* (f(z)z^{(w)}) dz &= 0 \end{aligned}$$

übersetzen. Mit zeilenweisem Auslesen und (5.7) erhalten wir für alle $j \in \{0, \dots, w\}$

$$\begin{aligned} \int_0^{i\infty} f(z) (z^j + (-1)^j z^{w-j}) dz &= 0, \\ \int_0^{i\infty} f(z) (z^j + (-1)^j (z+1)^{w-j} + (-1)^j (z+1)^j z^{w-j}) dz &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile lesen wir sofort ab, dass $(r_0(f), \dots, r_w(f))$ für alle $j \in \{0, \dots, w\}$ Nullstelle von ES_j^\perp ist. Wenden wir auf die zweite Zeile den binomischen Lehrsatz an, so erhalten wir für alle $j \in \{0, \dots, w\}$ die Identität

$$\int_0^{i\infty} f(z) \left(z^j + (-1)^j \sum_{\lambda=0}^{w-j} \binom{w-j}{\lambda} z^\lambda + (-1)^j \sum_{\lambda=0}^j \binom{j}{\lambda} z^{w-j+\lambda} \right) dz = 0. \quad (6.1)$$

Aus dieser folgt, dass $(r_0(f), \dots, r_w(f))$ für alle $j \in \{0, \dots, w\}$ Nullstelle von ES_j^+ und ES_j^- ist,

denn: Nach Satz 4.32 hat S_k eine Basis aus normierten Hecke-Eigenformen und nach Teil (b) von Proposition 4.31 haben diese reelle Fourier-Koeffizienten, liegen also in $S_k^{\mathbb{R}}$. Für jedes $f \in S_k^{\mathbb{R}}$ ist $f(it) \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Es folgt

$$r_j(f) = \int_0^{i\infty} f(z)z^j dz = \int_0^\infty f(it)(it)^j i dt = i^{j+1} \int_0^\infty f(it)t^j dt, \quad (6.2)$$

so dass für $f \in S_k^{\mathbb{R}}$ die Perioden $r_{2j+1}(f)$ reell und die Perioden $r_{2j}(f)$ imaginär sind. Die Behauptung folgt, wenn wir (6.1) in Real- und Imaginärteil aufspalten – zunächst für normierte Hecke-Eigenformen und nach linearer Kombination für beliebige Spitzenformen. #

□

Mit den Beobachtungen gegen Ende des Beweises von Proposition 6.1 lässt sich für reelle Spitzenformen $f \in S_k^{\mathbb{R}}$ das Bild der Periodenabbildung r aus Definition 5.25 durch die Periodenintegrale darstellen. In der Notation von Abschnitt 5.4 gilt nämlich

$$\begin{aligned} r(f) &= \int_0^{i\infty} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)}) dz = \int_0^{i\infty} f(z) \operatorname{Re}(z^{(w)}) dz \\ &= {}^t(0, r_1(f), 0, \dots, r_{w-1}(f), 0) \in V, \end{aligned} \quad (6.3)$$

aber auch

$$\begin{aligned} r\left(\frac{1}{i} \cdot f\right) &= \int_0^{i\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i} f(z)z^{(w)}\right) dz = \int_0^{i\infty} f(z) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i} z^{(w)}\right) dz \\ &= \frac{1}{i} \cdot {}^t(r_0(f), 0, r_2(f), \dots, 0, r_w(f)) \in V. \end{aligned} \quad (6.4)$$

wobei wir für die jeweils zweite Gleichheitszeichen eine Parametrisierung des Integrals längs der imaginären Achse annehmen können. Dieser Zusammenhang ermöglicht es, den Raum $S_k^{\mathbb{R}}$ vermöge des Eichler-Shimura-Isomorphismus 5.35 durch Periodenintegrale zu beschreiben. Bevor wir dies tun, führen wir noch etwas hilfreiche Notation ein:

Definition 6.2. Wir betrachten den \mathbb{R} -Vektorraum

$$\mathbb{R}^{w+1} = \{ {}^t(r_0, r_1, \dots, r_w) \mid r_0, r_1, \dots, r_w \in \mathbb{R} \}$$

als Menge von angeordneten $(w+1)$ -Tupeln und passend dazu

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{w+1,-} &:= \{ {}^t(r_1, r_3, \dots, r_{w-1}) \mid r_1, r_3, \dots, r_{w-1} \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^{\frac{w}{2}}, \\ \mathbb{R}^{w+1,+} &:= \{ {}^t(r_0, r_2, \dots, r_w) \mid r_0, r_2, \dots, r_w \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^{\frac{w+2}{2}}. \end{aligned}$$

Dann definieren wir die Untervektorräume

- $V^- \subseteq \mathbb{R}^{w+1,-}$ aller Vektoren ${}^t(r_1, \dots, r_{w-1}) \in \mathbb{R}^{w+1,-}$ mit

$$ES_j^\perp(0, r_1, 0, \dots, r_{w-1}, 0) = 0 \quad \text{für alle ungeraden } j \in \{0, \dots, w\},$$

$$ES_j^+(0, r_1, 0, \dots, r_{w-1}, 0) = 0 \quad \text{für alle ungeraden } j \in \{0, \dots, w\},$$

$$ES_j^-(0, r_1, 0, \dots, r_{w-1}, 0) = 0 \quad \text{für alle geraden } j \in \{0, \dots, w\},$$

- $V^+ \subseteq \mathbb{R}^{w+1,+}$ aller Vektoren ${}^t(r_0, \dots, r_w) \in \mathbb{R}^{w+1,+}$ mit

$$ES_j^\perp(r_0, 0, \dots, 0, r_w) = 0 \quad \text{für alle geraden } j \in \{0, \dots, w\},$$

$$ES_j^+(r_0, 0, \dots, 0, r_w) = 0 \quad \text{für alle geraden } j \in \{0, \dots, w\},$$

$$ES_j^-(r_0, 0, \dots, 0, r_w) = 0 \quad \text{für alle ungeraden } j \in \{0, \dots, w\}.$$

Bemerkung 6.3. Die in Definition 6.2 eingeführten Vektorräume V^+ und V^- stehen über die kanonischen Einbettungen

$$\iota^\pm : \mathbb{R}^{w+1,\pm} \hookrightarrow \mathbb{R}^{w+1}$$

in enger Beziehung zu den Vektorräumen V und U aus Abschnitt 5.4. Es gelten die folgenden beiden Aussagen:

- (a) Nach Konstruktion gilt

$$V = \iota^+(V^+) \oplus \iota^-(V^-).$$

- (b) Da die Perioden $r_0(f)$ und $r_w(f)$ in allen Gleichungen in Proposition 6.1 die gleichen Koeffizienten haben, gilt

$$U \stackrel{(5.20)}{=} \langle {}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \iota^+(V^+).$$

Wir nutzen die Ambiguität der Notation für uns aus und schreiben ab sofort auch einfacher ${}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \in V^+$.

Wir erhalten nun die folgende Neuformulierung des Eichler-Shimura-Isomorphismus 5.35 für reelle Spitzenformen:

Satz 6.4. Die Abbildung

$$r^- : \begin{cases} S_k^{\mathbb{R}} & \rightarrow V^-, \\ f & \mapsto {}^t(r_1(f), \dots, r_{w-1}(f)) \end{cases}$$

ist ein \mathbb{R} -Vektorraumisomorphismus und die Abbildung

$$r^+ : \begin{cases} S_k^{\mathbb{R}} & \rightarrow V^+, \\ f & \mapsto \frac{1}{i} \cdot {}^t(r_0(f), \dots, r_w(f)) \end{cases}$$

ist ein injektiver \mathbb{R} -Vektorraumhomomorphismus, dessen Bild eine Hyperebene in V^+ ist, die den Vektor ${}^t(1, 0, \dots, 0, -1)$ nicht enthält.

Beweis. Zunächst ist nach Proposition 6.1 und Definition 6.2 klar, dass r^- und r^+ beide wohldefiniert sind und also tatsächlich Werte in V^- bzw. V^+ annehmen.

Nach (6.3) bzw. (6.4) gilt

$$(\iota^- \circ r^-) = r|_{S_k^{\mathbb{R}}} \quad \text{bzw.} \quad (\iota^+ \circ r^+) = r|_{\frac{1}{i} \cdot S_k^{\mathbb{R}}} \circ \left(\frac{1}{i} \cdot \right). \quad (6.5)$$

Mit der in Proposition 5.32 gezeigten Injektivität von r folgt die Injektivität von $(\iota^- \circ r^-)$ und $(\iota^+ \circ r^+)$ und somit auch die von r^- und r^+ .

Nach Bemerkung 6.3 und Proposition 5.32 gilt zudem

$${}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \in \iota^+(V^+) \setminus r(S_k)$$

und mit (6.5) insbesondere auch

$${}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \in V^+ \setminus r^+(S_k^{\mathbb{R}}).$$

Für den Rest des Beweises führen wir Dimensionsbetrachtungen zusammen, die wir schon früher angestellt haben: Aus der Injektivität von r^- und r^+ sowie aus ${}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \notin r^+(S_k^{\mathbb{R}})$ folgen

$$\dim_{\mathbb{R}} S_k^{\mathbb{R}} \leq \dim_{\mathbb{R}} V^- \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{R}} S_k^{\mathbb{R}} \leq \dim_{\mathbb{R}} V^+ - 1.$$

Im Beweis von Proposition 6.1 haben wir eingesehen, dass S_k eine Basis aus Spitzenformen mit reellen Fourier-Koeffizienten hat. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 2 \dim_{\mathbb{R}} S_k^{\mathbb{R}} &= 2 \dim_{\mathbb{C}} S_k = \dim_{\mathbb{R}} S_k \\ &\stackrel{5.33}{=} \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U \\ &\stackrel{(5.20)}{=} \dim_{\mathbb{R}} V - 1 \\ &\stackrel{6.3(a)}{=} \dim_{\mathbb{R}} V^- + (\dim_{\mathbb{R}} V^+ - 1) \end{aligned}$$

und somit insgesamt der Satz. □

6.2 Kettenbrüche

Um in Abschnitt 6.3 für alle $k, n \in \mathbb{N}$ die Perioden der Bilder von Spitzenformen $f \in S_k^{\mathbb{R}}$ unter dem n -ten Hecke-Operator T_n untersuchen zu können, führen wir in diesem Abschnitt mit dem Begriff der Kettenbruchentwicklung reeller Zahlen zunächst ein Hilfsmittel ein. Diese kommt – im Gegensatz etwa zur Dezimalentwicklung – ohne Basiswahl aus und weist darüber hinaus zahlreiche weitere bemerkenswerte Eigenschaften auf:

Definition 6.5. Für $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ mit $a_1, \dots, a_m > 0$ setzen wir

$$[a_0, a_1, \dots, a_m] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_m}}}}$$

und nennen das Tupel $((a_0, \dots, a_m), [a_0, \dots, a_m])$ einen **endlichen Kettenbruch** mit Wert $[a_0, \dots, a_m]$. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, \dots, a_n]$, dann setzen wir

$$[a_0, a_1, \dots] := \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, \dots, a_n]$$

und nennen das Tupel $((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, [a_0, a_1, \dots])$ einen **unendlichen Kettenbruch** mit Wert $[a_0, a_1, \dots]$.

Unter einer **Kettenbruchdarstellung** einer reellen Zahl x verstehen wir einen Kettenbruch, dessen Wert durch x gegeben ist, also einen Kettenbruch der Form $((a_0, \dots, a_m), x)$ oder $((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, x)$. Eine solche Kettenbruchdarstellung von x heißt eine **Kettenbruchentwicklung** von x , wenn $a_0 \in \mathbb{Z}$ ist und $a_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $a_m \neq 1$, falls die Kettenbruchdarstellung endlich ist.

Bemerkung 6.6. Die obige Definition des Wertes endlicher Kettenbrüche lässt sich auch induktiv formulieren: Es ist dann $[a_0] := a_0$ sowie

$$[a_0, \dots, a_i, a_{i+1}] := [a_0, \dots, a_{i-1}, a_i + \frac{1}{a_{i+1}}] \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 6.7. (a) Es ist

$$\frac{65}{27} = 2 + \frac{11}{27} = 2 + \frac{1}{\frac{27}{11}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{5}{11}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{11}{5}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}}} = [2, 2, 2, 5]$$

und also $((2, 2, 2, 5), \frac{65}{27})$ eine endliche Kettenbruchentwicklung von $\frac{65}{27}$.

(b) Falls der Grenzwert $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_{n\text{-mal}}$ existiert, dann gilt offensichtlich

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = 1 + \frac{1}{\phi},$$

also $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Die einzige positive Lösung dieser Gleichung ist $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der **Goldene Schnitt**. Somit ist vorbehaltlich der Existenz des obigen Grenzwertes $([1, 1, \dots], \phi)$ eine unendliche Kettenbruchentwicklung des Goldenen Schnittes.

Zur Berechnung von Kettenbruchentwicklungen dient der folgende Algorithmus:

Algorithmus 6.8 (Kettenbruchalgorithmus). *Es soll die Kettenbruchentwicklung von $x \in \mathbb{R}$ bestimmt werden.*

$$\langle 1 \rangle \quad a_0 := \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, t_0 := x - a_0 \in [0, 1) \text{ und } m := 0.$$

$\langle 2 \rangle$ Solange $t_m \neq 0$ ist, wiederhole $\langle 3 \rangle - \langle 6 \rangle$:

$$\langle 3 \rangle \quad \xi_m := \frac{1}{t_m}$$

$$\langle 4 \rangle \quad a_{m+1} := \lfloor \xi_m \rfloor \in \mathbb{N}$$

$$\langle 5 \rangle \quad t_{m+1} := \xi_m - a_{m+1} \in [0, 1)$$

$$\langle 6 \rangle \quad m := m + 1$$

Falls die Schleife $\langle 2 \rangle - \langle 6 \rangle$ terminiert, falls also nach endlich vielen Schritten $t_m = 0$ erreicht wird, so ist $((a_0, \dots, a_m), x)$ die Kettenbruchentwicklung von x . Falls die Schleife nicht terminiert, so ist $((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, x)$ die Kettenbruchentwicklung von x .

Man kann elementar zeigen, dass der Kettenbruchalgorithmus ein korrektes Ergebnis liefert, indem man den folgenden Satz zeigt:

Satz 6.9. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

- (a) *Die Zahl x besitzt eine eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklung. Diese wird durch den Kettenbruchalgorithmus 6.8 geliefert.*
- (b) *Die Kettenbruchentwicklung von x ist genau dann endlich, wenn x rational ist.*

Ist die Kettenbruchentwicklung von x durch $((a_0, \dots, a_m), x)$ bzw. $((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, x)$ gegeben, dann heißen die rationalen Zahlen $[a_0, \dots, a_n]$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ – und $n \leq m$ für $x \in \mathbb{Q}$ – die **Näherungsbrüche** von x .

Das werden wir in dieser Vorlesung nicht durchführen, aber immerhin einige Teilergebnisse auf dem Weg dorthin diskutieren. Einerseits untersuchen wir, was passiert, wenn der Kettenbruchalgorithmus 6.8 nach endlich vielen Schritten terminiert:

Lemma 6.10. *Mit den Notationen aus dem Kettenbruchalgorithmus 6.8 gilt für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$:*

$$(a) \quad \text{Ist } m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } t_m \neq 0, \text{ dann ist } x = [a_0, \dots, a_m, \xi_m].$$

$$(b) \quad \text{Ist } m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } t_m = 0, \text{ dann ist } x = [a_0, \dots, a_m]. \text{ Im Falle } m \geq 1 \text{ ist dabei } a_m > 1.$$

Es folgt, dass der Kettenbruchalgorithmus, falls er nach endlich vielen Schritten terminiert, eine endliche Kettenbruchentwicklung von x von der Form $((a_0, \dots, a_m), x)$ ausgibt.

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a) per Induktion nach m und setzen dafür $m = 0$ und $t_0 \neq 0$. Dann ist

$$\xi_0 = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{x - a_0}$$

und deshalb

$$x = a_0 + \frac{1}{\xi_0} = [a_0, \xi_0].$$

Das zeigt den Induktionsanfang. Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, wir hätten bereits $x = [a_0, \dots, a_m, \xi_m]$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$ gezeigt und es gelte $t_{m+1} \neq 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x &= [a_0, \dots, a_m, \xi_m] = [a_0, \dots, a_m, a_{m+1} + t_{m+1}] = [a_0, \dots, a_m, a_{m+1} + \frac{1}{\xi_{m+1}}] \\ &= [a_0, \dots, a_m, a_{m+1}, \xi_{m+1}] \end{aligned}$$

und somit Behauptung (a).

Wir zeigen nun Behauptung (b). Ist hierbei einerseits $t_0 = 0$, so gilt offenbar $x = [a_0]$. Ist andererseits $m \geq 1$ mit $t_m = 0$, so ist $t_{m-1} \neq 0$, weshalb sich aus Aussage (a) unmittelbar $x = [a_0, \dots, a_{m-1}, \xi_{m-1}]$ ergibt. Mit $0 = t_m = \xi_{m-1} - a_m$ folgt $x = [a_0, \dots, a_m]$. In diesem Fall ist $a_m = \xi_{m-1} = \frac{1}{t_{m-1}} > 1$ wegen $t_{m-1} \in (0, 1)$. \square

Für den Fall, dass die Kettenbruchentwicklung nicht nach endlich vielen Schritten terminiert, gibt es die folgenden wichtigen Rechenregeln, die wir hier in einem (unbewiesenen) Lemma zusammenfassen:

Lemma 6.11. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge ganzer Zahlen mit $a_n \geq 1$ für $n \geq 1$. Wir setzen

$$\begin{aligned} p_{-2} &:= 0, & p_{-1} &:= 1, & p_n &:= a_n p_{n-1} + p_{n-2} & \text{für alle } n \geq 0 & \text{ (insb. } p_0 = a_0), \\ q_{-2} &:= 1, & q_{-1} &:= 0, & q_n &:= a_n q_{n-1} + q_{n-2} & \text{für alle } n \geq 0 & \text{ (insb. } q_0 = 1), \end{aligned}$$

oder alternativ in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} p_{-1} & p_{-2} \\ q_{-1} & q_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } n \geq 0.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- (b) $[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- (c) $[a_0, \dots, a_n, \xi] = \frac{\xi p_n + p_{n-1}}{\xi q_n + q_{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0, \xi \in \mathbb{R}_{>0}$.
- (d) $q_{n+1} > q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbes. $q_n \geq n$.
- (e) $q_1 \geq q_0$ mit Gleichheit genau für $a_1 = 1$.
- (f) $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- (g) $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- (h) $\text{ggT}(p_n, q_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

6.3 Die Wirkung von Hecke-Operatoren auf Perioden

Seien $n \in \mathbb{N}$, $w \in 2\mathbb{N}$, $k := w + 2$ und $f \in S_k$. In diesem Abschnitt untersuchen wir die Perioden

$$r_j(f|_k T_n) \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\} \quad (6.6)$$

des Bildes von f unter dem n -ten Hecke-Operator T_n und zeigen, dass sich diese als ganzzahlige Linearkombination der Perioden $r_j(f)$ mit $j \in \{0, \dots, w\}$ schreiben lassen. Als Vorarbeit hierzu beginnen wir mit einer ersten Anwendung der in Abschnitt 6.2 eingeführten Kettenbrüche auf Periodenintegrale:

Lemma 6.12. *Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$ und $f \in S_k$. Für alle $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ mit $|p| < q$ und $j \in \{0, \dots, w\}$ lassen sich dann die Integrale*

$$\int_0^{\frac{p}{q}} f(z) z^j dz$$

als \mathbb{Z} -Linearkombination der Perioden von f schreiben. Die Koeffizienten dieser Linearkombination sind dabei unabhängig von der Wahl von f .

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $\text{ggT}(p, q) = 1$ annehmen. Für $0 < p < q$ hat dann $\frac{p}{q}$ eine Kettenbruchentwicklung der Form

$$\left((0, a_1, \dots, a_m), \frac{p}{q} \right) \quad \text{mit einem } m \in \mathbb{N}.$$

Sind nun $\frac{p_0}{q_0}, \dots, \frac{p_m}{q_m}$ die Näherungsbrüche von $\frac{p}{q}$, so liegen für ein beliebiges $i \in \{1, \dots, m\}$ die Matrizen

$$M_i := \begin{pmatrix} p_i & (-1)^{i-1} p_{i-1} \\ q_i & (-1)^{i-1} q_{i-1} \end{pmatrix} \stackrel{6.11(a)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{i-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{M}_i := \begin{pmatrix} (-1)^i p_{i-1} & -p_i \\ (-1)^{i-1} q_{i-1} & q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

offensichtlich in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und erfüllen

$$M_i \langle 0 \rangle = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}, \quad M_i \langle i\infty \rangle = \frac{p_i}{q_i},$$

$$\tilde{M}_i \langle 0 \rangle = -\frac{p_i}{q_i}, \quad \tilde{M}_i \langle i\infty \rangle = -\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}.$$

Mit $\frac{p_0}{q_0} = 0$ und $\frac{p_m}{q_m} = \frac{p}{q}$ und, wenn wir Satz 5.22 wie im Beweis von Lemma 5.26 verallgemeinert anwenden, folgt

$$\int_0^{\frac{p}{q}} f(z) z^j dz = \sum_{i=1}^m \int_{\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}}^{\frac{p_i}{q_i}} f(z) z^j dz$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m \int_{M_i(0)}^{M_i(i\infty)} f(z)z^j dz \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^{i\infty} \varphi_{M_i}^* \left(f(z)z^j dz \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^{i\infty} f(z) \mathbb{P}({}^t M_i)(z^j 1^{w-j}) dz,
\end{aligned}$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen wie im Beweis von Proposition 5.10 argumentiert haben, und analog

$$\int_0^{-\frac{p}{q}} f(z)z^j dz = - \sum_{i=1}^m \int_0^{i\infty} f(z) \mathbb{P}({}^t \tilde{M}_i)(z^j 1^{w-j}) dz.$$

Nach Definition der Polynomdarstellung \mathbb{P} und wegen der Ganzzahligkeit der Koeffizienten von M_i bzw. \tilde{M}_i ist $\mathbb{P}({}^t M_i)(z^j 1^{w-j})$ bzw. $\mathbb{P}({}^t \tilde{M}_i)(z^j 1^{w-j})$ eine von der Wahl von f unabhängige, ganzzahlige Linearkombination der Monome z^0, z^1, \dots, z^w . Insgesamt haben wir somit das Lemma gezeigt. \square

Korollar 6.13. Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$ und $f \in S_k$. Seien weiter $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ mit $|p| < q$ und $j, J \in \{0, \dots, w\}$. Dann verschwinden in der nach Lemma 6.12 existenten \mathbb{Z} -Linearkombination von Perioden $r_\nu(f)$ mit $\nu \in \{0, \dots, j\}$ des Ausdrucks

$$(-1)^{j-J} \int_0^{\frac{p}{q}} f(z)z^j dz + \int_0^{-\frac{p}{q}} f(z)z^j dz$$

alle Koeffizienten zu den Perioden mit $\nu \not\equiv J \pmod{2}$.

Beweis. Wir betrachten

$$\begin{aligned}
&(-1)^{j-J} \int_0^{\frac{p}{q}} f(z)z^j dz + \int_0^{-\frac{p}{q}} f(z)z^j dz \\
&\stackrel{6.12}{=} \sum_{i=1}^m \int_0^{i\infty} f(z) \left((-1)^{j-J} \mathbb{P}({}^t M_i) - \mathbb{P}({}^t \tilde{M}_i) \right) (z^j 1^{w-j}) dz \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^{i\infty} f(z) \left((-1)^{j-J} \mathbb{P}({}^t M_i) - \mathbb{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{P}({}^t M_i) \mathbb{P} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) (z^j 1^{w-j}) dz \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^{i\infty} f(z) \left((-1)^{j-J} \mathbb{P}({}^t M_i)(z^j 1^{w-j}) - (-1)^j \mathbb{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{P}({}^t M_i)(z^j 1^{w-j}) \right) dz.
\end{aligned}$$

Durch die Aktion von $\mathbb{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wird für jedes $\nu \in \{0, \dots, w\}$ die Potenz z^ν auf $z^{w-\nu}$ abgebildet, so dass sämtliche Summanden im obigen Ausdruck bis auf einen ganzzahligen Vorfaktor von der Form

$$\int_0^{i\infty} f(z) \left((-1)^{j-J} z^\nu - (-1)^j z^{w-\nu} \right) dz$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{j-J} (r_v(f) - (-1)^J r_{w-v}(f)) \\
&= (-1)^{j-J} ES_v^\perp(r_0(f), \dots, r_w(f)) \quad \text{für } v \not\equiv J \pmod{2}
\end{aligned}$$

sind und nach Proposition 6.1 somit verschwinden. \square

Nun können wir die Perioden aus (6.6) beschreiben:

Satz 6.14. Seien $n \in \mathbb{N}$, $w \in 2\mathbb{N}$ und $k := w + 2$. Dann gibt es Koeffizienten

$$m_{j,J}(n) \quad \text{für alle } j, J \in \{0, \dots, w\}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $m_{j,J}(n) = 0$ für alle $j \not\equiv J \pmod{2}$,
- (ii) $r_J(f|_k T_n) = \sum_{j=0}^w m_{j,J}(n) r_j(f)$ für alle $f \in S_k$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
r_J(f|_k T_n) &= \int_0^{i\infty} (f|_k T_n)(z) z^J dz \\
&\stackrel{4.23}{=} \int_0^{i\infty} n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \pmod{d}}} d^{-k} \cdot f\left(\frac{az+b}{d}\right) z^J dz \\
&= \int_0^{i\infty} \sum_{0 < d|n} \frac{n^{k-1}}{d^k} \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* f\left(\frac{nz}{d^2} + \frac{b}{d}\right) z^J dz,
\end{aligned}$$

wobei der Stern über dem Summenzeichen anzeigen soll, dass die Terme für $n \in \{\pm \frac{d}{2}\}$ mit Vorfaktor $\frac{1}{2}$ zu zählen sind. Nun ziehen wir das Integral in die endliche Summe und substituieren mit $z \mapsto \frac{d^2 z}{n} - \frac{bd}{n}$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
r_J(f|_k T_n) &= \sum_{0 < d|n} \frac{n^{k-1}}{d^k} \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* \int_0^{i\infty} f\left(\frac{nz}{d^2} + \frac{b}{d}\right) z^J dz \\
&= \sum_{0 < d|n} \frac{n^{k-1}}{d^k} \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* \int_{\frac{b}{d}}^{i\infty} f(z) \left(\frac{d^2 z}{n} - \frac{bd}{n}\right)^J \frac{d^2}{n} dz \\
&\stackrel{5.22}{=} \sum_{0 < d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{w-J} \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* \left(\int_0^{i\infty} - \int_0^{\frac{b}{d}}\right) f(z) (dz - b)^J dz \\
&= \sum_{0 < d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{w-J} \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* \sum_{j=0}^J \binom{J}{j} d^j (-b)^{j-J} \left(\int_0^{i\infty} - \int_0^{\frac{b}{d}}\right) f(z) z^j dz,
\end{aligned} \tag{6.7}$$

wobei die letzte Gleichheit mit dem binomischen Lehrsatz folgt. Somit sind die Perioden $r_J(f|_k T_n)$ ganzzahlige Linearkombinationen der Größen

$$r_j(f) \quad \text{und} \quad \int_0^{b/d} f(z)z^j dz \quad \text{mit jeweils } 0 \leq j \leq J$$

und nach Lemma 6.12 sogar ganzzahlige Linearkombinationen der Perioden $r_j(f)$ mit $j \in \{0, \dots, w\}$ alleine. Wir haben also Koeffizienten $m_{j,J}(n) \in \mathbb{Z}$ mit Eigenschaft (ii) gefunden.

Es verbleibt zu zeigen, dass diese Koeffizienten auch Eigenschaft (i) erfüllen. Nach den obigen Überlegungen gilt

$$\begin{aligned} r_J(f|_k T_n) &= \sum_{0 < d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{w-J} \sum_{j=0}^J \sum_{\substack{|b| \leq \frac{d}{2} \\ b > 0}}^* \binom{J}{j} d^j (-b)^{j-J} \left(\int_0^{\frac{b}{d}} f(z)z^j dz - r_j(f) \right) \\ &= \sum_{0 < d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{w-J} \sum_{j=0}^J \sum_{\substack{|b| \leq \frac{d}{2} \\ b > 0}}^* \binom{J}{j} d^j b^{j-J} \left((-1)^{j-J} \int_0^{\frac{b}{d}} f(z)z^j dz \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{-\frac{b}{d}} f(z)z^j dz - \left((-1)^{j-J} + 1 \right) r_j(f) \right). \end{aligned}$$

Man beachte, dass sich die Summanden $\left((-1)^{j-J} + 1 \right) r_j(f)$ für $j \not\equiv J \pmod{2}$ verschwinden. Es genügt daher zu zeigen, dass in den Termen

$$\sum_{\substack{|b| \leq \frac{d}{2} \\ b > 0}}^* \binom{J}{j} d^j b^{j-J} \left((-1)^{j-J} \int_0^{\frac{b}{d}} f(z)z^j dz + \int_0^{-\frac{b}{d}} f(z)z^j dz \right)$$

die Koeffizienten der Perioden, deren Index eine zu J unterschiedliche Parität aufweist, alle Null sind. Das ist aber gerade Korollar 6.13. \square

Nach Satz 6.14 sind für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $w \in 2\mathbb{N}$ und $k := w + 2$ die Endomorphismen

$$\begin{aligned} T_n^- &: \begin{cases} \mathbb{R}^{w+1,-} & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1,-}, \\ {}^t(r_1, r_3, \dots, r_{w-1}) & \mapsto {}^t \left(\sum_{j=0}^w m_{j,1}(n)r_j, \dots, \sum_{j=0}^w m_{j,w-1}(n)r_j \right), \end{cases} \\ T_n^+ &: \begin{cases} \mathbb{R}^{w+1,+} & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1,+}, \\ {}^t(r_0, r_2, \dots, r_w) & \mapsto {}^t \left(\sum_{j=0}^w m_{j,0}(n)r_j, \dots, \sum_{j=0}^w m_{j,w}(n)r_j \right) \end{cases} \end{aligned}$$

wohldefiniert. Dies ermöglicht eine genaue Beschreibung der Werte der Hecke-Bilder reeller Spitzenformen unter den Abbildungen r^- und r^+ aus Satz 6.4:

Proposition 6.15. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $w \in 2\mathbb{N}$ und $k := w + 2$. Für eine beliebige reelle Spitzenform $f \in S_k^{\mathbb{R}}$ gilt dann*

$$r^\pm(f|_k T_n) = T_n^\pm(r^\pm(f)).$$

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 T_n^-(r^-(f)) &\stackrel{6.4}{=} T_n^-({}^t(r_1(f), r_3(f), \dots, r_{w-1}(f))) \\
 &= {}^t\left(\sum_{j=0}^w m_{j,1}(n)r_j(f), \dots, \sum_{j=0}^w m_{j,w-1}(n)r_j(f)\right) \\
 &\stackrel{6.14}{=} {}^t(r_1(f|_k T_n), \dots, r_{w-1}(f|_k T_n)) \\
 &= r^-(f|_k T_n)
 \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
 T_n^+(r^+(f)) &\stackrel{6.4}{=} \frac{1}{i} \cdot T_n^+({}^t(r_0(f), r_2(f), \dots, r_w(f))) \\
 &= \frac{1}{i} \cdot {}^t\left(\sum_{j=0}^w m_{j,0}(n)r_j(f), \dots, \sum_{j=0}^w m_{j,w}(n)r_j(f)\right) \\
 &\stackrel{6.14}{=} \frac{1}{i} \cdot {}^t(r_0(f|_k T_n), \dots, r_w(f|_k T_n)) \\
 &= r^+(f|_k T_n).
 \end{aligned}$$

□

6.4 Das Lemma von Heilbronn

Mit Blick auf den Beweis des Periodensatzes von Manin 6.21 in Abschnitt 6.5 setzen wir die in Abschnitt 6.2 eingeführten Kettenbruchentwicklungen ein weiteres Mal ein, diesmal, um bestimmte Lösungsmengen quadratischer Formen zu beschreiben. Hierfür setzen wir:

Definition 6.16. Sei $q > 1$ eine ganze Zahl. Eine *Lösung* der Gleichung

$$q = \Delta\Delta' + \delta\delta' \tag{6.8}$$

ist ein geordnetes Quadrupel $(\Delta, \Delta', \delta, \delta')$ von Zahlen, die diese Gleichung erfüllen. Eine solche Lösung heißt **zulässig**, wenn sie aus ganzen Zahlen besteht, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $\text{ggT}(\Delta, \delta) = 1$ und $\text{ggT}(\Delta', \delta') = 1$,
- entweder ist $(0 < \delta < \Delta$ und $0 < \delta' < \Delta')$ oder $(0 < \delta < \frac{\Delta}{2} < \Delta = q$ und $0 = \delta' < \Delta' = \frac{q}{\Delta} = 1)$

und **fast zulässig**, wenn sie aus ganzen Zahlen besteht, für die nur die folgende, abgeschwächte Bedingung gilt:

- entweder ist $(0 < \delta < \Delta$ und $0 < \delta' < \Delta')$ oder $(0 < \delta \leq \frac{\Delta}{2} < \Delta \mid q$ und $0 = \delta' < \Delta' = \frac{q}{\Delta})$

Die Menge der zulässigen bzw. fast zulässigen Lösungen $(\Delta, \Delta', \delta, \delta')$ der Gleichung (6.8) induziert eine endliche Familie von Paaren (Δ, δ) , die in diesen Lösungen vorkommen, die Familie

$\mathcal{F}_{zul(q)}$ der q -zulässigen Paare bzw. die Familie $\mathcal{F}_{fzul(q)}$ der fast q -zulässigen Paare. Wir werden später Funktionen auf Paaren ganzer Zahlen über diese Familie aufsummieren müssen. Für praktische Zwecke bietet es sich daher an, die Familie $\mathcal{F}_{zul(q)}$ bzw. die Familie $\mathcal{F}_{fzul(q)}$ als die Menge der unterschiedlichen und mit geeigneten Vielfachheiten ausgestatteten Paare (Δ, δ) zu betrachten.

Im Jahr 1969 erschien das folgende Resultat von HEILBRONN:⁶⁵

Satz 6.17 (Lemma von Heilbronn). *Für eine ganze Zahl $q > 2$ stimmen die folgenden beiden Familien geordneter Paare ganzer Zahlen überein:*

- (i) *Die Familie $\mathcal{F}_{KB(q)}$ der Paare (q_i, q_{i-1}) aufeinanderfolgender Nenner von Näherungsbrüchen der Kettenbruchentwicklungen beliebiger rationaler Zahlen $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\text{ggT}(p, q) = 1$ und $1 \leq p < \frac{q}{2}$.*
- (ii) *Die Familie $\mathcal{F}_{zul(q)}$ der q -zulässigen Paare.*

Zum Beweis des Lemmas von Heilbronn 6.17 drücken wir Kettenbrüche durch Quotienten von Werten bestimmter Polynome aus und schaffen uns so eine Möglichkeit, Kettenbrüche rekursiv zu konstruieren. Als Polynome wählen wir hierbei:

Definition 6.18. *Für $m \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ seien die Polynome $Q_m \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$ rekursiv definiert durch*

$$Q_{-1} := 0, \quad Q_0 := 1 \quad \text{und} \quad Q_m := X_m \cdot Q_{m-1} + Q_{m-2} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ gilt hierbei offensichtlich $Q_m \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$, was die Schreibweise $Q_m(X_1, \dots, X_m)$ an Stelle von $Q_m(X_1, X_2, \dots)$ rechtfertigt.

Durch einfaches Vergleichen der Rekursionsformel der Polynome aus Definition 6.18 mit derjenigen aus Lemma 6.11 erhält man sofort:

Lemma 6.19. *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Dann gilt*

$$[0, a_1, \dots, a_m] = \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{Q_m(a_1, \dots, a_m)} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0.$$

Mit $a_0 := 0$ präzisiert sich dies zu

$$Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m) = p_m \quad \text{und} \quad Q_m(a_1, \dots, a_m) = q_m.$$

Neben der Rekursionsformel aus Definition 6.18 erfüllen die Polynome Q_m noch weitere Rekursionseigenschaften:

Lemma 6.20. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

⁶⁵Hans Arnold Heilbronn (1908-1975)

- (a) $Q_m(X_1, \dots, X_m) = Q_m(X_m, \dots, X_1)$ für alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$.
- (b) $Q_m(X_1, \dots, X_m) = X_1 Q_{m-1}(X_2, \dots, X_m) + Q_{m-2}(X_3, \dots, X_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
- (c) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und alle $0 \leq i \leq m$ gilt

$$Q_m(X_1, \dots, X_m) = Q_i(X_1, \dots, X_i) \cdot Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) \\ + Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) \cdot Q_{m-i-1}(X_{i+2}, \dots, X_m).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a), also die Symmetrie der Polynome Q_m . Diese Aussage gilt offensichtlich für $m = -1$ und $m = 0$, da die betreffenden Polynome konstant sind, und für $m = 1$, da Q_1 ein Polynom in nur einer Variablen ist. Für $m = 2$ gilt

$$Q_2(X_1, X_2) = X_2 Q_1(X_1) + Q_0 = X_2 X_1 + 1 = Q_2(X_2, X_1).$$

Wir nehmen nun an, die Symmetrie der Polynome Q_m sei bis zu einem fest gewählten $m \geq 2$ bereits gezeigt. Durch abwechselndes Anwenden der Rekursionsformel aus Definition 6.18 und der bereits gezeigten Symmetrieeigenschaften erhalten wir dann

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(X_1, \dots, X_{m+1}) &\stackrel{6.18}{=} X_{m+1} Q_m(X_1, \dots, X_m) + Q_{m-1}(X_1, \dots, X_{m-1}) \\ &= X_{m+1} Q_m(X_m, \dots, X_1) + Q_{m-1}(X_{m-1}, \dots, X_1) \\ &\stackrel{6.18}{=} X_{m+1} (X_1 Q_{m-1}(X_m, \dots, X_2) + Q_{m-2}(X_m, \dots, X_3)) \\ &\quad + (X_1 Q_{m-2}(X_{m-1}, \dots, X_2) + Q_{m-3}(X_{m-1}, \dots, X_3)) \\ &= X_1 (X_{m+1} Q_{m-1}(X_2, \dots, X_m) + Q_{m-2}(X_2, \dots, X_{m-1})) \\ &\quad + (X_{m+1} Q_{m-2}(X_3, \dots, X_m) + Q_{m-3}(X_3, \dots, X_{m-1})) \\ &\stackrel{6.18}{=} X_1 Q_m(X_2, \dots, X_{m+1}) + Q_{m-1}(X_3, \dots, X_{m+1}) \\ &= X_1 Q_m(X_{m+1}, \dots, X_2) + Q_{m-1}(X_{m+1}, \dots, X_3) \\ &\stackrel{6.18}{=} Q_{m+1}(X_{m+1}, \dots, X_1), \end{aligned}$$

also die Symmetrie von Q_{m+1} und somit insgesamt Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) verwenden wir die bereits bekannte Rekursionsformel und erhalten für ein beliebiges m aus den natürlichen Zahlen

$$\begin{aligned} Q_m(X_1, \dots, X_m) &\stackrel{(a)}{=} Q_m(X_m, \dots, X_1) \\ &\stackrel{6.18}{=} X_1 Q_{m-1}(X_m, \dots, X_2) + Q_{m-2}(X_m, \dots, X_3) \\ &\stackrel{(a)}{=} X_1 Q_{m-1}(X_2, \dots, X_m) + Q_{m-2}(X_3, \dots, X_m). \end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir Behauptung (c) und wählen dafür fest ein beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$. Für $i = m$ ist dann die Behauptung wegen $Q_0 = 1$ und $Q_{-1} = 0$ offensichtlich korrekt. Nehmen wir nun an, die Behauptung gelte für ein festes $0 < i \leq m$. Es folgt

$$Q_m(X_1, \dots, X_m)$$

$$\begin{aligned}
&= Q_i(X_1, \dots, X_i) \cdot Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) \\
&\quad + Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) \cdot Q_{m-i-1}(X_{i+2}, \dots, X_m) \\
&\stackrel{6.18}{=} (X_i Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) + Q_{i-2}(X_1, \dots, X_{i-2})) \cdot Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) \\
&\quad + Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) \cdot Q_{m-i-1}(X_{i+2}, \dots, X_m) \\
&= Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) \cdot (X_i Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) + Q_{m-i-1}(X_{i+2}, \dots, X_m)) \\
&\quad + Q_{i-2}(X_1, \dots, X_{i-2}) \cdot Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) \\
&\stackrel{(b)}{=} Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) \cdot Q_{m-i+1}(X_i, \dots, X_m) \\
&\quad + Q_{i-2}(X_1, \dots, X_{i-2}) \cdot Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) \\
&= Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) \cdot Q_{m-(i-1)}(X_{(i-1)+1}, \dots, X_m) \\
&\quad + Q_{(i-1)-1}(X_1, \dots, X_{(i-1)-1}) \cdot Q_{m-(i-1)-1}(X_{(i-1)+2}, \dots, X_m)
\end{aligned}$$

und also die Behauptung für $i - 1$. □

Mit diesen Werkzeugen ausgestattet zeigen wir nun das Lemma von Heilbronn:

Beweis von Satz 6.17. Sei $q > 2$ für diesen Beweis fest gegeben.

Wir zeigen zunächst die Inklusion $\mathcal{F}_{KB(q)} \subseteq \mathcal{F}_{zul(q)}$. Bezeichne dabei $m(\frac{p}{q})$ für ein $p \in \mathbb{N}$ die Länge der Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q}$. Dann gibt es für jedes Paar $(q_i, q_{i-1}) \in \mathcal{F}_{KB(q)}$ ein Paar (p, i) in der Indexmenge

$$I_{KB(q)} := \{(p, i) \mid 1 \leq p < \frac{q}{2}, \text{ggT}(p, q) = 1, 1 \leq i \leq m(\frac{p}{q})\},$$

so dass q_i bzw. q_{i-1} der Nenner des i -ten bzw. $(i - 1)$ -ten Näherungsbruchs der Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q}$ ist.

Sei nun ein festes Paar $(q_i, q_{i-1}) \in \mathcal{F}_{KB(q)}$ gegeben und sei $(p, i) \in I_{KB(q)}$ ein passendes Indexpaar. Nach Satz 6.9 besitzt die zugehörige rationale Zahl $\frac{p}{q}$ eine eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklung der Form

$$((a_0, a_1, \dots, a_m), \frac{p}{q}) \quad \text{mit } m := m(\frac{p}{q}).$$

Hierbei gelten die Eigenschaften

$$a_0 \stackrel{6.8}{=} \lfloor \frac{p}{q} \rfloor = 0 \quad \text{wegen } p < q, \quad (6.9)$$

$$a_1 \stackrel{6.8}{=} \lfloor \frac{1}{\frac{p}{q} - a_0} \rfloor \stackrel{(6.9)}{=} \lfloor \frac{q}{p} \rfloor \geq 2 \quad \text{wegen } 1 \leq p < \frac{q}{2}, \quad (6.10)$$

$$a_m \geq 2 \quad \text{nach Lemma 6.10 (b)}. \quad (6.11)$$

Um (q_i, q_{i-1}) als Element von $\mathcal{F}_{zul(q)}$ zu erkennen, setzen wir

$$\Delta := Q_i(a_1, \dots, a_i), \quad \delta := Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}),$$

$$\Delta' := Q_{m-i}(a_{i+1}, \dots, a_m), \quad \delta' := Q_{m-i-1}(a_{i+2}, \dots, a_m)$$

und stellen fest, dass nach Lemma 6.19 unabhängig von der Wahl des Paares $(p, i) \in I_{KB(q)}$ die Identität

$$(\Delta, \delta) = (q_i, q_{i-1})$$

gilt. Zum Beweis der Inklusion $\mathcal{F}_{KB(q)} \subseteq \mathcal{F}_{zul(q)}$ genügt es daher die q -Zulässigkeit von (Δ, δ) zu zeigen. Wir weisen die geforderten Eigenschaften sukzessive nach:

Nach Teil (c) von Lemma 6.20 gilt zunächst

$$\Delta\Delta' + \delta\delta' = Q_m(a_1, \dots, a_m) \stackrel{6.19}{=} q_m = q.$$

Weiter ist auch $\text{ggT}(\Delta, \delta) = \text{ggT}(\Delta', \delta') = 1$,

denn: Nach Lemma 6.19 handelt es sich bei Δ und δ um zwei aufeinanderfolgende Nenner von Näherungsbrüchen aus derselben Kettenbruchentwicklung, so dass es nach Teil (f) von Lemma 6.11 zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$a\Delta + b\delta = 1$$

gibt. Wegen der in Teil (a) von Lemma 6.20 nachgewiesenen Symmetrie der Polynome Q_{m-i} und Q_{m-i-1} kann für Δ' und δ' genauso argumentiert werden und die Behauptung folgt. #

Zudem gelten $0 < \delta < \Delta$ und $0 \leq \delta' < \Delta'$,

denn: Einerseits gilt

$$\begin{aligned} \Delta &= Q_1(a_1) = a_1 \stackrel{(6.10)}{>} 1 = Q_0 = \delta && \text{für } i = 1, \\ \Delta &= Q_i(a_1, \dots, a_i) \stackrel{6.18}{=} a_i Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) + Q_{i-2}(a_1, \dots, a_{i-2}) \\ &\stackrel{a_i \in \mathbb{N}}{>} Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) + Q_{i-2}(a_1, \dots, a_{i-2}) \\ &\stackrel{6.19}{=} Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) + q_{i-2} \stackrel{6.11}{>} Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) = \delta && \text{für } i \geq 2, \end{aligned}$$

andererseits ist

$$\delta = Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) \stackrel{6.19}{=} q_{i-1} \stackrel{6.11}{>} 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dass auch $\Delta' > \delta' \geq 0$ gilt, zeigt man analog. #

Ist nun $\delta' > 0$, so haben wir an dieser Stelle die q -Zulässigkeit von (Δ, δ) nachgewiesen. Im Fall $\delta' = 0$ gilt ebenfalls $(\Delta, \delta) \in \mathcal{F}_{zul(q)}$,

denn: Aus dem bisher Gezeigten erhalten wir

$$1 = \text{ggT}(\Delta', \delta') = \text{ggT}(\Delta', 0) = \Delta' \quad \text{und} \quad q_m = q = \Delta\Delta' + \delta\delta' = \Delta = q_i.$$

Mit $1 \leq i \leq m$ sowie Teil (d) von Lemma 6.11 folgt hieraus $i = m$. Wieder mit Lemma 6.11 gilt dann

$$q = q_m = a_m q_{m-1} + q_{m-2} \geq a_m q_{m-1} \stackrel{i=m}{=} a_m \delta \stackrel{(6.11)}{\geq} 2\delta$$

und somit $1 \leq \delta \leq \frac{q}{2}$. #

Wir zeigen nun die zweite Inklusion $\mathcal{F}_{zul(q)} \subseteq \mathcal{F}_{KB(q)}$ und betrachten dafür ein festes Paar $(\Delta, \delta) \in \mathcal{F}_{zul(q)}$ mit einer zugehörigen zulässigen Lösung $(\Delta, \Delta', \delta, \delta')$ von (6.8). Wir zeigen nun $(\Delta, \delta) \in \mathcal{F}_{KB(q)}$, dass also δ und Δ als aufeinanderfolgende Nenner in der Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl $\frac{p}{q}$ mit $1 \leq p < \frac{q}{2}$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$ auftauchen, und unterscheiden dafür zwei Fälle:

Fall 1: $\delta' = 0$. Genau wie im Beweis der ersten Inklusion ist dann $\Delta = q$, $\Delta' = 1$ und $1 \leq \delta < \frac{q}{2}$. Es gelten

$$0 < \delta < \Delta = q \quad \text{und} \quad \text{ggT}(\delta, q) = \text{ggT}(\Delta, \delta) = 1$$

und die rationale Zahl $\frac{\delta}{q}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklung der Form

$$\left((0, a_m, \dots, a_1), \frac{\delta}{q} \right) \quad \text{mit einem } m \in \mathbb{N}.$$

Nach Lemma 6.19 gilt dabei

$$[0, a_m, \dots, a_1] = \frac{Q_{m-1}(a_{m-1}, \dots, a_1)}{Q_m(a_m, \dots, a_1)} = \frac{\delta}{q},$$

andererseits aber auch

$$[0, a_1, \dots, a_m] = \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{Q_m(a_1, \dots, a_m)} \stackrel{6.20(a)}{=} \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{Q_m(a_m, \dots, a_1)} = \frac{p}{q} \quad \text{für ein } p \in \mathbb{N}.$$

Nach Lemma 6.11 (h) gilt dann $\text{ggT}(p, q) = 1$ und nach Lemma 6.10 (b) gilt $a_1 \geq 2$. Letzteres impliziert

$$\begin{aligned} q &= Q_m(a_1, \dots, a_m) \\ &\stackrel{6.20(b)}{=} a_1 Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m) + Q_{m-2}(a_3, \dots, a_m) \\ &\geq 2Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m) + Q_{m-2}(a_3, \dots, a_m) \\ &> 2p \end{aligned}$$

und also $1 \leq p < \frac{q}{2}$. Sind $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_m}$ die Näherungsbrüche von $\frac{p}{q}$, so gilt

$$q_{m-1} \stackrel{6.19}{=} Q_{m-1}(a_1, \dots, a_{m-1}) \stackrel{6.20(a)}{=} Q_{m-1}(a_{m-1}, \dots, a_1) \stackrel{\text{ggT}(\delta, q)=1}{=} \delta$$

und mit $\Delta = q$ somit $(\Delta, \delta) = (q_m, q_{m-1})$.

Fall 2: $\delta' \neq 0$. Dann gelten

$$0 < \delta < \Delta, \quad 0 < \delta' < \Delta' \quad \text{und} \quad \text{ggT}(\Delta, \delta) = \text{ggT}(\Delta', \delta') = 1$$

und die rationalen Zahlen $\frac{\delta}{\Delta}$ und $\frac{\delta'}{\Delta'}$ haben eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklungen der Form

$$\left((0, a_i, \dots, a_1), \frac{\delta}{\Delta} \right) \quad \text{mit einem } i \in \mathbb{N},$$

$$\left((0, a_{i+1}, \dots, a_m), \frac{\delta'}{\Delta'} \right) \quad \text{mit einem } m \in \mathbb{N}.$$

Nach Lemma 6.19 gelten dann

$$\begin{aligned} [0, a_i, \dots, a_1] &= \frac{Q_{i-1}(a_{i-1}, \dots, a_1)}{Q_i(a_i, \dots, a_1)} = \frac{\delta}{\Delta'}, \\ [0, a_{i+1}, \dots, a_m] &= \frac{Q_{m-i-1}(a_{i+2}, \dots, a_m)}{Q_{m-i}(a_{i+1}, \dots, a_m)} = \frac{\delta'}{\Delta'}, \end{aligned}$$

andererseits aber auch

$$[0, a_1, \dots, a_m] = \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{Q_m(a_1, \dots, a_m)} \stackrel{6.20(c)}{=} \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{\Delta\delta + \Delta'\delta'} = \frac{p}{q} \quad \text{für ein } p \in \mathbb{N}.$$

Nach Teil (h) von Lemma 6.11 gilt dann $\text{ggT}(p, q) = 1$ und analog zu den Überlegungen aus Fall 1 folgt $1 \leq p < \frac{q}{2}$. Sind $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_m}$ die Näherungsbrüche von $\frac{p}{q}$, so gilt $(\Delta, \delta) = (q_i, q_{i-1})$ mit Lemma 6.19. \square

6.5 Der Periodensatz

Wir haben nun alle Vorarbeit geleistet, um Manins Periodensatz herleiten zu können. Dieser lautet:

Satz 6.21 (Periodensatz von Manin). *Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$ und $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k$ eine normierte Hecke-Eigenform. Dann gilt*

$$r^{\pm}(f) = c^{\pm}(f)t^{\pm}(f) \quad \text{mit } c^{\pm}(f) \in \mathbb{R}^{\times} \text{ und } t^{\pm}(f) \in \mathbb{R}^{w+1, \pm},$$

wobei die Einträge von $t^{\pm}(f)$ sämtlich im Zahlkörper $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(a_n(f) \mid n \in \mathbb{N})$ liegen. Der Vektor $t^{\pm}(f)$ – und somit auch die Konstante $c^{\pm}(f)$ – ist dabei bis auf Multiplikation mit einem Element aus $\mathbb{Q}(f)^{\times}$ eindeutig.

Beweis der Eindeutigkeitsaussage von Satz 6.21. Da die Abbildungen r^{\pm} nach Satz 6.4 injektiv sind und die gegebene normierte Hecke-Eigenform f nach Satz 4.27 nicht die Nullabbildung sein kann, gilt für die Konstanten aus der Behauptung des Satzes $c^{\pm}(f) \neq 0$. Weiter erfüllen für ein beliebiges $a \in \mathbb{Q}(f)^{\times}$ mit $ac^{\pm}(f)$ und $t^{\pm}(f)$ offensichtlich auch $c^{\pm}(f)$ und $at^{\pm}(f)$ die Behauptung des Satzes. Für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}(f)$ liegen aber ebenso offensichtlich die Einträge der Vektoren $at^{\pm}(f)$ nicht mehr in $\mathbb{Q}(f)$. \square

Die Existenz einer $\mathbb{Q}(f)$ -Struktur beweisen wir für die ungeraden bzw. die geraden Perioden getrennt, da wir hier unterschiedlich vorgehen:

Beweis der Existenzaussage von Satz 6.21 für die ungeraden Perioden. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$T_n^-(r^-(f)) \stackrel{6.15}{=} r^-(f|_k T_n) \stackrel{4.30, (4.12)}{=} r^-(a_n(f)f) = a_n(f)r^-(f),$$

so dass $r^-(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Eigenvektor des Endomorphismus T_n^- mit zugehörigen Eigenwert $a_n(f)$ ist. Der zugehörige simultane Eigenraum ist

$$E^-(f) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Kern}(T_n^- - a_n(f) \text{id}_{\mathbb{R}^{w+1,-}}). \quad (6.12)$$

Nach Konstruktion und nach Satz 6.4 gilt $r^-(f) \in E^-(f) \cap V^-$. Definitionsgemäß ist T_n^- über \mathbb{Q} definiert und $E^-(f)$ somit über $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(a_n(f) \mid n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$. Wir betrachten nun den $\mathbb{Q}(f)$ -Vektorraum der Vektoren in $E^-(f)$ mit Einträgen in $\mathbb{Q}(f)$ und führen dafür zunächst eine geeignete Kurzschreibweise ein: Für eine Körpererweiterung L/K und einen L -Vektorraum V bezeichne V^K den K -Vektorraum der Vektoren aus V mit Einträgen in K . Da $E^-(f)$ über $\mathbb{Q}(f)$ definiert ist, lässt sich der so definierte Raum $(E^-(f))^{\mathbb{Q}(f)}$ ebenfalls über (6.12) bestimmen und es gilt

$$\dim_{\mathbb{Q}(f)}(E^-(f))^{\mathbb{Q}(f)} = \dim_{\mathbb{R}} E^-(f).$$

Da der Raum V^- durch ein lineares Gleichungssystem mit ganzzahligen Koeffizienten gegeben ist, ist V^- insbesondere über $\mathbb{Q}(f)$ definiert und es gilt

$$\dim_{\mathbb{Q}(f)}(V^-)^{\mathbb{Q}(f)} = \dim_{\mathbb{R}} V^-.$$

Es folgt

$$(E^-(f))^{\mathbb{Q}(f)} \cap (V^-)^{\mathbb{Q}(f)} = (E^-(f) \cap V^-)^{\mathbb{Q}(f)}$$

und somit

$$\dim_{\mathbb{Q}(f)}((E^-(f))^{\mathbb{Q}(f)} \cap (V^-)^{\mathbb{Q}(f)}) = \dim_{\mathbb{R}}(E^-(f) \cap V^-).$$

Hierbei gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}(E^-(f) \cap V^-) = 1,$$

denn: Nach Korollar 4.34 zerfällt $S_k^{\mathbb{R}}$ in eindimensionale Untervektorräume, die unter allen Hecke-Operatoren T_n mit $n \in \mathbb{N}$ invariant sind. Nach Satz 6.4 ist $r^- : S_k^{\mathbb{R}} \rightarrow V^-$ ein Vektorraumisomorphismus und nach Proposition 6.15 gilt

$$T_n^-(r^-(f)) = r^-(f|_k T_n).$$

Folglich zerfällt V^- in eindimensionale Untervektorräume, die unter allen T_n^- mit $n \in \mathbb{N}$ invariant sind. Nach Konstruktion sind diese Untervektorräume aber gerade die Eigenräume $E^-(f)$ zu geeigneten normierten Hecke-Eigenformen f , was die Behauptung zeigt. #

Zusammengefasst erhalten wir nun:

- (i) $r^-(f) \in E^-(f) \cap V^-$,
- (ii) $(E^-(f))^{\mathbb{Q}(f)} \cap (V^-)^{\mathbb{Q}(f)} \subseteq E^-(f) \cap V^-$,

$$(iii) \quad \dim_{\mathbb{Q}(f)}((E^-(f))^{\mathbb{Q}(f)} \cap (V^-)^{\mathbb{Q}(f)}) = \dim_{\mathbb{R}}(E^-(f) \cap V^-) = 1.$$

Es gibt daher eine Konstante $c^-(f) \in \mathbb{R}^\times$ und einen Vektor

$$t^-(f) \in (E^-(f))^{\mathbb{Q}(f)} \cap (V^-)^{\mathbb{Q}(f)} \subseteq E^-(f)$$

mit $r^-(f) = c^-(f)t^-(f)$, was zu zeigen war. \square

Wir haben in diesem Beweis die Isomorphie von r^- ausgenutzt. Da r^+ nach Satz 6.4 kein Isomorphismus sondern nur eine Einbettung ist, könnte der entsprechend definierte Raum $E^+(f) \cap V^+$ zweidimensional sein, in welchem Fall die Existenz einer Konstanten $c^+(f)$ wie gewünscht nicht mehr gewährleistet wäre. Um die Eindimensionalität von $E^+(f) \cap V^+$ zu zeigen, müssen wir die Situation noch genauer studieren. Hierfür benötigen wir das folgende, elementar nachweisbare Resultat aus der **Analytischen Zahlentheorie**:

Lemma 6.22. Für alle $m, w \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sigma_{w+1}(m) = m\sigma_{w-1}(m) + \sum_{0 < d|m} \sigma_w\left(\frac{m}{d}\right)(d^w - 1)\varphi(d),$$

wobei φ die Euler'sche φ -Funktion bezeichne.

Vermöge dieses Lemmas und des Lemmas von Heilbronn 6.17 leiten wir nun eine weitere Relation zwischen den Perioden her:

Satz 6.23. Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$ und $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k$ eine normierte Hecke-Eigenform. Für alle $m \geq 2$ gilt dann

$$(\sigma_{w+1}(m) - a_m(f))r_0(f) = 2 \sum_{(\Delta, \delta) \in \mathcal{F}_{f, \text{zul}}(m)}^* \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{w-2}{4} \rfloor} \binom{w}{2\ell} r_{2\ell}(f) (\Delta^{2\ell} \delta^{w-2\ell} - \Delta^{w-2\ell} \delta^{2\ell}),$$

wobei durch * angezeigt wird, dass die Terme mit $\delta = \frac{\Delta}{2}$ mit dem Vorfaktor $\frac{1}{2}$ gezählt werden.

Beweis. Nach (6.7) gilt

$$a_m(f)r_0(f) = r_0(f|_k T_m) = \sum_{0 < d|m} \left(\frac{m}{d}\right)^w \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* \left(\int_0^{i\infty} - \int_0^{\frac{b}{d}} \right) f(z) dz.$$

Sammeln wir die Vielfachen der Periode $r_0(f)$ auf der linken Seite, so erhalten wir

$$\left(a_m(f) - \sum_{0 < d|m} \left(\frac{m}{d}\right)^w \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* 1 \right) r_0(f) = - \sum_{0 < d|m} \left(\frac{m}{d}\right)^w \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* \int_0^{\frac{b}{d}} f(z) dz.$$

Unter Beachtung von $\sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* 1 = d$ und $\sum_{0 < d|m} \left(\frac{m}{d}\right)^w d = m\sigma_{w-1}(m)$ ergibt sich

$$(m\sigma_{w-1}(m) - a_m(f))r_0(f) = \sum_{0 < d|m} \sum_{1 \leq b \leq \frac{d}{2}}^* \left(\frac{m}{d}\right)^w \left(\int_0^{\frac{b}{d}} + \int_0^{-\frac{b}{d}} \right) f(z) dz.$$

Wir ordnen nun unsere Summation über d und b , indem wir zunächst die teilerfremden Paare (b, d) betrachten und diese dann mit geeigneten $\delta \in \mathbb{N}$ multiplizieren. Wegen $d | m$ liegt dabei δd genau dann noch im Summationsbereich, wenn $\delta | \frac{m}{d}$ gilt. Ist dies der Fall, so taucht das Integral von 0 nach $\frac{b}{d}$ als Integral von 0 nach $\frac{\delta b}{\delta d}$ in unserer Summe auf. Insgesamt erhalten wir so

$$\begin{aligned} (m\sigma_{w-1}(m) - a_m(f))r_0(f) &= \sum_{0 < d|m} \sum_{\substack{1 \leq b \leq \frac{d}{2} \\ \delta | \frac{m}{d} \\ \text{ggT}(b,d)=1}}^* \left(\frac{m}{\delta d}\right)^w \left(\int_0^{\frac{b}{d}} + \int_0^{-\frac{b}{d}} \right) f(z) dz \\ &= \sum_{0 < d|m} \sigma_w\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{\substack{1 \leq b \leq \frac{d}{2} \\ \text{ggT}(b,d)=1}}^* \left(\int_0^{\frac{b}{d}} + \int_0^{-\frac{b}{d}} \right) f(z) dz. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Für $d = 1$ verschwindet die innere Summe, da $1 \leq b \leq \frac{1}{2}$ nicht möglich ist. Für $d \geq 2$ können die Integrale mithilfe der Kettenbruchentwicklung von $\frac{b}{d}$ bzw. $-\frac{b}{d}$ ausgedrückt werden: Seien dafür wie im Beweis von Lemma 6.12

$$0 = \frac{b_0}{d_0}, \dots, \frac{b_j}{d_j} = \frac{b}{d}$$

die Näherungsbrüche von $\frac{b}{d}$ und setzen wir für ein beliebiges $i \in \{1, \dots, j\}$

$$M_i := \begin{pmatrix} b_i & (-1)^{i-1}b_{i-1} \\ d_i & (-1)^{i-1}d_{i-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{M}_i := \begin{pmatrix} (-1)^i b_{i-1} & -b_i \\ (-1)^{i-1} d_{i-1} & d_i \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Wie im Beweis von Korollar 6.13 erhalten wir dann

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{\frac{b}{d}} + \int_0^{-\frac{b}{d}} \right) f(z) dz \\ &= \sum_{i=1}^j \int_0^{i\infty} f(z) \left(\mathbb{P}({}^t M_i) - \mathbb{P}({}^t \tilde{M}_i) \right) (z^0 1^w) dz \\ &= \sum_{i=1}^j \int_0^{i\infty} f(z) \left((d_i z + (-1)^{i-1} d_{i-1})^w - ((-1)^{i-1} d_{i-1} z + d_i)^w \right) dz \\ &= \sum_{i=1}^j \sum_{\ell=0}^w \binom{w}{\ell} d_i^\ell (-1)^{(i-1)(w-\ell)} d_{i-1}^{w-\ell} (r_\ell(f) - r_{w-\ell}(f)) \\ &\stackrel{6.1}{=} \sum_{i=1}^j \sum_{\ell=1}^{\frac{w-2}{2}} \binom{w}{2\ell} d_i^{2\ell} (-1)^{(i-1)(w-2\ell)} d_{i-1}^{w-2\ell} (r_{2\ell}(f) - r_{w-2\ell}(f)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^j 2(d_{i-1}^w - d_i^w) r_0(f) \\
\stackrel{6.1}{=} & \sum_{i=1}^j \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{w-2}{4} \rfloor} 2 \binom{w}{2\ell} (d_i^{2\ell} d_{i-1}^{w-2\ell} - d_i^{w-2\ell} d_{i-1}^{2\ell}) r_{2\ell}(f) + 2(1 - d^w) r_0(f).
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (6.13) ein und bringen alle Vielfachen von $r_0(f)$ auf eine Seite, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \sum_{0 < d|m} \sigma_w\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{\substack{1 \leq b \leq \frac{d}{2} \\ \text{ggT}(b,d)=1}}^* \sum_{i=1}^j \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{w-2}{4} \rfloor} 2 \binom{w}{2\ell} (d_i^{2\ell} d_{i-1}^{w-2\ell} - d_i^{w-2\ell} d_{i-1}^{2\ell}) r_{2\ell}(f) \\
& = \left(m\sigma_{w-1}(m) - a_m(f) - \sum_{0 < d|m} \sigma_w\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{\substack{1 \leq b \leq \frac{d}{2} \\ \text{ggT}(b,d)=1}}^* 2(1 - d^w) \right) r_0(f) \\
& = \left(m\sigma_{w-1}(m) - a_m(f) - \sum_{0 < d|m} \sigma_w\left(\frac{m}{d}\right) (1 - d^w) \varphi(d) \right) r_0(f) \\
& \stackrel{6.22}{=} (\sigma_{w+1}(m) - a_m(f)) r_0(f).
\end{aligned}$$

Das ist die linke Seite aus der Behauptung des Satzes. Um zu zeigen, dass die linke Seite hier mit der rechten Seite aus der Behauptung des Satzes übereinstimmt, wollen wir das Lemma von Heilbronn 6.17 benutzen. Wir betrachten zunächst die Terme mit $d > 2$ und lösen die Teilersumme auf:

$$\begin{aligned}
& \sum_{2 < d|m} \sigma_w\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{\substack{1 \leq b \leq \frac{d}{2} \\ \text{ggT}(b,d)=1}}^* \sum_{i=1}^j \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{w-2}{4} \rfloor} 2 \binom{w}{2\ell} (d_i^{2\ell} d_{i-1}^{w-2\ell} - d_i^{w-2\ell} d_{i-1}^{2\ell}) r_{2\ell}(f) \\
& = \sum_{2 < d|m} \sum_{\substack{1 \leq b \leq \frac{d}{2} \\ \text{ggT}(b,d)=1}}^* \sum_{i=1}^j \sum_{D|\frac{m}{d}} \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{w-2}{4} \rfloor} 2 \binom{w}{2\ell} \left(\frac{(Dd_i)^{2\ell}}{(Dd_{i-1})^{2\ell-w}} - \frac{(Dd_i)^{w-2\ell}}{(Dd_{i-1})^{-2\ell}} \right) r_{2\ell}(f) \\
& = \sum_{2 < d|m} \sum_{(d_i, d_{i-1}) \in \mathcal{F}_{KB(d)}} \sum_{D|\frac{m}{d}} \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{w-2}{4} \rfloor} 2 \binom{w}{2\ell} \left(\frac{(Dd_i)^{2\ell}}{(Dd_{i-1})^{2\ell-w}} - \frac{(Dd_i)^{w-2\ell}}{(Dd_{i-1})^{-2\ell}} \right) r_{2\ell}(f) \\
& \stackrel{6.17}{=} \sum_{2 < d|m} \sum_{(\Delta, \delta) \in \mathcal{F}_{zul(d)}} \sum_{D|\frac{m}{d}} \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{w-2}{4} \rfloor} 2 \binom{w}{2\ell} \left(\frac{(D\Delta)^{2\ell}}{(D\delta)^{2\ell-w}} - \frac{(D\Delta)^{w-2\ell}}{(D\delta)^{-2\ell}} \right) r_{2\ell}(f).
\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\tilde{\Delta} := D\Delta, \tilde{\delta} := D\delta, \tilde{\Delta}' := \frac{m}{Dd}\Delta', \tilde{\delta}' := \frac{m}{Dd}\delta'$$

und fassen die ersten drei Summenzeichen zu einer Summe über fast m -zulässige Paare zusammen. Ersetzen wir hierbei die Bedingung $1 < \tilde{\delta} < \frac{\tilde{\Delta}}{2}$ durch $1 < \tilde{\delta} \leq \frac{\tilde{\Delta}}{2}$ und kennzeichnen die Summe mit einem $*$, so erhalten wir zusätzlich den Term für $d = 2$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_{0 < d | m} \sigma_w\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{\substack{1 \leq b \leq \frac{d}{2} \\ \text{ggT}(b,d)=1}}^* \sum_{i=1}^j \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{w-2}{4} \rfloor} 2 \binom{w}{2\ell} (d_i^{2\ell} d_{i-1}^{w-2\ell} - d_i^{w-2\ell} d_{i-1}^{2\ell}) r_{2\ell}(f) \\ &= 2 \sum_{(\tilde{\Delta}, \tilde{\delta}) \in \mathcal{F}_{f, \text{zul}(m)}}^* \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{w-2}{4} \rfloor} \binom{w}{2\ell} (\tilde{\Delta}^{2\ell} \tilde{\delta}^{w-2\ell} - \tilde{\Delta}^{w-2\ell} \tilde{\delta}^{2\ell}) r_{2\ell}(f) \end{aligned}$$

und also die Behauptung. \square

Nun kann die Existenzaussage des Periodensatzes 6.21 auch für die geraden Perioden gezeigt werden. Wie wir nach dem Beweis der Existenzaussage für die ungeraden Perioden bemerkt haben, genügt dafür der Nachweis der Eindimensionalität von $E^+(f) \cap V^+$. Der folgende Satz vollendet somit den Beweis des Periodensatzes:

Satz 6.24. Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$ und $f \in S_k$ eine normierte Hecke-Eigenform. Dann gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}(E^+(f) \cap V^+) = 1.$$

Beweis. Sei zunächst $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Satz 6.14 gibt es dann insbesondere Koeffizienten

$$m_{2\ell,0}(n) \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle } \ell \in \{0, \dots, \frac{w}{2}\} \text{ gerade}$$

mit

$$r_0(f|_k T_n) = \sum_{\ell=0}^{\frac{w}{2}} m_{2\ell,0}(n) r_{2\ell}(f) \quad \text{für alle } f \in S_k.$$

Mithilfe von Satz 6.23 können wir diese Relation genauer verstehen. Tatsächlich liefert uns der Satz für jede normierte Hecke-Eigenform f

$$r_0(f|_k T_n) = \sigma_{w+1}(n) r_0(f) + \sum_{\ell=1}^{\frac{w-2}{2}} m_{2\ell,0}(n) r_{2\ell}(f). \quad (6.14)$$

Vermöge der Linearität der Hecke-Operatoren und der Perioden, und da S_k nach Satz 4.32 eine Basis aus normierten Hecke-Eigenformen besitzt, lässt sich dieser Zusammenhang leicht auf beliebige $f \in S_k$ ausdehnen.

Die Abbildung T_n^+ ist auf ganz V^+ durch die Koeffizienten $m_{j,J}(n)$ mit geeigneten j, J definiert. Ist nun $f \in S_k$ speziell eine fest gewählte normierte Hecke-Eigenform, so gilt daher auch für ein beliebiges

$$\tilde{r} = (\tilde{r}_0, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_w) \in E^+(f) \cap V^+$$

der oben hergeleitete Zusammenhang, nämlich

$$a_n(f)\tilde{r}_0 = \sigma_{w+1}(n)\tilde{r}_0 + \sum_{\ell=1}^{\frac{w-2}{2}} m_{2\ell,0}(n)\tilde{r}_{2\ell}. \quad (6.15)$$

Nach Satz 6.4 ist $r^+(S_k^{\mathbb{R}})$ eine Hyperebene in V^+ , die den Vektor ${}^t(1, 0, \dots, 0, -1)$ nicht enthält. Wegen $\tilde{r} \in V^+$ gibt es daher ein $\tilde{f} \in S_k^{\mathbb{R}}$ und ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{r} = r^+(\tilde{f}) + \tilde{x} \cdot {}^t(1, 0, \dots, 0, -1).$$

Tatsächlich gilt hierbei bereits $\tilde{x} = 0$,

denn: Zunächst lesen wir unmittelbar

$$\tilde{r}_{2\ell} = \frac{1}{i} r_{2\ell}(\tilde{f}) \quad \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, \frac{w-2}{2}\}$$

ab. Zu zeigen verbleibt also $\tilde{r}_0 = \frac{1}{i} r_0(\tilde{f})$ und $\tilde{r}_w = \frac{1}{i} r_w(\tilde{f})$. Nach (6.14) folgt zunächst

$$\begin{aligned} r_0(\tilde{f}|_k T_n) &= \sigma_{w+1}(n)r_0(\tilde{f}) + \sum_{\ell=1}^{\frac{w-2}{2}} m_{2\ell,0}(n)r_{2\ell}(\tilde{f}) \\ &= \sigma_{w+1}(n)r_0(\tilde{f}) + i \sum_{\ell=1}^{\frac{w-2}{2}} m_{2\ell,0}(n)\tilde{r}_{2\ell}. \end{aligned}$$

Die Summe rechts stimmt der derjenigen in (6.15) überein. Durch Einsetzen ergibt sich

$$\frac{1}{\sigma_{w+1}(n)} r_0(\tilde{f}|_k T_n) + i\tilde{r}_0 = \frac{ia_n(f)}{\sigma_{w+1}(n)} \tilde{r}_0 + r_0(\tilde{f}). \quad (6.16)$$

Mit der Hecke-Abschätzung 2.38 für Fourier-Koeffizienten von Spitzenformen und der offensichtlichen Abschätzung $\sigma_{w+1}(n) \geq n^{w+1}$ erhalten wir dabei

$$\frac{a_n(f)}{\sigma_{w+1}(n)} < \frac{Cn^{\frac{w+2}{2}}}{n^{w+1}} = \frac{C}{n^{\frac{w}{2}}} \quad \text{für eine Konstante } C > 0.$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht dieser Ausdruck gegen Null. Da S_k nach Satz 4.32 eine Basis $\{f_1, \dots, f_r\}$ aus normierten Hecke-Eigenformen besitzt, gibt es Koeffizienten $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{f} = \sum_{j=1}^r b_j f_j$ und es gilt weiter

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sigma_{w+1}(n)} r_0(\tilde{f}|_k T_n) \right| &= \frac{1}{\sigma_{w+1}(n)} \left| r_0 \left(\left(\sum_{j=1}^r b_j f_j \right) |_k T_n \right) \right| \\ &= \frac{1}{\sigma_{w+1}(n)} \left| r_0 \left(\sum_{j=1}^r b_j a_n(f_j) f_j \right) \right| \\ &= \frac{1}{\sigma_{w+1}(n)} \left| \sum_{j=1}^r b_j a_n(f_j) r_0(f_j) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \stackrel{2.38}{\frac{1}{n^{w+1}}} \sum_{j=1}^r C_j n^{\frac{w+2}{2}} |b_j r_0(f_j)| \\
&= \frac{1}{n^{\frac{w}{2}}} \sum_{j=1}^r C_j |b_j r_0(f_j)|
\end{aligned}$$

Auch dieser Ausdruck geht für $n \rightarrow \infty$ gegen Null, so dass sich im Abgleich mit (6.16) die erste Behauptung

$$\tilde{r}_0 = \frac{1}{i} r_0(\tilde{f})$$

ergibt. Da definitionsgemäß in V^+ Bedingung 6.1 (a) gilt, folgt

$$\tilde{r}_w = -\tilde{r}_0 = -\frac{1}{i} r_0(\tilde{f}) = \frac{1}{i} r_w(\tilde{f})$$

und somit auch die zweite Behauptung. #

Hieraus folgt

$$r^+(a_n(f)\tilde{f}) = a_n(f)r^+(\tilde{f}) = a_n(f)\tilde{r} = T_n^+(\tilde{r}) = T_n^+(r^+(\tilde{f})) = r^+(\tilde{f}|_k T_n).$$

Da die Abbildung r^+ als Einbettung injektiv ist, erhalten wir somit

$$\tilde{f}|_k T_n = a_n(f)\tilde{f}.$$

Diese Argumentation lässt sich für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ durchziehen und es folgt, dass \tilde{f} eine Hecke-Eigenform ist, deren Eigenwerte mit denen von f übereinstimmen. Wegen der Multiplizität-Eins-Eigenschaft 4.26 und der Normiertheit von f gilt daher $\tilde{f} = a_1(\tilde{f})f$ und deshalb auch

$$\tilde{r} = r^+(\tilde{f}) = r^+(a_1(\tilde{f})f) = a_1(\tilde{f})r^+(f).$$

Da $\tilde{r} \in E^+(f) \cap V^+$ beliebig gewählt war, folgt somit

$$\dim_{\mathbb{R}}(E^+(f) \cap V^+) = 1$$

und damit der Satz. □

Abschließend für diesen Abschnitt beweisen wir noch eine Folgerung aus dem Periodensatz 6.21:

Korollar 6.25. Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$ und $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k$ eine normierte Hecke-Eigenform. Dann gelten

$$\frac{r_j(f)}{r_{j+2}(f)} \in \mathbb{Q}(f)$$

für alle $j \in \{0, \dots, w-2\}$ mit $r_{j+2}(f) \neq 0$.

Beweis. Nach dem Periodensatz 6.21 gibt es zu jedem $j \in \{0, 2, \dots, w\}$ ein $t_j^+(f) \in \mathbb{Q}(f)$ mit $r_j(f) = c^+(f)t_j^+(f)$. Ist nun $r_{j+2}(f) \neq 0$, so folgt $t_{j+2}^+(f) \neq 0$ und

$$\frac{r_j(f)}{r_{j+2}(f)} = \frac{c^+(f)t_j^+(f)}{c^+(f)t_{j+2}^+(f)} = \frac{t_j^+(f)}{t_{j+2}^+(f)} \in \mathbb{Q}(f) \quad \text{für alle } j \in \{0, 2, \dots, w-2\}.$$

Mit $c^-(f)$ statt $c^+(f)$ können wir dieselbe Argumentation für die ungeraden Werte von j durchführen und erhalten so das Korollar. \square

Wir betrachten nun noch ein Beispiel für den Periodensatz:

Beispiel 6.26. Im Fall $k = 12$ können wir leicht ein Beispiel zum Periodensatz von Manin 6.21 angeben. Bekanntlich gilt $S_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta$ mit der Diskriminanten

$$\Delta(z) = \frac{E_4^3(z) - E_6^2(z)}{1728} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

wie in Proposition 3.9. Nach Beispiel 4.29 und wegen $\tau(1) = 1$ ist Δ eine normierte Hecke-Eigenform. Nach Übungsaufgabe 3.1 sind zudem ihre Fourier-Koeffizienten ganzzahlig, so dass $\mathbb{Q}(\Delta) = \mathbb{Q}$ gilt.

Wir berechnen nun die Perioden der Diskriminanten unter Verwendung der in Proposition 6.1 hergeleiteten Relationen. Die über ES_j^+ für $j \in \{1, 3\}$ gegebenen Relationen bedingen nach Identifikation der Perioden über die durch die jeweiligen ES_j^+ gegebenen Relationen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 10 & 120 & 126 \\ 10 & 36 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1(\Delta) \\ r_3(\Delta) \\ r_5(\Delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgelöst nach $r_1(\Delta)$ erhalten wir

$$r_3(\Delta) = -\frac{25}{48}r_1(\Delta) \quad \text{sowie} \quad r_5(\Delta) = \frac{5}{12}r_1(\Delta).$$

Hieraus folgt $r_1(\Delta) \neq 0$,

denn: Wäre $r_1(\Delta) = 0$, so folgte nach den hergeleiteten Verhältnissen auch $r_3(\Delta) = 0 = r_5(\Delta)$ und somit $r^-(S_{12}^{\mathbb{R}}) = \{0\}$, was wegen der in Satz 6.4 gezeigten Injektivität von r^- nicht sein kann. $\#$

Über die durch die Polynome ES_j^+ gegebenen Relationen erhalten wir so

$$c^-(\Delta) = r_1(\Delta) \quad \text{und} \quad t^-(\Delta) = \left(1, -\frac{25}{48}, \frac{5}{12}, -\frac{25}{48}, 1\right).$$

Weiter bedingen die über die über ES_1^- gegebene Relation und Manins Relation 6.23 nach Identifikation der Perioden über die durch die jeweiligen ES_j^+ gegebenen Relationen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 27 & 42 \\ 2073 & 11340 & 10080 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0(\Delta) \\ r_2(\Delta) \\ r_4(\Delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgelöst nach $r_0(\Delta)$ erhalten wir

$$r_2(\Delta) = -\frac{691}{1620} r_0(\Delta) \quad \text{sowie} \quad r_4(\Delta) = \frac{691}{2520} r_0(\Delta).$$

Hieraus folgt $r_0(\Delta) \neq 0$,

denn: Wäre $r_0(\Delta) = 0$, so folgte nach den hergeleiteten Verhältnissen auch $r_2(\Delta) = 0 = r_4(\Delta)$ und somit $r^+(S_{12}^{\mathbb{R}}) = \{0\}$, was wegen der in Satz 6.4 gezeigten Injektivität von r^+ nicht sein kann. #

Über die durch die Polynome ES_j^\perp gegebenen Relationen erhalten wir so

$$c^+(\Delta) = r_0(\Delta) \quad \text{und} \quad t^+(\Delta) = {}^t \left(1, -\frac{691}{1620}, \frac{691}{2520}, -\frac{691}{2520}, \frac{691}{1620}, -1 \right).$$

Setzen wir die so hergeleiteten Verhältnisse zwischen den Perioden in die Relation aus Satz 6.23 ein, so erhalten wir für alle $2 < n \in \mathbb{N}$ die ganzzahlige Gleichung

$$\sigma_{11}(n) - \tau(n) = \sum_{(\Delta, \delta) \in \mathcal{F}_{\text{zul}}^*(n)} \left(\frac{691}{18} (\Delta^8 \delta^2 - \Delta^2 \delta^8) + \frac{691}{6} (\Delta^6 \delta^4 - \Delta^4 \delta^6) \right)$$

und nach Primfaktorzerlegung auf beiden Seiten insbesondere einen neuen Beweis der Ramanujan-Kongruenzen aus Übungsaufgabe 3.3.

Unsere Überlegungen in Beispiel 6.26 hingen im Wesentlichen von der Eindimensionalität von S_{12} ab und sollten sich daher problemlos auf die anderen Beispiele, in denen S_k eindimensional ist, verallgemeinern lassen. Tatsächlich gilt:

Beispiel 6.27. Nach der Dimensionsformel 3.11 ist für $k = 16, 18, 20, 22, 26$ der Raum der Spitzenformen S_k eindimensional. Für die jeweils eindeutig bestimmte normierte Hecke-Eigenform

$$f_k(z) := 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(f_k) q^n$$

kann man die Perioden wie in Beispiel 6.26 vermöge der Relationen aus Proposition 6.1 sowie Satz 6.23 berechnen und erhält im geraden Fall:

| k | r_0 | r_2 | r_4 | r_6 | r_8 | r_{10} |
|-----|-------|--|--|---|---|--|
| 16 | 1 | $-\frac{3617}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$ | $\frac{3617}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}$ | $-\frac{3617}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$ | | |
| 18 | 1 | $-\frac{43867}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^4}$ | $\frac{43867}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13}$ | $-\frac{43867}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11}$ | | |
| 20 | 1 | $-\frac{283 \cdot 617}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 17}$ | $\frac{283 \cdot 617}{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 17}$ | $-\frac{283 \cdot 617}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17}$ | $\frac{283 \cdot 617}{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 17}$ | |
| 22 | 1 | $-\frac{131 \cdot 593}{3^2 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 19}$ | $\frac{131 \cdot 593}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19}$ | $-\frac{131 \cdot 593}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 19}$ | $\frac{131 \cdot 593}{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19}$ | |
| 26 | 1 | $-\frac{43 \cdot 657931}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 23}$ | $\frac{97 \cdot 657931}{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23}$ | $-\frac{29 \cdot 657931}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23}$ | $\frac{657931}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23}$ | $-\frac{657931}{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23}$ |

Setzen wir die Verhältnisse aus dieser Tabelle wieder aus Satz 6.23 ein, so erhalten wir die *verallgemeinerten Ramanujan-Kongruenzen*

$$\begin{aligned} a_n(f_{16}) &\equiv \sigma_{15}(n) \pmod{3617}, \\ a_n(f_{18}) &\equiv \sigma_{17}(n) \pmod{43867}, \\ a_n(f_{20}) &\equiv \sigma_{19}(n) \pmod{283 \cdot 617}, \\ a_n(f_{22}) &\equiv \sigma_{21}(n) \pmod{131 \cdot 593}, \\ a_n(f_{26}) &\equiv \sigma_{25}(n) \pmod{657931}. \end{aligned}$$

6.6 Algebraizität der Fourier-Koeffizienten normierter Hecke-Eigenformen

Eine naheliegende Frage an dieser Stelle ist die nach den algebraischen Eigenschaften des im Periodensatz 6.21 auftretenden Zahlkörpers $\mathbb{Q}(f)$ für eine normierte Hecke-Eigenform $f \in S_k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass sich der Körpergrad von $\mathbb{Q}(f)$ über \mathbb{Q} durch die Dimension $\dim S_k$ beschränken lässt, und stärken so die Aussage des Periodensatzes. Unser Werkzeug hierfür ist die Hecke-Theorie; konkret untersuchen wir nun die Algebra der Hecke-Operatoren auf dem Raum S_k genauer. Wir bezeichnen dafür im Folgenden mit $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ das Bild von $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ in $\mathrm{End}(S_k)$ und mit $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ die Skalarerweiterung $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k} \otimes \mathbb{C}$. Unser erstes Resultat ist dann ein starker Zusammenhang zwischen $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ und dem Raum S_k der Spitzenformen selbst:

Lemma 6.28. *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist durch*

$$B: \begin{cases} S_k \times \mathcal{T}_{\mathbb{C},k} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ (f, T) & \mapsto a_1(f|_k T) \end{cases}$$

eine Bilinearform gegeben, deren induzierte Abbildungen

$$B_l: S_k \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{C},k}^* \quad \text{und} \quad B_r: \mathcal{T}_{\mathbb{C},k} \rightarrow S_k^*$$

in die jeweiligen Dualräume Isomorphismen von \mathbb{C} -Vektorräumen sind.

Beweis. Die Bilinearität von B ist klar. Da für endlichdimensionale Vektorräume die Dimension mit derjenigen ihres jeweiligen Dualraums übereinstimmt, reicht es zum Nachweis der Isomorphie von B_l und B_r zudem aus, deren Injektivität zu zeigen.

Sei also zunächst $f \in S_k$ mit $B_l(f) = 0 \in \mathcal{T}_{\mathbb{C},k}^*$. Dann gilt $a_1(f|_k T) = 0$ für alle $T \in \mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ und nach der Formel in Satz 4.23 insbesondere $a_n(f) = a_1(f|_k T_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da für die Spitzenform f auch $a_0(f) = 0$ gilt, folgt $f \equiv 0$. Das ist die Injektivität von B_l .

Sei nun $T \in \mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ mit $B_r(T) = 0 \in S_k^*$. Dann gilt $a_1(f|_k T) = 0$ für alle $f \in S_k$. Wegen $f|_k T_n \in S_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt hieraus insbesondere

$$0 = a_1((f|_k T_n)|_k T) = a_1((f|_k T)|_k T_n) = a_n(f|_k T) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei wir im zweiten Schritt via Satz 4.23 die Kommutativität der Hecke-Algebra ausgenutzt haben und im dritten Schritt wieder die explizite Formel für die Fourier-Koeffizienten von $f|_k T_n$. Da für die Spitzenform $f|_k T$ auch $a_0(f|_k T)$ gilt, folgt $f|_k T \equiv 0$. Da dies für alle $f \in S_k$ gilt, folgt $T = 0 \in \mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ und somit die Injektivität von B_r . \square

Der Hauptnutzen, den wir aus Lemma 6.28 ziehen, ist, dass wir nun die Dimension des \mathbb{C} -Vektorraums $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ kennen. Wir präzisieren dies zu der folgenden Strukturaussage:

Proposition 6.29. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gelten die Vektorraumidentitäten*

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C},k} = \bigoplus_{j=1}^{\dim S_k} \mathbb{C} \cdot T_j \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_{\mathbb{Q},k} = \bigoplus_{j=1}^{\dim S_k} \mathbb{Q} \cdot T_j.$$

Beweis. Für den Beweis wählen wir fest eine Miller-Basis $\{f_1, \dots, f_{\dim S_k}\}$ von S_k wie in Satz 3.15.

Die Operatoren $T_1, \dots, T_{\dim S_k}$ sind \mathbb{C} -linear unabhängig in $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$,

denn: Sei

$$\sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j T_j = 0 \quad \text{mit geeigneten } \lambda_j \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt für ein beliebiges $\ell \in \{1, \dots, \dim S_k\}$ bereits

$$\begin{aligned} \lambda_\ell &= \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j \delta_{j,\ell} = \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j a_j(f_\ell) \\ &\stackrel{4.23}{=} \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j a_1(f_\ell|_k T_j) = a_1 \left(f_\ell|_k \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j T_j \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit die lineare Unabhängigkeit. #

Die erste Teilbehauptung folgt nun unmittelbar mit $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}) \stackrel{6.28}{=} \dim_{\mathbb{C}}(S_k^*) = \dim S_k$. Insbesondere können wir für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ bereits

$$T_n = \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_{n,j} T_j \quad \text{mit geeigneten } \lambda_{n,j} \in \mathbb{C}$$

schreiben. Dabei gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \{1, \dots, \dim S_k\}$ bereits

$$\lambda_{n,\ell} = \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_{n,j} \delta_{j,\ell} = \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_{n,j} a_j(f_\ell) \stackrel{4.23}{=} \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_{n,j} a_1(f_\ell|_k T_j)$$

$$= a_1 \left(f_\ell|_k \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_{n,j} T_j \right) = a_1(f_\ell|_k T_n) = a_n(f_\ell).$$

Die zweite Teilbehauptung folgt, da die Fourier-Koeffizienten der Miller-Basis konstruktionsgemäß ganzzahlig sind. \square

Mit etwas Arbeit folgt aus Satz 4.24 noch eine Strukturaussage für $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ als \mathbb{C} -Algebra bzw. für $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ als \mathbb{Q} -Algebra. Wir zeigen diese in Satz 6.37 und führen vorher die benötigten Resultate aus der Ringtheorie ein:

Definition 6.30. Sei R ein Ring mit Eins und M ein R -Modul.

- (a) Sind $\{0\}$ und M selbst die einzigen R -Untermodule von M , so nennen wir M einen **einfachen R -Modul**.
- (b) Lässt sich M als direkte Summe einfacher R -Moduln schreiben, so nennen wir M einen **halbeinfachen R -Modul**.

Beispiel 6.31. (a) Für jede Primzahl p ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein einfacher \mathbb{Z} -Modul,

denn: Nach dem Satz von Lagrange hat $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ keine Untergruppen außer $\{0\}$ und sich selbst. Die Behauptung folgt, da Untermoduln stets auch Untergruppen sind. $\#$

- (b) Für jede natürliche Zahl n mit einem Teiler $1 < d < n$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kein einfacher Modul,

denn: Offensichtlich ist der von $d + n\mathbb{Z}$ erzeugte \mathbb{Z} -Untermodule weder $\{0\}$ noch ganz $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\#$

Lemma 6.32. Sei R ein Ring mit Eins und M ein artinscher R -Modul.⁶⁶ Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) Der R -Modul M ist halbeinfach.
- (ii) Zu jedem R -Untermodule U von M gibt es einen R -Untermodule \tilde{U} von M mit

$$M = U \oplus \tilde{U}.$$

Beweis. Dass Aussage (i) Aussage (ii) impliziert, folgt unmittelbar aus der Definition des Begriffs des halbeinfachen Moduls.

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii). Wir betrachten den R -Untermodule

$$U := \bigoplus_{\substack{E \text{ einfacher} \\ R\text{-Untermodule von } M}} E,$$

wobei die Direktheit der Summe daher rührt, dass zwei voneinander verschiedene einfache R -Moduln offensichtlich stets Durchschnitt $\{0\}$ haben. Gälte dann $U \neq M$, so gäbe es nach

⁶⁶Nach Emil ARTIN⁶⁷ heißt ein R -Modul M *artinsch*, falls jede nichtleere Menge von R -Untermodule von M ein minimales Element bezüglich Inklusion besitzt.

⁶⁷Emil Artin (1898-1962)

Voraussetzung einen nichttrivialen R -Untermodul \tilde{U} mit $M = U \oplus \tilde{U}$. Die Menge der nichttrivialen R -Untermoduln von \tilde{U} besäße nach Voraussetzung ein bezüglich Inklusion minimales Element ungleich $\{0\}$, welches nach Definition ein einfacher R -Untermodul von \tilde{U} und somit auch von M wäre. Das stünde im Widerspruch zur Definition von U und kann daher nicht sein. Es folgt $U = M$ und insgesamt, dass M ein halbeinfacher R -Modul ist, also Aussage (i). \square

Lemma 6.33. *Sei R ein Ring mit Eins und M ein halbeinfacher, artinscher R -Modul. Dann ist jeder R -Untermodul von M und jeder R -Faktormodul M wieder halbeinfach.*

Beweis. Sei S ein R -Untermodul von M und sei der R -Untermodul

$$U := \bigoplus_{\substack{E \text{ einfacher} \\ R\text{-Untermodul von } S}} E$$

von S definiert. Wegen der Halbeinfachheit von M gibt es nach Lemma 6.32 dann einen R -Untermodul \tilde{U} von M mit

$$M = U \oplus \tilde{U},$$

so dass wir jedes Element $s \in S \subseteq M$ eindeutig als Summe $s = u + \tilde{u}$ mit $u \in U$ und $\tilde{u} \in \tilde{U}$ schreiben können. Dann ist aber $\tilde{u} = s - u \in S$ und wir können S als direkte Summe

$$S = U \oplus (S \cap \tilde{U})$$

schreiben. Gälte dann $S \neq U$, so besäße die Menge der nichttrivialen R -Untermoduln von $S \cap \tilde{U}$ ein bezüglich Inklusion minimales Element ungleich $\{0\}$, welches nach Definition ein einfacher R -Untermodul von $S \cap \tilde{U}$ und somit auch von S wäre. Das stünde im Widerspruch zur Definition von U und kann daher nicht sein. Es folgt $S = U$ und somit die Halbeinfachheit von S .

Um zu zeigen, dass jeder R -Faktormodul von M halbeinfach ist, betrachten wir einen R -Untermodul U von M . Nach Lemma 6.32 gibt es dann einen R -Untermodul \tilde{U} von M mit

$$M = U \oplus \tilde{U}.$$

Die kanonische Projektion $M \rightarrow M/U$ induziert einen Isomorphismus zwischen dem – nach dem bereits Gezeigten halbeinfachen – R -Untermodul \tilde{U} von M auf M/U . Es folgt, dass M/U halbeinfach ist. \square

Wir nutzen nun Lemma 6.32, um aus der in Satz 4.24 nachgewiesenen Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren bezüglich des Petersson-Skalarprodukts das folgende Korollar herzuleiten:

Korollar 6.34. *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist S_k ein halbeinfacher Modul sowohl über $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ als auch über $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$.*

Beweis. Die Beweise über $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ und über $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ gehen komplett analog. Wir zeigen hier nur die Halbeinfachheit von S_k als $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ -Modul. Tatsächlich ist S_k ein artinscher $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ -Modul,

denn: Zunächst ist S_k nach Satz 4.23 überhaupt ein $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ -Modul. Weiter umfasst $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ die komplexen Zahlen \mathbb{C} , so dass jeder $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ -Untermodul von S_k auch ein \mathbb{C} -Untervektorraum von S_k ist. Da jede nichtleere Menge von \mathbb{C} -Untervektorräumen des endlichdimensionalen \mathbb{C} -Vektorraums S_k offensichtlich ein minimales Element besitzt, ist S_k somit artinsch. #

Wir dürfen also Lemma 6.32 in unserer Situation anwenden und das Korollar folgt, wenn wir zeigen können, dass es zu jedem $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ -Untermodul U von S_k ein $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ -Untermodul \tilde{U} mit

$$S_k = U \oplus \tilde{U} \quad (\text{direkte Summe von } \mathcal{T}_{\mathbb{C},k}\text{-Untermoduln})$$

existiert. Zu einem beliebigen $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ -Untermodul U betrachten wir hierfür das Orthokomplement

$$U^\perp := \{f \in S_k \mid \langle f \mid u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Dieses erfüllt als ein Resultat der Linearen Algebra

$$S_k = U \oplus U^\perp \quad (\text{direkte Summe von } \mathbb{C}\text{-Untervektorräumen})$$

und ist wieder ein $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ -Untermodul,

denn: Nach Satz 4.24 gilt dann für beliebige $f \in U^\perp$ und $T \in \mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$

$$\langle f \mid_k T \mid u \rangle = \langle f \mid u \mid_k T \rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in U,$$

wobei wir für die zweite Identität ausgenutzt haben, dass $u \mid_k T$ nach Voraussetzung wieder in U liegt. #

Das Korollar folgt nun, wenn wir U^\perp für \tilde{U} wählen. □

Wir wollen nun die Eigenschaft, halbeinfach zu sein, vom $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ -Modul S_k auf die Algebra $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ selbst übertragen. Dafür müssen wir zunächst festhalten, was wir in dieser Situation unter Halbeinfachheit verstehen:

Definition 6.35. Sei R ein Ring mit Eins und A eine R -Algebra. Ist dann A als Modul über sich selbst halbeinfach, so nennen wir A **halbeinfach**.

In Annäherung an unsere Situation gilt nun das folgende Lemma:

Lemma 6.36. Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $A \subseteq \text{End}_K(V)$ eine K -Unteralgebra. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) Die K -Algebra A ist halbeinfach.
- (ii) Der A -Modul V ist halbeinfach.

Beweis. Sei zunächst A eine halbeinfache K -Algebra. Da direkte Summen und nach Lemma 6.33 auch A -Faktormoduln halbeinfacher A -Moduln wieder halbeinfach sind und sich jeder A -Modul als Faktormodul eines freien A -Moduls – und also einer solchen direkten Summe – schreiben lässt, folgt insbesondere, dass V ein halbeinfacher A -Modul ist.

Sei nun umgekehrt V ein halbeinfacher A -Modul. Ist $\dim_K(V) = n$ und (b_1, \dots, b_n) eine Basis von V , so ist durch

$$\varphi \mapsto (\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$$

offensichtlich ein K -Vektorraumisomorphismus

$$\text{End}_K(V) \rightarrow V^{\oplus n} := \bigoplus_{j=1}^n V$$

gegeben. Da die kanonische Einbettung $A \subseteq \text{End}_K(V)$ eine Einbettung von A -Moduln ist, ist somit A isomorph zu einem A -Untermodul von $V^{\oplus n}$. Da direkte Summen und nach Lemma 6.33 auch A -Untermoduln halbeinfacher A -Moduln wieder halbeinfach sind, folgt, dass A als A -Modul und somit auch als K -Algebra halbeinfach ist. \square

Mit Korollar 6.34 und Lemma 6.36 folgt nun unmittelbar:

Satz 6.37. Die \mathbb{Q} -Algebra $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ sowie die \mathbb{C} -Algebra $\mathcal{T}_{\mathbb{C},k}$ sind halbeinfach.

Wir wollen nun die in Satz 6.37 gezeigte Halbeinfachheit benutzen, um die eingangs behauptete Algebraizitätsaussage herzuleiten. Recht unmittelbar gilt zunächst für die Hecke-Eigenwerte einer beliebigen Hecke-Eigenform:

Proposition 6.38. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $T \in \mathcal{T}_{\mathbb{Q},k} \subseteq \text{End}(S_k)$. Dann hat T eine Darstellungsmatrix in $\mathbb{Q}^{\dim S_k \times \dim S_k}$ und für alle Hecke-Eigenformen $f \in S_k$ liegt der Eigenwert $\lambda_T(f)$ von f bezüglich T in einem (von f unabhängigen) Körper K_T mit

$$\mathbb{Q} \subseteq K_T \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad [K_T : \mathbb{Q}] \leq (\dim S_k)!$$

Beweis. Für den Beweis wählen wir fest eine Miller-Basis $\{f_1, \dots, f_{\dim S_k}\}$ von S_k wie in Satz 3.15. Deren Elemente haben konstruktionsgemäß rationale Fourier-Koeffizienten und nach der Formel in Satz 4.23 trifft dies auch auf die Fourier-Koeffizienten von $f_\ell|_k T_n$ für alle $\ell \in \{1, \dots, \dim S_k\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ zu. Wegen $f_\ell|_k T_n \in S_k$ gilt zudem

$$f_\ell|_k T_n = \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_{n,\ell,j} f_j \quad \text{mit geeigneten } \lambda_{n,\ell,j} \in \mathbb{C}.$$

Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $\ell, j \in \{1, \dots, \dim S_k\}$ erhalten wir so

$$\lambda_{n,\ell,j} = \sum_{i=1}^{\dim S_k} \lambda_{n,\ell,i} \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{\dim S_k} \lambda_{n,\ell,i} a_j(f_i)$$

$$= a_j \left(\sum_{i=1}^{\dim S_k} \lambda_{n,\ell,i} f_i \right) = a_j (f_\ell|_k T_n) \in \mathbb{Q}.$$

Es folgt, dass die Darstellungsmatrix von $T_n \in \mathcal{T}_{\mathbb{Q},k} \subseteq \text{End}(S_k)$ bezüglich der gegebenen Miller-Basis in $\mathbb{Q}^{\dim S_k \times \dim S_k}$ liegt. Vermöge Proposition 6.29 lässt sich diese Aussage auf alle $T \in \mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ ausdehnen.

Sei nun $T \in \mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ beliebig. Dann ist für alle Hecke-Eigenformen $f \in S_k$ der Hecke-Eigenwert $\lambda_T(f)$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms von T . Letzteres liegt nach dem Obigen im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$ und hat Grad $\dim S_k$. Der Zerfällungskörper dieses Polynoms ist daher ein Körper $\mathbb{Q} \subseteq K_T$ mit $\lambda_T(f) \in K_T$ für alle $f \in S_k$ und $[K_T : \mathbb{Q}] \leq (\dim S_k)!$. Die Proposition folgt, da das Minimalpolynom nach Teil (a) von Proposition 4.31 über \mathbb{R} in Linearfaktoren zerfällt und daher auch $K_T \subseteq \mathbb{R}$ gilt. \square

Für normierte Hecke-Eigenformen in S_k folgt eine (deutlich stärkere) Algebraizitätsaussage über die Fourier-Koeffizienten. Um diese beweisen zu können, zeigen wir eine Version des Satzes von Artin-WEDDERBURN⁶⁸ für kommutative Algebren:

Proposition 6.39. *Sei K ein Körper und A eine halbeinfache, kommutative K -Algebra. Dann ist A isomorph zu einer direkten Summe von Erweiterungskörpern von K .*

Beweis. Zu jedem einfachen A -Modul $M \neq \{0\}$ existiert ein $m \in M$ mit $Am \neq \{0\}$ und also mit $M = Am$. Die offenkundig surjektive Abbildung

$$\phi_M: \begin{cases} A & \rightarrow M, \\ a & \mapsto am \end{cases}$$

induziert dann einen A -Modulisomorphismus

$$\tilde{\phi}_M: A / \text{Kern}(\phi_M) \xrightarrow{\sim} M.$$

Über diesen Isomorphismus kann man eine – von der Wahl von m abhängige – Ringstruktur auf M definieren, bezüglich derer $\tilde{\phi}_M$ zum Ringisomorphismus wird. Nun ist aber $\text{Kern}(\phi_M)$ ein maximales Ideal,

denn: Gäbe es ein Ideal von A , das echt zwischen A und $\text{Kern}(\phi_M)$ läge, so entspräche dieses über den Ringisomorphismus $\tilde{\phi}_M$ einem echten Untermodul von M . Einen solchen kann es aufgrund der Einfachheit von M nicht geben. $\#$

Es folgt, dass $A / \text{Kern}(\phi_M)$ und somit auch M ein Körper ist. Weiter ist M in natürlicher Weise auch ein K -Vektorraum und also ein Erweiterungskörper von K .

Als halbeinfache K -Algebra ist A eine direkte Summe

$$A = \bigoplus_M M \cong \bigoplus_M A / \text{Kern}(\phi_M)$$

⁶⁸Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882-1948)

von einfachen A -Moduln wie oben, wobei man sich klarmacht, dass man als zur Konstruktion der jeweiligen Abbildung ϕ_M benötigtes Element $m \in M$ das Bild des Einselements von A unter der Projektion in die zugehörige Komponente wählen kann, so dass diese Zerlegung auch eine Zerlegung in eine direkte Summe von Ringen liefert. Nach der obigen Überlegung ist A also isomorph zu einer direkten Summe von Erweiterungskörpern von K . \square

Angewendet auf unsere Situation erhalten wir:

Korollar 6.40. *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist die \mathbb{Q} -Algebra $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ isomorph zu einer endlichen direkten Summe von Erweiterungskörpern von \mathbb{Q} , deren Grade über \mathbb{Q} jeweils durch $\dim S_k$ beschränkt sind.*

Beweis. Nach Beispiel 4.12 sowie Satz 4.23 ist die \mathbb{Q} -Algebra $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ kommutativ und nach Satz 6.37 auch halbeinfach. Nach Proposition 6.39 ist daher die \mathbb{Q} -Algebra $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ isomorph zu einer direkten Summe von Erweiterungskörpern von \mathbb{Q} . Aufgrund von $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_{\mathbb{Q},k} = \dim S_k < \infty$ ist dabei sowohl die Anzahl der beteiligten Körper als auch deren Erweiterungsgrad über \mathbb{Q} endlich, es gibt also ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k} \cong \bigoplus_{j=1}^r K_j \quad \text{mit } [K_j : \mathbb{Q}] < \infty \text{ für alle } j \in \{1, \dots, r\}.$$

Nach Proposition 6.38 ist nun $\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k}$ und nach der obigen Überlegung auch K_j für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ isomorph zu einer \mathbb{Q} -Unteralgebra von $\mathbb{Q}^{\dim S_k \times \dim S_k}$. Es folgt

$$[K_j : \mathbb{Q}] \leq \dim S_k \text{ für alle } j \in \{1, \dots, r\},$$

denn: Über die Einbettung von K_j in $\mathbb{Q}^{\dim S_k \times \dim S_k}$ wird $\mathbb{Q}^{\dim S_k}$ zu einem (nichttrivialen) K_j -Vektorraum, wobei die Aktion des Teilkörpers $\mathbb{Q} \subseteq K_j$ die übliche ist. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \dim S_k &= \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{\dim S_k}) = \dim_{\mathbb{Q}}(K_j) \cdot \dim_{K_j}(\mathbb{Q}^{\dim S_k}) \\ &\geq \dim_{\mathbb{Q}}(K_j) = [K_j : \mathbb{Q}] \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. $\#$

Insgesamt haben wir das Korollar gezeigt. \square

Wir können nun das angestrebte Algebraizitätsergebnis über die Fourier-Koeffizienten normierter Hecke-Eigenformen in S_k herleiten:

Satz 6.41. *Sei $k \in \mathbb{Z}$ und sei $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f)q^m \in S_k$ eine normierte Hecke-Eigenform. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der Fourier-Koeffizient $a_n(f)$ reell und algebraisch über \mathbb{Q} .*

(b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(a_n(f) : n \in \mathbb{N}) =: \mathbb{Q}(f) \subseteq \mathbb{R}$

und

$$[\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}] \leq \dim S_k \stackrel{3.10.3.11}{=} \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor - 1 & \text{für } k \not\equiv 2 \pmod{12},^{69} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

Beweis. Behauptung (a) folgt unmittelbar aus Proposition 6.38, da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Hecke-Eigenwerte der normierten Hecke-Eigenform $f \in S_k$ mit den Fourier-Koeffizienten $a_n(f)$ übereinstimmen.

Zum Beweis von Behauptung (b) schreiben wir

$$\mathcal{T}_{\mathbb{Q},k} \cong \bigoplus_{j=1}^r K_j \quad \text{mit } [K_j : \mathbb{Q}] \leq \dim S_k \text{ für alle } j \in \{1, \dots, r\}$$

wie im Beweis von Korollar 6.40 und betrachten einen zunächst beliebigen \mathbb{Q} -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi: \mathcal{T}_{\mathbb{Q},k} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}.$$

Nach dem Homomorphiesatz gilt für diesen dann

$$\text{Bild}(\varphi) \cong (K_1 \oplus \dots \oplus K_r) / \text{Kern}(\varphi).$$

Da mit $\overline{\mathbb{Q}}$ auch $\text{Bild}(\varphi)$ nullteilerfrei ist, muss dabei $\text{Kern}(\varphi)$ ein Primideal sein. Primideale in einer endlichen direkten Summe kommutativer Ringe $R_1 \oplus \dots \oplus R_r$ sind aber von der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{p}_r & \quad \text{mit } \mathfrak{p}_\ell \subseteq R_\ell \text{ prim für ein } \ell \in \{1, \dots, r\} \\ & \quad \text{und } \mathfrak{p}_j = R_j \text{ für alle } j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{\ell\}. \end{aligned}$$

In unserem Fall, dass die beteiligten Ringe allesamt Körper sind, gilt speziell

$$\text{Kern}(\varphi) = K_1 \oplus \dots \oplus K_{\ell-1} \oplus \{0\} \oplus K_{\ell+1} \oplus \dots \oplus K_r \quad \text{für ein } \ell \in \{1, \dots, r\}$$

und also

$$\text{Bild}(\varphi) \cong K_\ell \quad \text{für ein } \ell \in \{1, \dots, r\}.$$

Der Satz folgt, da offensichtlich durch die Zuordnung

$$\varphi: \begin{cases} \mathcal{T}_{\mathbb{Q},k} & \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}, \\ T & \mapsto \lambda_T(f) \end{cases}$$

ein nach Teil (a) wohldefinierter \mathbb{Q} -Algebrenhomomorphismus gegeben ist und $\text{Bild}(\varphi) = \mathbb{Q}(f)$ gilt, da es nach Korollar 4.21 ausreicht, hierfür die n -ten Hecke-Operatoren zu betrachten, und deren Eigenwerte mit den Fourier-Koeffizienten von f übereinstimmen, weil letzteres eine normierte Hecke-Eigenform ist. \square

⁶⁹Da wir die Existenz einer normierten Hecke-Eigenform vorausgesetzt haben, sind diese Werte immer ≥ 1 .

6.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1. In dieser Aufgabe untersuchen wir eine alternative Herangehensweise an den Beweis von Lemma 6.12. Diese nutzt keine Aussagen über Kettenbrüche und basiert stattdessen auf der Idee benachbarter Elemente in der Menge der Spitzen $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Jede Spitze $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ lässt sich eindeutig als gekürzter Bruch $s = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}_0$ schreiben, wobei wir $\infty = \frac{1}{0}$ setzen. Für solche Brüche definieren wir:

$$\text{Zwei gekürzte Brüche } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \text{ sind } \mathbf{benachbart}, \text{ in Zeichen: } \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \\ :\iff ad - bc = \pm 1.$$

Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) Gilt

$$s_1 \sim s_2 \sim \dots \sim s_n \sim s_1 \quad \text{mit einem } n \in \mathbb{N}$$

für paarweise verschiedene Spitzen $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, so gibt es stets $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i - j \not\equiv \pm 1 \pmod{n}$ und $s_i \sim s_j$.

Hinweis: Nehmen Sie ohne Einschränkung $s_1 = \infty$ an.

(b) Zu je zwei Spitzen $s, t \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gibt es eine endliche Menge $\{s_1, \dots, s_n\} \subseteq \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ mit

$$s = s_1 \sim s_2 \sim \dots \sim s_n = t.$$

Hinweis: Es reicht offensichtlich zu zeigen, dass man jedes $t \in \mathbb{Q}$ über endlich viele Nachbarschaftsbeziehungen mit $s = \infty$ verbinden kann.

(c) Folgern Sie Lemma 6.12 aus Aussage (b).

Aufgabe 6.2. Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade und $k := w + 2$. Zeigen Sie, dass dann für jede Spitzenform $f \in S_k$ Formel

$$r_0(f|_k T_2) = \sigma_{w+1}(2) r_0(f) - \sum_{\ell=1}^{\frac{w-2}{2}} \binom{w}{2\ell} 2^{2\ell} r_{2\ell}(f)$$

gilt.

Die Eichler-Selberg-Spurformel

In Kapitel 4 haben wir für eine beliebige natürliche Zahl n den n -ten Hecke-Operator T_n als einen linearen Operator auf dem endlich-dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum M_k der holomorphen Modulformen von einem Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ eingeführt, der sich auf den Untervektorraum S_k der Spitzenformen darin einschränken lässt. Damit ergibt der Begriff der Spur von T_n auf M_k bzw. auf S_k Sinn und man kann nach einer geschlossenen Formel für diese Größe fragen. In diesem Kapitel leiten wir hierzu mit den Methoden der Kapitel 5 und 6 die Eichler-SELBERG-Spurformel⁷⁰ her. Diese wurde zuerst 1956 von Selberg postuliert und 1957 von Eichler bewiesen. Die Spurformel kann verwendet werden, um eine Vielzahl bedeutender Identitäten in der Zahlentheorie und in der Theorie der automorphen Formen herzuleiten.

Nachdem wir in den Abschnitten 7.1 und 7.2 noch einige Grundlagen zu Dirichlet-Reihen und ihrem Verhältnis zu Modulformen eingeführt haben, anhand derer wir die in den vergangenen Kapiteln studierten Perioden neu interpretieren können, folgen wir in unserer Ausführung dem im Jahr 2020 veröffentlichten neuen Beweis von POPA⁷¹ und Zagier, der wiederum auf einer Idee von Zagier aus dem Jahr 1993 fußt. Die vorgestellten Methoden verallgemeinern sich auch auf Kongruenzuntergruppen; das führen wir jedoch nicht vor. Im größeren Kontext betrachtet ist die Eichler-Selberg-Spurformel ein Spezialfall der von ARTHUR⁷² in einer langen Reihe von Veröffentlichungen in den Jahren 1974 bis 2003 eingeführten Arthur-Selberg-Spurformel, die den Fall beliebiger reductiver Gruppen über globalen Körpern beschreibt und außerhalb der Reichweite dieser Vorlesung liegt.

7.1 Dirichlet-Reihen

In Kapitel 4 haben wir vermöge der Hecke-Theorie direkt auf Fourier-Koeffizienten geeigneter Modulformen zugegriffen. Eine indirekte Möglichkeit, diese – oder allgemeiner beliebige, zah-

⁷⁰Atle Selberg (1917-2007)

⁷¹Alexandru A. Popa

⁷²James Arthur (*1944)

lentheoretisch interessante Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – zu studieren, ergibt sich, indem man ihre Glieder als Koeffizienten in geeignete analytische Reihen einsetzt. Im Falle, dass die gewählte analytische Reihe eine Potenzreihe ist, erhält man so die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit einer komplexen Variablen } z.$$

Sollen funktionentheoretische Methoden angewandt werden, muss dabei Konvergenz vorliegen; es ist also sinnvoll zu fordern, dass die Reihe einen positiven Konvergenzradius hat. Der Identitätssatz für Potenzreihen stellt dann sicher, dass die entstandene Funktion völlig charakteristisch für die untersuchte Folge ist. Wächst die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht schneller als ein bestimmtes Polynom – so wie das nach Satz 2.37 bei der Folge der Fourier-Koeffizienten einer gegebenen Modulform der Fall ist – kann man ihre Glieder statt in eine Potenzreihe in eine Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad \text{mit einer komplexen Variablen } s$$

als Koeffizienten einsetzen und erhält wieder eine für die untersuchte Folge charakteristische Funktion. Derartige Reihen wurden zuerst von Dirichlet im Nachgang des Beweises seines Primzahlsatzes konzeptionell gefasst und heißen heute *Dirichlet-Reihen*. In diesem und dem nächsten Abschnitt werden wir kurz in die Theorie der Dirichlet-Reihen einführen und als Höhepunkt mit dem zuerst 1936 von Hecke bewiesenen Hecke'schen Umkehrsatz einen engen Zusammenhang zwischen diesen und Fourier-Reihen herstellen. Da dies den Rahmen dieser Vorlesung sprengen würde, beweisen wir hierbei nicht alle Resultate. Detaillierte Herleitungen finden sich beispielsweise in meinem Skript zur [Analytischen Zahlentheorie](#).



Definition 7.1. Für eine Folge $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen bezeichnen wir die (formale) Reihe

$$D(s) := D(s; a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

als die von a erzeugte *Dirichlet-Reihe*, wobei $s = \sigma + it$ eine komplexe Variable bezeichne.

Beispiel 7.2. (a) Für $a = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt die Dirichlet-Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

die *Riemann'sche Zetafunktion*.

(b) Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n \in M_k$ eine Modulform von Gewicht $k \in \mathbb{Z}$, so heißt die Dirichlet-Reihe

$$L(s; f) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) n^{-s}$$

die zu f gehörige *L-Reihe*.

Natürlich ist es möglich, Dirichlet-Reihen als rein formale Objekte zu studieren. Umso besser ist es aber, wenn sie in gewissen Regionen konvergieren und dort eine komplexwertige Funktion darstellen. Vermöge Abel'scher partieller Summation zeigt man in Analogie zum aus der Funktionentheorie bekannten Konvergenzverhalten von Potenzreihen den folgenden Satz:

Satz 7.3. Seien $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und die Dirichlet-Reihe

$$D(s; a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

für eine komplexe Zahl s_0 konvergent. Dann konvergiert sie bereits für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Teilmengen der Halbebene

$$\mathbb{S}_{\operatorname{Re}(s_0)} := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)\},$$

weshalb die Reihe $D(s; a)$ in diesem Bereich eine holomorphe Funktion darstellt.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta der Dirichlet-Reihe $D(s; a)$ zu einer gegebenen Folge $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen können wir diese in ihrem Konvergenzbereich gliedweise ableiten und erhalten dort somit

$$D^{(k)}(s; a) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log(n)^k n^{-s}.$$

Im folgenden Korollar zu Satz 7.3 untersuchen wir die Frage, inwieweit es für Dirichlet-Reihen einen zum Konvergenzradius einer Potenzreihe analogen Begriff gibt:

Korollar 7.4. Zu jeder Dirichlet-Reihe $D(s)$, die irgendwo konvergiert und irgendwo divergiert, gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\sigma_0 := \sigma_0(D) \in \mathbb{R}$, so dass $D(s)$ für alle s mit $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0(D)$ konvergiert und für alle s mit $\operatorname{Re}(s) < \sigma_0(D)$ divergiert.

Beweis. Nach Voraussetzung und Satz 7.3 existiert

$$\sigma_0(D) := \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \text{es gibt ein } t \in \mathbb{R} \text{ mit konvergentem } D(\sigma + it)\} \in \mathbb{R}$$

und hat die gewünschten Eigenschaften. □

Die reelle Zahl σ_0 aus dem Korollar nennt man auch die **Konvergenzabszisse** der Dirichlet-Reihe und die Halbebene

$$\mathbb{S}_{\sigma_0} := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$$

ihre **Konvergenzhalbene**. Natürlich gibt es auch Dirichlet-Reihen, die an allen Stellen konvergieren, wie zum Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n^{-s},$$

aber auch solche, die nirgends konvergieren, wie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!n^{-s}.$$

In diesen Fällen setzen wir die Konvergenzabszisse formal zu $\sigma_0 := -\infty$ bzw. $\sigma_0 := \infty$.

Wir erinnern uns, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzbereichs absolut konvergieren. Bei Dirichlet-Reihen muss dies allerdings nicht mehr so sein. Beispielsweise konvergiert die Dirichlet-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s} \quad (7.1)$$

nach dem Abel'schen Konvergenzkriterium für alle reellen $s > 0$, aber wegen der Divergenz der harmonischen Reihe und Korollar 7.4 im Bereich $0 < s \leq 1$ keinesfalls absolut. Wir ziehen als Konsequenz, dass es neben der Konvergenzabszisse einer gegebenen Dirichlet-Reihe $D(s)$ noch eine **absolute Konvergenzabszisse** $\sigma_a := \sigma_a(D)$ geben muss. Ist $D(s) = D(s; a)$ für eine Folge $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen, so ist diese definiert als die Konvergenzabszisse der Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-s}$. Wir geben im Folgenden ein einfaches Kriterium, wann eine Dirichlet-Reihe absolut konvergiert:

Proposition 7.5. *Für eine Folge $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen gebe es ein $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| = O_{\varepsilon}(n^{\sigma-1+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, wobei die Beschränktheitskonstante vom jeweiligen ε abhängt. Dann folgt für die Dirichlet-Reihe $D(s) = D(s; a)$ bereits $\sigma_a(D) \leq \sigma$.*

Beweis. Sei $\tilde{s} = \tilde{\sigma} + i\tilde{t} \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{\sigma} > \sigma$ fest gewählt. Es genügt zu zeigen, dass die Reihe im Punkt \tilde{s} absolut konvergiert. Für $\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma} - \sigma}{2} > 0$ gibt es nach Voraussetzung eine Konstante $C_{\varepsilon} > 0$ mit $|a_n| \leq C_{\varepsilon} n^{\sigma-1+\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\tilde{\sigma}-i\tilde{t}} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\tilde{\sigma}-2\varepsilon} \\ &\leq C_{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\varepsilon} \leq C_{\varepsilon} + C_{\varepsilon} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = C_{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Damit ist eine konvergente Majorante gefunden und die Behauptung folgt. \square

Beispiel 7.6. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n \in M_k$ eine Modulform von Gewicht $k \in \mathbb{Z}$. Nach Satz 2.37 gilt dann $a_n(f) = O(n^k)$ und nach Proposition 7.5 somit $\sigma_a(L) \leq k + 1$ für die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a(L)$ von $L(s; f)$. Insbesondere stellt die L -Reihe $L(s; f)$ eine auf der Halbebene \mathbb{S}_{k+1} holomorphe Funktion dar.

Offenkundig gilt $\sigma_0(D) \leq \sigma_a(D)$. Die Frage, ob sich $\sigma_a(D)$ auch in die andere Richtung durch $\sigma_0(D)$ kontrollieren lässt, beantwortet die folgende Proposition, welche sich wieder vermöge Abel'scher partieller Summation nachweisen lässt:

Proposition 7.7. Für die Konvergenzabszisse $\sigma_0(D)$ und die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a(D)$ einer gegebenen Dirichlet-Reihe $D(s)$ gilt

$$\sigma_0(D) \leq \sigma_a(D) \leq \sigma_0(D) + 1.$$

Die Abschätzung in Proposition 7.7 ist scharf, da die Reihe (7.1) die Konvergenzabszissen $\sigma_0 = 0$ und $\sigma_a = 1$ besitzt.

Natürlich ist es interessant, von den Eigenschaften einer Koeffizientenfolge auf die zugehörige Dirichlet-Reihe zu schließen, wie etwa in Satz 7.3 und Proposition 7.5. Es ist jedoch auch die umgekehrte Schlussrichtung möglich, wie etwa in der folgenden, nützlichen Proposition, die man wieder mit Abel'scher Summation zeigt:

Proposition 7.8. Sei $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, für welche die Partialsummen der Dirichlet-Reihe $D(s; a)$ für ein $s = \sigma \geq 0$ beschränkt sind. Dann folgt bereits

$$A(x) := \sum_{0 < n \leq x} a_n = O(x^\sigma).$$

Der aus der Funktionentheorie wohlbekanntes Identitätssatz für Potenzreihen besagt, dass zwei Potenzreihen, die in einem Häufungspunkt ihres gemeinsamen zusammenhängenden Definitionsbereichs übereinstimmen, bereits identisch sind, so dass insbesondere alle ihre Koeffizienten übereinstimmen. Für Dirichlet-Reihen gibt es auch solch einen Identitätssatz:

Satz 7.9 (Identitätssatz für Dirichlet-Reihen). Seien $a := (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\tilde{a} := (\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen komplexer Zahlen, für welche die zugehörigen Dirichlet-Reihen $D(s; a)$ und $D(s; \tilde{a})$ irgendwo konvergieren und in einer nichtleeren, offenen Teilmenge von \mathbb{C} übereinstimmen. Dann folgt bereits, dass $D(s; a)$ und $D(s; \tilde{a})$ auf einer rechen Halbebene übereinstimmen und insbesondere $a_n = \tilde{a}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweisidee. Nach Satz 7.3 konvergieren $D(s; a)$ und $D(s; \tilde{a})$ bereits auf einer rechten Halbebene $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$, welche die offene Teilmenge von \mathbb{C} umfasst, auf sie übereinstimmen, und stellen dort holomorphe Funktionen dar. Da $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet ist, stimmen somit $D(s; a)$ und $D(s; \tilde{a})$ nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen auf ganz \mathcal{S} überein.

Nehmen wir nun an, es gäbe eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \neq \tilde{a}_m$. Dann gälte

$$0 = m^\sigma (D(\sigma; a) - D(\sigma; \tilde{a})) = (a_m - \tilde{a}_m) + m^\sigma \sum_{n=m+1}^{\infty} (a_n - \tilde{a}_n) n^{-\sigma} \quad \text{für } \sigma \gg 0.$$

Der Satz folgt, da man durch geschicktes Abschätzen zeigen kann, dass die Summe auf der rechten Seite für $\sigma \rightarrow \infty$ beliebig klein würde und sich im Widerspruch zu unserer Annahme $a_m \neq \tilde{a}_m$ ergäbe, so dass eine solche kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ nicht existieren kann. \square

Wir können den Identitätssatz für Dirichlet-Reihen 7.9 dazu verwenden, die Menge

$$\mathcal{O}_{\text{DR}} \subseteq \left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathbb{S}_x) \right) / \sim$$

aller auf irgendeiner rechten Halbebene holomorphen Funktionen, die sich dort in eine Dirichlet-Reihe entwickeln lassen, genauer zu beschreiben. Hierbei werden im Sinne des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen zwei je auf einer rechten Halbebene holomorphe Funktionen genau dann durch \sim identifiziert, wenn Sie eingeschränkt auf eine geeignete rechte Halbebene übereinstimmen. Um die Idee gedanklich vorzubereiten, führen wir zunächst auf der Menge FDR der formalen Dirichlet-Reihen eine Ringstruktur ein:

Nach Konstruktion entsprechen formale Dirichlet-Reihen Eins-zu-Eins Folgen komplexer Zahlen. Letztere lassen sich wiederum als *zahlentheoretische Funktionen*, also komplexwertige Funktionen auf \mathbb{N} , interpretieren. Schreiben wir

$$\mathcal{A} := \{a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

für die Gesamtheit aller zahlentheoretischen Funktionen, so erhalten wir eine Bijektion von Mengen

$$Y: \begin{cases} \mathcal{A} & \rightarrow \text{FDR}, \\ a & \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}, \end{cases}$$

die es uns ermöglicht, formale Dirichlet-Reihen künftig auch durch zahlentheoretische Funktionen statt durch Folgen komplexer Zahlen zu beschreiben, wobei wir in diesem Kontext stillschweigend für alle $n \in \mathbb{N}$ den Funktionswert $a(n)$ mit a_n bezeichnen werden, um die gewohnte Schreibweise für die Koeffizienten einer Reihe beizubehalten. Offenbar wird \mathcal{A} durch komponentenweise Addition eine abelsche Gruppe. Man überprüft leicht, dass \mathcal{A} mit der durch

$$*: \begin{cases} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \rightarrow \mathcal{A}, \\ (a, b) & \mapsto a * b \end{cases}$$

mit

$$(a * b): \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ n & \mapsto (a * b)(n) := \sum_{d|n} a(d)b\left(\frac{n}{d}\right) \end{cases}$$

gegebenen *Dirichlet-Faltung* als zusätzlicher multiplikativer Verknüpfung ein kommutativer Ring mit Eins

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(n) := \begin{cases} 1, & \text{für } n = 1, \\ 0, & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

ist. Über die Bijektion Y können wir diese Ringstruktur auf \mathcal{A} auf die Menge FDR übertragen:

Satz 7.10. *Die Menge FDR wird zum **Ring der formalen Dirichlet-Reihen** und Y zum Ringhomomorphismus vermöge der auf FDR gegebenen Verknüpfungen*

$$D(s; a) + D(s; \tilde{a}) = D(s; a + \tilde{a}) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \tilde{a}_n)n^{-s} \quad \text{für alle } a, \tilde{a} \in \mathcal{A},$$

$$\begin{aligned}
D(s; a)D(s; \tilde{a}) &= D(s; a * \tilde{a}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{d|k} a_d \tilde{a}_{\frac{k}{d}} \right) k^{-s} \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n \tilde{a}_m (nm)^{-s} \quad \text{für alle } a, \tilde{a} \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Die Teilmenge $\text{KDR} \subseteq \text{FDR}$ der irgendwo konvergenten Dirichlet-Reihen stellt offenbar einen Unterring von FDR dar. Nach Satz 7.3 und Korollar 7.4 lässt sich jeder konvergenten Dirichlet-Reihe aus KDR eindeutig eine Funktion in \mathcal{O}_{DR} zuordnen und nach dem Identitätssatz für Dirichlet-Reihen 7.9 ist diese Zuordnung Eins-zu-Eins. Wir können so \mathcal{O}_{DR} bis auf Isomorphie als Unterring von FDR auffassen und via Y^{-1} durch eine geeignete Teilmenge von \mathcal{A} beschreiben. Nach den Propositionen 7.5 und 7.8 ist diese Teilmenge gerade der Unterring $\mathcal{A}_{\text{poly}} \subseteq \mathcal{A}$ der polynomiell beschränkten zahlentheoretischen Funktionen. Insgesamt erhalten wir so durch Einschränkung von Y mit

$$Y_{\text{poly}}: \begin{cases} \mathcal{A}_{\text{poly}} & \rightarrow \mathcal{O}_{\text{DR}}, \\ a & \mapsto Y(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \end{cases}$$

einen Ringisomorphismus.

Eine nette Anwendung von Satz 7.10 ist, dass sich mit dem Satz die L -Reihen der Eisenstein-Reihen durch die Riemann'sche Zetafunktion beschreiben lassen:

Beispiel 7.11. Für eine gerade ganze Zahl $k \geq 4$ ist die L -Reihe der Eisenstein-Reihe

$$E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

durch

$$L(s; E_k) = \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \zeta(s) \zeta(s-k+1)$$

gegeben,

denn: Wir schreiben ι für die durch $\iota(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegebene Identität. Für ein beliebiges $s \in \mathbb{C}$ nennen wir die durch $\iota^s(n) := n^s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte zahlentheoretische Funktion die **s -te Potenzfunktion**. Offensichtlich gilt bezüglich der Dirichlet-Faltung

$$\sigma_{k-1} = \iota^0 * \iota^{k-1}.$$

Mit Satz 7.10 folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) n^{-s} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\iota^0 * \iota^{k-1})(n) n^{-s} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(s-k+1)} \right) \\
&= \zeta(s) \zeta(s-k+1).
\end{aligned}$$

7.2 Die Umkehrsätze von Mellin und Hecke

Dirichlet- und Potenzreihen sind über die MELLIN-Transformation⁷³ eng miteinander verwoben. Wir zeigen nun auf, warum das so ist, und führen dies weiter zu einem Zusammenhang zwischen Modulformen mit Fourier-Entwicklungen einerseits und deren zugehörigen Dirichlet-Reihen andererseits. Eine zentrale Rolle in diesem Kontext spielt die Gammafunktion, die wir nun zunächst einführen:

Proposition 7.12. *Die Funktion*

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_0$$

heißt die **Gammafunktion** und weist folgende wichtige Eigenschaften auf:

- (a) Sie ist auf \mathbb{S}_0 holomorph und besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ mit einfachen Polen in $s = -n \in (-\mathbb{N}_0)$ mit Residuum

$$\operatorname{res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

- (b) Sie ist auf jedem abgeschlossenen Streifen $\overline{\mathbb{S}_{a,b}} \cap \{s \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(s)| \geq 1\}$ mit $a < b$ beschränkt.

- (c) Es gilt die Funktionalgleichung $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$.

- (d) Es gilt $\Gamma(1) = 1$ und allgemein $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Wir sind nun in der Lage, einen wichtigen Vorbereitungssatz einzusehen, der zuerst 1910 von Mellin nachgewiesen wurde:

Proposition 7.13 (Mellin'sche Inversionsformel). *Für alle reellen Parameter $c > 0$ gilt die Formel*

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}_0,$$

Beweis. Für ein Polynom P , alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{S}_0$ schreiben wir in diesem Beweis

$$I_c(z; P) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} P(s) \Gamma(s) z^{-s} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(c+it) \frac{\Gamma(c+it)}{z^{c+it}} dt,$$

und vereinfacht $I_c(z) := I_c(z; 1)$. Indem man die Gammafunktion auf Vertikalstreifen geeignet abschätzt, kann man zeigen, dass dieses Integral für $c \notin -\mathbb{N}_0$ stets absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{S}_0$ konvergiert und dort also nach dem Weierstraß'schen Konvergenzsatz eine holomorphe Funktion darstellt.

⁷³Robert Hjalmar Mellin (1854-1933)

Erneut mit dem Wachstum der Gammafunktion und mit der Kenntnis ihrer Residuen folgt ferner für $x > 0$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ mit $c_2 > c_1$ die Asymptotik

$$\left| \int_{c_1 \pm iR}^{c_2 \pm iR} \Gamma(s)x^{-s} ds \right| \ll_x \int_{c_1 \pm iR}^{c_2 \pm iR} |\Gamma(s)| ds = o_{c_1, c_2}(1), \quad R \rightarrow \infty,$$

weshalb mit Integration über den Rand des Rechtecks mit Ecken $c_1 \pm iR$ und $c_2 \pm iR$ und dem Residuensatz

$$I_{c_2}(x) = I_{c_1}(x) + \sum_{\substack{c_1 < j < c_2 \\ j \leq 0}} \operatorname{res}_{s=j}(\Gamma(s)x^{-s}) = I_{c_1}(x) + \sum_{\substack{c_1 < j < c_2 \\ j \leq 0}} \frac{(-1)^j x^{-j}}{(-j)!} \quad (7.2)$$

im Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ folgt. Diese punktweise für alle $x > 0$ gezeigte Identität setzt sich mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen auf ganz \mathbb{S}_0 fort, da sich beide Seiten dort holomorph ausdehnen, und es gilt für $c_1, c_2 > 0$ bereits $I_{c_1} \equiv I_{c_2}$. Aufgrund der Wahl $P(s) := -s$ und einer geeigneten Verallgemeinerung der Leibniz'schen Regel können wir die Differentiation mit der Integration vertauschen und erhalten mit der Funktionalgleichung $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für alle $c > 0$ mit der Substitution $s \mapsto s-1$ sofort

$$I'_c(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s+1)z^{-s-1} ds = -I_{c+1}(z) = -I_c(z).$$

Damit folgt $I_c(z) = C \cdot e^{-z}$ für ein $C \in \mathbb{C}$, das noch bestimmt werden muss. Mit (7.2) haben wir aber mit den Wahlen $c_1 := -\frac{1}{2}$ und $c_2 = 1$ für alle $x > 0$

$$I_1(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(s)x^{-s} ds = 1 + O\left(x^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} |\Gamma(s)| ds\right) = 1 + O(x^{\frac{1}{2}}).$$

Also gilt $\lim_{x \rightarrow 0^+} I_c(x) = 1$, und folglich $C = 1$, womit alles bewiesen ist. \square

Mellin verallgemeinerte seine Inversionsformel 7.13 zu einem Zusammenhang zwischen gewissen gegebenen Funktionen und ihren jeweiligen Mellin-Transformierten. Wir nehmen dies als Ausgangspunkt für die Umrechnung von Dirichlet-Reihen in Potenz- bzw. Fourier-Reihen:

Satz 7.14 (Mellin'scher Umkehrsatz). Seien $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen mit

$$a_n = O(n^A) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wir betrachten weiter die Funktionen

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}} \quad \text{mit } q^{\frac{n}{\lambda}} = e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}},$$

$$\Lambda_\lambda(s; f) := \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) L(s; f) \quad \text{mit } L(s; f) := D(s; a)$$

in komplexen Variablen z bzw. s . Diese hängen wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}\Lambda_\lambda(s; f) &= \int_0^\infty t^{s-1} (f(it) - a_0) dt && \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{A+1}, \\ f(z) - a_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Lambda_\lambda(s; f) (-iz)^{-s} ds && \text{für alle } c > A + 1, z \in \mathbb{H}.\end{aligned}$$

Insbesondere konvergieren die Integrale in den angegebenen Bereichen.

Beweis. Nach Proposition 7.5 konvergiert die Reihe $L(s; f)$ in \mathbb{S}_{A+1} absolut. Dort erhalten wir

$$\begin{aligned}\Lambda_\lambda(s; f) &= \sum_{n=1}^\infty a_n \left(\frac{2\pi n}{\lambda} \right)^{-s} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty a_n \left(\frac{2\pi n}{\lambda} \right)^{-s} t^{s-1} e^{-t} dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty a_n t^{s-1} e^{-\frac{2\pi n t}{\lambda}} dt.\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Lebesgue können wir Integration und Summation vertauschen – wir wählen die absolut konvergente Reihe als Majorante – und erhalten

$$\begin{aligned}\Lambda_\lambda(s; f) &= \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\frac{2\pi n t}{\lambda}} dt \\ &= \int_0^\infty t^{s-1} (f(it) - a_0) dt.\end{aligned}$$

Das zeigt die erste Teilbehauptung.

Die zweite Teilbehauptung ergibt sich durch Anwendung der Mellin'schen Inversionsformel 7.13. Für alle $z \in \mathbb{H}$ und zunächst alle $c > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}f(z) - a_0 &= \sum_{n=1}^\infty a_n e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^\infty \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a_n \Gamma(s) \left(-\frac{2\pi i n z}{\lambda} \right)^{-s} ds.\end{aligned}$$

Nehmen wir nun zusätzlich $c > A + 1$ an, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ absolut und gleichmäßig nach Proposition 7.5. Erneut folgt die Behauptung direkt durch Vertauschen von Integration und Summation. \square

Bemerkung 7.15. Die Zuordnung

$$f \mapsto \int_0^\infty t^{s-1} (f(it) - a_0) dt$$

heißt die **Mellin-Transformation** und stellt nach dem Mellin'schen Umkehrsatz 7.14 – bis auf den gut kontrollierbaren Vorfaktor $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)$ – eine analytische Realisierung der Zuordnung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

vom Raum der in der Einheitskreisscheibe konvergenten Potenzreihen mit betragsmäßig langsam wachsenden Koeffizienten in den Raum der Dirichlet-Reihen dar.

In Abschnitt 7.3 werden wir vermöge der Mellin-Transformation eine Interpretation der Perioden $r_j(f)$ einer gegebenen Spitzenform $f \in S_k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ durch die Werte $L(j+1; f)$ der zugehörigen L -Reihe herleiten.

Im Jahr 1936 zeigte Hecke eine Spezialisierung und Verschärfung des Mellin'schen Umkehrsatzes 7.14 für Modulformen. Diese ergänzt die bloßen Funktionen im Umkehrsatz durch wünschenswerte Eigenschaften, die sich unter der gezeigten Äquivalenz mit übersetzen:

Satz 7.16 (Hecke'scher Umkehrsatz). Seien $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $k \in 2\mathbb{N}$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}}$$

eine Funktion in der komplexen Variablen q . Dann gilt die Charakterisierung:

Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Funktion f ist eine Modulform von Gewicht k zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, liegt also in M_k .
- (ii) Es ist $\lambda = 1$ und $a_n = O(n^A)$ für ein $A > 0$. Die Funktion

$$\Lambda(s; f) + a_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{s-k} \right)$$

besitzt eine ganze Fortsetzung und ist auf vertikalen Streifen endlicher Breite beschränkt. Zudem besteht zwischen meromorphen Funktionen die Funktionalgleichung

$$\Lambda(k-s; f) = (-1)^{\frac{k}{2}} \Lambda(s; f).$$

Wir zeigen diesen Satz hier nicht; eine Hauptzutat zu seinem Beweis ist das PHRAGMÉN-LINDELÖF-Prinzip.⁷⁴

7.3 Perioden von nicht-cuspidalen Modulformen

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, den Eichler-Shimura-Isomorphismus, beziehungsweise Satz 6.4, auf den Fall nicht-cuspidaler Modulformen auszudehnen. Im Unterschied zu Kapitel 5

⁷⁴Lars Edvard Phragmén (1863-1937) und Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946)

zeigen wir dabei eine komplexe Variante des Satzes. Hierfür betrachten wir zunächst die bereits in den Kapiteln 5 und 6 studierte Situation einer Spitzenform $f \in S_k$ mit einem geraden $w \in \mathbb{N}$ und $k := w + 2$ genauer: Für alle $j \in \{0, \dots, w\}$ kennen wir hier die Perioden

$$\begin{aligned} r_j(f) &\stackrel{(5.13)}{=} \int_0^{i\infty} f(z)z^j dz \\ &\stackrel{(6.2)}{=} i^{j+1} \int_0^\infty f(it)t^j dt \\ &\stackrel{7.14}{=} i^{j+1} \Lambda(j+1; f). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Diese lassen sich elegant zum (**homogenen**) **Periodenpolynom**

$$\begin{aligned} r(X, Y; f) &:= \int_0^{i\infty} f(z)(zY - X)^w dz \\ &\stackrel{(5.13)}{=} \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} (-1)^j r_j(f) X^{w-j} Y^j \\ &\stackrel{(7.3)}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \binom{w}{j} i^{1-j} \Lambda(j+1; f) X^{w-j} Y^j \in \mathbb{C}[X, Y] \end{aligned} \quad (7.4)$$

zusammenfassen, wobei wir für die Ausweitung des Laufbereichs des Index im letzten Schritt zweierlei ausnutzen: Zum Einen hat die Funktion $\Lambda(s; f) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s; f)$ nach dem Hecke'schen Umkehrsatz 7.16 eine holomorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Lambda(k - s; f) = (-1)^{\frac{k}{2}} \Lambda(s; f). \quad (7.5)$$

Zum Anderen hat der Binomialkoeffizient, interpretiert als

$$\binom{w}{j} = \frac{\Gamma(w+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(w-j+1)}, \quad (7.6)$$

für alle $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, w\}$ eine einfache Nullstelle, welche die endlichen Werte $\Lambda(j+1; f)$ auslöscht.

Beispiel 7.17. Das Periodenpolynom der Diskriminante $\Delta \in S_{12}$ ist durch

$$\begin{aligned} r(X, Y; \Delta) &\stackrel{(7.4)}{=} \sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j} (-1)^j r_j(\Delta) X^{10-j} Y^j \\ &\stackrel{6.26}{=} \left(X^{10} - \frac{691}{36} X^8 Y^2 + \frac{691}{12} X^6 Y^4 - \frac{691}{12} X^4 Y^6 + \frac{691}{36} X^2 Y^8 - Y^{10} \right) \cdot r_0(\Delta) \\ &\quad + \left(-10X^9 Y + \frac{125}{2} X^7 Y^3 - 105X^5 Y^5 + \frac{125}{2} X^3 Y^7 - 10XY^9 \right) \cdot r_1(\Delta) \end{aligned}$$

gegeben, wobei nach (6.2) bekanntlich $r_0(\Delta) \in i\mathbb{R}$ und $r_1(\Delta) \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir verallgemeinern diese Situation nun gemäß eines 1991 erschienenen Resultats von Zagier auf beliebige Modulformen und betrachten dafür ein $f \in M_k$ mit Fourier-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n \quad \text{mit } a_n(f) \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Nach dem Hecke'schen Umkehrsatz 7.16 hat dann die Funktion

$$\begin{aligned} \Lambda(s; f) &= (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s; f) \\ &= \int_0^{\infty} (f(it) - a_0(f)) t^{s-1} dt \\ &= i^{-s} \cdot \int_0^{i\infty} (f(z) - a_0(f)) z^{s-1} dz \end{aligned}$$

eine im Allgemeinen nurmehr meromorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} , erfüllt aber weiter die Funktionalgleichung (7.5). Die Singularitäten im Fall $f \in M_k \setminus S_k$ sind dabei zwei einfache Pole in $s = 0$ und $s = k = w + 2$ mit Residuen

$$-a_0(f) \quad \text{bzw.} \quad (-1)^{\frac{w}{2}} a_0(f).$$

Die Werte der Ableitung der durch den Binomialkoeffizienten (7.6) gegebenen Funktion an den zugehörigen Stellen $s = -1$ und $s = w + 1$ lassen sich zu

$$\frac{1}{w+1} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{1}{w+1}$$

berechnen, siehe Übungsaufgabe 7.1. Analog zu (7.4) erhalten wir so die rationale Funktion

$$\begin{aligned} r(X, Y; f) &:= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \binom{w}{j} i^{1-j} \Lambda(j+1; f) X^{w-j} Y^j \\ &= \frac{a_0(f)}{w+1} (X^{w+1} Y^{-1} + X^{-1} Y^{w+1}) + \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} i^{1-j} \Lambda(j+1; f) X^{w-j} Y^j. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Diese stimmt im Fall $f \in S_k$ mit dem Periodenpolynom von f überein und weist im Fall $f \in M_k \setminus S_k$ zwei zusätzliche Summanden auf, die über den konstanten Fourier-Koeffizienten von f Auskunft geben. Wir sprechen von der **Periodenfunktion** von f . Im Beispiel der Eisenstein-Reihen gilt:

Lemma 7.18. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Für die Eisenstein-Reihe $E_k \in M_k \setminus S_k$ ist dann die Periodenfunktion durch

$$\begin{aligned} r(X, Y; E_k) &= \left(-\frac{2\pi i}{2(w+1)\zeta(w+2)} \right) \left(\zeta(w+1)(X^w - Y^w) \right. \\ &\quad \left. + (2\pi i)^{w+1} \sum_{\substack{j=-1 \\ j \text{ ungerade}}}^{w+1} (-1)^{w-j} \frac{B_{j+1}}{(j+1)!} \frac{B_{w-j+1}}{(w-j+1)!} X^{w-j} Y^j \right) \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis. Wir nutzen (7.7) und unser Vorwissen über die L -Reihe der Eisenstein-Reihen und erhalten

$$\begin{aligned}
& r(X, Y; E_k) \\
& \stackrel{(7.7)}{=} \frac{a_0(E_k)}{w+1} \left(X^{w+1}Y^{-1} + X^{-1}Y^{w+1} \right) + \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} i^{1-j} \Lambda(j+1; E_k) X^{w-j}Y^j \\
& \stackrel{3.5}{=} \frac{1}{w+1} \left(X^{w+1}Y^{-1} + X^{-1}Y^{w+1} \right) + \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} i^{1-j} \left((2\pi)^{-j-1} j! L(j+1; E_k) \right) X^{w-j}Y^j \\
& = \frac{1}{w+1} \left(X^{w+1}Y^{-1} + X^{-1}Y^{w+1} \right) - \sum_{j=0}^w \frac{w!}{(w-j)!} (2\pi i)^{-j-1} L(j+1; E_k) X^{w-j}Y^j \\
& \stackrel{7.11}{=} \frac{1}{w+1} \left(X^{w+1}Y^{-1} + X^{-1}Y^{w+1} \right) - \sum_{j=0}^w \frac{w!}{(w-j)!} (2\pi i)^{-j-1} \left(\frac{(2\pi i)^{w+2} \zeta(j+1) \zeta(w-j)}{\zeta(w+2)(w+1)!} \right) X^{w-j}Y^j \\
& = \frac{1}{w+1} \left(X^{w+1}Y^{-1} + X^{-1}Y^{w+1} \right) - \frac{1}{(w+1)\zeta(w+2)} \sum_{j=0}^w \frac{(2\pi i)^{w-j+1}}{(w-j)!} \zeta(j+1) \zeta(w-j) X^{w-j}Y^j.
\end{aligned}$$

Das Verhalten der Riemann'schen Zetafunktion ist gut studiert. Konkret gilt:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) & \text{ hat bei } s = 1 \text{ eine einfache Polstelle mit Residuum } 1, \\
\zeta(n) & = \frac{(2\pi i)^n B_n}{2n!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ gerade (vgl. auch Lemma 3.6),} \\
\zeta(1-n) & = (-1)^{n-1} \frac{B_n}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ (erhält man über die Funktionalgleichung).}
\end{aligned}$$

Da die Bernoulli-Zahlen B_n nach Lemma 3.6 für ungerade $n > 1$ den Wert Null annehmen, gilt dort $\zeta(1-n) = 0$. Diese Nullstellen haben Ordnung Eins und es gilt

$$\zeta'(1-n) = -\frac{\zeta(n)(n-1)!}{2(2\pi)^{n-1}} \quad \text{für } n > 1 \text{ ungerade (auch aus der Funktionalgleichung).}$$

Es folgt, dass sich in der obigen Summe die Polstelle bei $j = 0$ weghebt und die Summanden für gerades $j \notin \{0, w\}$ verschwinden. Wir erhalten so

$$\begin{aligned}
& r(X, Y; E_k) \\
& = \frac{1}{w+1} \left(X^{w+1}Y^{-1} + X^{-1}Y^{w+1} \right) - \frac{1}{(w+1)\zeta(w+2)} \cdot \left(\frac{(2\pi i)^{w+1}}{w!} \zeta'(-w) X^w - \right. \\
& \quad \left. \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{w-1} \frac{(2\pi i)^{w+2}}{(w-j)!} \frac{B_{j+1}}{2(j+1)!} \frac{B_{w-j+1}}{w-j+1} X^{w-j}Y^j + \frac{2\pi i}{0!} \zeta(w+1) \left(-\frac{1}{2}\right) Y^w \right) \\
& = \frac{(2\pi i)^{w+2}}{2(w+1)\zeta(w+2)} \frac{B_0}{0!} \frac{B_{w+2}}{(w+2)!} \left(X^{w+1}Y^{-1} + X^{-1}Y^{w+1} \right) \\
& \quad + \frac{1}{(w+1)\zeta(w+2)} \cdot \left(-\frac{(2\pi i)^{w+1}}{w!} \left((-1)^{\frac{w}{2}} \frac{\zeta(w+1)w!}{2(2\pi)^w} \right) X^w \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{w-1} \frac{(2\pi i)^{w+2}}{2} \frac{B_{j+1}}{(j+1)!} \frac{B_{w-j+1}}{(w-j+1)!} X^{w-j} Y^j + \frac{2\pi i \zeta(w+1)}{2} \\
& = \left(\frac{2\pi i}{2(w+1)\zeta(w+2)} \right) \left(-\zeta(w+1)(X^w - Y^w) \right. \\
& \quad \left. + (2\pi i)^{w+1} \sum_{\substack{j=-1 \\ j \text{ ungerade}}}^{w+1} \frac{B_{j+1}}{(j+1)!} \frac{B_{w-j+1}}{(w-j+1)!} X^{w-j} Y^j \right).
\end{aligned}$$

□

Das Periodenpolynom $r(X, Y; f)$ einer Spitzenform $f \in S_k$ lässt sich durch Anwenden der Koordinatenabbildung C aus Abschnitt 5.1 und eintragsweises Herausfaktorisieren der – in diesem Fall stets invertierbaren – Binomialkoeffizienten in den Vektor

$${}^t(r_w(f), \dots, r_0(f)) \in \mathbb{C}^{w+1}$$

überführen. Analog zu der reellen Situation in Lemma 5.26 gilt für diesen

$${}^t(r_w(f), \dots, r_0(f)) \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(S)) \cap \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)).$$

Für eine nicht-cuspidale Modulform f lassen sich aber die Perioden $r_{w+1}(f)$ und $r_{-1}(f)$ nicht analog zu den übrigen Perioden definieren. Es bietet es sich für die Konstruktion eines verallgemeinerten Eichler-Shimura-Isomorphismus daher an, einer gegebenen Modulform $f \in M_k$ statt eines Vektors von Perioden direkt die Periodenfunktion zuzuordnen. Im Fall $f \in S_k$ operiert $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ so via $P({}^tM)$ auf dem Raum $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ und die obige Enthaltenseinsbeziehung wird zu

$$r(X, Y; f) \in \text{Kern}(P(I_2) + P({}^tS)) \cap \text{Kern}(P(I_2) + P({}^t(ST)) + P({}^t(ST)^2)) =: W. \quad (7.8)$$

In Analogie zu Abschnitt 5.1 führen wir nun die folgende Notation ein:

Definition 7.19. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Für ein homogenes Polynom

$$P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_j X^{w-j} Y^j \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C})$$

sagen wir dann

$$P \text{ ist } \mathbf{gerade} : \iff a_j = 0 \text{ für alle ungeraden } j \in \{0, \dots, w\},$$

$$P \text{ ist } \mathbf{ungerade} : \iff a_j = 0 \text{ für alle geraden } j \in \{0, \dots, w\}.$$

Den Raum der geraden bzw. ungeraden Polynome in $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ bezeichnen wir mit $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})^+$ bzw. mit $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})^-$. Offensichtlich lässt sich dann jedes $P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ eindeutig in seinen **geraden Anteil** $P^+ \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C})^+$ und seinen **ungeraden Anteil** $P^- \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C})^-$ zerlegen.

Bemerkung 7.20. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Nach den Überlegungen im Beweis von Proposition 6.1 ist dann die Einschränkung von $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ auf W mit der Zerlegung in einen geraden und einen ungeraden Anteil verträglich, für ein beliebiges $P \in W$ – wie etwa das Periodenpolynom $r(X, Y; f)$ einer beliebigen Spitzenform $f \in S_k$ – gelten also

$$\begin{aligned} P^+ \in W^+ &:= \mathbb{P}_w(\mathbb{C})^+ \cap W, \\ P^- \in W^- &:= \mathbb{P}_w(\mathbb{C})^- \cap W \end{aligned}$$

und umgekehrt kann man von $P^+ \in W^+$ und $P^- \in W^-$ wieder auf $P \in W$ schließen. Für $f = \Delta \in S_{12}$ haben wir dies bereits in Beispiel 7.17 gesehen.

Die Polynomdarstellung \mathbb{P} lässt sich statt auf $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ auch auf dessen Obermenge $\frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C})$ anwenden, wobei letzteres unter dieser Wirkung nicht abgeschlossen und somit kein $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Modul ist. Die jeweiligen Funktionen $\mathbb{P}({}^tM)P$ sind jedoch für alle $P \in \frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C})$ wohldefiniert und wir können ein Analogon zu W in dieser Situation definieren, nämlich seine Obermenge

$$\hat{W} := \left\{ P \in \frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C}) : (\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^tS))P = (\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^t(ST)) + \mathbb{P}({}^t(ST)^2))P = 0 \right\}.$$

Bemerkung 7.21. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Offensichtlich lässt sich dann jedes $P \in \frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C})$ ebenso wie die Elemente von $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ eindeutig in seinen geraden Anteil

$$P^+ \in \left(\frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C}) \right)^+ := \frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C})^- = \mathbb{P}_w(\mathbb{C})^+$$

und seinen ungeraden Anteil

$$P^- \in \left(\frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C}) \right)^- := \frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C})^+ \supseteq \mathbb{P}_w(\mathbb{C})^-$$

zerlegen. Nach den Überlegungen im Beweis von Proposition 6.1 ist die Einschränkung von $\frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C})$ auf \hat{W} mit der Zerlegung in einen geraden und einen ungeraden Anteil verträglich, für ein beliebiges $P \in \hat{W}$ gelten also

$$\begin{aligned} P^+ \in \hat{W}^+ &:= \left(\frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C}) \right)^+ \cap \hat{W}, \\ P^- \in \hat{W}^- &:= \left(\frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C}) \right)^- \cap \hat{W} \end{aligned}$$

und umgekehrt kann man von $P^+ \in \hat{W}^+$ und $P^- \in \hat{W}^-$ wieder auf $P \in \hat{W}$ schließen.

In diesem Setting erhalten wir nun:

Lemma 7.22. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Für die Periodenfunktion der Eisenstein-Reihe $E_k \in M_k \setminus S_k$ gilt dann

$$r(X, Y; E_k) \in \hat{W}.$$

Beweis. Nach Bemerkung 7.21 reicht es zum Beweis des Lemmas aus

$$\begin{aligned} r(X, Y; E_k)^+ &\in \hat{W}^+, \\ r(X, Y; E_k)^- &\in \hat{W}^- \end{aligned}$$

nachzuweisen. Nach Lemma 7.18 gilt dabei

$$\begin{aligned} r(X, Y; E_k)^+ &= \omega_w \cdot (-\zeta(w+1)(X^w - Y^w)), \\ r(X, Y; E_k)^- &= \omega_w \cdot \left((2\pi i)^{w+1} \sum_{\substack{j=-1 \\ j \text{ ungerade}}}^{w+1} \frac{B_{j+1}}{(j+1)!} \frac{B_{w-j+1}}{(w-j+1)!} X^{w-j} Y^j \right) \end{aligned}$$

mit

$$\omega_w := \frac{2\pi i}{2(w+1)\zeta(w+2)}.$$

Da beide Funktionen $r(X, Y; E_k)^\pm$ offensichtlich in $(\frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C}))^\pm$ liegen, müssen wir nur noch zeigen, dass sie jeweils durch

$$\begin{aligned} &(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^t S)), \\ &(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^t(ST)) + \mathbb{P}({}^t(ST)^2)) \end{aligned}$$

auf Null geschickt werden. Die Bedingung

$$(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^t S))(r(X, Y; E_k)^\pm) = 0$$

besagt in Analogie zum Beweis von Proposition 6.1, dass sich die Koeffizienten von $X^j Y^{w-j}$ und $X^{w-j} Y^j$ in $r(X, Y; E_k)^\pm$ für alle $j \in \{-1, \dots, w+1\}$ um einen Faktor $(-1)^{j+1}$ unterscheiden, was offensichtlich ist. Es verbleibt die Bedingung

$$(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^t(ST)) + \mathbb{P}({}^t(ST)^2))(r(X, Y; E_k)^\pm) = 0$$

zu überprüfen. Im Fall von $r(X, Y; E_k)^+$ ist dies leicht, denn es gilt

$$\begin{aligned} &(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^t(ST)) + \mathbb{P}({}^t(ST)^2))(r(X, Y; E_k)^+) \\ &= -\omega_w \cdot \zeta(w+1) \cdot ((X^w - Y^w) + ((-Y)^w - (X+Y)^w) + ((-X-Y)^w - X^w)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im Fall von $r(X, Y; E_k)^-$ bietet es sich an, die erzeugende Funktion

$$P(X, Y; T) = \frac{1}{XYT^2} + \sum_{\substack{w=0 \\ w \text{ gerade}}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=-1 \\ j \text{ ungerade}}}^{w+1} \frac{B_{j+1}}{(j+1)!} \frac{B_{w-j+1}}{(w-j+1)!} X^{w-j} Y^j \right) T^w$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{B_m}{m!} (YT)^{m-1} \right) \left(\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (XT)^{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \coth\left(\frac{YT}{2}\right) \cdot \coth\left(\frac{XT}{2}\right)
\end{aligned}$$

zu betrachten. Das Additionstheorem des Kotangens hyperbolicus lautet

$$\coth \alpha \coth \beta + \coth \beta \coth \gamma + \coth \gamma \coth \alpha = -1 \quad \text{für alle } \alpha, \beta, \gamma \text{ mit } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Wählen wir speziell

$$\alpha = \frac{YT}{2}, \quad \beta = \frac{XT}{2} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{(-X - Y)T}{2},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbb{P}(I_1) + \mathbb{P}({}^t(ST)) + \mathbb{P}({}^t(ST)^2) \right) P(X, Y; T) \\
&= P(X, Y; T) + P(-X - Y, X; T) + P(Y, -X - Y; T) \\
&= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Vergleichen wir hier für $w \in \mathbb{N}$ die Koeffizienten von T^w auf beiden Seiten, so erhalten wir nach Multiplikation mit $\omega_w(2\pi i)^{w+1}$

$$\left(\mathbb{P}(I_1) + \mathbb{P}({}^t(ST)) + \mathbb{P}({}^t(ST)^2) \right) r(X, Y; E_k)^- = 0$$

und somit die Behauptung. □

Insgesamt erhalten wir die folgende Verallgemeinerung des Eichler-Shimura-Isomorphismus auf beliebige Modulformen:

Satz 7.23. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Für eine beliebige Modulform $f \in M_k$ gilt dann*

$$r(X, Y; f) \in \hat{W} = \hat{W}^+ \oplus \hat{W}^- \quad \text{mit } r(X, Y; f)^\pm \in \hat{W}^\pm,$$

wobei die Einschränkungen

$$\hat{r}^\pm: \begin{cases} M_k & \rightarrow \hat{W}^\pm, \\ f & \mapsto r(X, Y; f)^\pm \end{cases}$$

beide \mathbb{C} -Vektorraumisomorphismen sind. Weiter gilt $\hat{W}^+ = W^+$, wohingegen \hat{W}^- für $k > 2$ den Raum W^- mit Kodimension 1 umfasst und nur für $k = 2$ die Gleichheit $\hat{W}^- = W^- = \{0\}$ gilt.

Bemerkung 7.24. *Dieses Resultat ist bemerkenswerterweise einfacher als die in Satz 6.4 gezeigte Version für Spitzenformen, wo nur eine der beiden Abbildungen $r^\pm: S_k \rightarrow V^\pm$ ein Isomorphismus war und die Bestimmung des Bild der anderen ein schwieriges Problem.*

Beweis von Satz 7.23. Sei $f \in M_k$ beliebig. Dann gilt zunächst

$$r(X, Y; f) \in \hat{W},$$

denn: Für cuspidales f gilt $r(X, Y; f) \in W \subseteq \hat{W}$ nach (7.8) und für die Eisenstein-Reihe E_k gilt $r(X, Y; E_k) \in \hat{W}$ nach Lemma 7.22. Die Behauptung für allgemeines $f \in M_k$ folgt nun, da nach Proposition 3.10 bekanntlich die Zerlegung $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ gilt. #

Weiter gilt nach Bemerkung 7.21 stets

$$\left(\frac{1}{XY} \cdot \mathbb{P}_{w+2}(\mathbb{C})\right)^+ = \mathbb{P}_w(\mathbb{C})^+$$

und daher auch $\hat{W}^+ = W^+$. Zudem ist die Kodimension von W^- in \hat{W}^- für $k > 2$ gleich Eins,

denn: Einerseits ist die Kodimension von W in \hat{W} – und somit auch diejenige von W^- in \hat{W}^- – höchstens Eins, da für jedes $P \in \hat{W}$ definitionsgemäß die Koeffizienten der in Polynomen aus W nicht vorkommenden Monome $X^{-1}Y^{w+1}$ und $X^{w+1}Y^{-1}$ übereinstimmen. Im Fall $k > 2$ gilt andererseits nach Lemma 7.22 und seinem Beweis $r(X, Y; E_k)^- \in \hat{W}^- \setminus W^-$ und insgesamt somit die Behauptung. #

Für $k = 2$ gilt definitionsgemäß bereits $\hat{W}^\pm = W^\pm = \{0\}$. Die Isomorphie von \hat{r}^\pm ergibt sich schließlich unmittelbar aus derjenigen der Abbildungen

$$\begin{aligned} \hat{r}^- : S_k &\rightarrow W^-, \\ \hat{r}^+ : S_k &\rightarrow W^+ / \langle r(X, Y; E_k)^+ \rangle_{\mathbb{C}}, \end{aligned} \tag{7.9}$$

wobei sich letztere analog zu Satz 6.4 herleiten lassen. \square

Indem wir den klassischen Eichler-Shimura-Isomorphismus (7.9) geschickt mit der in Satz 7.23 gezeigten Variante zusammenfassen, erhalten wir unmittelbar:

Korollar 7.25. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{cases} M_k \oplus S_k & \rightarrow W^+ \oplus W^- = W, \\ (f, g) & \mapsto r(f)^+ + r(g)^- \end{cases}$$

ein Isomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen.

7.4 Die Zagier-Eigenschaften

Für den Beweis der Eichler-Selberg-Spurformel werden später einige erstrebenswerte Eigenschaften von Elementen des Monoidrings $\mathbb{Q}[\overline{\mathbb{M}}]$ eine wichtige Rolle spielen; beispielsweise lässt sich so die bereits in Proposition 6.15 gesehene Hecke-Äquivarianz des Eichler-Shimura-Isomorphismus genauer untersuchen. Diese Eigenschaften wurden teilweise schon 1973 von Manin studiert und werden in unserer speziellen Zusammenstellung von Zagier und verschiedenen Co-Autoren als die Eigenschaften (A), (B) und (C) geführt. In diesem Abschnitt führen wir diese ein und zeigen als einen ersten Schritt, dass es tatsächlich Elemente gibt, welche Eigenschaft (A) aufweisen.

Definition 7.26. Wir dehnen die in Abschnitt 1.5 eingeführte Notation $\overline{M} := M \cdot \{\pm I_2\} / \{\pm I_2\}$ auf Teilmengen $M \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ aus und führen die Teilmengen

$$\mathfrak{R}_n := \mathbb{Q}[\overline{\mathbb{M}^n}] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

des Monoidrings $\mathfrak{R} := \mathbb{Q}[\overline{\mathbb{M}}]$ ein. Für $n = 1$ erhalten wir so den Gruppenring $\mathfrak{R}_1 = \mathbb{Q}[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}]$.

Beispiel 7.27. Die im Weiteren studierten Elemente

$$\begin{aligned} \pi_S &:= \frac{I_2 + S}{2}, \\ \pi_{ST} &:= \frac{I_2 + ST + (ST)^2}{3}. \end{aligned}$$

von \mathfrak{R}_1 sind *idempotent*, es gilt also $\pi_S^2 = \pi_S$ bzw. $\pi_{ST}^2 = \pi_{ST}$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ trägt die Menge \mathfrak{R}_n offenbar die Struktur eines \mathbb{Q} -Vektorraums und die Gruppe $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ operiert von links durch Linksmultiplikation sowie von rechts durch Rechtsmultiplikation. Wir können so eine Eigenschaft von Elementen aus \mathfrak{R}_n definieren, die diese mit dem n -ten Hecke-Operator in Verbindung bringt, wobei wir den genauen Zusammenhang erst in Satz 7.52 verstehen werden:

Definition 7.28. Sei n eine natürliche Zahl. Dann sagen wir, ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ erfüllt die *Eigenschaft (A)*, wenn

$$(I_2 - S)\hat{T}_n - T_{n,\infty}(I_2 - S) \in (I_2 - T)\mathfrak{R}_n \quad (\text{A})$$

gilt mit

$$T_{n,\infty} := \sum_{M \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}^n}} M \in \mathfrak{R}_n, \quad (7.10)$$

wobei wir über ein Vertretersystem aus Matrizen aufsummieren, die allesamt den Punkt $i\infty$ stabilisieren.

Bemerkung 7.29. Definition 7.28 ist insofern wohldefiniert, als für je zwei Elemente $T_{n,\infty}^{(1)}$ und $T_{n,\infty}^{(2)}$ wie in (7.10) bereits

$$T_{n,\infty}^{(1)} - T_{n,\infty}^{(2)} \in (I_1 - T)\mathfrak{R}_n$$

gilt,

denn: Je zwei $i\infty$ stabilisierende Vertreter derselben $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ -Linksnebenklasse in $\overline{\mathbb{M}^n}$ unterscheiden sich um ein Element von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty$ und also um eine Potenz von T . Die Behauptung folgt nun aus

$$I_2 - T^k = (I_2 - T)(I_2 + T + \dots + T^{k-1}) \in (I_2 - T)\mathfrak{R}_n \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (7.11)$$

#

Nach Lemma 4.3 können wir also ohne Einschränkung

$$T_{n,\infty} = \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod (d)}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

wählen.

Die Frage nach der Existenz von Elementen $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$, welche die Eigenschaft (A) aufweisen, wurde 1993 von CHOIE⁷⁵ und Zagier für alle $n \in \mathbb{N}$ positiv beantwortet. Tatsächlich können wir solche Elemente explizit angeben:

Satz 7.30. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt das Element

$$\hat{T}_n := \sum_{\substack{ad-bc=n \\ a>c>0 \\ d>-b>0}} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \right) + \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2}}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{a}{2} < c \leq \frac{a}{2} \\ c \neq 0}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}_n,$$

in den die einzelnen Summen jeweils über alle ganzen Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ genommen werden, welche die jeweils aufgeführten Bedingungen erfüllen, Eigenschaft (A).

Beweis. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir zunächst

$$\mathbb{A}_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{M}^n} \mid a > c > 0, d > -b \geq 0, (b = 0 \implies a \geq 2c) \right\},$$

$$\mathbb{B}_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{M}^n} \mid a > -c \geq 0, d > b > 0, (c = 0 \implies d \geq 2b) \right\}$$

und betrachten die Abbildungen

$$f: \begin{cases} \mathbb{A}_n & \rightarrow \mathbb{B}_n, \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto ST^{-\lfloor \frac{a}{c} \rfloor} A = \begin{pmatrix} c & d \\ -(a - c \lfloor \frac{a}{c} \rfloor) & -b + d \lfloor \frac{a}{c} \rfloor \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} \mathbb{B}_n & \rightarrow \mathbb{A}_n, \\ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto T^{\lfloor \frac{d}{b} \rfloor} SB = \begin{pmatrix} -c + a \lfloor \frac{d}{b} \rfloor & -(d - b \lfloor \frac{d}{b} \rfloor) \\ a & b \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Letztere sind wohldefiniert in dem Sinne, dass tatsächlich

$$f(\mathbb{A}_n) \subseteq \mathbb{B}_n \quad \text{und} \quad g(\mathbb{B}_n) \subseteq \mathbb{A}_n$$

gelten,

⁷⁵YoungJu Choie (*1959)

denn: Wir betrachten

$$f(A) = \begin{pmatrix} c & d \\ -(a-c\lfloor\frac{a}{c}\rfloor) & -b+d\lfloor\frac{a}{c}\rfloor \end{pmatrix} \quad \text{für ein } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_n.$$

Aufgrund von $A \in \mathbb{A}_n$ gilt hier offenbar zunächst $c > a - c\lfloor\frac{a}{c}\rfloor \geq 0$ und also die erste Bedingung für \mathbb{B}_n . Weiter gilt auch $d > 0$. Dass auch $-b + d\lfloor\frac{a}{c}\rfloor > d$ gilt, folgt im Fall $b = 0$ aus $a \geq 2c$ und im Fall $b < 0$ aus $a > c$. Das ist die zweite Bedingung für \mathbb{B}_n . Gilt schließlich zusätzlich $-(a - c\lfloor\frac{a}{c}\rfloor) = 0$, so folgt $-b + d\lfloor\frac{a}{c}\rfloor \geq 2d$ aufgrund von $-b \geq 0$ und, da aus $-(a - c\lfloor\frac{a}{c}\rfloor) = 0$ und $a > c$ bereits $\lfloor\frac{a}{c}\rfloor = \frac{a}{c} \geq 2$ folgt. Das ist die dritte und letzte Bedingung für \mathbb{B}_n , so dass wir insgesamt die erste Inklusion $f(\mathbb{A}_n) \subseteq \mathbb{B}_n$ gezeigt haben. Die zweite Inklusion $g(\mathbb{B}_n) \subseteq \mathbb{A}_n$ zeigt man analog. #

Weiter sind f und g zueinander invers und also beide bijektive Abbildungen,

denn: Wegen $d > -b \geq 0$ gilt einerseits

$$g(f(A)) = g(ST^{-\lfloor\frac{a}{c}\rfloor}A) = T^{\lfloor\frac{-b+d\lfloor\frac{a}{c}\rfloor}{d}\rfloor}SST^{-\lfloor\frac{a}{c}\rfloor}A = A \quad \text{für alle } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_n$$

und wegen $a > c > 0$ andererseits auch

$$f(g(B)) = f(T^{\lfloor\frac{d}{b}\rfloor}SB) = ST^{-\lfloor\frac{c-a\lfloor\frac{d}{b}\rfloor}{a}\rfloor}T^{\lfloor\frac{d}{b}\rfloor}SB = B \quad \text{für alle } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{B}_n.$$

#

Nun sind wir in der Lage zu zeigen, dass \hat{T}_n Eigenschaft (A) erfüllt. Um uns Schreibarbeit zu sparen, führen wir auf \mathfrak{A}_n die Äquivalenzrelation „ \equiv “ ein, die genau dann erfüllt ist, wenn sich beide Seiten um ein Element aus $(I_2 - T)\mathfrak{A}_n$ unterscheiden. In dieser Notation gilt es also

$$(I_2 - S)\hat{T}_n \equiv T_{n,\infty}(I_2 - S) \quad (7.13)$$

zu zeigen. Tatsächlich gelten

$$\sum_{\substack{ad-bc=n \\ a>c>0 \\ d>-b>0}} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - S \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \right) \equiv \sum_{\substack{ad=n \\ \frac{d}{2} \geq b > 0}} \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b \end{pmatrix} - \sum_{\substack{ad=n \\ \frac{a}{2} \geq c > 0}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

$$\sum_{\substack{ad-bc=n \\ a>c>0 \\ d>-b>0}} \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} - S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \equiv \sum_{\substack{ad=n \\ \frac{d}{2} \geq b > 0}} \begin{pmatrix} 0 & d \\ -a & b \end{pmatrix} - \sum_{\substack{ad=n \\ \frac{a}{2} \geq c > 0}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ -c & d \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

denn: Nach (7.11) gilt zunächst $T^k M \equiv M$ für alle $M \in \overline{\mathbb{M}^n}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$. Unter Berücksichtigung der Bijektivität von g ergibt sich daraus

$$\sum_{A \in \mathbb{A}_n} A \equiv S \sum_{B \in \mathbb{B}_n} B.$$

Setzen wir die Definitionen von \mathbb{A}_n und \mathbb{B}_n ein und sortieren um, so erhalten wir (7.14).

Betrachten wir nun $E := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \overline{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})}$. Diese besitzt die Eigenschaft

$$EME = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \quad \text{für alle } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{M}^n}.$$

Zwei beliebige Elemente $\xi, \zeta \in \mathfrak{R}_n$ mit $\xi \equiv \zeta$ genügen aufgrund von $E(I_2 - T) = (I_2 - T)(-T^{-1})E$ zudem der Kongruenz $E\xi E \equiv E\zeta E$. Wenden wir dies auf (7.14) an, so erhalten wir (7.15). #

Summation von (7.14) und (7.15) liefert

$$(I_2 - S) \sum_{\substack{ad-bc=n \\ a>c>0 \\ d>-b>0}} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \right) \equiv \sum_{\substack{ad=n \\ \frac{d}{2} \geq |b| > 0}} \left(\begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \right).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (I_2 - S)\hat{T}_n &\equiv \sum_{\substack{ad=n \\ \frac{d}{2} \geq |b| > 0}} \left(\begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \right) + \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2}}} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{d}{2} < c \leq \frac{d}{2} \\ c \neq 0}} \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{\substack{ad=n \\ 0 < d \text{ gerade}}} \left(\begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & -\frac{d}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & 0 \\ -\frac{d}{2} & a \end{pmatrix} \right) - \sum_{\substack{ad=n \\ d > 0}} \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2}}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{d}{2} < c \leq \frac{d}{2} \\ c \neq 0}} \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Um den Ausdruck auf der rechten Seite weiter umzuformen, leiten wir uns via Äquivalenzumformungen aus einer offensichtlich korrekten Aussage eine geeignete Kongruenz her:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{ad=n \\ d > 0}} \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & 0 \end{pmatrix} &\equiv \sum_{\substack{ad=n \\ d > 0}} \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & 0 \end{pmatrix} - (I_2 - T) \sum_{\substack{ad=n \\ 0 < d \text{ gerade}}} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} \\ \iff \sum_{\substack{ad=n \\ d > 0}} \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & 0 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2} \\ b \neq 0}} \begin{pmatrix} -b & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} &\equiv \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2}}} \begin{pmatrix} b & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} \\ \iff \sum_{\substack{ad=n \\ d > 0}} \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & 0 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{d}{2} < c \leq \frac{d}{2} \\ c \neq 0}} \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & 0 \end{pmatrix} &\equiv \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2}}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} S. \end{aligned}$$

Setzen wir diese in (7.16) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
(I_2 - S)\hat{T}_n &\equiv \sum_{\substack{ad=n \\ 0 < d \text{ gerade}}} \left(\begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & -\frac{d}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & 0 \\ -\frac{d}{2} & a \end{pmatrix} \right) + \sum_{\substack{ad=n \\ -\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2}}} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} (I_2 - S) \right) \\
&\stackrel{7.29}{\equiv} \sum_{\substack{ad=\frac{n}{2} \\ d > 0}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 2d \\ -a & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2d & 0 \\ -d & a \end{pmatrix} \right) + T_{n,\infty}(I_2 - S) \\
&\equiv \sum_{\substack{ad=\frac{n}{2} \\ d > 0}} \left((T^2 - I_2) \begin{pmatrix} 2d & 0 \\ -d & a \end{pmatrix} \right) + T_{n,\infty}(I_2 - S) \\
&\equiv T_{n,\infty}(I_2 - S).
\end{aligned}$$

Dies zeigt (7.13) und somit den Satz. \square

Wir führen nun eine weitere Eigenschaft von Elementen aus \mathfrak{R}_n ein, die dafür sorgt, dass diese bestimmte Unterräume von $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ ineinander abbilden, wobei wir dies erst in Proposition 7.75 verstehen werden.

Definition 7.31. Sei n eine natürliche Zahl. Dann sagen wir, ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ erfüllt **Eigenschaft (B)**, wenn

$$\begin{aligned}
\hat{T}_n(I_2 + S) &\in (I_2 + ST + (ST)^2)\mathfrak{R}_n, \\
\hat{T}_n(I_2 + ST + (ST)^2) &\in (I_2 + S)\mathfrak{R}_n
\end{aligned} \tag{B}$$

gilt.

Bemerkung 7.32. In Satz 7.30 haben wir bereits gesehen, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ mit der Eigenschaft (A) gibt. In Abschnitt 7.5 leiten wir daraus her, dass es für alle n stets ein \hat{T}_n gibt, das die Eigenschaften (A) und (B) beide erfüllt, vergleiche Korollar 7.49.

Um schließlich auch Eigenschaft (C) formulieren zu können, müssen wir zunächst etwas ausholen und führen auf der Menge der Matrizen in $\overline{\mathbb{M}}$ eine Gewichtung ein. In Anlehnung an Proposition 1.15 setzen wir:

Definition 7.33. Sei n eine natürliche Zahl. Dann heißt eine Matrix $M \in \overline{\mathbb{M}}^n$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\text{skalar} & \text{für } M = \sqrt{n}I_2 = -\sqrt{n}I_2, \\
\text{parabolisch} & \text{für } \text{tr}(M)^2 = 4n \text{ und nicht-skalares } M, \\
\text{elliptisch} & \text{für } \text{tr}(M)^2 < 4n, \\
\text{zerfallend hyperbolisch} & \text{für } \text{tr}(M)^2 > 4n \text{ und } \text{tr}(M)^2 - 4n \text{ Quadratzahl,} \\
\text{nicht-zerfallend hyperbolisch} & \text{für } \text{tr}(M)^2 > 4n \text{ und } \text{tr}(M)^2 - 4n \text{ keine Quadratzahl.}
\end{array} \right.$$

Hierbei gilt es zu beachten, dass auf $\overline{\mathbb{M}}$ die Spur nicht wohldefiniert ist, ihr Quadrat $\text{tr}(\cdot)^2$ jedoch schon.

Bemerkung 7.34. Sei n eine natürliche Zahl. Da mit der Spur auch ihr Quadrat konjugationsinvariant ist, ist die Einteilung der Elemente $M \in \overline{\mathbb{M}^n}$ aus Definition 7.33 in verschiedene Typen insbesondere unter Konjugation mit Elementen aus $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ invariant und also auf Konjugationsklassen der Form

$$[M] := \{AMA^{-1} \mid A \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\}$$

definiert.

Definition 7.35. Jeder Matrix $M \in \overline{\mathbb{M}}$ ordnen wir in Abhängigkeit von ihrem Typ nach Definition 7.33 ihr **Gewicht** $w(M) \in \mathbb{Q}$ zu, wie wir es später für die Kronecker-Hurwitz'sche Klassenzahlformel 7.72 benötigen werden. Es ist

$$w(M) := \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } M \text{ skalar,} \\ 0 & \text{für } M \text{ parabolisch,} \\ -\frac{1}{|\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_M|} & \text{für } M \text{ elliptisch,} \\ 1 & \text{für } M \text{ zerfallend hyperbolisch,} \\ 0 & \text{für } M \text{ nicht-zerfallend hyperbolisch.} \end{cases}$$

Nach Bemerkung 7.34 hängt $w(M)$ nur von der Konjugationsklasse $[M]$ von M ab; wir können daher auch $w([M])$ schreiben.

Beispiel 7.36. Betrachten wir

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{M}^{a^2+b^2}} \quad \text{mit } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Dann gilt

$$w([M]) = w(M) = -\frac{1}{2},$$

denn: Es gilt $\mathrm{tr}(M)^2 = 4a^2 < 4(a^2 + b^2)$, so dass M elliptisch ist. Eine leichte Rechnung zeigt $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_M = \{I_2, S\}$ und also die Behauptung. #

Allgemeiner können wir zu jeder elliptischen Matrix ihren Zentralisator und damit ihr Gewicht bestimmen:

Lemma 7.37. Sei $[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}}$ eine elliptische Konjugationsklasse. Dann gilt

$$w([M]) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{falls } [M] \text{ eine Matrix aus } \mathbb{Z}I_2 + \mathbb{Z}S \text{ enthält,} \\ -\frac{1}{3} & \text{falls } [M] \text{ eine Matrix aus } \mathbb{Z}I_2 + \mathbb{Z}ST \text{ enthält,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir wählen einen Vertreter $M \in [M]$ mit der Eigenschaft, dass der nach Proposition 1.18 eindeutige Fixpunkt z_M der zu M gehörigen Möbius-Transformation φ_M in der oberen Halbebene \mathbb{H}^{76} bereits im Standardfundamentbereich \mathcal{F} enthalten ist, was wegen

$$(AMA^{-1})\langle A\langle z \rangle \rangle = A\langle z \rangle \quad \text{für alle } A \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \text{ und alle } z \in \mathbb{C}$$

stets möglich ist. Für den Zentralisator gilt nun

$$\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_M = \{A \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mid AMA^{-1} = M\} = \{A \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mid A\langle z_M \rangle = z_M\},$$

denn: Sei zunächst ein $A \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ mit $AMA^{-1} = M$ gegeben. Für dieses ist dann $A\langle z_M \rangle \in \mathbb{H}$ ein Fixpunkt von $\varphi_{AMA^{-1}} = \varphi_M$ in der oberen Halbebene und wegen der Eindeutigkeit des Fixpunktes erhalten wir $A\langle z_M \rangle = z_M$.

Ist nun umgekehrt $A \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ mit $A\langle z_M \rangle = z_M$, so folgt nach Proposition 1.25 aus $z_M \in \mathcal{F}$, dass entweder $A = I_2$ gilt oder $A \in \{S, ST, (ST)^2\}$ und $z_M \in \{i, \rho, -\bar{\rho}\}$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

Fall 1: $z_M \notin \{i, \rho, -\bar{\rho}\}$. Hier ist nichts zu zeigen, denn es gilt $A = I_2$ und somit trivialerweise $AMA^{-1} = M$.

Fall 2: $z_M = i$. Nach leichter Rechnung sehen wir, dass dies äquivalent zu $M \in \mathbb{Z}I_2 + \mathbb{Z}S$ ist. Da außerdem $A \in \{I_2, S\}$ gilt, ergibt sich $AMA^{-1} = M$.

Fall 3: $z_M = \rho$ oder $z_M = -\bar{\rho}$. Nach leichter Rechnung sehen wir, dass die Bedingung $z_M = \rho$ äquivalent zu $M \in \mathbb{Z}I_2 + \mathbb{Z}ST$ ist. Da außerdem $A \in \{I_2, ST, (ST)^2\}$ gilt, ergibt sich auch hier $AMA^{-1} = M$. Die Argumentation für $z_M = -\bar{\rho}$ geht völlig analog. #

Über die soeben nachgewiesene Beschreibung des Zentralisators $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_M$ von M und die Überlegungen im Beweis dazu können wir nun den Beweis des Lemmas zu Ende bringen: Ist in der Konjugationsklasse $[M]$ eine Matrix $M \in \mathbb{Z}I_2 + \mathbb{Z}S$ enthalten, so fixiert diese den Punkt i und es gilt $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_M = \{I_2, S\}$ sowie $w([M]) = -\frac{1}{2}$, was wir in Beispiel 7.36 bereits überprüft haben. Ist in der Konjugationsklasse $[M]$ eine Matrix $M \in \mathbb{Z}I_2 + \mathbb{Z}ST$ enthalten, so fixiert diese einen der Punkte $\rho, -\bar{\rho}$ und es gilt $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_M = \{I_2, ST, (ST)^2\}$ sowie $w([M]) = -\frac{1}{3}$. Ist schließlich in der Konjugationsklasse $[M]$ weder ein Element aus $\mathbb{Z}I_2 + \mathbb{Z}S$ noch eines aus $\mathbb{Z}I_2 + \mathbb{Z}ST$ enthalten, so gilt $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_M = \{I_2\}$ und $w([M]) = -1$. □

Wir können nun die letzte der von Zagier aufgeführten Eigenschaften definieren:

Definition 7.38. Sei n eine natürliche Zahl. Dann sagen wir, ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ erfüllt **Eigenschaft (C)**, wenn

$$\langle \hat{T}_n, [M] \rangle = w([M]) \quad \text{für alle Konjugationsklassen } [M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \quad (\text{C})$$

⁷⁶Proposition 1.18 lässt sich anwenden, da M bis auf einen trivial operierenden skalaren Faktor in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ liegt.

gilt, wobei wir allgemeiner für beliebige $\xi = \sum_{M \in \overline{\mathbb{M}^n}} a_M M \in \mathfrak{R}_n$ mit Koeffizienten $a_M \in \mathbb{Q}$ und für beliebige Teilmengen $\mathfrak{S}_n \subseteq \overline{\mathbb{M}^n}$ die Schreibweise

$$\langle \xi, \mathfrak{S}_n \rangle := \sum_{M \in \mathfrak{S}_n} a_M.$$

benutzen.

Als einen wichtigen Zwischenschritt auf dem Weg zum Beweis der Eichler-Selberg-Spurformel zeigen wir in Abschnitt 7.6 den Satz von Popa-Zagier 7.60, der besagt, dass jedes Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$, das den Eigenschaften (A) und (B) genügt, auch Eigenschaft (C) erfüllt.

7.5 Periodenunterräume

In Verallgemeinerung des in Abschnitt 7.3 studierten Raums $W \subseteq \mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ von Periodenpolynomen führen wir nun in beliebigen \mathfrak{R}_1 -Moduln sogenannte Periodenunterräume ein. Wir können dann Teilmengen \mathfrak{A} bzw. $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$ angeben, die einerseits alle Elemente von \mathfrak{R} enthalten, die Eigenschaft (A) bzw. (B) erfüllen und andererseits in jedem \mathfrak{R} -Rechtsmodul V den Periodenunterraum auf sich selbst abbilden. Mit diesen Hilfsmitteln zeigen wir schließlich, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element von \mathfrak{R}_n existiert, das sowohl Eigenschaft (A) als auch Eigenschaft (B) erfüllt. Wir folgen in diesem Abschnitt den Ausführungen von Choie und Zagier aus dem Jahr 1993.

In einem beliebigen \mathfrak{R}_1 -Rechtsmodul V bezeichnen wir die Rechtswirkung eines Elements $\xi \in \mathfrak{R}_1$ auf einem Element $v \in V$ mit $v\xi$. Wir schreiben $\text{Kern}(\xi)$ bzw. $\text{Bild}(\xi)$ für den Kern bzw. das Bild eines Elements $X \in \mathfrak{R}_1$ unter dieser Rechtswirkung; es gilt also

$$\text{Kern}(\xi) = \{v \in V \mid v\xi = 0\} \quad \text{und} \quad \text{Bild}(\xi) = V\xi = \{v\xi \mid v \in V\}.$$

Analog lassen sich diese Notationen auch für \mathfrak{R}_1 -Linksmoduln einführen.

Definition 7.39. Der *Periodenunterraum* eines gegebenen \mathfrak{R}_1 -Rechtsmoduls V ist definiert als

$$W_V := \text{Kern}(\pi_S) \cap \text{Kern}(\pi_{ST}) = \{v \in V \mid v\pi_S = 0 = v\pi_{ST}\}.$$

Beispiel 7.40. Für ein gerades $w \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Raum $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ der homogenen Polynome von Grad w . Wie in Abschnitt 7.3 festgestellt, operiert $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ – und wegen der Geradheit von w somit auch $\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ – von rechts via

$$M \mapsto (P \mapsto \mathbb{P}({}^t M)(P))$$

auf $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$. Diese Aktion lässt sich offenbar auf ganz $\overline{\mathbb{M}}$ ausdehnen und durch \mathbb{Q} -lineare Fortsetzung erhält $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ so die Struktur eines \mathfrak{R}_1 - bzw. \mathfrak{R} -Rechtsmoduls. Offensichtlich ist der Periodenunterraum von $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ gerade durch den in (7.8) definierten Raum W gegeben.

Bemerkung 7.41. Jeder \mathfrak{R} -Rechtsmodul lässt sich insbesondere als \mathfrak{R}_1 -Modul auffassen, so etwa

$$\mathfrak{L} := \pi_S \mathfrak{R} + \pi_{ST} \mathfrak{R}.$$

Der Periodenunterraum W_V eines beliebigen \mathfrak{A} -Rechtsmoduls V lässt sich dann offensichtlich äquivalent durch

$$W_V = \{v \in V \mid vL = 0 \text{ für alle } L \in \mathfrak{L}\}$$

charakterisieren. Der Periodenunterraum W_V ist in dieser Sicht also gerade der Unterraum von V , dessen Elemente von \mathfrak{L} ausgelöscht werden.

Wir wollen nun die Algebra \mathfrak{A} genauer untersuchen, die offenbar sowohl ein \mathfrak{A}_1 -Rechtsmodul als auch ein \mathfrak{A}_1 -Linksmodul ist, und dies im Anschluss dafür verwenden, den \mathfrak{A} -Rechtsmodul \mathfrak{L} besser zu verstehen:

Proposition 7.42. *Der \mathfrak{A}_1 -Linksmodul \mathfrak{A} ist azyklisch, es gelten also*

$$\begin{aligned} \text{Kern}(\pi_S) \cap \text{Kern}(\pi_{ST}) &= \{0\}, \\ \text{Kern}(I_2 - S) &= \text{Bild}(I_2 + S), \\ \text{Kern}(I_2 - ST) &= \text{Bild}(I_2 + ST + (ST)^2). \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt

$$\text{Bild}(\pi_S) \cap \text{Bild}(\pi_{ST}) = \{0\}.$$

Beweis. Die Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{Kern}(I_2 - S) &= \text{Bild}(I_2 + S), \\ \text{Kern}(I_2 - ST) &= \text{Bild}(I_2 + ST + (ST)^2) \end{aligned}$$

sind klar,

denn: Zunächst erfüllt jedes Element $\zeta \in \text{Kern}(I_2 - S)$ definitionsgemäß $(I_2 - S)\zeta = 0$. Es folgt $\frac{\zeta}{2} = S\frac{\zeta}{2}$ und somit auch $\zeta = (I_2 + S)\frac{\zeta}{2} \in \text{Bild}(I_2 + S)$. Es ergibt sich $\text{Kern}(I_2 - S) \subseteq \text{Bild}(I_2 + S)$. Die andere Inklusion $\text{Kern}(I_2 - S) \supseteq \text{Bild}(I_2 + S)$ ist trivial mit $S^2 = I_2$ in $\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$, so dass wir bereits die erste Teilbehauptung gezeigt haben.

Weiter erhalten wir für ein beliebiges Element $\zeta \in \text{Kern}(I_2 - ST)$ definitionsgemäß $(I_2 - ST)\zeta = 0$. Es folgen $\frac{\zeta}{3} = ST\frac{\zeta}{3}$ und nach Multiplikation mit ST auch $ST\frac{\zeta}{3} = (ST)^2\frac{\zeta}{3}$. Es ergibt sich $\zeta = (I_2 + ST + (ST)^2)\frac{\zeta}{3} \in \text{Bild}(I_2 + ST + (ST)^2)$ und somit $\text{Kern}(I_2 - ST) \subseteq \text{Bild}(I_2 + ST + (ST)^2)$. Die andere Inklusion $\text{Kern}(I_2 - ST) \supseteq \text{Bild}(I_2 + ST + (ST)^2)$ ist trivial mit $(ST)^3 = I_2$ in $\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ und wir haben die zweite Teilbehauptung gezeigt. #

Weiter gilt

$$\text{Kern}(\pi_S) \cap \text{Kern}(\pi_{ST}) = \{0\},$$

denn: Für ein beliebiges $\zeta \in \text{Kern}(\pi_S) \cap \text{Kern}(\pi_{ST})$ gilt $(I_2 + S)\zeta = 0 = (I_2 + ST + (ST)^2)\zeta$. Hieraus folgt $S\zeta = ST\zeta + (ST)^2\zeta$ und somit auch $\zeta = T\zeta + TST\zeta$. Schreiben wir

$$\zeta = \sum_{M \in \mathbb{M}} a_M M \quad \text{mit } a_M \in \mathbb{Q} \text{ fast alle Null,}$$

so folgt

$$a_M = a_{T^{-1}M} + a_{(TST)^{-1}M} \quad \text{für alle } M \in \overline{\mathbb{M}}. \quad (7.17)$$

Nehmen wir nun an, es gäbe es eine Matrix $M \in \overline{\mathbb{M}}$ mit $a_M \neq 0$. Setzen wir dann

$$A_0 := I_2 \quad \text{und} \quad A_{n+1} := \begin{cases} T^{-1}A_n & \text{für } a_{T^{-1}A_n M} \neq 0, \\ (TST)^{-1}A_n & \text{für } a_{T^{-1}A_n M} = 0 \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so folgte via (7.17) induktiv $a_{A_n M} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da die Matrizen $A_n M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ jedoch nach Konstruktion paarweise verschieden sind, ergäbe dies einen Widerspruch dazu, dass fast alle Koeffizienten von ζ Null sind. Es folgt, dass tatsächlich alle Koeffizienten von ζ verschwinden und ζ somit identisch Null ist. Das zeigt die Behauptung. #

Wir haben an dieser Stelle gezeigt, dass \mathfrak{R} ein azyklischer \mathfrak{R}_1 -Modul ist. Es gilt zudem aber auch

$$\text{Bild}(\pi_S) \cap \text{Bild}(\pi_{ST}) = \{0\},$$

denn: Für ein beliebiges $\zeta \in \text{Bild}(\pi_S) \cap \text{Bild}(\pi_{ST})$ gilt

$$\zeta = \pi_S \alpha_S = \pi_{ST} \alpha_{ST} \quad \text{für geeignete } \alpha_S, \alpha_{ST} \in \mathfrak{R}.$$

Da π_S und π_{ST} Idempotente sind, erhalten wir nach Multiplikation mit ihnen

$$\begin{aligned} \pi_S \zeta &= \pi_S^2 \alpha_S = \pi_S \alpha_S = \zeta, \\ \pi_{ST} \zeta &= \pi_{ST}^2 \alpha_{ST} = \pi_{ST} \alpha_{ST} = \zeta. \end{aligned}$$

Mit $S^2 = I_2 = (ST)^3$ folgt

$$\begin{aligned} S\zeta &= S \frac{I_2 + S}{2} \zeta = \frac{I_2 + S}{2} \zeta = \zeta, \\ ST\zeta &= ST \frac{I_2 + ST + (ST)^2}{3} \zeta = \frac{I_2 + ST + (ST)^2}{3} \zeta = \zeta \end{aligned}$$

und da S und ST bekanntlich $\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ erzeugen, erhalten wir

$$M\zeta = \zeta \quad \text{für alle } M \in \overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}.$$

Die Behauptung folgt, da $\zeta = 0$ offenbar das einzige Element von \mathfrak{R} ist, das dieser Bedingung genügt. #

□

Korollar 7.43. Für ein $\zeta \in \mathfrak{R}$ gilt $\zeta \in \mathcal{L}$ genau dann, wenn $(I_2 - S)\zeta \in (I_2 - T)\mathfrak{R}$ gilt.

Beweis. Sei zunächst $\zeta \in \mathfrak{L}$, so dass es Elemente $\alpha_S, \alpha_{ST} \in \mathfrak{A}$ mit $\zeta = \pi_S \alpha_S + \pi_{ST} \alpha_{ST}$ gibt. Unter Ausnutzung von $S\pi_S = \pi_S$ und $ST\pi_{ST} = \pi_{ST}$ erhalten wir

$$(I_2 - S)\zeta = (I_2 - S)\pi_{ST}\alpha_{ST} = (I_2 - T)\pi_{ST}\alpha_{ST} \in (I_2 - T)\mathfrak{A}.$$

Dies zeigt die erste Inklusion der Behauptung.

Gelte nun umgekehrt $(I_2 - S)\zeta \in (I_2 - T)\mathfrak{A}$, so dass es ein $\alpha \in \mathfrak{A}$ mit $(I_2 - S)\zeta = (I_2 - T)\alpha$ gibt. Für dieses gilt

$$(I_2 - S)(\zeta - \alpha) = (I_2 - T)\alpha - (I_2 - S)\alpha = (S - T)\alpha = S(I_2 - ST)\alpha$$

und nach Linksmultiplikation mit S also

$$(I_2 - S)(\alpha - \zeta) = (I_2 - ST)\alpha.$$

Da \mathfrak{A} nach Proposition 7.42 ein azyklischer \mathfrak{A}_1 -Modul ist, gilt aber

$$\text{Bild}(I_2 - S) \cap \text{Bild}(I_2 - ST) \subseteq \text{Kern}(\pi_S) \cap \text{Kern}(\pi_{ST}) = \{0\}$$

und folglich

$$\begin{aligned} (\zeta - \alpha) &\in \text{Kern}(I_2 - S) = \text{Bild}(I_2 + S) = \text{Bild}(\pi_S), \\ \alpha &\in \text{Kern}(I_2 - ST) = \text{Bild}(I_2 + ST + (ST)^2) = \text{Bild}(\pi_{ST}). \end{aligned}$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$\zeta = (\zeta - \alpha) + \alpha \in \mathfrak{L}$$

und also die zweite Inklusion der Behauptung. □

In Verallgemeinerung der Eigenschaften (A) und (B) definieren wir nun:

Definition 7.44. Wir definieren die Teilmengen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &:= \{\zeta \in \mathfrak{A} \mid \zeta \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}\} = \{\zeta \in \mathfrak{A} \mid \zeta \pi_S \in \mathfrak{L} \text{ und } \zeta \pi_{ST} \in \mathfrak{L}\} && \subseteq \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{B} &:= \{\zeta \in \mathfrak{A} \mid \zeta \pi_S \in \pi_{ST}\mathfrak{A} \text{ und } \zeta \pi_{ST} \in \pi_S\mathfrak{A}\} && \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.45. Sei V ein \mathfrak{A} -Rechtsmodul mit Periodenunterraum W_V . Dann gilt

$$\begin{aligned} v\zeta &\in W_V \quad \text{für alle } v \in W_V \text{ und alle } \zeta \in \mathfrak{A}, \\ v\zeta &\in W_V \quad \text{für alle } v \in W_V \text{ und alle } \zeta \in \mathfrak{B}, \end{aligned}$$

denn: Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition von \mathfrak{A} und Bemerkung 7.41, die zweite, da \mathfrak{B} eine Teilmenge von \mathfrak{A} ist. #

Proposition 7.46. Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist jedes Element von \mathfrak{A}_n mit Eigenschaft (A) in \mathfrak{A} enthalten und jedes Element mit Eigenschaft (B) in \mathfrak{B} .

Beweis. Zunächst gilt

$$T_{n,\infty}(I_2 - T) \in (I_2 - T)\mathfrak{R}_n, \quad (7.18)$$

denn: Ohne Einschränkung können wir $T_{n,\infty} \in \mathfrak{R}_n$ wie in (7.12) wählen. Die Behauptung folgt, da wir für je zwei natürliche Zahlen a, d mit $ad = n$ den zugehörigen Summanden gemäß

$$\begin{aligned} \sum_{b=0}^{d-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} (I_2 - T) &= \sum_{b=0}^{d-1} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{b=0}^{d-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \sum_{b=0}^{a-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \sum_{b=0}^{a+d-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \sum_{b=0}^{a-1} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & d+b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{b=0}^{a-1} (I_2 - T) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

umschreiben können. #

Sei nun ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ mit Eigenschaft (A) gegeben, in der Notation von Satz 7.30 gelte also

$$(I_2 - S)\hat{T}_n \equiv T_{n,\infty}(I_2 - S). \quad (7.19)$$

Nach Rechtsmultiplikation mit π_S bzw. π_{ST} und unter Ausnutzung von $S\pi_S = \pi_S$ bzw. $ST\pi_{ST} = \pi_{ST}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (I_2 - S)\hat{T}_n\pi_S &\equiv (I_2 - S)\hat{T}_n\pi_S - T_{n,\infty}(I_2 - S)\pi_S \stackrel{(7.19)}{\equiv} 0, \\ (I_2 - S)\hat{T}_n\pi_{ST} &\stackrel{(7.18)}{\equiv} (I_2 - S)\hat{T}_n\pi_{ST} - T_{n,\infty}(I_2 - T)\pi_{ST} \\ &\equiv (I_2 - S)\hat{T}_n\pi_{ST} - T_{n,\infty}(I_2 - S)\pi_{ST} \stackrel{(7.19)}{\equiv} 0. \end{aligned}$$

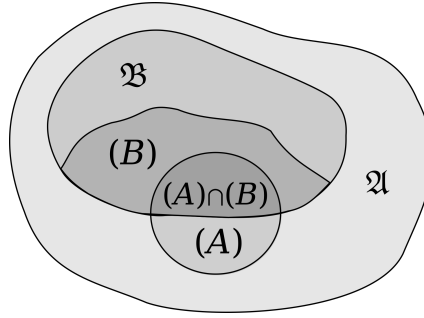
Nach Korollar 7.43 gilt folglich

$$\hat{T}_n\pi_S \in \mathfrak{L}, \hat{T}_n\pi_{ST} \in \mathfrak{L}$$

und also $\hat{T}_n \in \mathfrak{A}$ nach Definition 7.44. Wir haben nun die erste Teilbehauptung gezeigt.

Da die Bedingungen dafür, dass ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ einerseits Eigenschaft (B) besitzt oder andererseits in \mathfrak{B} liegt, offenbar übereinstimmen, ist die zweite Teilbehauptung trivial. \square

Wir haben nun die folgenden Enthaltenseinsbeziehungen gezeigt:



Wir zeigen nun, dass der zentrale Durchschnitt $(A) \cap (B)$ in diesem Schaubild nicht leer ist:

Proposition 7.47. *Zu jedem Element $\zeta \in \mathfrak{A}$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $\zeta_S \in \pi_S \mathfrak{A}$ und $\zeta_{ST} \in \pi_{ST} \mathfrak{A}$ mit*

$$\begin{aligned}\zeta \pi_S - \zeta_S &\in \pi_{ST} \mathfrak{A}, \\ \zeta \pi_{ST} - \zeta_{ST} &\in \pi_S \mathfrak{A}.\end{aligned}$$

Weiter ist die Abbildung

$$P: \begin{cases} \mathfrak{A} & \rightarrow \mathfrak{B}, \\ \zeta & \mapsto \zeta - \zeta_S - \zeta_{ST} \end{cases}$$

wohldefiniert und wir haben $P(\zeta) = \zeta$ für alle $\zeta \in \mathfrak{B}$. Schließlich gilt für die Teilmenge $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{A}$

$$P(\mathfrak{L}) = \pi_S \mathfrak{A}(I_2 - \pi_S) + \pi_{ST} \mathfrak{A}(I_2 - \pi_{ST}).$$

Beweis. Unmittelbar aufgrund der Definition von \mathfrak{A} existieren für ein gegebenes $\zeta \in \mathfrak{A}$ Elemente $\zeta_S \in \pi_S \mathfrak{A}$ und $\zeta_{ST} \in \pi_{ST} \mathfrak{A}$ wie gewünscht. Diese Elemente sind aber auch eindeutig,

denn: Für je zwei Elemente $\zeta_S, \zeta'_S \in \pi_S \mathfrak{A}$ mit $\zeta \pi_S - \zeta_S, \zeta \pi_S - \zeta'_S \in \pi_{ST} \mathfrak{A}$ gilt

$$\pi_S \mathfrak{A} \ni \zeta_S - \zeta'_S = (\zeta_S - \zeta \pi_S) + (\zeta \pi_S - \zeta'_S) \in \pi_{ST} \mathfrak{A}$$

und also auch

$$\zeta_S - \zeta'_S \in \pi_S \mathfrak{A} \cap \pi_{ST} \mathfrak{A} \stackrel{7.42}{=} \{0\}.$$

Hieraus folgt unmittelbar $\zeta_S = \zeta'_S$ und also die Eindeutigkeit von ζ_S . Die Eindeutigkeit von ζ_{ST} zeigt man analog. #

Die über die so nachgewiesenen Elemente auf \mathfrak{A} definierte Abbildung P ist in dem Sinne wohldefiniert, dass ihr Bild in \mathfrak{B} enthalten ist,

denn: Für ein beliebiges $\zeta \in \mathfrak{A}$ gilt wegen der Idempotenz von π_S und π_{ST}

$$P(\zeta) \pi_S = (\zeta - \zeta_S - \zeta_{ST}) \pi_S = (\zeta \pi_S - \zeta_S - \zeta_{ST}) \pi_S \in \pi_{ST} \mathfrak{A},$$

$$P(\xi)\pi_{ST} = (\xi - \xi_S - \xi_{ST})\pi_{ST} = (\xi\pi_{ST} - \xi_S - \xi_{ST})\pi_{ST} \in \pi_S\mathfrak{A}$$

und also $P(\xi) \in \mathfrak{B}$. #

Da für ein $\xi \in \mathfrak{B}$ die Wahl $\xi_S = 0 = \xi_{ST}$ offensichtlich die Voraussetzung erfüllt, folgt mit der oben gezeigten Eindeutigkeit in diesem Fall bereits $P(\xi) = \xi$.

Schließlich gilt

$$P(\mathfrak{L}) = \pi_S\mathfrak{A}(I_2 - \pi_S) + \pi_{ST}\mathfrak{A}(I_2 - \pi_{ST}),$$

denn: Für jedes $\xi \in \mathfrak{L}$ liegen die Elemente ξ_S, ξ_{ST} in \mathfrak{L} . Zusammen mit den vorherigen Überlegungen folgt hieraus $P(\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}$ und – da P eingeschränkt auf \mathfrak{B} die Identität ist – sogar $P(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}$. Mit der Idempotenz von π_S und π_{ST} folgt

$$\pi_S\mathfrak{A}(I_2 - \pi_S) + \pi_{ST}\mathfrak{A}(I_2 - \pi_{ST}) \subseteq \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}$$

und also die erste Inklusion der Behauptung. Für den Beweis der anderen Inklusion betrachten wir ein $\xi \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}$. Zu diesem existieren Elemente $\alpha_S, \alpha_{ST} \in \mathfrak{A}$ mit $\xi = \pi_S\alpha_S + \pi_{ST}\alpha_{ST}$ mit $\pi_S\alpha_S\pi_S \in \pi_{ST}\mathfrak{A}$ und $\pi_{ST}\alpha_{ST}\pi_{ST} \in \pi_S\mathfrak{A}$. Nach Proposition 7.42 gilt $\pi_S\mathfrak{A} \cap \pi_{ST}\mathfrak{A} = \{0\}$, so dass hieraus $\pi_S\alpha_S\pi_S = 0 = \pi_{ST}\alpha_{ST}\pi_{ST}$ folgt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \pi_S\alpha_S &= \pi_S\alpha_S(I_2 - \pi_S) \in \mathfrak{A}(I_2 - \pi_S), \\ \pi_{ST}\alpha_{ST} &= \pi_{ST}\alpha_{ST}(I_2 - \pi_{ST}) \in \mathfrak{A}(I_2 - \pi_{ST}). \end{aligned}$$

Nach Linksmultiplikation mit π_S bzw. π_{ST} und der Idempotenz folgt

$$\begin{aligned} \pi_S\alpha_S &\in \pi_S\mathfrak{A}(I_2 - \pi_S), \\ \pi_{ST}\alpha_{ST} &\in \pi_{ST}\mathfrak{A}(I_2 - \pi_{ST}). \end{aligned}$$

und somit $\xi \in \pi_S\mathfrak{A}(I_2 - \pi_S) + \pi_{ST}\mathfrak{A}(I_2 - \pi_{ST})$. Das zeigt die zweite Inklusion und somit die Behauptung. #

□

Beispiel 7.48. Betrachten wir das Element $I_2 \in \mathfrak{A}$. In der Notation von Proposition 7.47 gilt für dieses offensichtlich $(I_2)_S = \pi_S$ sowie $(I_2)_{ST} = \pi_{ST}$ und wir erhalten

$$P(I_2) = I_2 - \pi_S - \pi_{ST} \in \mathfrak{B}.$$

Korollar 7.49. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{A}_n$, das die Eigenschaften (A) und (B) beide erfüllt.

Beweis. Sei n eine natürliche Zahl. Dann existiert nach Satz 7.30 ein $\hat{T}_n \in \mathfrak{A}_n$ mit Eigenschaft (A) und aufgrund von Proposition 7.46 liegt dieses in \mathfrak{A} . Nach Proposition 7.47 folgt daher $P(\hat{T}_n) \in \mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{B}$, so dass $P(\hat{T}_n)$ Eigenschaft (B) erfüllt. Nach Konstruktion gilt nun aber für ein beliebiges $\xi \in \mathfrak{A}$ die Beziehung $P(\xi) \in \xi + \mathfrak{L}$ und insbesondere $P(\hat{T}_n) \in \hat{T}_n + \mathfrak{L}$. Da \hat{T}_n Eigenschaft (A) erfüllt und nach Korollar 7.43 die Inklusion $(I_2 - S)\mathfrak{L} \subseteq (I_2 - T)\mathfrak{A}$ gilt, erfüllt auch $P(\hat{T}_n)$ Eigenschaft (A). Insgesamt haben wir so mit $P(\hat{T}_n)$ ein Element von \mathfrak{A}_n gefunden, das sowohl Eigenschaft (A) als auch Eigenschaft (B) erfüllt. □

Beispiel 7.50. Das Element $I_2 \in \mathfrak{R}_1$ erfüllt trivialerweise Eigenschaft (A). Indem wir den Beweis von Korollar 7.49 in diesem Spezialfall nachvollziehen, erkennen wir, dass das Element

$$P(I_2) = I_2 - \pi_S - \pi_{ST}$$

aus Beispiel 7.48 sowohl Eigenschaft (A) als auch Eigenschaft (B) erfüllt.

Eine sinnstiftende Anwendung der Theorie dieses Abschnitts ist, dass wir nun in der Lage sind, vermöge des Eichler-Shimura-Isomorphismus 7.25 die Wirkung der Hecke-Operatoren von den ganzen Modulformen auf Periodenpolynome zu übertragen. Dabei erkennen wir, dass sich für jedes natürliche n die Wirkung des n -ten Hecke-Operators T_n auf den Periodenpolynomen mithilfe der Elemente $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ mit Eigenschaft (A) beschreiben lässt. Hierfür gilt zunächst die folgende Wohldefiniertheitsaussage:

Lemma 7.51. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und n eine beliebige natürliche Zahl. Für je zwei Elemente $\hat{T}_n^{(1)}, \hat{T}_n^{(2)} \in \mathfrak{R}_n$ mit Eigenschaft (A) gilt dann

$$\mathbb{P}({}^t \hat{T}_n^{(1)})(P) = \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n^{(2)})(P) \in W \quad \text{für alle } P \in W,$$

wobei W den Raum der Periodenpolynome aus (7.8) bezeichne und ${}^t \xi$ für ein $\xi = \sum_{M \in \overline{\mathbb{M}}} a_M M \in \mathfrak{R}_n$ das Element $\sum_{M \in \overline{\mathbb{M}}} a_M {}^t M$ bezeichne.

Beweis. Da $\hat{T}_n^{(1)} \in \mathfrak{R}_n$ Eigenschaft (A) erfüllt, gilt

$$(I_2 - S)(\hat{T}_n^{(1)} - \hat{T}_n^{(2)}) + (I_2 - S)\hat{T}_n^{(2)} - T_{n,\infty}(I_2 - S) \in (I_2 - T)\mathfrak{R}_n.$$

Da $\hat{T}_n^{(2)}$ ebenfalls Eigenschaft (A) erfüllt, folgt

$$(I_2 - S)(\hat{T}_n^{(1)} - \hat{T}_n^{(2)}) \in (I_2 - T)\mathfrak{R}_n.$$

Nach Korollar 7.43 gilt also $\hat{T}_n^{(1)} - \hat{T}_n^{(2)} \in \mathfrak{L}$ und nach Bemerkung 7.41 somit

$$\mathbb{P}({}^t \hat{T}_n^{(1)} - {}^t \hat{T}_n^{(2)})(P) = 0 \quad \text{für alle } P \in W.$$

Das ist die erste Teilbehauptung. Die zweite Teilbehauptung folgt, da $\hat{T}_n^{(1)}$ nach Proposition 7.46 in \mathfrak{A} liegt und nach Bemerkung 7.45 somit Elemente aus W nach W abbildet. \square

Satz 7.52. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$, $n \in \mathbb{N}$ und $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ ein beliebiges Element mit der Eigenschaft (A). Dann besitzt der Eichler-Shimura-Isomorphismus 7.25 die Eigenschaft

$$r(f|_k T_n)^+ + r(g|_k T_n)^- = \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(f)^+ + r(g)^-) \quad \text{für alle } f \in M_k, g \in S_k.$$

Wir nennen daher Elemente $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ mit Eigenschaft (A) auch **Hecke-Elemente** und definieren die Wirkung des n -ten Hecke-Operators T_n auf W durch

$$P|T_n := \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(P) \quad \text{für alle } P \in W.$$

Diese Eigenschaft heißt die **Hecke-Äquivarianz** des Eichler-Shimura-Isomorphismus.

Beweis. Sei $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ ein Element mit der Eigenschaft (A). Zunächst gilt dann

$$r(E_k|_k T_n)^+ = \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(E_k)^+),$$

denn: Nach Lemma 7.18 gilt $r(E_k)^+ = c_w(X^w - Y^w)$ mit einer geeigneten Konstante $c_w \in \mathbb{C}$. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(E_k)^+) &= \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(c_w(X^w - Y^w)) \\ &= c_w \cdot \mathbb{P}({}^t((I_2 - S)\hat{T}_n))(Y^w) \\ &\stackrel{(A)}{=} c_w \cdot \mathbb{P}({}^t(T_{n,\infty}(I_2 - S)))(Y^w) \\ &= c_w \cdot \mathbb{P}({}^t(I_2 - S)) \left(\sum_{\substack{ad=n \\ b \bmod(d)}} (dY)^w \right) \\ &= c_w \cdot \mathbb{P}({}^t(I_2 - S)) \left(Y^w \sum_{d|n} d^{w+1} \right) \\ &= \sigma_{k-1}(n) c_w (X^w - Y^w) \\ &= \sigma_{k-1}(n) r(E_k)^+ \\ &= r(\sigma_{k-1}(n) \cdot E_k)^+ \\ &\stackrel{4.28}{=} r(E_k|_k T_n)^+ \end{aligned}$$

und also die Behauptung. #

Weiter gilt auch

$$r(g|_k T_n)^\pm = \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(g)^\pm) \quad \text{für alle } g \in S_k,$$

denn: Zu einer beliebigen Spitzenform $g \in S_k$ definieren wir das *Eichler-Integral*

$$\tilde{g}(z) := \int_z^{i\infty} g(t)(t-z)^w dt \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

und erweitern die Wirkung des ℓ -ten Petersson'schen Strichoperators für gerade $\ell \in \mathbb{Z}$ zu einer Wirkung der Algebra \mathfrak{R} .⁷⁷ Für alle $z \in \mathbb{H}$ gelten nun die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} (\tilde{g}|_{-w}(I_2 - S))(z) &= \tilde{g}(z) - z^w \cdot \int_{S\langle z \rangle}^{i\infty} g(t)(t - S\langle z \rangle)^w dt \\ &= \tilde{g}(z) + \int_0^z g(S\langle t \rangle)(S\langle t \rangle - S\langle z \rangle)^w z^w dS\langle t \rangle \\ &= \tilde{g}(z) + \int_0^z t^{w+2} g(t) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{t} \right)^w \frac{z^w}{t^2} dt \\ &= \int_z^{i\infty} g(t)(t-z)^w dt + \int_0^z g(t)(t-z)^w dt \end{aligned} \tag{7.20}$$

⁷⁷Wir beachten, dass die Wirkung des ℓ -ten Strichoperators für ungerades $\ell \in \mathbb{Z}$ nicht für Elemente aus $\overline{\mathbb{M}}$ wohldefiniert ist.

$$\begin{aligned}
&= r(z, 1; g), \\
(\tilde{g}|_{-w}(I_2 - T))(z) &= \tilde{g}(z) - \int_{T\langle z \rangle}^{i\infty} g(t)(t - T\langle z \rangle)^w dt \\
&= \tilde{g}(z) - \int_z^{i\infty} g(T\langle t \rangle)(T\langle t \rangle - T\langle z \rangle)^w dT\langle t \rangle \\
&= \tilde{g}(z) - \int_z^{i\infty} g(t)(t - z) dt = 0, \\
(\tilde{g}|_{-w}T_{n,\infty})(z) &= \sum_{M \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \backslash \overline{\mathbb{M}^n}} n^{-\frac{w}{2}} j(M, z)^w \cdot \int_{M\langle z \rangle}^{i\infty} g(t)(t - M\langle z \rangle)^w dt \\
&= n^{-\frac{w}{2}} \cdot \sum_{M \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \backslash \overline{\mathbb{M}^n}} \int_z^{i\infty} g(M\langle t \rangle)(M\langle t \rangle - M\langle z \rangle)^w j(M, z)^w dM\langle t \rangle,
\end{aligned} \tag{7.21}$$

wobei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ein beliebiges Vertretersystem von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \backslash \overline{\mathbb{M}^n}$ durchläuft, dessen Elemente sämtlich den Punkt $i\infty$ fixieren. Für solche Matrizen gilt

$$\begin{aligned}
j(M, z) &= d = j(M, t), \\
M\langle t \rangle - M\langle z \rangle &= \frac{at + b}{d} - \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d} \cdot (t - z) = \frac{n}{j(M, t)^2} \cdot (t - z).
\end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\tilde{g}|_{-w}T_{n,\infty})(z) &= n^{\frac{w}{2}+1} \cdot \sum_{M \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \backslash \overline{\mathbb{M}^n}} \int_z^{i\infty} g(M\langle t \rangle)(t - z)^w j(M, t)^{-(w+2)} dt \\
&= \int_z^{i\infty} \left(\sum_{M \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \backslash \overline{\mathbb{M}^n}} n^{\frac{k}{2}} j(M, t)^{-k} g(M\langle t \rangle) \right) (t - z)^w dt \\
&= \int_z^{i\infty} \left(\sum_{M \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \backslash \overline{\mathbb{M}^n}} (g|_k M)(t) \right) (t - z)^w dt \\
&\stackrel{(4.8)}{=} \int_z^{i\infty} n^{-\frac{k}{2}+1} (g|_k T_n)(t)(t - z)^w dt \\
&= n^{-\frac{w}{2}} \cdot (\widetilde{g|_k T_n})(z).
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Wir tragen dies zusammen und erhalten für alle $z \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
r(z, 1; g|_k T_n) &\stackrel{(7.20)}{=} \left((\widetilde{g|_k T_n})|_{-w}(I_2 - S) \right) (z) \\
&\stackrel{(7.22)}{=} n^{\frac{w}{2}} \cdot (\tilde{g}|_{-w}(T_{n,\infty}(I_2 - S)))(z) \\
&\stackrel{(A),(7.21)}{=} n^{\frac{w}{2}} \cdot (\tilde{g}|_{-w}((I_2 - S)\hat{T}_n))(z) \\
&\stackrel{(7.20)}{=} n^{\frac{w}{2}} \cdot (r(\cdot, 1; g)|_{-w}\hat{T}_n)(z)
\end{aligned}$$

Schreiben wir nun $\hat{T}_n = \sum_{M \in \overline{\mathbb{M}^n}} a_M M$ mit geeigneten $a_M \in \mathbb{Q}$, so folgt daraus

$$\begin{aligned} r(z, 1; g|_k T_n) &= n^{\frac{w}{2} - \frac{w}{2}} \cdot \sum_{M \in \overline{\mathbb{M}^n}} a_M \cdot j(M, z)^w \cdot r(M\langle z \rangle, 1; g) \\ &= \sum_{M \in \overline{\mathbb{M}^n}} a_M \cdot r(M\langle z \rangle j(M, z), j(M, z); g) \\ &= \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(z, 1; g)) \end{aligned}$$

und insbesondere

$$r(g|_k T_n) = \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(g)). \quad (7.23)$$

Um hieraus auf die Behauptung zu schließen, erinnern wir uns an die Matrix

$$E := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \overline{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})}$$

aus dem Beweis von Satz 7.30. Diese erfüllt die Eigenschaft $ES = SE$. Da \hat{T}_n Eigenschaft (A) erfüllt, gilt somit

$$(I_2 - S)E\hat{T}_n E - E T_{n,\infty} E (I_2 - S) \in (I_2 - T)\mathfrak{A}_n.$$

Mithilfe Bemerkung 7.29 sehen wir auch

$$T_{n,\infty} - E T_{n,\infty} E \in (I_2 - T)\mathfrak{A}_n$$

ein und erhalten somit, dass auch $E\hat{T}_n E$ Eigenschaft (A) erfüllt. Nun ist definitionsgemäß für eine Spitzenform $g \in S_k$ das Polynom $r(g)^+ \in W^+$ gerade und das Polynom $r(g)^- \in W^-$ ungerade. Unter Verwendung von Lemma 7.51 erhalten wir so

$$\mathbb{P}({}^t(\hat{T}_n E))(r(g)^\pm) = \pm \mathbb{P}({}^t(E\hat{T}_n E))(r(g)^\pm) = \pm \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(g)^\pm).$$

Es folgt, dass $\mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(g)^+)$ ein gerades und $\mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(g)^-)$ ein ungerades Polynom ist. Aufgrund von (7.23) gilt daher

$$\begin{aligned} r(g|_k T_n)^\pm &= \left(\mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(g)) \right)^\pm \\ &= \left(\mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(g)^+) + \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(g)^-) \right)^\pm \\ &= \mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(g)^\pm) \end{aligned}$$

und also die Behauptung. #

Der Satz folgt nun mit $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$. □

7.6 Der Satz von Popa-Zagier

Sei in diesem Abschnitt n stets eine natürliche Zahl. Dann impliziert der Satz von Popa-Zagier 7.60 insbesondere, dass jedes Element \hat{T}_n von \mathfrak{R}_n , das den Eigenschaften (A) und (B) genügt, auch Eigenschaft (C) erfüllt. Dieses Ergebnis spielt eine zentrale Rolle für unseren Beweis der Eichler-Selberg-Spurformel 7.80. In diesem Abschnitt formulieren wir den Satz von Popa-Zagier und verallgemeinern die Theorie aus Abschnitt 7.5, um nachzuweisen, dass es für seinen Beweis ausreicht, für jedes natürliche n ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ zu finden, das die Eigenschaften (A), (B) und (C) allesamt erfüllt. Der Nachweis der Existenz eines solchen Elements lässt sich elementar erbringen, ist aber recht aufwändig und wird von uns nicht durchgeführt. Wir folgen den Ausführungen von Popa und Zagier aus dem Jahr 2020. Dabei sei stets $\Delta \subseteq \overline{\mathbb{M}^n}$ eine $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ -links- sowie $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ -rechtsinvariante Teilmenge, wobei sich letztere nach unseren Überlegungen in Kapitel 4 als endliche Vereinigung von Doppelnebenklassen der Form $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \cdot \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \cdot \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ mit $e_1 \mid e_2$ und $e_1 e_2 = n$ schreiben lässt.

Definition 7.53. In Verallgemeinerung zu Definition 7.26 führen wir die Menge $\mathfrak{R}_\Delta := \mathbb{Q}[\Delta]$ ein und setzen

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_\Delta &:= \mathfrak{A} \cap \mathfrak{R}_\Delta, \\ \mathfrak{B}_\Delta &:= \mathfrak{B} \cap \mathfrak{R}_\Delta, \\ \mathfrak{L}_\Delta &:= \mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}_\Delta, \\ P(\mathfrak{L})_\Delta &:= P(\mathfrak{L}) \cap \mathfrak{R}_\Delta.\end{aligned}$$

Diese Definition führt zu folgender Abwandlung von Eigenschaft (A):

Definition 7.54. Wir sagen, ein Element $\hat{T}_\Delta \in \mathfrak{R}_\Delta$ erfüllt die **Eigenschaft** (A_Δ) , wenn

$$(I_2 - S)\hat{T}_\Delta - T_{\Delta, \infty}(I_2 - S) \in (I_2 - T)\mathfrak{R}_\Delta \quad (A_\Delta)$$

gilt mit

$$T_{\Delta, \infty} := \sum_{M \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \backslash \Delta} M \in \mathfrak{R}_\Delta,$$

wobei wir über ein Vertretersystem aus Matrizen aufsummieren, die allesamt den Punkt $i\infty$ stabilisieren.

Bemerkung 7.55. (a) Die Wohldefiniertheit der Eigenschaft (A_Δ) kann analog zu Bemerkung 7.29 begründet werden.

(b) Für jede mögliche Wahl von Δ existiert ein Element $\hat{T}_\Delta \in \mathfrak{R}_\Delta$ mit Eigenschaft (A_Δ) . Dies ergibt sich unmittelbar aus Satz 7.30, wenn wir das Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ dort auf natürliche Weise zu einem Element von \mathfrak{R}_Δ einschränken.

(c) Jedes Element $\hat{T}_\Delta \in \mathfrak{R}_\Delta$, das Eigenschaft (A_Δ) genügt, liegt bereits in \mathfrak{A}_Δ . Dies zeigt man analog zu Proposition 7.46.

Ist Δ speziell eine Doppelnebenklasse, so lässt sich Aussage 7.55 (c) bis auf einen skalaren Faktor umkehren:

Satz 7.56. Sei $\Delta = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \cdot M \cdot \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ mit $M \in \overline{\mathbb{M}^n}$ eine Doppelnebenklasse. Dann gibt es eine surjektive \mathbb{Q} -lineare Abbildung $\alpha: \mathfrak{A}_\Delta \rightarrow \mathbb{Q}$ und eine exakte Sequenz

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{L}_\Delta \rightarrow \mathfrak{A}_\Delta \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q} \rightarrow \{0\},$$

wobei die Abbildung α durch die Zusatzbedingung $\alpha(\hat{T}_\Delta) = 1$ für alle Elemente $\hat{T}_\Delta \in \mathfrak{R}_\Delta$ mit Eigenschaft (A_Δ) eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Unser erstes Ziel ist die Konstruktion der Abbildung α . Wir gehen Schritt für Schritt vor und definieren zunächst eine \mathbb{Q} -wertige Abbildung a auf $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \backslash \overline{\mathbb{M}}$, um diese zu untersuchen und geeignet anzupassen. Hierfür wählen wir für jede $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty$ -Bahn K in $\overline{\mathbb{M}}$ einen festen Vertreter $M_K \in K$. Wegen $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty = \{T^b \mid b \in \mathbb{Z}\}$ und $T^b - I_2 \in (I_2 - T)\mathfrak{R}$ für alle $b \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$\zeta - \sum_{K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \backslash \overline{\mathbb{M}}} \langle \zeta, K \rangle M_K \in (I_2 - T)\mathfrak{R} \quad \text{für alle } \zeta \in \mathfrak{R} \quad (7.24)$$

Hieraus folgt

$$\zeta \in (I_2 - T)\mathfrak{R} \iff \langle \zeta, K \rangle = 0 \text{ für alle } K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \backslash \overline{\mathbb{M}}. \quad (7.25)$$

Ist nun speziell $\zeta := (I_2 - S)\zeta$ mit einem $\zeta \in \mathfrak{A}$, so nimmt die Funktion

$$a = a_\zeta: \begin{cases} \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \backslash \overline{\mathbb{M}} & \rightarrow \mathbb{Q}, \\ K & \mapsto \langle \zeta, K \rangle, \end{cases}$$

für nur endlich viele K Werte ungleich Null an. Weiter gilt

$$\begin{aligned} a(K) + a(KS) &= 0 && \text{für alle } K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \backslash \overline{\mathbb{M}}, \\ a(K) + a(KST) + a(K(ST)^2) &= 0 && \text{für alle } K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \backslash \overline{\mathbb{M}}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

denn: Wegen $\zeta \in \mathfrak{A}$ gilt $\zeta\pi_S, \zeta\pi_{ST} \in \mathfrak{L}$ und nach Korollar 7.43 somit auch

$$\begin{aligned} \zeta\pi_S &= (I_2 - S)\zeta\pi_S \in (I_2 - T)\mathfrak{R}, \\ \zeta\pi_{ST} &= (I_2 - S)\zeta\pi_{ST} \in (I_2 - T)\mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Nach (7.25) bedeutet dies

$$\langle \zeta + \zeta S, K \rangle = \langle \zeta + \zeta ST + \zeta(ST)^2, K \rangle = 0 \quad \text{für alle } K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \backslash \overline{\mathbb{M}}.$$

Mithilfe von $S^{-1} = S$ und $(ST)^{-1} = (ST)^2$ ergibt sich andererseits

$$\langle \zeta S, K \rangle = a(KS), \quad \langle \zeta ST, K \rangle = a(K(ST)^2), \quad \langle \zeta(ST)^2, K \rangle = a(KST).$$

Eingesetzt ergibt sich die Behauptung. #

Aus (7.26) lassen sich nun die Gleichungen

$$\begin{aligned} a(K) &= a(KT^{-1}) + a(K(TST)^{-1}) && \text{für alle } K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \setminus \overline{\mathbb{M}}, \\ a(K) &= a(KT) + a(KTST) && \text{für alle } K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \setminus \overline{\mathbb{M}} \end{aligned} \quad (7.27)$$

herleiten,

denn: Aus der ersten Gleichung in (7.26) erhalten wir

$$\begin{aligned} a(KT^{-1}) &= -a(KT^{-1}S) = -a(K(ST)^{-1}) = -a(K(ST)^2), \\ a(K(TST)^{-1}) &= -a(KT^{-1}ST^{-1}S) = -a(K(ST)^4) = -a(KST) \end{aligned}$$

und die erste Behauptung folgt unmittelbar mit der zweiten Gleichung in (7.26). Die zweite Behauptung ergibt sich ähnlich. #

Aufgrund von (7.27) nimmt die Abbildung a nur für $K \subseteq \overline{\mathbb{M}}_\infty \cup \overline{\mathbb{M}}_\infty S$ Werte ungleich Null an,

denn: Sei K eine $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty$ -Bahn in $\overline{\mathbb{M}}$, die nicht in $\overline{\mathbb{M}}_\infty \cup \overline{\mathbb{M}}_\infty S$ enthalten ist. Offensichtlich weisen je zwei Elemente einer gegebenen $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty$ -Bahn in $\overline{\mathbb{M}}$ modulo Vorzeichen dieselbe zweite Zeile auf und offensichtlich sind die Einträge c und d der zweiten Zeile von Elementen der von uns betrachteten Bahn K beide ungleich Null. Nehmen wir nun an, es gälte $a(K) \neq 0$. Dann unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: c und d haben dasselbe Vorzeichen. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot TST = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix},$$

so dass wir für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K$ durch iterative Rechtsmultiplikation mit beliebigen Wahlen der Matrizen T bzw. TST eine unendliche Folge von Matrizen erhalten, deren zweite Zeilen paarweise verschieden sind und die deshalb in paarweise verschiedenen $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty$ -Bahnen liegen. Wegen $a(K) \neq 0$ und der zweiten Gleichung in (7.27) könnten wir wie im Beweis von Proposition 7.42 diese Wahl in jedem Schritt so treffen, dass das a -Bild der jeweils entstehenden $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty$ -Bahn ungleich Null wäre. Das stünde im Widerspruch dazu, dass a nur für endlich viele K Werte ungleich Null annimmt.

Fall 2: c und d haben verschiedene Vorzeichen. Diesen Fall beweist man analog zu Fall 1, wobei man die zweite durch die erste Gleichung in (7.27) ersetzt und mit T^{-1} bzw. $(TST)^{-1}$ statt mit T bzw. TST von rechts multipliziert. #

Einerseits folgt hieraus $a(KST^{-1}) = 0$ für $K \subseteq \overline{\mathbb{M}}_\infty$ und also

$$a(K) = a(KT) \quad \text{für alle } K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \setminus \overline{\mathbb{M}}_\infty,$$

andererseits auch

$$\xi \stackrel{(7.24)}{=} \sum_{\substack{K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \setminus \overline{\mathbb{M}} \\ K \subseteq \overline{\mathbb{M}}_\infty}} \langle \xi, K \rangle M_K + \sum_{\substack{K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \setminus \overline{\mathbb{M}} \\ K \subseteq \overline{\mathbb{M}}_\infty S}} \langle \xi, K \rangle M_K$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \sum_{\substack{K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}} \\ K \subseteq \overline{\mathbb{M}}_\infty}} \langle \zeta, K \rangle M_K + \sum_{\substack{K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}} \\ K \subseteq \overline{\mathbb{M}}_\infty}} \langle \zeta, KS \rangle M_K S \\
&\stackrel{(7.26)}{\equiv} \sum_{K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}}_\infty} \langle \zeta, K \rangle M_K (I_2 - S).
\end{aligned}$$

Wir identifizieren nun $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}}$ mit $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}}_\infty$, indem wir zu jeder Bahn $K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}}$ den Vertreter M_K in $\overline{\mathbb{M}}_\infty$ wählen. Auf diese Weise können wir eine Abbildung

$$\tilde{a}: \begin{cases} \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}} & \rightarrow \mathbb{Q}, \\ K & \mapsto a(\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty M_K) \end{cases}$$

definieren. Nach unseren Vorüberlegungen erfüllt diese

$$\tilde{a}(K) = \tilde{a}(KT) \quad \text{für alle } K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}}, \quad (7.28)$$

$$\zeta \equiv \sum_{K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}}} \tilde{a}(K) M_K (I_2 - S). \quad (7.29)$$

Für alle $K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}}$ gilt aber offensichtlich $\langle \zeta, K \rangle = \langle (I_2 - S)\zeta, K \rangle = 0$ und mit (7.29) folgt zusätzlich

$$\tilde{a}(K) = \tilde{a}(KS) \quad \text{für alle } K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \overline{\mathbb{M}}. \quad (7.30)$$

Wir können nun vermöge \tilde{a} die gesuchte Abbildung $\alpha: \mathfrak{A}_\Delta \rightarrow \mathbb{Q}$ definieren. Sei dafür ab sofort $\zeta \in \mathfrak{A}_\Delta$. Dann wird (7.29) zu

$$\zeta \equiv \sum_{K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \Delta} \tilde{a}(K) M_K (I_2 - S).$$

Nach Voraussetzung ist Δ eine Doppelnebenklasse, so dass die Gruppe $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ transitiv von rechts auf $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \Delta$ operiert. Nach Korollar 1.28 wird die Gruppe $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ von S und T erzeugt. Nach (7.28) und (7.30) gibt daher ein $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit

$$\tilde{a}(K) = \alpha \quad \text{für alle } K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \Delta$$

und also mit

$$(I_2 - S)\zeta = \zeta \equiv \alpha \sum_{K \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \setminus \Delta} M_K (I_2 - S) = \alpha T_{\Delta, \infty} (I_2 - S). \quad (7.31)$$

Hieraus und nach Korollar 7.43 ergibt sich

$$\zeta \equiv \alpha \hat{T}_\Delta \pmod{\mathfrak{L}} \quad \text{für alle } \hat{T}_\Delta \in \mathfrak{R}_\Delta \text{ mit Eigenschaft } (A_\Delta). \quad (7.32)$$

Die Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist eindeutig mit der Eigenschaft, dass das Element $\zeta \in \mathfrak{A}_\Delta$ mit dieser (7.31) erfüllt,

denn: Zunächst ist offensichtlich, dass kein Element $\hat{T}_\Delta \in \mathfrak{R}_\Delta$ mit Eigenschaft (A_Δ) in der Menge \mathfrak{L}_Δ enthalten ist, denn wäre dem so, dann gälte auch $\zeta \in \mathfrak{L}_\Delta$ und mit (7.31) und Korollar 7.43 erhielten wir

$$T_{\Delta, \infty}(I_2 - S) \in (I_2 - T)\mathfrak{R}_\Delta,$$

was einen Widerspruch zu (7.25) darstellt, wenn wir letzteres auf Δ einschränken.

Seien nun $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{Q}$ zwei Zahlen, für die $\zeta \in \mathfrak{A}_\Delta$ mit diesen (7.31) erfüllt. Für jedes \hat{T}_Δ mit Eigenschaft (A_Δ) gilt dann auch

$$\alpha \hat{T}_\Delta \equiv \zeta \equiv \tilde{\alpha} \hat{T}_\Delta \pmod{\mathfrak{L}}.$$

und also $(\alpha - \tilde{\alpha})\hat{T}_\Delta \in \mathfrak{L}$. Wegen $\hat{T}_\Delta \notin \mathfrak{L}_\Delta$ folgt hieraus bereits $\alpha = \tilde{\alpha}$ und somit die behauptete Eindeutigkeit. #

Insgesamt erhalten wir so über die Zuordnung $\alpha(\zeta) := \alpha$ eine offensichtlich \mathbb{Q} -lineare Abbildung $\alpha: \mathfrak{A}_\Delta \rightarrow \mathbb{Q}$, welche nach (7.32) durch die Zusatzbedingung $\alpha(\hat{T}_\Delta) = 1$ für alle Elemente $\hat{T}_\Delta \in \mathfrak{R}_\Delta$ mit Eigenschaft (A_Δ) eindeutig bestimmt ist.

Es verbleibt die Exaktheit der Sequenz zu verifizieren. Die Exaktheit bei \mathfrak{L}_Δ folgt unmittelbar aus der Injektivität der Einbettung $\mathfrak{L}_\Delta \rightarrow \mathfrak{A}_\Delta$. Die Exaktheit bei \mathfrak{A}_Δ ergibt sich, da nach (7.32) und wegen $\alpha(\hat{T}_\Delta) = 1$ für alle $\hat{T}_\Delta \in \mathfrak{R}_\Delta$ mit Eigenschaft (A_Δ) offensichtlich $\alpha(\zeta)$ genau für $\zeta \in \mathfrak{L}_\Delta$ Null wird. Die Exaktheit bei \mathbb{Q} gilt schließlich, da α als nichttriviale \mathbb{Q} -lineare Abbildung mit Werten in \mathbb{Q} surjektiv ist. □

Über die Einbettung $\mathfrak{B}_\Delta \subseteq \mathfrak{A}_\Delta$ lassen sich die Ergebnisse aus Satz 7.56 auf Elemente $\zeta \in \mathfrak{B}_\Delta$ anwenden und die exakte Sequenz dort zu einem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen ergänzen:

Satz 7.57. Sei $\Delta = \overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} \cdot M \cdot \overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ mit $M \in \overline{\mathbb{M}^n}$ eine Doppelnebenklasse. Dann gibt es eine surjektive \mathbb{Q} -lineare Abbildung $\beta: \mathfrak{B}_\Delta \rightarrow \mathbb{Q}$ mit

$$\begin{aligned} \beta(\xi) &= \langle \xi, K \rangle && \text{für alle } \xi \in \mathfrak{B}_\Delta \text{ und alle } K \in \Delta / \overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}, \\ \beta(\xi) &= -\alpha(\xi) && \text{für alle } \xi \in \mathfrak{B}_\Delta \text{ und die Abbildung } \alpha \text{ aus Satz 7.56} \end{aligned}$$

und die exakte Sequenz aus Satz 7.56 lässt sich zu einem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen ergänzen:

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & \mathfrak{L}_\Delta & \longrightarrow & \mathfrak{A}_\Delta & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Q} \longrightarrow \{0\} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ \{0\} & \longrightarrow & P(\mathfrak{L})_\Delta & \longrightarrow & \mathfrak{B}_\Delta & \xrightarrow{-\beta} & \mathbb{Q} \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

Beweis. Wir verwenden in diesem und in weiteren Beweisen die folgende Notation: Für je ein $\xi = \sum_{M \in \overline{\mathbb{M}^n}} a_M M \in \mathfrak{R}_n$ und eine Teilmenge $\mathfrak{S}_n \subseteq \overline{\mathbb{M}^n}$ schreiben wir

$$\xi_{\mathfrak{S}_n} := \sum_{M \in \mathfrak{S}_n} a_M M.$$

Unser erstes Ziel ist nun die Konstruktion der Abbildung β . Tatsächlich gibt es zu jedem $\xi \in \mathfrak{B}_\Delta$ ein $\beta(\xi) \in \mathbb{Q}$ mit $\beta(\xi) = \langle \xi, K \rangle$ für alle $K \in \Delta/\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$,

denn: Aufgrund von $\xi \in \mathfrak{B}_\Delta$ gelten $\xi\pi_S \in \pi_{ST}\mathfrak{R}$ und $\xi\pi_{ST} \in \pi_S\mathfrak{R}$. Unter Berücksichtigung von $(I_2 - S)\pi_S = 0 = (I_2 - ST)\pi_{ST}$ folgt hieraus

$$(I_2 - S)\xi\pi_{ST} = 0 = (I_2 - ST)\xi\pi_S.$$

Für alle Nebenklassen $K \in \Delta/\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ ergibt sich daraus

$$\xi_K\pi_{ST} = S\xi_{SK}\pi_{ST} \quad \text{und} \quad \xi_K\pi_S = ST\xi_{(ST)^2K}\pi_S$$

und insbesondere

$$\langle \xi, SK \rangle = \langle \xi, K \rangle = \langle \xi, (ST)^2K \rangle = \langle \xi, STK \rangle,$$

wobei wir für die letzte Identität $(ST)^4 = ST$ ausnutzen. Da die von links transitiv auf $\Delta/\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ operierende Gruppe $\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ von S und ST aufgespannt wird, gibt es eine rationale Zahl $\beta(\xi)$ mit $\beta(\xi) = \langle \xi, K \rangle$ für alle $K \in \Delta/\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$. #

Auf diese Weise lässt sich offensichtlich eine \mathbb{Q} -lineare Abbildung $\beta: \mathfrak{B}_\Delta \rightarrow \mathbb{Q}$ definieren. Diese ist surjektiv,

denn: Wir konstruieren explizit ein Element $\xi \in \mathfrak{B}_\Delta$ mit $\beta(\xi) = 1$. Die Surjektivität von β folgt dann mit der \mathbb{Q} -Linearität von β . Sei also für jede Nebenklasse $K \in \Delta/\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ ein Vertreter M_K fest gewählt. Dann erfüllen die Elemente

$$\begin{aligned} \alpha_S &:= \pi_{ST} \cdot \sum_{K \in \Delta/\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}} M_K \in \mathfrak{R}_\Delta, \\ \alpha_{ST} &:= \pi_S \cdot \sum_{K \in \Delta/\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}} M_K \in \mathfrak{R}_\Delta \end{aligned}$$

offenbar die Bedingungen

$$\begin{aligned} \langle \alpha_S, K \rangle &= 1 = \langle \alpha_{ST}, K \rangle \quad \text{für alle } K \in \Delta/\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}, \\ \alpha_S\pi_S &\in \pi_{ST}\mathfrak{R}_\Delta \quad \text{und} \quad \alpha_{ST}\pi_{ST} \in \pi_S\mathfrak{R}_\Delta. \end{aligned} \tag{7.33}$$

Hieraus folgt offensichtlich $\langle \alpha_{ST} - \alpha_S, K \rangle = 0$, so dass sich das Element $\alpha_{ST} - \alpha_S$ als eine endliche Summe von Termen der Form $\zeta(A - \tilde{A})$ mit $\zeta \in \mathfrak{R}_\Delta$ und $A, \tilde{A} \in \overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ schreiben lässt. Da die Matrizen S und ST die Gruppe $\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ erzeugen, gibt es für je zwei Matrizen $A, \tilde{A} \in \overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ wiederum eine natürliche Zahl ℓ sowie für jedes $j \in \{0, \dots, \ell\}$ Matrizen A_j mit $A_0 = A$ und $A_\ell = \tilde{A}$, so dass sich A_j und A_{j-1} für alle $j \in \{1, \dots, \ell\}$ nur um einen rechten Faktor S oder ST unterscheiden. Es folgt die Existenz von Elementen $\beta_S, \beta_{ST} \in \mathfrak{R}_\Delta$ mit

$$\alpha_{ST} - \alpha_S = \beta_S(I_2 - S) - \beta_{ST}(I_2 - ST). \tag{7.34}$$

Setzen wir nun

$$\tilde{\xi} := \alpha_S + \beta_S(I_2 - S) = \alpha_{ST} + \beta_{ST}(I_2 - ST), \tag{7.35}$$

so folgt mit (7.33) wie gewünscht $\zeta \in \mathfrak{B}_\Delta$ sowie $\beta(\zeta) = 1$. #

Es folgt, dass die Zeilen des Diagramms in der Behauptung des Satzes exakt sind,

denn: Die erste Zeile des Diagramms ist exakt nach Satz 7.56. Zu zeigen verbleibt tatsächlich nur die Exaktheit der zweiten Zeile bei \mathfrak{B}_Δ , da die Exaktheit bei $P(\mathfrak{L})_\Delta$ trivial ist und wir mit der Surjektivität von β soeben die Exaktheit bei \mathfrak{Q} nachgewiesen haben. Zunächst gilt hierbei offensichtlich für jedes

$$\zeta \in P(\mathfrak{L})_\Delta = (\pi_S \mathfrak{R}(I_2 - \pi_S) + \pi_{ST} \mathfrak{R}(I_2 - \pi_{ST})) \cap \mathfrak{R}_\Delta$$

die Bedingung $-\beta(\zeta) = 0$. Es verbleibt umgekehrt zu zeigen, dass auch jedes $\zeta \in \mathfrak{B}_\Delta$ mit $-\beta(\zeta) = 0$ bereits in $P(\mathfrak{L})_\Delta$ liegt. Wegen $-\beta(\zeta) = 0$ erfüllt jedes solche Element $\langle \zeta, K \rangle = 0$ für alle Rechtsnebenklassen $K \in \Delta / \overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$. Wie in der Herleitung von (7.34) und mit $(I_2 - S)(I_2 - \pi_S) = I_2 - S$ sowie $(I_2 - ST)(I_2 - \pi_{ST}) = I_2 - ST$ erhalten wir die Existenz von Elementen $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ mit

$$\zeta = \alpha(I_2 - \pi_S) + \beta(I_2 - \pi_{ST}).$$

Wegen $\zeta \in \mathfrak{B}_\Delta$ gelten $\zeta \pi_{ST} \in \pi_S \mathfrak{R}$ und $\zeta \pi_S \in \pi_{ST} \mathfrak{R}$. Für

$$\begin{aligned} \zeta &:= (I_2 - \pi_S)\alpha(I_2 - \pi_S) \\ \text{sowie } \eta &:= (I_2 - \pi_{ST})\beta(I_2 - \pi_{ST}) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \zeta \pi_{ST} &= (I_2 - \pi_S)\alpha(I_2 - \pi_S)\pi_{ST} = (I_2 - \pi_S)\zeta \pi_{ST} = 0 \\ \text{sowie } \eta \pi_S &= (I_2 - \pi_{ST})\beta(I_2 - \pi_{ST})\pi_S = (I_2 - \pi_S)\zeta \pi_S = 0. \end{aligned}$$

Trivialerweise gilt auch $\zeta \pi_S = 0$ sowie $\eta \pi_{ST} = 0$ und analog zu unserer Argumentation im Beweis von Proposition 7.42 somit $\zeta = 0$ sowie $\eta = 0$. Hieraus ergibt sich unmittelbar $\alpha(I_2 - \pi_S) = \pi_S \alpha(I_2 - \pi_S) \in \pi_S \mathfrak{R}$ sowie $\beta(I_2 - \pi_{ST}) = \pi_{ST} \beta(I_2 - \pi_{ST}) \in \pi_{ST} \mathfrak{R}$ und nach Rechtsmultiplikation mit $(I_2 - \pi_S) = (I_2 - \pi_S)^2$ bzw. $(I_2 - \pi_{ST}) = (I_2 - \pi_{ST})^2$

$$\begin{aligned} \alpha(I_2 - \pi_S) &\in \pi_S \mathfrak{R}(I_2 - \pi_S) \\ \text{sowie } \beta(I_2 - \pi_{ST}) &\in \pi_{ST} \mathfrak{R}(I_2 - \pi_{ST}). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\zeta = \alpha(I_2 - \pi_S) + \beta(I_2 - \pi_{ST}) \in \pi_S \mathfrak{R}(I_2 - \pi_S) + \pi_{ST} \mathfrak{R}(I_2 - \pi_{ST}) = P(\mathfrak{L})$$

und somit die Behauptung. #

Das Diagramm kommutiert aber auch,

denn: Da der Rest definitionsgemäß gilt, reicht es zum Beweis der Kommutativität des Diagramms aus,

$$\alpha(\zeta) = -\beta(\zeta) \quad \text{für alle } \zeta \in \mathfrak{B}_\Delta$$

zu zeigen. Nach möglicher Multiplikation mit einem rationalen Skalar können wir dabei ohne Einschränkung $\beta(\xi) = 1$ annehmen. Zwei Elemente $\xi, \tilde{\xi} \in \mathfrak{B}_\Delta$ mit $\beta(\xi) = \beta(\tilde{\xi})$ erfüllen nach der bereits gezeigten Exaktheit der zweiten Zeile des Diagramms $\xi \equiv \tilde{\xi} \pmod{P(\mathfrak{L})_\Delta}$. Es folgt $\xi \equiv \tilde{\xi} \pmod{\mathfrak{L}_\Delta}$ und nach der bereits gezeigten Exaktheit der ersten Zeile $\alpha(\xi) = \alpha(\tilde{\xi})$. Es reicht daher zum Beweis der Behauptung sogar aus,

$$\alpha(\xi) = -1 \quad \text{für ein spezielles } \xi \in \mathfrak{B}_\Delta \text{ mit } \beta(\xi) = 1$$

zu zeigen. Auch die Menge Δ können wir noch spezieller wählen: Nach den Überlegungen aus Kapitel 4 reicht es nämlich aus, Doppelnebenklassen der Form

$$\Delta = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

zu betrachten.

Im Fall $m = 1$, also im Fall $\Delta = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \cdot I_2 \cdot \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$, folgt aus Beispiel 7.48, dass $\xi := \pi_S + \pi_{ST} - I_2 \in \mathfrak{X}_\Delta$ in \mathfrak{B}_Δ enthalten ist. Weiter gilt $\beta(\xi) = 1 + 1 - 1 = 1$. Da andererseits $-\xi$ nach Beispiel 7.50 Eigenschaft (A) und somit auch (A_Δ) erfüllt, gilt nach der Normierung in Satz 7.56 zudem $\alpha(\xi) = -\alpha(-\xi) = -1$.

Im Fall $m > 1$, also im Fall $\Delta = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ mit $m > 1$, konstruieren wir mithilfe des Ansatzes (7.35) ein explizites Element $\xi \in \mathfrak{B}_\Delta$ mit $\beta(\xi) = 1$, für welches wir anschließend $\alpha(\xi) = -1$ zeigen. Dazu wählen wir zunächst Elemente $\alpha_S, \alpha_{ST} \in \mathfrak{X}_\Delta$, die den Bedingungen aus (7.33) genügen. Dazu betrachten wir die Bahn

$$K_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \in \Delta / \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}.$$

Aufgrund von $m > 1$ erhalten wir für diese durch Äquivalenzumformung einer offensichtlich wahren Aussage

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -m \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix} \notin \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}^{-1} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \notin \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \\ &\iff SK_0 \neq K_0 \end{aligned}$$

und analog

$$STK_0 = SK_0 \neq K_0, (ST)^2K_0 \neq STK_0, K_0 = (ST)^3K_0 \neq (ST)^2K_0,$$

wobei wir die letzten beiden Ungleichheiten aus der ersten durch Linksmultiplikation mit ST bzw. $(ST)^2$ erhalten. Wählen wir nun für jede Bahn $K \in \Delta / \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ einen festen Vertreter M_K , so erfüllen die Elemente

$$\alpha_S := (I_2 + ST + (ST)^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} + \pi_{ST} \cdot \sum_{\substack{K \in (\Delta / \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}) \\ K \notin \{K_0, STK_0, (ST)^2K_0\}}} M_K,$$

$$\alpha_{ST} := (I_2 + S) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} + \pi_S \cdot \sum_{\substack{K \in (\Delta/\overline{SL_2(\mathbb{Z})}) \\ K \notin \{K_0, SK_0\}}} M_K$$

tatsächlich die Bedingungen aus (7.33). Weiter gilt

$$\begin{aligned} (\alpha_S)_{K_0} &= (\alpha_{ST})_{K_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \\ (\alpha_S)_{SK_0} &= (\alpha_S)_{STK_0} = ST(\alpha_S)_{K_0} = S \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \end{pmatrix} = S(\alpha_S)_{K_0} T^m, \\ (\alpha_{ST})_{SK_0} &= S(\alpha_S)_{K_0}. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Aufgrund der elementaren Identität

$$I_2 - T^m = (I_2 + T + \dots + T^{m-1}) \cdot ((I_2 - S) + S(I_2 - ST))$$

ergibt sich hieraus

$$(\alpha_{ST})_{SK_0} - (\alpha_S)_{SK_0} = S(\alpha_S)_{K_0} \cdot (I_2 + T + \dots + T^{m-1}) \cdot ((I_2 - S) + S(I_2 - ST))$$

und also die Existenz von Elementen

$$\begin{aligned} \beta_S &:= S(\alpha_S)_{K_0} \cdot (I_2 + T + \dots + T^{m-1}), \\ \beta_{ST} &:= S(\alpha_S)_{K_0} \cdot (I_2 + T + \dots + T^{m-1}) \cdot S \end{aligned} \tag{7.37}$$

mit (7.34). Setzen wir nun

$$\xi := \alpha_S + \beta_S(I_2 - S) = \alpha_{ST} + \beta_{ST}(I_2 - ST)$$

wie in (7.35), so folgt wie dort $\xi \in \mathfrak{B}_\Delta$ und $\beta(\xi) = 1$. Wir zeigen nun $\alpha(\xi) = -1$. Aufgrund von $\mathfrak{B}_\Delta \subseteq \mathfrak{A}_\Delta$ gilt nach (7.31) aus dem Beweis von Satz 7.56 zunächst

$$(I_2 - S)\xi - \alpha(\xi)T_{\Delta, \infty}(I_2 - S) \in (I_2 - T)\mathfrak{A}_\Delta.$$

Schränken wir dies auf die Bahn K_0 ein, so erhalten wir

$$\xi_{K_0} - S\xi_{SK_0} - \alpha(\xi) \sum_{b \bmod (m)} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & m \end{pmatrix} (I_2 - S) \in (I_2 - T)\mathfrak{A}_\Delta.$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned} \xi_{K_0} - S\xi_{SK_0} &= (\alpha_S)_{K_0} + (\beta_S)_{K_0}(I_2 - S) - S(\alpha_S)_{SK_0} - S(\beta_S)_{SK_0}(I_2 - S) \\ &\stackrel{(7.36)}{=} (\alpha_S)_{K_0} + (\beta_S)_{K_0}(I_2 - S) - (\alpha_S)_{K_0} T^m - S(\beta_S)_{SK_0}(I_2 - S) \\ &\stackrel{(7.37)}{=} (\alpha_S)_{K_0} \cdot (I_2 - T^m - (I_2 + T + \dots + T^{m-1})) \cdot (I_2 - S) \\ &\stackrel{(7.36)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot ((I_2 - T^m) - (I_2 + T + \dots + T^{m-1})) \cdot (I_2 - S) \end{aligned}$$

$$= (I_2 - T) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} - \sum_{b \bmod (m)} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & m \end{pmatrix} (I_2 - S)$$

folgt hieraus

$$(1 - \alpha(\xi)) \cdot \sum_{b \bmod (m)} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & m \end{pmatrix} (I_2 - S) \in (I_2 - T)\mathfrak{R}_\Delta.$$

Die Matrizen, die in der obigen Summe auftauchen, liegen in paarweise verschiedenen Bahnen in $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty \setminus \Delta$ und mit (7.25) erhalten wir die Behauptung $\alpha(\xi) = -1$. #

□

Aus Satz 7.57 leiten wir nun zwei Korollare her, aus denen wir dann den Satz von Popa-Zagier 7.60 folgern können. Wir beginnen damit, unter den Elementen von \mathfrak{R}_n mit Eigenschaft (B) diejenigen zu charakterisieren, die auch Eigenschaft (A) erfüllen:

Korollar 7.58. *Seien n eine natürliche Zahl und $\xi \in \mathfrak{R}_n$ ein Element mit Eigenschaft (B). Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Das Element ξ erfüllt Eigenschaft (A).*
- (ii) *Es gilt $\langle \xi, K \rangle = -1$ für alle $K \in \overline{\mathbb{M}^n / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$.*

Beweis. Wir setzen in diesem Beweis $\Delta := \overline{\mathbb{M}^n}$, so dass offenbar $\xi \in \mathfrak{B}_\Delta$ gilt. Wir schreiben Δ als eine endliche disjunkte Vereinigung

$$\Delta = \bigsqcup_{j=1}^r \Delta_j$$

von Doppelnebenklassen $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ mit einem geeigneten $r \in \mathbb{N}$. Dann gilt offensichtlich

$$\xi = \sum_{j=1}^r \xi_{\Delta_j} \quad \text{mit } \xi_{\Delta_j} \in \mathfrak{B}_{\Delta_j} \text{ für alle } j \in \{1, \dots, r\}.$$

Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir so

$$\begin{aligned} & \xi \in \mathfrak{R}_n \text{ besitzt Eigenschaft (A)} \\ \iff & \xi_{\Delta_j} \in \mathfrak{R}_{\Delta_j} \text{ besitzt Eigenschaft (A}_{\Delta_j}) \text{ für alle } j \in \{1, \dots, r\} \\ \stackrel{7.56}{\iff} & 1 = \alpha(\xi_{\Delta_j}) \stackrel{7.57}{=} -\beta(\xi_{\Delta_j}) \stackrel{7.57}{=} -\langle \xi_{\Delta_j}, K \rangle \text{ für alle } K \in \Delta_j / \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \text{ und alle } j \in \{1, \dots, r\} \\ \iff & \langle \xi, K \rangle = -1 \text{ für alle } K \in \Delta / \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \end{aligned}$$

wobei wir für die Termumformungen in der dritten Zeile ausnutzen, dass ξ Eigenschaft (B) erfüllt und somit jedes ξ_{Δ_j} in der zugehörigen Menge \mathfrak{B}_{Δ_j} liegt. □

Korollar 7.59. Seien n eine natürliche Zahl und $\zeta \in \mathfrak{R}_n$ ein Element, das die Eigenschaften (A) und (B) beide erfüllt. Dann hängt für alle Konjugationsklassen $[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n}$ der Wert $\langle \zeta, [M] \rangle$ nur von $[M]$ und nicht von der Wahl von ζ ab.

Beweis. Wir setzen wieder

$$\Delta := \overline{\mathbb{M}^n} = \bigsqcup_{j=1}^r \Delta_j$$

mit Doppelnebenklassen $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ und einem geeigneten $r \in \mathbb{N}$. Für je zwei Elemente $\zeta, \tilde{\zeta} \in \mathfrak{R}_n$ mit den Eigenschaften (A) und (B) gilt dann offenbar insbesondere $\zeta, \tilde{\zeta} \in \mathfrak{B}_\Delta$ und wir schreiben

$$\zeta = \sum_{j=1}^r \zeta_{\Delta_j}, \quad \tilde{\zeta} = \sum_{j=1}^r \tilde{\zeta}_{\Delta_j} \quad \text{mit } \zeta_{\Delta_j}, \tilde{\zeta}_{\Delta_j} \in \mathfrak{B}_{\Delta_j} \text{ für alle } j \in \{1, \dots, r\}.$$

In dieser Situation gilt bereits

$$\zeta - \tilde{\zeta} \in P(\mathfrak{L})_\Delta,$$

denn: Da ζ und $\tilde{\zeta}$ Eigenschaft (A) besitzen, folgt wie im Beweis von Korollar 7.58 zunächst $-\beta(\zeta_{\Delta_j} - \tilde{\zeta}_{\Delta_j}) = \alpha(\zeta_{\Delta_j} - \tilde{\zeta}_{\Delta_j}) = 0$ und aufgrund der Exaktheit der zweiten Zeile des Diagramms in Satz 7.57 dann auch $\zeta_{\Delta_j} - \tilde{\zeta}_{\Delta_j} \in P(\mathfrak{L})_{\Delta_j}$ für alle $j \in \{1, \dots, r\}$. Die Behauptung folgt nun mit

$$\zeta - \tilde{\zeta} = \sum_{j=1}^r (\zeta_{\Delta_j} - \tilde{\zeta}_{\Delta_j})$$

und der Definition von P . #

Andererseits gilt aber auch

$$P(\mathfrak{L})_\Delta \subseteq \left\{ \sum_{n=1}^N a_n (M_n - A_n M_n A_n^{-1}) \mid N \in \mathbb{N} \text{ und } a_n \in \mathbb{Q}, A_n \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \right. \\ \left. M_n \in \Delta \text{ für alle } 1 \leq n \leq N \right\},$$

denn: Für ein beliebiges Element $\zeta \in P(\mathfrak{L})_\Delta$ gibt es $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{R}_\Delta$ mit

$$\begin{aligned} \zeta &= \pi_S \zeta_1 (I_2 - \pi_S) + \pi_{ST} \zeta_2 (I_2 - \pi_{ST}) \\ &= \pi_S \zeta_1 - \pi_S \zeta_1 \pi_S + \pi_{ST} \zeta_2 - \pi_{ST} \zeta_2 \pi_{ST} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\zeta_1 + S \zeta_1) - \frac{1}{4} \cdot (\zeta_1 + S \zeta_1 S + S \zeta_1 + \zeta_1 S) + \frac{1}{3} \cdot (\zeta_2 + ST \zeta_2 + (ST)^2 \zeta_2) \\ &\quad - \frac{1}{9} \cdot (\zeta_2 + \zeta_2 ST + \zeta_2 (ST)^2 + ST \zeta_2 + ST \zeta_2 ST + ST \zeta_2 (ST)^2 + (ST)^2 \zeta_2 \\ &\quad + (ST)^2 \zeta_2 ST + (ST)^2 \zeta_2 (ST)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cdot (\xi_1 - S\xi_1 S^{-1}) + \frac{1}{4} \cdot (S\xi_1 - \xi_1 S) + \frac{1}{9} \cdot (\xi_2 - ST\xi_2(ST)^{-1}) \\
&\quad + \frac{1}{9} \cdot (\xi_2 - (ST)^{-1}\xi_2 ST) + \frac{1}{9} \cdot (ST\xi_2 - (ST)^{-1}\xi_2(ST)^{-1}) + \frac{1}{9} \cdot (ST\xi_2 - \xi_2 ST) \\
&\quad + \frac{1}{9} \cdot ((ST)^{-1}\xi_2 - \xi_2(ST)^{-1}) + \frac{1}{9} \cdot ((ST)^{-1}\xi_2 - ST\xi_2 ST).
\end{aligned}$$

Indem wir die Summanden geeignet umformen – so etwa $S\xi_1 - \xi_1 S = S\xi_1 - S(S\xi_1)S^{-1}$ – erkennen wir, dass das Element in der gewünschten Form vorliegt. #

Aus den beiden gezeigten Inklusionen folgt $\langle \zeta, [M] \rangle = \langle \tilde{\zeta}, [M] \rangle$ für jede zu einer Matrix $M \in \Delta$ gehörige Konjugationsklasse $[M] = \{AMA^{-1} \mid A \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\}$. Das zeigt das Korollar. □

Wir erhalten nun:

Satz 7.60 (Satz von Popa-Zagier). *Sei n eine natürliche Zahl und sei $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ ein Element mit den Eigenschaften (A) und (B). Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Für jede Rechtsnebenklasse $K \in \overline{\mathbb{M}^n / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ gilt $\langle \hat{T}_n, K \rangle = -1$.*
- (b) *Das Element \hat{T}_n besitzt auch die Eigenschaft (C).*

Beweis. Behauptung (a) folgt unmittelbar aus Korollar 7.58. Nach Korollar 7.59 folgt zudem Behauptung (b), wenn wir ein Element angeben können, das zugleich die Eigenschaften (A), (B) und (C) erfüllt. Das ist zwar elementar, aber recht aufwändig und wird von uns nicht durchgeführt. □

7.7 Die Kronecker-Hurwitz-Klassenzahlformel

Die Kronecker-Hurwitz-Klassenzahlformel lässt sich als Folgerung des Satzes von Popa-Zagier 7.60 auffassen, da sie sich mit dessen Hilfe beweisen lässt. Bevor wir dies tun, führen wir zunächst die namensgebenden Kronecker-Hurwitz-Klassenzahlen ein, welche später auch in der Formulierung der Eichler-Selberg'schen Spurformel 7.80 auftauchen. Wir beginnen mit einer Einführung in die wichtigsten Grundlagen aus dem Bereich der binären quadratischen Formen:

Definition 7.61. *Eine (binäre) quadratische Form Q ist ein homogenes quadratisches Polynom in zwei Variablen und ganzen Koeffizienten, also insbesondere in $\mathbb{Z}[X, Y]$. Allgemein gilt*

$$Q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2 = (X, Y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

für ganze a, b und c . Wir bezeichnen die Matrix

$$M_Q := \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

auch als die **Darstellungsmatrix** der quadratischen Form Q und bemerken, dass diese im Allgemeinen nur halbzahlig ist.

Möchte man eine beliebige quadratische Form Q hinsichtlich der Lösungsmengen $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : Q(x, y) = n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ studieren, so fällt auf, dass sich bei Variablentransformationen $(X, Y) \mapsto (\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ diese Lösungsmengen im Wesentlichen nicht ändern. Kennt man also die Anzahl der Lösungen von $Q(X, Y) = n$, so auch jene der quadratischen Form⁷⁸

$$R(X, Y) = Q(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y) = n \quad \text{mit } \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Es ergibt also Sinn, alle quadratischen Formen, die durch solche Substitution auseinander hervorgehen, miteinander zu identifizieren:

Definition 7.62. Wir bezeichnen zwei quadratische Formen Q und R als *äquivalent*, falls es ein $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit

$$R(X, Y) = Q(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y).$$

Proposition 7.63. Die Gruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert von rechts auf der Menge der quadratischen Formen. Auf Ebene der Darstellungsmatrizen ist dies gegeben durch

$$\langle M_Q \rangle U := {}^t U M_Q U \quad \text{für alle } U \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Insbesondere definiert die in Definition 7.62 gegebene Relation eine Äquivalenzrelation: Zwei quadratische Formen Q und R sind genau dann äquivalent, falls ihre Darstellungsmatrizen ähnlich sind in dem Sinne, dass eine unimodulare Matrix $U \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ existiert, so dass $M_Q = {}^t U M_R U$. Wir schreiben dann auch $Q = \langle R \rangle U$.

Beweis. Seien $U := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $Q(X, Y) := aX^2 + bXY + cY^2$ gegeben. Mit (7.38) gilt dann

$$\begin{aligned} R(X, Y) &:= Q(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y) \\ &= (\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha X + \beta Y \\ \gamma X + \delta Y \end{pmatrix} \\ &= (X, Y) {}^t U \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit gilt $M_R = {}^t U M_Q U$. Dies gibt eine Gruppenwirkung von rechts: Zunächst ist ${}^t I_2 M_Q I_2 = M_Q$ und für beliebige $U_1, U_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \langle M_Q \rangle U_2 \rangle U_1 &= \langle {}^t U_2 M_Q U_2 \rangle U_1 = {}^t U_1 {}^t U_2 M_Q U_2 U_1 \\ &= {}^t (U_2 U_1) M_Q U_2 U_1 = \langle M_Q \rangle (U_2 U_1). \end{aligned}$$

Damit ist die Proposition gezeigt. □

⁷⁸Der Nachweis, dass unter unimodularen Substitutionen quadratische Formen auf quadratische Formen abgebildet werden, ist einfach, und wir überlassen dies dem Leser.

Die bisher vorgenommene Einteilung in Äquivalenzklassen stellt uns noch nicht ganz zufrieden, da nachweislich immer noch unendlich viele Klassen quadratischer Formen existieren. Es ergibt also Sinn, uns nach Invarianten umzusehen, die eine weitere Klassifizierung – und damit Unterscheidbarkeit – quadratischer Formen erlauben. Eine solche Invariante ist die Diskriminante einer quadratischen Form:

Definition 7.64. Sei $Q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ eine quadratische Form. Dann heißt

$$D_Q := D := -4 \det(M_Q) = b^2 - 4ac$$

die **Diskriminante** von Q . Aufgrund ihres Aufbaus gilt dabei für die Diskriminante offensichtlich $D_Q \equiv 0, 1 \pmod{4}$.

Wie man anhand der allgemein bekannten Lösungsformel schnell sieht, kodiert die Diskriminante die Lösbarkeit einer quadratischen Gleichung

$$aX^2 + bX + c = 0$$

mit $a \neq 0$ über den reellen Zahlen. Sind dabei a, b und c ganze Zahlen, so wird mittels Homogenisierung aus dieser Gleichung die Form $aX^2 + bXY + cY^2$ gewonnen, sodass ein unmittelbarer Zusammenhang zu quadratischen Formen besteht. Es gilt nun die elementare, aber wichtige:

Proposition 7.65. Seien Q und R quadratische Formen mit Diskriminanten D_Q bzw. D_R . Sind dann Q und R äquivalent, so gilt $D_Q = D_R$.

Beweis. Da Q und R äquivalent sind, existiert eine Matrix $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M_Q = {}^t U M_R U$. Mit der Multiplikativität der Determinanten folgt

$$D_Q = -4 \det(M_Q) = -4 \det({}^t U M_R U) = -4 \det(M_R) = D_R$$

und somit die Proposition. □

Satz 7.66. Sei $D \in \mathbb{Z}$ keine Quadratzahl. Dann gibt es nur endlich viele Äquivalenzklassen quadratischer Formen mit der Diskriminante D .

Beweis. Es gibt nur endlich viele Tripel $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \in \mathbb{Z}^3$ mit der Eigenschaft $|\tilde{b}| \leq |\tilde{a}| \leq |\tilde{c}|$, die zusätzlich $\tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c} = D$ erfüllen,

denn: Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt

$$|D| = |\tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c}| \geq |4\tilde{a}\tilde{c}| - |\tilde{b}|^2 \geq 4|\tilde{a}|^2 - |\tilde{a}|^2 = 3\tilde{a}^2,$$

womit auch die Beziehungen

$$|\tilde{a}| \leq \sqrt{\frac{|D|}{3}}, \quad |\tilde{b}| \leq |\tilde{a}|, \quad \tilde{c} = \frac{\tilde{b}^2 - D}{4\tilde{a}}$$

offenkundig werden. Damit kommen nur endlich viele Tripel $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \in \mathbb{Z}^3$ infrage und ihre genaue Anzahl hängt nur von D ab. #

Der Satz folgt daher, wenn wir zeigen können, dass jede quadratische Form

$$Q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$$

äquivalent zu einer Form

$$\tilde{Q}(X, Y) = \tilde{a}X^2 + \tilde{b}XY + \tilde{c}Y^2$$

mit $|\tilde{b}| \leq |\tilde{a}| \leq |\tilde{c}|$ ist – hier ist $\tilde{a} \neq 0$, da D keine Quadratzahl ist.

Um dies zu zeigen, wählen wir nun \tilde{a} als die betragsmäßig kleinste natürliche Zahl, die durch Q dargestellt werden kann. Dann gibt es Zahlen m und n mit

$$\tilde{a} = am^2 + bmn + cn^2$$

und es muss $\text{ggT}(m, n) = 1$ gelten, da wir ansonsten einen trivialen Widerspruch zur Minimalität von $|\tilde{a}|$ erhalten. Folglich gibt es ganze u, v mit $mu - nv = 1$ und die Matrix $\begin{pmatrix} m & v \\ n & u \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ transformiert die Form Q in eine Form $R(X, Y) = \tilde{a}X^2 + \tilde{b}_1XY + \tilde{c}_1Y^2$, die wohlgemerkt als ersten Koeffizienten gerade \tilde{a} besitzt. Wir wählen nun eine ganze Zahl ℓ , für die $\tilde{b} = \tilde{b}_1 - 2\tilde{a}\ell$ im Absolutbetrag nicht größer als $|\tilde{a}|$ ist. Durch die $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Transformation $(X, Y) \mapsto (X - \ell Y, Y)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} R(X - \ell Y, Y) &= \tilde{a}(X - \ell Y)^2 + \tilde{b}_1(X - \ell Y)Y + \tilde{c}_1Y^2 \\ &= \tilde{a}X^2 + (\tilde{b}_1 - 2\tilde{a}\ell)XY + (\tilde{a}\ell^2 - \tilde{b}_1\ell + \tilde{c}_1)Y^2, \end{aligned}$$

was zeigt, dass Q zu einer Form $V(X, Y) = \tilde{a}X^2 + \tilde{b}XY + \tilde{c}Y^2$ mit $|\tilde{b}| \leq |\tilde{a}|$ äquivalent ist. Zu guter Letzt beachten wir, dass zwei äquivalente Formen genau die gleichen ganzen Zahlen darstellen, weshalb mit der Minimalität von \tilde{a} bereits $|\tilde{a}| \leq |V(0, 1)| = |\tilde{c}|$ erfüllt sein muss – da D keine Quadratzahl ist, muss $\tilde{c} \neq 0$ gelten. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Tatsächlich können wir die Menge der quadratischen Formen einer vorgegebenen Diskriminante genau beschreiben:

Lemma 7.67. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{Z}$ und schreiben wir $M_{n,t}$ für die Menge der Matrizen in $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ mit Determinante n und Spur t . Dann liefert die Abbildung

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto Q_M(X, Y) := cX^2 + (d - a)XY - bY^2$$

eine Bijektion zwischen $M_{n,t}$ und der Menge aller quadratischer Formen mit Diskriminante $t^2 - 4n$. Diese Abbildung ist $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -äquivariant in dem Sinne, dass für jedes $M \in M_{n,t}$ der Zusammenhang

$$Q_{U^{-1}MU} = \langle Q_M \rangle U \quad \text{für alle } U \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gilt.

Beweis. Offensichtlich gilt

$$D_{Q_M} = (d - a)^2 + 4cb = (d + a)^2 - 4(ad - bc) = t^2 - 4n \quad \text{für alle } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{n,t},$$

so dass die Zuordnung in der Behauptung des Satzes wohldefiniert ist. Sie ist aber auch bijektiv,

denn: Zum Beweis der Injektivität betrachten wir zwei Matrizen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in M_{n,t}$ mit $Q_M = Q_{\tilde{M}}$. Für diese gilt unmittelbar $c = \tilde{c}$ und $\tilde{b} = b$. Aufgrund von $a - d = \tilde{a} - \tilde{d}$ und $a + d = t = \tilde{a} + \tilde{d}$ gilt zudem $a = \tilde{a}$ und $d = \tilde{d}$ und insgesamt also $M = \tilde{M}$, so dass wir die Injektivität nachgewiesen haben.

Zum Beweis der Surjektivität betrachten wir eine quadratische Form $Q(X, Y) = \tilde{a}X^2 + \tilde{b}XY + \tilde{c}Y^2$ mit Diskriminante $t^2 - 4n = D_Q = \tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c}$. Hierbei gilt offensichtlich $t \equiv \tilde{b} \pmod{2}$, so dass die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} \frac{t-\tilde{b}}{2} & -\tilde{c} \\ \tilde{a} & \frac{t+\tilde{b}}{2} \end{pmatrix}$$

ganzzahlige Einträge hat. Offensichtlich folgt aber auch

$$\det(M) = \frac{t^2 - \tilde{b}^2}{4} + \tilde{a}\tilde{c} = n,$$

$$\operatorname{tr}(M) = t,$$

so dass insgesamt die Matrix M in $M_{n,t}$ liegt. Da offensichtlich M unter der Abbildung aus der Behauptung des Satzes auf $\tilde{a}X^2 + \tilde{b}XY + \tilde{c}Y^2$ abgebildet wird, haben wir ein Urbild gefunden und somit die Surjektivität gezeigt. #

Die $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivarianz lässt sich für eine konkret gegebene Matrix $U \in SL_2(\mathbb{Z})$ leicht nachrechnen, so dass das Lemma folgt. □

Schließlich lassen sich quadratische Formen auch über ihr Abbildungsverhalten klassifizieren:

Definition 7.68. Es sei $Q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ eine quadratische Form mit $D_Q < 0$. Ist $a > 0$ bzw. $a < 0$, so nennen wir Q **positiv-definit** bzw. **negativ-definit**. Ist $D_Q > 0$, so nennen wir Q auch **indefinit**.

Die Definition rührt daher, dass positiv- bzw. negativ-definite Formen stets nur positive bzw. negative Werte annehmen, wenn man $(x, y) = (0, 0)$ ausnimmt,

denn: Sei also $b^2 - 4ac < 0$ und zunächst $a > 0$. Aus

$$ax^2 + bxy + cy^2 = -n < 0$$

folgt mit $y \in \mathbb{Z}$ durch Auflösen nach x :

$$x_{1,2} = \frac{-by \pm \sqrt{b^2y^2 - 4a(cy^2 + n)}}{2a} = \frac{-by \pm \sqrt{D_Qy^2 - 4an}}{2a},$$

was nicht einmal reellwertig ist. Derselbe Widerspruch ergibt sich im Falle von $ax^2 + bxy + cy^2 = n > 0$ und $a < 0$. #

Im Fall von $D_Q > 0$ keine Quadratzahl werden für $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ hingegen sowohl positive als auch negative Werte angenommen.

Wir können nun eine Klassenzahl definieren, die bei der Formulierung der Eichler-Selberg'schen Spurformel 7.80 eine Rolle spielen wird:

Definition 7.69. Für jede ganze Zahl $D \in \mathbb{Z}$ definieren wir die **Kronecker-Hurwitz-Klassenzahl** $H(D)$ durch

$$H(D) := \begin{cases} 0 & \text{für } D < 0 \text{ und } -D \text{ keine Quadratzahl,} \\ -\frac{\sqrt{-D}}{2} & \text{für } D < 0 \text{ und } -D \text{ Quadratzahl,} \\ -\frac{1}{12} & \text{für } D = 0, \\ \#_{-D,+} & \text{für } D > 0, \end{cases}$$

wobei $\#_{-D,+}$ die – nach Satz 7.66 endliche – gewichtete Anzahl der Äquivalenzklassen positiv definiter quadratischer Formen der Diskriminante $-D$ bezeichne, wobei wir Äquivalenzklassen, die ein Vielfaches von $X^2 + Y^2$ enthalten, mit Vielfachheit $\frac{1}{2}$ zählen, solche, die ein Vielfaches von $X^2 - XY + Y^2$ enthalten, mit Vielfachheit $\frac{1}{3}$ und alle anderen mit Vielfachheit 1.⁷⁹

Bemerkung 7.70. Die Kronecker-Hurwitz-Klassenzahl $H(D)$ ist von der üblicherweise studierten Klassenzahl $h(D)$ quadratischer Formen zu unterscheiden, welche die Anzahl der Äquivalenzklassen primitiver quadratischer Formen⁸⁰ von Diskriminante D ohne Gewichtung zählt, wobei im Fall $D < 0$ nur die positiv-definiten Formen gezählt werden.

Beispiel 7.71. Wir geben nun beispielhaft einige Werte der Kronecker-Hurwitz-Klassenzahl an:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|-----------------|---|---|---------------|---------------|---|---|---|---|---|----|----|---------------|----|----|----|---------------|
| D | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| $H(D)$ | $-\frac{1}{12}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | $\frac{4}{3}$ | 0 | 0 | 2 | $\frac{3}{2}$ |

Wir können nun aus dem Satz von Popa-Zagier 7.60 Formel für die Kronecker-Hurwitz-Klassenzahl herleiten, die auf anderem Wege bereits 1860 von Kronecker, 1880 von Gierster und 1885 von Hurwitz bewiesen wurde:

⁷⁹Auf diese Weise wird jede Äquivalenzklasse K mit dem Faktor $|\text{Aut}(K)|^{-1}$ gewichtet, wobei wir

$$\text{Aut}(K) := \{U \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid {}^t U \cdot M_Q \cdot U = M_Q\} \quad \text{für ein festes } Q \in K$$

setzen. Das ist offensichtlich unabhängig von der Wahl von $Q \in K$ und somit wohldefiniert.

⁸⁰Eine quadratische Form heißt dabei **primitiv**, wenn ihre Koeffizienten teilerfremd sind.

Satz 7.72 (Kronecker-Hurwitz-Klassenzahlformel). Für eine beliebige natürliche Zahl n gilt⁸¹

$$\sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 \leq 4n}} H(4n - t^2) = \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{N} \\ ad = n}} \max\{a, d\}.$$

Beweis. Nach Korollar 7.49 gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$, das die Eigenschaften (A) und (B) erfüllt. Wir berechnen den Wert $\langle \hat{T}_n, \overline{\mathbb{M}^n} \rangle$ mithilfe des Satzes von Popa-Zagier 7.60 auf verschiedene Weisen. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} \sum_{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n}} w([M]) &\stackrel{7.60(b)}{=} \sum_{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n}} \langle \hat{T}_n, [M] \rangle \\ &= \langle \hat{T}_n, \overline{\mathbb{M}^n} \rangle \\ &= \sum_{K \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} / \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}} \langle \hat{T}_n, K \rangle \\ &\stackrel{7.60(a)}{=} \left| \overline{\mathbb{M}^n} / \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \right|, \end{aligned} \tag{7.39}$$

wobei in der Summe auf der linken Seite über alle Konjugationsklassen $[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n}$ summiert wird und in der Summe rechts über alle Rechtsnebenklassen $K \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} / \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$. Wir untersuchen nun zunächst die linke Seite von (7.39) weiter. Für eine beliebige, zunächst fest gewählte Zahl $t \in \mathbb{Z}$ erhalten wir dort

$$\sum_{\substack{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \\ \mathrm{tr}(M)^2 = t^2}} w([M]) = \begin{cases} -2H(4n - t^2) & \text{für } t \neq 0, \\ -H(4n - t^2) & \text{für } t = 0, \end{cases} \tag{7.40}$$

wobei mit $\mathrm{tr}(M)$ die Spur irgendeines Elements der Konjugationsklasse $[M]$ gemeint sei,

denn: Wir führen eine Fallunterscheidung nach den Eigenschaften der Zahl $4n - t^2$ durch.

Fall 1: $4n - t^2 > 0$. Hier gilt nach Definition von Gewichtsfunktion und Kronecker-Hurwitz-Klassenzahl

$$\sum_{\substack{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \\ \mathrm{tr}(M)^2 = t^2}} w([M]) \stackrel{7.33}{=} \sum_{\substack{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \\ [M] \text{ elliptisch}}} w([M]).$$

Da nach Lemma 7.67 elliptische Matrizen aus $\mathbb{Z}I_2 + \mathbb{Z}S$ bzw. $\mathbb{Z}I_2 + \mathbb{Z}ST$ unter der Bijektion dort auf skalare Vielfache von $X^2 + X^2$ bzw. $X^2 - XY + Y^2$ abgebildet werden, folgt die Behauptung in diesem Fall aus der Berechnung der elliptischen Gewichte in Lemma 7.37 und der Definition der Klassenzahl in Definition 7.69.

⁸¹Für die Formulierung der Klassenzahlformel benötigen wir nur die Kronecker-Hurwitz-Klassenzahlen nicht-negativer ganzer Zahlen, die tatsächlich über die gewichtete Anzahl von Äquivalenzklassen quadratischer Formen sprechen. In unserem Beweis tauchen jedoch auch Klassenzahlen negativer ganzer Zahlen auf, deren Werte durch diesen Beweis als „richtig“ erkannt werden können.

Fall 2: $4n - t^2 = 0$. Hier gilt stets $t \neq 0$ und nach Definition von Gewichtsfunktion und Kronecker-Hurwitz-Klassenzahl folgt direkt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \\ \text{tr}(M)^2 = t^2}} w([M]) &\stackrel{7.33}{=} \sum_{\substack{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \\ [M] \text{ skalar}}} w([M]) + \sum_{\substack{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \\ [M] \text{ parabolisch}}} w([M]) \\ &\stackrel{7.35}{=} \frac{1}{6} + 0 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) \\ &\stackrel{7.69}{=} -2 \cdot H(0) = -2 \cdot H(4n - t^2). \end{aligned}$$

Fall 3: $4n - t^2 < 0$ und $t^2 - 4n$ ist keine Quadratzahl. Hier gilt stets $t \neq 0$ und nach Definition von Gewichtsfunktion und Kronecker-Hurwitz-Klassenzahl folgt direkt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \\ \text{tr}(M)^2 = t^2}} w([M]) &\stackrel{7.33}{=} \sum_{\substack{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \\ [M] \text{ nicht-zerf. hyperbolisch}}} w([M]) \\ &\stackrel{7.35}{=} 0 \\ &\stackrel{7.69}{=} -2 \cdot H(4n - t^2). \end{aligned}$$

Fall 4: $4n - t^2 < 0$ und $t^2 - 4n$ ist eine Quadratzahl. Hier gilt stets $t \neq 0$ und nach Definition von Gewichtsfunktion und Kronecker-Hurwitz-Klassenzahl auch

$$\sum_{\substack{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \\ \text{tr}(M)^2 = t^2}} w([M]) \stackrel{7.33}{=} \sum_{\substack{[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n} \\ [M] \text{ zerfallend hyperbolisch}}} w([M]).$$

Die Behauptung in diesem Fall folgt aus den Definitionen des Gewichts 7.35 und der Klassenzahl 7.69, wenn wir zeigen können, dass es genau $\sqrt{t^2 - 4n}$ zerfallend hyperbolische Konjugationsklassen $[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n}$ mit $\text{tr}(M)^2 = t^2$ gibt. Dafür setzen wir

$$a := \frac{|t| - \sqrt{t^2 - 4n}}{2} \quad \text{und} \quad d := \frac{|t| + \sqrt{t^2 - 4n}}{2}.$$

Dies sind offensichtlich natürliche Zahlen, welche den Bedingungen $d > a > 0$, $ad = n$, $a + d = |t|$ sowie $d - a = \sqrt{t^2 - 4n}$ genügen. Tatsächlich ist nun

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a & d - a - 1 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}$$

ein Vertretersystem der zerfallend hyperbolischen Konjugationsklassen $[M] \subseteq \overline{\mathbb{M}^n}$ und hat $d - a = \sqrt{t^2 - 4n}$ Elemente. #

Die rechte Seite von (7.39) kann man explizit berechnen, indem man in Analogie zu Lemma 4.3 die disjunkte Zerlegung in Rechtsnebenklassen

$$\overline{\mathbb{M}^n} = \bigsqcup_{\substack{ad=n \\ b \bmod (a)}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$

herleitet. Zusammen mit (7.40) erhalten wir so

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}} H(4n - t^2) = \sum_{0 < d | n} d. \quad (7.41)$$

Andererseits gilt aber auch

$$\sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 > 4n}} H(4n - t^2) = \sum_{\substack{ad=n \\ d > a > 0}} (a - d), \quad (7.42)$$

denn: Aus der Definition der Kronecker-Hurwitz-Klassenzahlen erhalten wir

$$\sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 > 4n}} H(4n - t^2) = \sum_{\substack{t \in \mathbb{N}, t^2 - 4n > 0 \\ t^2 - 4n \text{ Quadratzahl}}} -\sqrt{t^2 - 4n}. \quad (7.43)$$

Wir zeigen nun, dass die rechte Seite hiervon mit der rechten Seite der Behauptung übereinstimmt. Seien also zunächst $a, d \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen mit $ad = n$ und $d > a > 0$ gegeben. Setzen wir dann $t := a + d$, so ist $t^2 - 4n$ eine positive Quadratzahl und es gilt $d - a = \sqrt{t^2 - 4n}$. Ist umgekehrt t eine natürliche Zahl, so dass $t^2 - 4n$ eine positive Quadratzahl ist, so setzen wir

$$a := \frac{t - \sqrt{t^2 - 4n}}{2} \quad \text{und} \quad d := \frac{t + \sqrt{t^2 - 4n}}{2}.$$

Nach Konstruktion sind a, d natürliche Zahlen mit $d > a > 0$, $ad = n$ und $a + d = t$. Zusammen mit (7.43) folgt hieraus die Behauptung. #

Die Kronecker-Hurwitz-Klassenzahlformel erhalten wir, indem wir nun (7.42) von (7.41) abziehen. □

Beispiel 7.73. Mithilfe der Tabelle aus Beispiel 7.71 und einiger zusätzlicher Werte berechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 \leq 20}} H(20 - t^2) &= H(20) + 2 \cdot (H(19) + H(16) + H(11) + H(4)) \\ &= 2 + 2 + 3 + 2 + 1 = 5 + 5 \\ &= \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{N} \\ ad=5}} \max\{a, d\}, \end{aligned}$$

so wie von der Kronecker-Hurwitz-Klassenzahlformel 7.72 beschrieben.

7.8 Die Spurformel

In diesem Abschnitt zeigen wir die Eichler-Selberg'sche Spurformel 7.80, indem wir ausnutzen, dass es für jedes natürliche n ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ gibt, das die Eigenschaften (A), (B) und (C) allesamt erfüllt. Jede dieser Eigenschaften trägt zum Beweis bei: So haben wir in Satz 7.52 die Hecke-Äquivarianz des Eichler-Shimura-Isomorphismus festgestellt und, dass sich die Wirkung des n -ten Hecke-Operators T_n auf den Periodenpolynomen durch die Wirkung eines beliebigen Elements $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ mit Eigenschaft (A) beschreiben lässt. Den Nutzen von Eigenschaft (B) sehen wir sogleich in Proposition 7.75 ein. Um diese zu beweisen, benötigen wir zunächst ein Resultat aus der Linearen Algebra:

Lemma 7.74. *Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $\varphi \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus von V . Für je zwei Untervektorräume $U, \tilde{U} \subseteq V$ mit $\varphi(U) \subseteq \tilde{U}$ und $\varphi(\tilde{U}) \subseteq U$ gilt*

$$\text{tr}(\varphi, U \cap \tilde{U}) = \text{tr}(\varphi, U + \tilde{U}),$$

wobei die Ausdrücke auf beiden Seiten jeweils durch die Spur einer Darstellungsmatrix von φ bezüglich irgendeiner Basis von $U \cap \tilde{U}$ bzw. $U + \tilde{U}$ gegeben seien, was wegen der Konjugationsinvarianz der Spur offensichtlich wohldefiniert ist.

Beweis. Wir setzen $n := \dim(U)$, $\tilde{n} := \dim(\tilde{U})$ sowie $m := \dim(U \cap \tilde{U})$ und nehmen $n, \tilde{n} > m \geq 1$ an, da die ausgelassenen Randfälle trivial sind. Nach dem Basisergänzungssatz lässt sich jede Basis $\{b_1, \dots, b_m\}$ von $U \cap \tilde{U}$ jeweils zu einer Basis von U bzw. von \tilde{U} ergänzen. Es gibt also Vektoren $c_{m+1}, \dots, c_n \in U$ und $\tilde{c}_{m+1}, \dots, \tilde{c}_{\tilde{n}} \in \tilde{U}$, so dass

$$\begin{array}{ll} \{b_1, \dots, b_m, c_{m+1}, \dots, c_n\} & \text{eine Basis von } U, \\ \{b_1, \dots, b_m, \tilde{c}_{m+1}, \dots, \tilde{c}_{\tilde{n}}\} & \text{eine Basis von } \tilde{U} \end{array}$$

ist. Dann ist bekanntlich

$$\{b_1, \dots, b_m, c_{m+1}, \dots, c_n, \tilde{c}_{m+1}, \dots, \tilde{c}_{\tilde{n}}\} \quad \text{eine Basis von } U + \tilde{U}$$

gegeben. Ist nun $D_{U+\tilde{U}}$ die Darstellungsmatrix von $\varphi|_{U+\tilde{U}}$ bezüglich dieser Basis, so erkennen wir anhand der Voraussetzungen $\varphi(U) \subseteq \tilde{U}$ und $\varphi(\tilde{U}) \subseteq U$, dass diese eine Blockzerlegung

$$D_{U+\tilde{U}} = \begin{pmatrix} D_{U \cap \tilde{U}} & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Blöcken auf der Diagonalen besitzt, wobei $D_{U \cap \tilde{U}}$ die Darstellungsmatrix von $\varphi|_{U \cap \tilde{U}}$ bezüglich der Basis $\{b_1, \dots, b_m\}$ bezeichne. Es folgt

$$\text{tr}(D_{U+\tilde{U}}) = \text{tr}(D_{U \cap \tilde{U}})$$

und somit das Lemma. □

Proposition 7.75. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $n \in \mathbb{N}$. Erfüllt dann ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{A}_n$ Eigenschaft (B), so gilt $\mathbb{P}({}^t\hat{T}_n)(P) \in W$ für alle $P \in W$ und

$$\mathrm{tr}(\hat{T}_n, W) = \mathrm{tr}(\hat{T}_n, \mathbb{P}_w(\mathbb{C})),$$

wobei die Ausdrücke auf beiden Seiten jeweils durch die Spur einer Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $P \mapsto \mathbb{P}({}^t\hat{T}_n)(P)$ bezüglich irgendeiner Basis des zugehörigen \mathbb{C} -Vektorraums W bzw. $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ gegeben seien.

Beweis. Wir setzen

$$\begin{aligned} E &:= \{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid (\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^tS))(P) = 0\}, \\ F &:= \{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid (\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^t(ST)) + \mathbb{P}({}^t(ST)^2))(P) = 0\}, \end{aligned}$$

so dass wir

$$E \cap F = W$$

erhalten. Da \hat{T}_n Eigenschaft (B) genügt, gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}({}^t\hat{T}_n)(P) &\in F \quad \text{für alle } P \in E, \\ \mathbb{P}({}^t\hat{T}_n)(P) &\in E \quad \text{für alle } P \in F; \end{aligned}$$

insbesondere bildet \hat{T}_n Elemente aus dem Durchschnitt $E \cap F = W$ wieder auf ein Element in W ab. Nach Lemma 7.74 folgt also die Proposition, wenn wir auch

$$E + F = \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \tag{7.44}$$

zeigen können. Hierfür betrachten wir für Polynome

$$P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_j X^j Y^{w-j}, \tilde{P}(X, Y) = \sum_{j=0}^w \tilde{a}_j X^j Y^{w-j} \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C})$$

die Zuordnung

$$B(P, \tilde{P}) := \sum_{j=0}^w (-1)^j \binom{w}{j}^{-1} a_j \tilde{a}_{w-j}.$$

Durch diese ist wegen der Geradheit von w offensichtlich eine symmetrische Bilinearform B auf $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ gegeben. Letztere ist nicht ausgeartet,

denn: Zum Beweis der Behauptung reicht es aus zu zeigen, dass die Determinante der Darstellungsmatrix von B bezüglich der Standardbasis $\{X^0 Y^{w-0}, X^1 Y^{w-1}, \dots, X^w Y^0\}$ nicht Null ist. Aufgrund von

$$B(X^\ell Y^{w-\ell}, X^j Y^{w-j}) = \begin{cases} (-1)^\ell \binom{w}{\ell}^{-1} & \text{für } w = \ell + j, \\ 0 & \text{für } w \neq \ell + j \end{cases} \tag{7.45}$$

ist dies aber offensichtlich der Fall. #

Aufgrund der Bilinearität von B und (7.45) lässt sich nun schnell

$$B((aX + bY)^w, (cX + dY)^w) = (ad - bc)^w \quad \text{für alle } a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (7.46)$$

herleiten. Tatsächlich ist dies eine alternative Charakterisierung von B ,

denn: Es reicht aus, wenn wir zeigen, dass auch $\{(X + Y)^w, (2X + Y)^w, \dots, ((w + 1)X + Y)^w\}$ eine Basis von $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ ist. Das liegt aber daran, dass nach dem binomischen Lehrsatz

$$(\ell X + Y)^w = \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} \ell^j \quad \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, w + 1\},$$

gilt, so dass die behauptete neue Basis aus der Standardbasis durch Multiplikation mit der VANDERMONDE-Matrix⁸²

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^w \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w + 1 & (w + 1)^2 & \dots & (w + 1)^w \end{pmatrix}$$

hervorgeht, deren Determinante bekanntlich nicht verschwindet. #

Aus (7.46) erhalten wir sofort die $\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ -Invarianzeigenschaft

$$B(\mathbb{P}({}^t A)(P), \mathbb{P}({}^t A)(\tilde{P})) = B(P, \tilde{P}) \quad \text{für alle } P, \tilde{P} \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}), A \in \overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}.$$

Für die Orthokomplemente bezüglich B gilt

$$\begin{aligned} E^\perp &:= \{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid B(P, \tilde{P}) = 0 \text{ für alle } \tilde{P} \in E\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}({}^t S))(P) = 0\}, \\ F^\perp &:= \{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid B(P, \tilde{P}) = 0 \text{ für alle } \tilde{P} \in F\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}({}^t(ST)))(P) = 0\}, \end{aligned}$$

denn: Aufgrund der $\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ -Invarianz von B ist zunächst offensichtlich jeweils die rechte Seite in der linken Seite enthalten. Die umgekehrten Inklusionen sehen wir nun jeweils vermöge eines Dimensionsarguments ein: Nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen berechnen sich die Dimensionen der Räume

$$\begin{aligned} \{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}({}^t S))(P) = 0\} &= \{(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^t S))(P) \mid P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C})\} \\ \text{bzw. } \{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}({}^t(ST)))(P) = 0\} &= \{(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}({}^t(ST)) \\ &\quad + \mathbb{P}({}^t(ST)^2))(P) \mid P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C})\} \end{aligned}$$

⁸²Aléxandre-Thóphile Vandermonde (1735-1796)

zu

$$\dim(\{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}({}^tS))(P) = 0\}) = \dim(\mathbb{P}_w(\mathbb{C})) - \dim(E)$$

$$\text{bzw. } \dim(\{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}({}^t(ST)))(P) = 0\}) = \dim(\mathbb{P}_w(\mathbb{C})) - \dim(F).$$

Da die Bilinearform B nicht ausgeartet ist, gilt zudem

$$\dim(E^\perp) = \dim(\mathbb{P}_w(\mathbb{C})) - \dim(E),$$

$$\dim(F^\perp) = \dim(\mathbb{P}_w(\mathbb{C})) - \dim(F)$$

und somit die Behauptung. #

Aufgrund von $E + F \subseteq \mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ und

$$\dim(\mathbb{P}_w(\mathbb{C})) = \dim(E + F) + \dim((E + F)^\perp)$$

folgt nun (7.44) und somit die Proposition, wenn wir zeigen können, dass

$$(E + F)^\perp = E^\perp + F^\perp$$

$$= \{P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \mid (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}({}^tS))(P) = 0 = (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}({}^t(ST)))(P)\}$$

der Nullvektorraum ist. Sei dafür $P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_j X^j Y^{w-j}$ ein beliebiges aber fest gewähltes Polynom aus $(E + F)^\perp$. Definitionsgemäß gilt für dieses

$$(\mathbb{P}(I_1) - \mathbb{P}({}^tS))(P) = 0 = (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}({}^t(ST)))(P),$$

also

$$P = \mathbb{P}({}^tS)(P) = \mathbb{P}({}^t(ST))(P)$$

und, da $\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ von S und ST erzeugt wird, schließlich

$$P = \mathbb{P}({}^tM)(P) \quad \text{für alle } M \in \overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}.$$

Wir müssen zeigen, dass letztere Eigenschaft bereits $P = 0$ impliziert. Tatsächlich gilt in Spezialisierung auf $M = T$ bzw. $M = S$ mit dem Binomischen Lehrsatz

$$P(X, Y) = \mathbb{P}({}^tT)(P)(X, Y) = P(X + Y, Y) = \sum_{j=0}^w \left(\sum_{\ell=j}^w \binom{\ell}{j} a_\ell \right) X^j Y^{w-j},$$

$$P(X, Y) = \mathbb{P}({}^tS)(P)(X, Y) = P(-Y, X) = \sum_{j=0}^w (-1)^j a_{w-j} X^j Y^{w-j}$$

und nach Koeffizientenvergleich

$$\sum_{\ell=j+1}^w \binom{\ell}{j} a_\ell = 0 \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\},$$

$$a_0 = a_w.$$

Iterativ folgt hieraus

$$\begin{aligned} a_j &= 0 && \text{für alle } j \in \{1, \dots, w\}, \\ a_0 &= a_w = 0, \end{aligned}$$

womit wir $P = 0$ und insgesamt die Proposition gezeigt haben. \square

Vermöge Proposition 7.75 reicht es für den Beweis der Spurformel aus, die Spurbildung auf dem Vektorraum $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ zu verstehen. Dies erfolgt über die GEGENBAUER-Polynome,⁸³ die wir dafür zunächst einführen:

Definition 7.76. Für jedes $w \in \mathbb{Z}_{>0}$ ist das **Gegenbauer-Polynom** P_w definiert durch die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{1 - tX + nX^2} = \sum_{w=0}^{\infty} P_w(t, n) X^w \quad \text{für alle } t, n \in \mathbb{R}.$$

Lemma 7.77. Für $w \in \mathbb{N}$ und $t, n \in \mathbb{R}$ lassen sich die Gegenbauer-Polynome rekursiv berechnen durch

$$\begin{aligned} P_0(t, n) &= 1, \\ P_1(t, n) &= t, \\ P_w(t, n) &= tP_{w-1}(t, n) - nP_{w-2}(t, n) \quad \text{für alle } w \geq 2. \end{aligned}$$

Beweis. Durch Umstellen der Potenzreihenentwicklung aus Definition 7.76 ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{w=0}^{\infty} P_w(t, n) X^w \right) \cdot (1 - tX + nX^2) \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} P_w(t, n) X^w - \sum_{w=1}^{\infty} tP_{w-1}(t, n) X^w + \sum_{w=2}^{\infty} nP_{w-2}(t, n) X^w \\ &= P_0(t, n) + (P_1(t, n) - tP_0(t, n)) \cdot X + \sum_{w=2}^{\infty} (P_w(t, n) - tP_{w-1}(t, n) + nP_{w-2}(t, n)) \cdot X^w \end{aligned}$$

und nach Koeffizientenvergleich somit die behauptete Rekursionsformel. \square

Bemerkung 7.78. Für $w \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{R}$ erhält man durch iteriertes Anwenden der Rekursionsformel aus Lemma 7.77 die Paritätseigenschaft

$$P_w(-t, n) = \begin{cases} P_w(t, n) & \text{für gerades } w, \\ -P_w(t, n) & \text{für ungerades } w \end{cases} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wir werden diese Eigenschaft im Beweis der Eichler-Selberg'schen Spurformel 7.80 verwenden.

⁸³Leopold Bernhard Gegenbauer (1849-1903)

Die für uns zentrale Eigenschaft der Gegenbauer-Polynome ist, dass sich über diese die Spur der Aktion einer Matrix $M \in \overline{\mathbb{M}}$ auf dem Raum $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ beschreiben lässt:⁸⁴

Proposition 7.79. Für $w \in \mathbb{N}$ gerade gilt

$$\mathrm{tr}(M, \mathbb{P}_w(\mathbb{C})) = P_w(\mathrm{tr}(M), \det(M)) \quad \text{für alle } M \in \overline{\mathbb{M}},$$

wobei der Ausdruck auf der linken Seite durch die Spur einer Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $P \mapsto \mathbb{P}({}^t M)(P)$ bezüglich irgendeiner Basis des \mathbb{C} -Vektorraums $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ gegeben sei.

Beweis. Seien für diesen Beweis $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$ sowie $\{X^w, X^{w-1}Y, \dots, XY^{w-1}, Y^w\}$ als Basis von $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ fest gewählt. Weiter schreiben wir $D^{(w)} = (d_{\ell,j}^{(w)})_{\ell,j=0}^w$ für die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\mathbb{P}_w(\mathbb{C}) \ni P \mapsto \mathbb{P}({}^t M)(P)$, so dass

$$(aX + bY)^{w-j}(cX + dY)^j = \sum_{\ell=0}^w d_{\ell,j}^{(w)} X^{w-\ell} Y^\ell \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\}$$

gilt. Wir beweisen die Proposition nun durch eine Induktion nach w anhand der Rekursionsformel 7.77. Als Induktionsanfang überprüfen wir dafür zunächst die Fälle $w = 0$, $w = 1$ sowie $w = 2$. Für diese gilt

$$\begin{aligned} P_0(\mathrm{tr}(M), \det(M)) &= 1 = \mathrm{tr}(M, \mathbb{P}_0(\mathbb{C})), \\ P_1(\mathrm{tr}(M), \det(M)) &= a + d = \mathrm{tr}(M, \mathbb{P}_1(\mathbb{C})), \\ P_2(\mathrm{tr}(M), \det(M)) &= (a + d)^2 - (ad - bc) = a^2 + (ad + bc) + d^2 = \mathrm{tr}(M, \mathbb{P}_2(\mathbb{C})). \end{aligned}$$

Für den Induktionsschritt sei nun $w \geq 3$ und die Behauptung für $w - 1$ und $w - 2$ bereits gezeigt. Nach Lemma 7.77 gilt nun

$$\begin{aligned} P_w(\mathrm{tr}(M), \det(M)) &= \mathrm{tr}(M)P_{w-1}(\mathrm{tr}(M), \det(M)) - \det(M)P_{w-2}(\mathrm{tr}(M), \det(M)) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \mathrm{tr}(M) \mathrm{tr}(M, \mathbb{P}_{w-1}(\mathbb{C})) - \det(M) \mathrm{tr}(M, \mathbb{P}_{w-2}(\mathbb{C})), \end{aligned}$$

so dass wir

$$\mathrm{tr}(M, \mathbb{P}_w(\mathbb{C})) = (a + d) \mathrm{tr}(M, \mathbb{P}_{w-1}(\mathbb{C})) - (ad - bc) \mathrm{tr}(M, \mathbb{P}_{w-2}(\mathbb{C}))$$

zeigen müssen. Hierfür gilt es, die Einträge der Darstellungsmatrizen $D^{(w)}$, $D^{(w-1)}$ und $D^{(w-2)}$ miteinander in Verbindung zu bringen. Offensichtlich gilt zunächst für die Diagonaleinträge

$$\begin{aligned} d_{00}^{(w)} &= a^w, \\ d_{\ell\ell}^{(w)} &= ad_{\ell\ell}^{(w-1)} + bd_{\ell-1,\ell}^{(w-1)} && \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, w-1\}, \\ d_{ww}^{(w)} &= dd_{w-1,w-1}^{(w-1)}, \end{aligned}$$

⁸⁴Tatsächlich lässt sich Proposition 7.79 problemlos auf Matrizen $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und beliebiges $w \in \mathbb{N}_0$ verallgemeinern, wenn man zuvor die Polynomdarstellung \mathbb{P} für solche Matrizen definiert. Das ist möglich, auch wenn dann eine Identifikation modulo Vorzeichen nicht mehr wohldefiniert ist.

$$\begin{aligned}
d_{00}^{(w-1)} &= a^{w-1}, \\
d_{\ell\ell}^{(w-1)} &= ad_{\ell\ell}^{(w-2)} + bd_{\ell-1,\ell}^{(w-2)} \quad \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, w-2\}, \\
d_{00}^{(w-2)} &= a^{w-2}
\end{aligned}$$

und die Nebendiagonaleinträge

$$d_{\ell-1,\ell}^{(w-1)} = cd_{\ell-1,\ell-1}^{(w-2)} + dd_{\ell-2,\ell-1}^{(w-2)} \quad \text{für alle } \ell \in \{2, \dots, w-1\},$$

Hieraus lassen sich zudem die speziellen Identitäten

$$\begin{aligned}
d_{11}^{(w)} &= da^{w-1} + (w-1)bca^{w-2}, \\
d_{11}^{(w-1)} &= da^{w-2} + (w-2)bca^{w-3}
\end{aligned}$$

gewinnen, die wir im Folgenden verwenden werden. Wir zeigen nun die behauptete Aussage, indem wir anhand all dieser Identitäten in Äquivalenzschritten aus einer offensichtlich wahren Aussage herleiten:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 \\
\iff 0 &= -(da^{w-1} + (w-1)bca^{w-2}) + da^{w-1} + a(da^{w-2} + (w-2)bca^{w-3}) \\
&\quad - ada^{w-2} + bca^{w-2} \\
\iff ad_{w-1,w-1}^{(w-1)} &= -d_{11}^{(w)} + ad_{w-1,w-1}^{(w-1)} + dd_{00}^{(w-1)} + ad_{11}^{(w-1)} - add_{00}^{(w-2)} + bcd_{00}^{(w-2)} \\
\iff \sum_{\ell=2}^{w-1} (ad_{\ell\ell}^{(w-1)} + b(cd_{\ell-1,\ell-1}^{(w-2)} + dd_{\ell-2,\ell-1}^{(w-2)})) &= -d_{11}^{(w)} + ad_{w-1,w-1}^{(w-1)} + dd_{00}^{(w-1)} + a \cdot \sum_{\ell=1}^{w-2} d_{\ell\ell}^{(w-1)} \\
&\quad + d \cdot \sum_{\ell=1}^{w-2} (ad_{\ell\ell}^{(w-2)} + bd_{\ell-1,\ell}^{(w-2)}) \\
&\quad - (ad - bc) \cdot \sum_{\ell=0}^{w-2} d_{\ell\ell}^{(w-2)} \\
\iff \sum_{\ell=1}^{w-1} d_{\ell\ell}^{(w)} &= ad_{w-1,w-1}^{(w-1)} + dd_{00}^{(w-1)} + (a+d) \cdot \sum_{\ell=1}^{w-2} d_{\ell\ell}^{(w-1)} - (ad-bc) \cdot \sum_{\ell=0}^{w-2} d_{\ell\ell}^{(w-2)} \\
\iff \sum_{\ell=0}^w d_{\ell\ell}^{(w)} &= (a+d) \cdot \sum_{\ell=0}^{w-1} d_{\ell\ell}^{(w-1)} - (ad-bc) \cdot \sum_{\ell=0}^{w-2} d_{\ell\ell}^{(w-2)} \\
\iff \operatorname{tr}(M, \mathbb{P}_w(\mathbb{C})) &= \operatorname{tr}(M) \operatorname{tr}(M, \mathbb{P}_{w-1}(\mathbb{C})) - \det(M) \operatorname{tr}(M, \mathbb{P}_{w-2}(\mathbb{C})).
\end{aligned}$$

□

Satz 7.80 (Eichler-Selberg-Spurformel). Für $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k = w + 2$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\operatorname{tr}(T_n, M_k) + \operatorname{tr}(T_n, S_k) = - \sum_{t \in \mathbb{Z}} P_w(t, n) \cdot H(4n - t^2).$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Summe auf der rechten Seite aufgrund von Definition 7.69 endlich ist. Nach Korollar 7.49 existiert ein Element $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$, das die Eigenschaften (A) und (B) erfüllt. Nach Satz 7.52 und Proposition 7.75 gilt für dieses

$$\mathrm{tr}(T_n, M_k) + \mathrm{tr}(T_n, S_k) = \mathrm{tr}(\hat{T}_n, W) = \mathrm{tr}(\hat{T}_n, P_w(\mathbb{C})).$$

Nach dem Satz von Popa-Zagier 7.60 besitzt \hat{T}_n auch Eigenschaft (C). Hiermit und nach Proposition 7.79 sowie Bemerkung 7.78 gilt daher

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T_n, M_k) + \mathrm{tr}(T_n, S_k) &= \sum_{[M] \subseteq \mathbb{M}^n} \mathrm{tr}([M], P_w(\mathbb{C})) \cdot w([M]) \\ &= \sum_{[M] \subseteq \mathbb{M}^n} P_w(|\mathrm{tr}([M])|, n) \cdot w([M]). \end{aligned}$$

Nach (7.40) folgt schließlich

$$\mathrm{tr}(T_n, M_k) + \mathrm{tr}(T_n, S_k) = - \sum_{t \in \mathbb{Z}} P_w(t, n) \cdot H(4n - t^2)$$

und somit die Spurformel. □

In der Literatur findet sich oft eine andere Formulierung der Eichler-Selberg'schen Spurformel, die sich aber leicht aus Satz 7.80 herleiten lässt:

Korollar 7.81. Für $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k = w + 2$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{tr}(T_n, S_k) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{t \in \mathbb{Z}} P_w(t, n) \cdot H(4n - t^2) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{0 < d|n} d^{w+1}.$$

Beweis. Nach Beispiel 4.28 gilt bekanntlich

$$E_k|_k T_n = \sigma_{w+1}(n) \cdot E_k.$$

Mit $M_k = \mathbb{C} \cdot E_k \oplus S_k$ gilt daher

$$\mathrm{tr}(T_n, M_k) - \mathrm{tr}(T_n, S_k) = \sigma_{w+1}(n)$$

und das Korollar folgt unmittelbar mit der Spurformel 7.80. □

7.9 Übungsaufgaben

Aufgabe 7.1. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Zeigen Sie, dass dann die Ableitung des Binomialkoeffizienten, wie in (7.6) interpretiert als Funktion

$$\binom{w}{s} := \frac{\Gamma(w+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(w-s+1)} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C},$$

an den Stellen $s = -1$ bzw. $s = w + 1$ den Wert $\frac{1}{w+1}$ bzw. $-\frac{1}{w+1}$ annimmt.

Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis aus, dass die Gammafunktion Γ in \mathbb{C} keine Nullstellen hat.

Aufgabe 7.2. Geben Sie explizit ein Element $\sum_{M \in \overline{\mathbb{M}^2}} a_M M \in \mathfrak{R}_2$ an, das die Eigenschaften (A) und (B) erfüllt.

Aufgabe 7.3. Seien $k \in \mathbb{N}$ gerade, n eine natürliche Zahl und $f \in S_k$ eine Hecke-Eigenform mit n -tem Hecke-Eigenwert $\lambda_n(f)$. Zeigen Sie vermöge Satz 7.52 die Gültigkeit der Formel

$$\lambda_n(f) = \frac{1}{r_0(f)} \cdot \left(\mathbb{P}({}^t \hat{T}_n)(r(X, Y; f)^+) \right) (1, 0),$$

wobei $\hat{T}_n \in \mathfrak{R}_n$ ein beliebiges Element mit Eigenschaft (A) ist. Diese erlaubt ein effektives Berechnen der Hecke-Eigenwerte. Bestimmen Sie mit dieser Methode beispielhaft für $f = \Delta \in S_{12}$ die konkreten Werte $\tau(1), \tau(2), \tau(3)$ der Ramanujan- τ -Funktion.

Aufgabe 7.4. Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade und $k = w + 2$. Wir geben in dieser Aufgabe vermöge der Eichler-Selberg-Spurformel 7.81 für $n = 1$ einen neuen Beweis der Dimensionsformel 3.11 für die \mathbb{C} -Vektorräume S_k an. Zeigen Sie hierfür die folgenden Teilaufgaben:

- (a) Es werden nur endlich viele Kronecker-Hurwitz-Klassenzahlen zur Berechnung von $\dim S_k$ benötigt, deren Werte in Beispiel 7.71 angegeben sind. Beschreiben Sie $\dim S_k$ so als rationale Linearkombination von Werten von Gegenbauer-Polynomen.
- (b) Das Gegenbauer-Polynom $P_w(t, n)$ erfüllt im Fall $4n - t^2 \geq 0$ die geschlossene Formel

$$P_w(t, n) = \frac{a^{w+1} - \bar{a}^{w+1}}{a - \bar{a}} \quad \text{mit } a := \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{4n - t^2}}{2}i \in \mathbb{C},$$

wobei wir dies für $a \in \mathbb{R}$ als $a^w + a^{w-1}\bar{a} + \dots + a\bar{a}^{w-1} + \bar{a}^w$ interpretieren. Bestimmen Sie so die konkreten Werte $P_w(0, 1), P_w(1, 1), P_w(2, 1)$.

- (c) Folgern Sie aus dem Bisherigen die Dimensionsformel.

Hecke-Theorie zu Kongruenzuntergruppen

In Kapitel 4 hat uns die Hecke-Theorie für die volle Modulgruppe ein mächtiges Werkzeug beschert, das auf Modulformen bezüglich Kongruenzuntergruppen zu übertragen sich geradezu aufdrängt. Tatsächlich lassen sich im Wesentlichen analog zum Spezialfall der vollen Modulgruppe auch in dieser Allgemeinheit Hecke-Operatoren konstruieren. In den Abschnitten 8.1, 8.2 und 8.3 führen wir dies für eine Klasse von Kongruenzuntergruppen durch, die die wichtigen Familien $\Gamma(N)$, $\Gamma_1(N)$ und $\Gamma_0(N)$ für $N \in \mathbb{N}$ umfasst. Es stellt sich dabei allerdings heraus, dass sich eines der zentralen Resultate der Hecke-Theorie – nämlich die in Satz 4.32 gezeigte Existenz einer Basis aus gemeinsamen Eigenformen aller Hecke-Operatoren für den Vektorraum S_k der Spitzenformen beliebigen Gewichts k – nicht in den Fall der von uns untersuchten Kongruenzuntergruppen übertragen lässt. Im Jahr 1970 fanden ATKIN und LEHNER⁸⁵ für die Gruppen $\Gamma_0(N)$ eine Lösung für dieses Problem, indem sie erkannten, dass ein Teilraum von $S_k(\Gamma_0(N))$ sehr wohl eine Basis aus Hecke-Eigenformen besitzt und dass sich das Orthokomplement dieses Teilraums durch Formen aus den Räumen $S_k(\Gamma_0(d))$ mit $d \mid N$ erklären lässt. Auf diese Weise können sie schließlich doch alle Elemente von $S_k(\Gamma_0(N))$ über Hecke-Eigenformen beschreiben. In den abschließenden Abschnitten dieses Kapitels folgen wir der gut lesbaren Originalarbeit von Atkin und Lehner, um uns dieses Resultat herzuleiten. In der Literatur finden sich entsprechende Resultate auch für andere Familien von Kongruenzuntergruppen.

8.1 Hecke-Paare

Um die Hecke-Algebra zu einer Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ konstruieren zu können, benötigen wir ein geeignetes Hecke-Paar. Im Gegensatz zum Vorgehen in Beispiel 4.4 weisen wir hierbei die Endlichkeit der Anzahl der Linksnebenklassen in den jeweiligen Doppelnebenklassen nicht direkt nach, sondern leiten sie uns aus dem bereits gezeigten Spezialfall der vollen Modulgruppe her. Dafür benötigen wir zunächst ein wenig Gruppentheorie:

⁸⁵Arthur Oliver Lonsdale Atkin (1925-2008) und Joseph Lehner (1912-2013)

Definition 8.1. Zwei Untergruppen R, R' einer Gruppe S heißen **kommensurabel** – in Zeichen: $R \sim_S R'$ – falls ihr Durchschnitt $R \cap R'$ sowohl in R als auch in R' endlichen Index hat.

Wie man leicht überprüft, ist Kommensurabilität eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Untergruppen von S . Weiter gilt:

Lemma 8.2. *Der Kommensurator*

$$\text{Kom}(R, S) := \{s \in S : s^{-1}Rs \sim_S R\}$$

von R in S ist eine Untergruppe von S , die R enthält.

Beweis. Die Inklusion $R \subseteq \text{Kom}(R, S)$ ist trivial. Sind weiter allgemein R_1 und R_2 zwei kommensurable Untergruppen von S und $s \in S$, so gilt offensichtlich

$$R_1 \sim_S R_2 \implies sR_1s^{-1} \sim_S sR_2s^{-1}. \quad (8.1)$$

Wir nutzen diesen Zusammenhang, um zu beweisen, dass $\text{Kom}(R, S)$ eine Untergruppe von S ist. Ist nämlich $s \in \text{Kom}(R, S)$, so gilt definitionsgemäß $s^{-1}Rs \sim_S R$. Wenden wir hierauf (8.1) an, so erhalten wir

$$(s^{-1})^{-1}Rs^{-1} = sRs^{-1} \sim_S s^{-1}(sRs^{-1})s = R$$

und also $s^{-1} \in \text{Kom}(R, S)$. Sind weiter $s_1, s_2 \in \text{Kom}(R, S)$, so gilt

$$(s_1s_2)^{-1}R(s_1s_2) = s_2^{-1}(s_1^{-1}Rs_1)s_2 \sim_S s_2^{-1}Rs_2 \sim_S R$$

und somit $s_1s_2 \in \text{Kom}(R, S)$. Damit ist alles gezeigt. \square

Lemma 8.3. *Seien R, R' kommensurable Untergruppen einer Gruppe S , so dass (R, S) ein Hecke-Paar ist. Dann ist auch (R', S) ein Hecke-Paar.*

Beweis. Sei R zunächst eine beliebige Untergruppe einer Gruppe S . Für ein $s \in S$ ist dann die Anzahl der R -Linksnebenklassen in RsR durch den Index $[R : R \cap s^{-1}Rs]$ gegeben,

denn: Für eine gegebene Zerlegung

$$R = \bigsqcup_{r \in (R \cap s^{-1}Rs) \setminus R} (R \cap s^{-1}Rs)r$$

von R in die Linksnebenklassen modulo $R \cap s^{-1}Rs$ gilt trivialerweise die Inklusion

$$RsR \supseteq \bigcup_{r \in (R \cap s^{-1}Rs) \setminus R} Rsr.$$

Sei nun umgekehrt $s' = r_1sr_2 \in RsR$. Dann ist r_2 bereits in einer Linksnebenklasse $(R \cap s^{-1}Rs)r$ enthalten, es gilt also $r_2 = ar$ mit $a \in R$ und $sas^{-1} \in R$. Somit folgt

$$s' = r_1sr_2 = r_1sar = r_1sas^{-1}sr \in Rsr.$$

Es folgt auch die umgekehrte Inklusion und insgesamt also die Identität

$$RsR = \bigcup_{r \in (R \cap s^{-1}Rs) \setminus R} Rsr.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass die Vereinigung auf der rechten Seite disjunkt ist. Dem ist aber so, denn für zwei R -Linksnebenklassen Rsr und Rsr' mit nichtleeren Durchschnitt gibt es $r_1, r_2 \in R$ mit $r_1sr = r_2sr'$ und also mit $s^{-1}r_2^{-1}r_1s = r'r^{-1} \in (R \cap s^{-1}Rs)$, so dass bereits $Rsr = Rsr'$ gilt. #

Aus dieser Überlegung folgt

$$\begin{aligned} \text{Kom}(R, S) &\stackrel{8.2}{=} \{s \in S : [R : R \cap s^{-1}Rs], [s^{-1}Rs : R \cap s^{-1}Rs] < \infty\} \\ &= \{s \in S : [R : R \cap s^{-1}Rs], [R : R \cap (s^{-1})^{-1}R(s^{-1})] < \infty\} \\ &= \{s \in S : RsR \text{ sowie } Rs^{-1}R \text{ bestehen jeweils aus nur} \\ &\quad \text{endlich vielen } R\text{-Linksnebenklassen}\}. \end{aligned}$$

Sei nun speziell (R, S) ein Hecke-Paar. Dann gilt sogar

$$\text{Kom}(R, S) = S. \tag{8.2}$$

Sei nun weiter R' eine zu R kommensurable Untergruppe von S , gelte also $R' \sim_S R$. Dann ergibt sich aus dem Bisherigen

$$s^{-1}R's \stackrel{(8.1)}{\sim_S} s^{-1}Rs \stackrel{(8.2)}{\sim_S} R \sim_S R' \quad \text{für alle } s \in S$$

und somit

$$\text{Kom}(R', S) = S.$$

Nach unseren obigen Überlegungen ist dies gleichbedeutend dazu, dass jede Doppelnebenklasse $R'sR'$ nur aus endlich vielen R' -Linksnebenklassen besteht, dass also (R', S) ein Hecke-Paar ist. Insgesamt haben wir das Lemma gezeigt. \square

In unserer konkreten Situation erhalten wir nun:

Proposition 8.4. *Für jede Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist $(\Gamma, \text{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$ ein Hecke-Paar.*

Beweis. Offensichtlich sind Γ und $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ als Untergruppen der Gruppe $\text{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ kommensurabel, denn der Durchschnitt $\Gamma \cap \text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma$ hat endlichen Index in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ nach Korollar 1.33 und in Γ selbst trivialerweise. Da $(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \text{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$ nach Beispiel 4.4 ein Hecke-Paar ist, folgt die Proposition unmittelbar mit Lemma 8.3. \square

In Abschnitt 4.2 hatten wir für die Konstruktion der Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe nicht das Paar $(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \text{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$ sondern das eingeschränkte Paar $(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ herangezogen, weil wir so keine wichtigen Informationen verloren haben und nur noch mit ganzzahligen Matrizen umgehen mussten. Im Kontext allgemeiner Kongruenzuntergruppen wollen wir ähnlich vorgehen und definieren:

Definition 8.5. Seien N eine natürliche Zahl und $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Dann setzen wir

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(N) &:= \{M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det(M) > 0, \mathrm{ggT}(\det(M), N) = 1\}, \\ \mathbb{M}(N, \Gamma) &:= \{M \in \mathbb{M}(N) \mid \pi_N(\Gamma \cdot M) = \pi_N(M \cdot \Gamma)\},\end{aligned}$$

wobei π_N die kanonische Projektion modulo N bezeichne.

Offensichtlich sind die in Definition 8.5 eingeführten Mengen multiplikative Monoide und es gelten die Spezialfälle

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(1) &= \mathbb{M}, \\ \mathbb{M}(N, \Gamma(N)) &= \mathbb{M}(N) \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Mit der nun eingeführten Notation können wir ein leichtes Korollar aus Proposition 8.4 herleiten:

Korollar 8.6. Seien N eine natürliche Zahl und $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Dann ist $(\Gamma, \mathbb{M}(N, \Gamma))$ ein Hecke-Paar.

Beweis. Das Korollar folgt unmittelbar aus Proposition 8.4, da $\mathbb{M}(N, \Gamma)$ ein Untermonoid von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ ist, das Γ enthält. \square

8.2 Hecke-Algebren

Ausgehend vom in Abschnitt 8.1 nachgewiesenen Hecke-Paar $(\Gamma, \mathbb{M}(N, \Gamma))$ konstruieren wir in diesem Abschnitt Hecke-Algebren für die Kongruenzuntergruppe $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und setzen diese schrittweise in eine immer engere Beziehung zur Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe, um schließlich deren Struktur im Wesentlichen übernehmen zu können. Im Laufe des Abschnitts beschränken wir uns dabei auf das Studium einer Unterklasse von Kongruenzuntergruppen modulo N , welche die Standardgruppen $\Gamma(N)$, $\Gamma_1(N)$ und $\Gamma_0(N)$ umfasst.

Unser erstes Ziel ist es nun, in Proposition 8.9 einen \mathbb{Z} -Algebrenhomomorphismus von der zum Hecke-Paar $(\Gamma, \mathbb{M}(N, \Gamma))$ gehörigen Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma, \mathbb{M}(N, \Gamma(N)))$ in die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ der vollen Modulgruppe herzuleiten. Dafür zeigen wir zunächst einige vorbereitende Lemmata:

Lemma 8.7. Seien N, \tilde{N} natürliche Zahlen und $M \in \mathbb{M}$. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

- (a) $\Gamma(\mathrm{ggT}(N, \tilde{N})) = \Gamma(N) \cdot \Gamma(\tilde{N})$.
- (b) $\Gamma(\det(M)N) \subseteq M^{-1} \cdot \Gamma(N) \cdot M \cap M \cdot \Gamma(N) \cdot M^{-1}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Sei dafür $M \in \Gamma(\mathrm{ggT}(N, \tilde{N}))$ gegeben. Nach dem Chinesischen Restsatz gibt es dann ein $C \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ mit

$$C \equiv I_2 \pmod{(N)} \quad \text{und} \quad C \equiv M \pmod{(\tilde{N})} \tag{8.3}$$

und insbesondere mit

$$\det(C) \equiv 1 \pmod{(\text{kgV}(N, \tilde{N}))}.$$

Nach Proposition 1.30 gibt es daher ein $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$C \equiv A \pmod{(\text{kgV}(N, \tilde{N}))}$$

und mit den Kongruenzen (8.3) folgt

$$A \in \Gamma(N) \quad \text{und} \quad A^{-1}M \in \Gamma(\tilde{N}), \quad \text{also} \quad M = AA^{-1}M \in \Gamma(N) \cdot \Gamma(\tilde{N}).$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass die linke Seite von Behauptung (a) in der rechten Seite enthalten ist. Die Behauptung folgt, da die andere Inklusion trivial ist.

Zum Beweis von Behauptung (b) betrachten wir die Adjunkte $M^\# = \det(M)M^{-1} \in \mathbb{M}$ von M . Für ein beliebiges $A \in \Gamma(\det(M)N)$ gilt dann

$$M^\#AM \equiv M^\#M = \det(M)I_2 \pmod{(\det(M)N)}$$

und also

$$M^{-1}AM \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \quad \text{und} \quad M^{-1}AM \equiv I_2 \pmod{(N)}.$$

Mit $\det(A) = 1$ folgt weiter $\det(M^{-1}AM) = 1$ und also $M^{-1}AM \in \Gamma(N)$ beziehungsweise $A \in M \cdot \Gamma(N) \cdot M^{-1}$. Ganz analog zeigt man auch $A \in M^{-1} \cdot \Gamma(N) \cdot M$ und Behauptung (b) folgt. \square

Lemma 8.8. *Seien N eine natürliche Zahl, $M \in \mathbb{M}(N)$ und $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Dann gilt:*

$$(a) \quad \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \Gamma = \Gamma \cdot M \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Ist sogar $M \in \mathbb{M}(N, \Gamma)$, so gelten auch die folgenden Aussagen:

$$(b) \quad \Gamma \cdot M \cdot \Gamma = \{\tilde{M} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \pi_N(\tilde{M}) \in \pi_N(\Gamma \cdot M)\}.$$

$$(c) \quad \Gamma \cdot M \cdot \Gamma = \Gamma \cdot M \cdot \Gamma(N) = \Gamma(N) \cdot M \cdot \Gamma.$$

$$(d) \quad \text{Ist } \Gamma \cdot M \cdot \Gamma = \bigsqcup_j \Gamma \cdot M_j \text{ eine disjunkte Zerlegung in } \Gamma\text{-Linksnebenklassen, so ist } \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_j \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \text{ eine disjunkte Zerlegung in } \text{SL}_2(\mathbb{Z})\text{-Linksnebenklassen.}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Nach Definition von $\mathbb{M}(N)$ und Lemma 8.7 gilt

$$\begin{aligned} \text{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \Gamma(\text{ggT}(\det(M), N)) \\ &\stackrel{8.7(a)}{=} \Gamma(\det(M)) \cdot \Gamma(N) \\ &\stackrel{8.7(b)}{\subseteq} M^{-1} \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \Gamma(N) \end{aligned}$$

und also

$$M^{-1} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq M^{-1} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \Gamma(N)$$

sowie

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \Gamma(N) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \Gamma. \quad (8.4)$$

Da die umgekehrte Inklusion trivial ist, folgt die erste Identität in Behauptung (a). Die zweite Gleichheit zeigt man komplett analog.

Um Behauptung (b) einzusehen, betrachten wir ein $\tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\pi_N(\tilde{M}) \in \pi_N(\Gamma \cdot M)$. Zu diesem gibt es ein $A \in \Gamma$ mit

$$\tilde{M} \equiv AM \pmod{(N)}.$$

Andererseits gilt nach (8.4) auch $\tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \Gamma(N)$, so dass es ein $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und ein $C \in \Gamma(N)$ mit

$$\tilde{M} = BMC$$

gibt. Im Vergleich ergibt sich $A \equiv B \pmod{(N)}$ und wegen $A \in \Gamma$ sowie $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ folgt

$$\tilde{M} \in \Gamma \cdot M \cdot \Gamma(N) \subseteq \Gamma \cdot M \cdot \Gamma.$$

Das zeigt die eine Inklusion von Behauptung (b). Gilt umgekehrt $\tilde{M} \in \Gamma \cdot M \cdot \Gamma$, so auch $\tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und mit $M \in \mathbb{M}(N, \Gamma)$ folgt zusätzlich $\pi_N(\tilde{M}) \in \pi_N(\Gamma \cdot M)$. Das zeigt die andere Inklusion und somit insgesamt Behauptung (b).

In der letzten Argumentation haben wir eingesehen, dass für ein $M \in \mathbb{M}(N, \Gamma)$ die Inklusion $\Gamma \cdot M \cdot \Gamma \subseteq \Gamma \cdot M \cdot \Gamma(N)$ gilt. Da die umgekehrte Inklusion trivial ist, erhalten wir so die erste Identität in Behauptung (c). Die zweite Gleichheit zeigt man komplett analog.

Schließlich zeigen wir Behauptung (d). Sei dafür $M \in \mathbb{M}(N, \Gamma)$ und

$$\Gamma \cdot M \cdot \Gamma = \bigsqcup_j \Gamma \cdot M_j \quad (8.5)$$

eine disjunkte Zerlegung in Γ -Linksnebenklassen. Dann gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \stackrel{(a)}{=} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \Gamma = \bigcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j$$

und es verbleibt, die Disjunktheit dieser Zerlegung zu zeigen. Gelte also $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_{j_1} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_{j_2}$ für geeignete j_1, j_2 . Dann gibt es ein $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$M_{j_1} = BM_{j_2}.$$

Wie im Beweis von Behauptung (b) finden wir zudem ein $A \in \Gamma$ mit

$$M_{j_1} \equiv AM_{j_2} \pmod{(N)}.$$

Wieder folgt $A \equiv B \pmod{(N)}$ und wegen $A \in \Gamma$ sowie $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ erhalten wir $B \in \Gamma$ und also $\Gamma \cdot M_{j_1} = \Gamma \cdot M_{j_2}$. Behauptung (d) folgt nun mit der vorausgesetzten Disjunktheit in (8.5). \square

Wir können nun zeigen:

Proposition 8.9. *Seien N eine natürliche Zahl, $M \in \mathbb{M}(N)$ und $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Dann definiert die Zuordnung*

$$\Gamma \cdot M \cdot \Gamma \mapsto \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{für } M \in \mathbb{M}(N, \Gamma)$$

über lineare Fortsetzung einen \mathbb{Z} -Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{H}(\Gamma, \mathbb{M}(N, \Gamma))$ in die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ der vollen Modulgruppe.

Beweis. Offensichtlich reicht es zum Beweis der Proposition aus, die Verträglichkeit der jeweiligen multiplikativen Strukturen zu überprüfen. Betrachten wir zunächst die Multiplikation auf $\mathcal{H}(\Gamma, \mathbb{M}(N, \Gamma))$ und schreiben wir für $M, \tilde{M} \in \mathbb{M}(N, \Gamma)$

$$\begin{aligned} & (\Gamma \cdot M \cdot \Gamma) \cdot (\Gamma \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma) \\ &= \sum_L a_{\Gamma, L} (\Gamma \cdot L \cdot \Gamma) \end{aligned} \quad \text{mit geeigneten } L \in \mathbb{M}(N, \Gamma) \text{ und } a_{\Gamma, L} \in \mathbb{Z}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \\ &= \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &\stackrel{8.8(a)}{=} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma \\ &\stackrel{8.8(a)}{=} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \Gamma \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma \\ &= \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot (\Gamma \cdot M \cdot \Gamma) \cdot (\Gamma \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma) \\ &= \bigcup_L (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot L \cdot \Gamma) \\ &\stackrel{8.8(a)}{=} \bigcup_L (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot L \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \end{aligned} \quad \text{mit denselben } L \in \mathbb{M}(N, \Gamma).$$

Aufgrund von $M, \tilde{M} \in \mathbb{M}(N, \Gamma)$ gilt zudem

$$\pi_N(\Gamma \cdot L) = \pi_N(\Gamma \cdot M \tilde{M}) \quad \text{für alle } L \in \Gamma \cdot M \cdot \Gamma \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma$$

und mit Lemma 8.8(b) folgt

$$\Gamma \cdot L \cdot \Gamma = \{ \tilde{L} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot L \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \pi_N(\tilde{L}) \in \pi_N(\Gamma \cdot M \tilde{M}) \},$$

so dass die Zuordnung $\Gamma \cdot L \cdot \Gamma \mapsto \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot L \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ der Doppelnebenklassen für alle $L \in \Gamma \cdot M \cdot \Gamma \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma$ bijektiv ist. Schreiben wir nun in $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ das Produkt

$$\begin{aligned} & (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \\ &= \sum_L a_L (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot L \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \end{aligned} \quad \text{mit geeigneten } a_L \in \mathbb{Z},$$

so genügt es zum Beweis der Proposition somit zu zeigen, dass die Koeffizienten $a_{\Gamma, L}$ und a_L für alle $L \in \Gamma \cdot M \cdot \Gamma \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma$ übereinstimmen. Um diese Koeffizienten näher zu untersuchen, betrachten wir disjunkte Zerlegungen

$$\begin{aligned}\Gamma \cdot M \cdot \Gamma &= \bigsqcup_j \Gamma \cdot M_j, \\ \Gamma \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma &= \bigsqcup_k \Gamma \cdot \tilde{M}_k\end{aligned}$$

in Γ -Linksnebenklassen. Diese übersetzen sich nach Lemma 8.8 (d) in disjunkte Zerlegungen

$$\begin{aligned}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j, \\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \bigsqcup_k \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M}_k\end{aligned}$$

in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Nebenklassen. Wir können die Koeffizienten nun auslesen zu

$$\begin{aligned}a_{\Gamma, L} &= |\{(j, k) : \Gamma \cdot M_j \tilde{M}_k = \Gamma \cdot L\}|, \\ a_L &= |\{(j, k) : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \tilde{M}_k = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot L\}| \end{aligned}$$

und zum Beweis der Proposition genügt es zu zeigen, dass für alle j, k und L die Äquivalenz

$$\Gamma \cdot M_j \tilde{M}_k = \Gamma \cdot L \iff \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \tilde{M}_k = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot L$$

gilt. Dem ist aber so,

denn: Dass die linke Seite die rechte Seite impliziert, ist trivial. Gelte nun umgekehrt $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \tilde{M}_k = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot L$. Dann gibt es ein $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$L = B M_j \tilde{M}_k.$$

Wegen $\pi_N(L) \in \pi_N(\Gamma \cdot M_j \tilde{M}_k)$ gibt es zudem ein $A \in \Gamma$ mit

$$L \equiv A M_j \tilde{M}_k \pmod{(N)}.$$

Wie analog im Beweis von Lemma 8.8 schon mehrfach überlegt, folgt hieraus $\Gamma \cdot M_j \tilde{M}_k = \Gamma \cdot L$ und somit die Behauptung. #

□

Damit die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma, \mathbb{M}(N, \Gamma))$ ihre Struktur von der Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe erbt, reicht ein bloßer Homomorphismus nicht aus – wir benötigen eine Isomorphie. Hierfür passen wir das Monoid noch einmal an und beschränken uns dabei auf eine Klasse von Kongruenzuntergruppen wie folgt:

Definition 8.10. Für eine natürliche Zahl N , einen positiven Teiler t von N sowie eine Untergruppe $U \subseteq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ schreiben wir

$$\begin{aligned}\Gamma(U, t, N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a + N\mathbb{Z} \in U, t \mid b, N \mid c \right\}, \\ \mathbb{M}(U, t, N)_* &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M} \mid a + N\mathbb{Z} \in U, t \mid b, N \mid c, \mathrm{ggT}(d, N) = 1 \right\}, \\ \mathbb{M}(N)_* &:= \left\{ M \in \mathbb{M} \mid \pi_N(M) = \begin{pmatrix} 1 + N\mathbb{Z} & 0 + N\mathbb{Z} \\ 0 + N\mathbb{Z} & x + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \text{ mit } \mathrm{ggT}(x, N) = 1 \right\}.\end{aligned}$$

Tatsächlich trägt die in Definition 8.10 eingeführte Menge $\Gamma(U, t, N)$ die Struktur einer Kongruenzuntergruppe mit

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma(U, t, N) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

und $\mathbb{M}(U, t, N)_*$ ist ein Monoid mit

$$\Gamma(U, t, N) \subseteq \mathbb{M}(U, t, N)_* \subseteq \mathbb{M}(N, \Gamma(U, t, N)),$$

denn: Zu zeigen ist lediglich die letzte Inklusion, da sich die anderen unmittelbar aus den jeweiligen Definitionen ergeben. Hierfür verifiziert man zunächst durch explizites Nachrechnen modulo N die Identitäten

$$\mathbb{M}(U, t, N)_* = \Gamma(U, t, N) \cdot \mathbb{M}(N)_* = \mathbb{M}(N)_* \cdot \Gamma(U, t, N), \quad (8.6)$$

wobei wir jeweils den gleichen Vertreter in $\mathbb{M}(N)_*$ wählen können. Für ein beliebiges $M \in \mathbb{M}(U, t, N) \subseteq \mathbb{M}$ gibt es also Matrizen $A, B \in \Gamma(U, t, N)$ und $\tilde{M} \in \mathbb{M}(N)_*$ mit $M = AM = \tilde{M}B$. Es folgt nun zunächst

$$\mathrm{ggT}(\det(M), N) = \mathrm{ggT}(\det(\tilde{M}), N) = 1$$

und somit $M \in \mathbb{M}(N)$ sowie des Weiteren

$$\begin{aligned}\pi_N(\Gamma(U, t, N) \cdot M) &= \pi_N(\Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M}) \\ &= \pi_N(\tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N)) = \pi_N(M \cdot \Gamma(U, t, N))\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. #

Bemerkung 8.11. Seien N eine natürliche Zahl, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Dann sind nicht alle Kongruenzuntergruppen $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vom Typ $\Gamma(U, t, N)$,

denn: Nach Definition 8.10 gilt stets $\Gamma(U, t, N) \subseteq \Gamma_0(N)$. Nicht jede Kongruenzuntergruppe $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllt diese Bedingung. So enthält etwa die Thetagruppe Γ_θ zum Einen nach Beispiel 1.34 (b) die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(2)$, ist zum Anderen aber wegen $S \in \Gamma_\theta$ nicht in $\Gamma_0(2)$ enthalten. #

Offensichtlich gilt aber

$$\begin{aligned}\Gamma(N) &= \Gamma(\{1 + N\mathbb{Z}\}, N, N), \\ \Gamma_1(N) &= \Gamma(\{1 + N\mathbb{Z}\}, 1, N), \\ \Gamma_0(N) &= \Gamma((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, 1, N).\end{aligned}$$

Aus Proposition 8.9 folgt nun:

Korollar 8.12. Seien N eine natürliche Zahl, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Dann ist $(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*)$ ein Hecke-Paar und die Zuordnung

$$\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N) \mapsto \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{für } M \in \mathbb{M}(U, t, N)_*$$

definiert über lineare Fortsetzung einen \mathbb{Z} -Algebrenhomomorphismus von der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*)$ in die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ der vollen Modulgruppe. Dieser ist injektiv und hat Bild $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}(N))$, so dass wir einen \mathbb{Z} -Algebrenisomorphismus

$$\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}(N))$$

erhalten.

Beweis. Dass die Zuordnung einen \mathbb{Z} -Algebrenhomomorphismus

$$\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*) \rightarrow \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$$

definiert, folgt unmittelbar aus Proposition 8.9 und wegen $\mathbb{M}(U, t, N)_* \subseteq \mathbb{M}(N)$ lässt sich dieser auch als \mathbb{Z} -Algebrenhomomorphismus

$$\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*) \rightarrow \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}(N))$$

interpretieren. Zum Beweis des Korollars verbleibt, die Injektivität und die Surjektivität dieses Homomorphismus nachzuweisen.

Zum Beweis der Surjektivität betrachten wir ein $M \in \mathbb{M}(N)$ und suchen ein Urbild seiner $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklasse. Dazu betrachten wir die Matrix

$$\tilde{M} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(N)_* \quad \text{für ein } x \in \mathbb{Z} \text{ mit } \det(M)x \equiv 1 \pmod{N}.$$

Diese erfüllt nach Konstruktion $\det(M\tilde{M}) \equiv 1 \pmod{N}$, so dass es nach Proposition 1.30 ein $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $A \equiv M\tilde{M} \pmod{N}$ gibt. Es folgt

$$A^{-1}M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(M) \end{pmatrix} \pmod{N}$$

und also

$$A^{-1}M \in \mathbb{M}(N)_* \subseteq \mathbb{M}(U, t, N)_*.$$

Da somit die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklasse von $A^{-1}M$ im Bild des Homomorphismus liegt und andererseits mit der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklasse von M übereinstimmt, haben wir nun ein Urbild von letzterer gefunden und folglich die Surjektivität gezeigt.

Es verbleibt die Injektivität zu zeigen, dass also für je zwei Matrizen $M, \tilde{M} \in \mathbb{M}(N)$ die Implikation

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ \implies \Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N) &= \Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N) \end{aligned}$$

gilt. Aufgrund der soeben gezeigten Surjektivität können wir dabei ohne Einschränkung $M, \tilde{M} \in \mathbb{M}(U, t, N)_*$ annehmen und wegen (8.6) sogar $M, \tilde{M} \in \mathbb{M}(N)_*$. Stimmen aber die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklassen zweier Matrizen $M, \tilde{M} \in \mathbb{M}(N)_*$ überein, so haben diese dieselbe Determinante und erfüllen nach Definition von $\mathbb{M}(N)_*$

$$M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(\tilde{M}) \end{pmatrix} \equiv \tilde{M} \pmod{N}.$$

Wegen $\mathbb{M}(U, t, N)_* \subseteq \mathbb{M}(N, \Gamma(U, t, N))$ und nach Lemma 8.8 (b) stimmen dann auch die $\Gamma(U, t, N)$ -Doppelnebenklassen von M und \tilde{M} überein und wir haben die Injektivität gezeigt. \square

Mithilfe des Elementarteilersatzes und von Lemma 4.13 (b) konnten wir die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ in Satz 4.16 in ihre p -primären Komponenten zerlegen und so genauer studieren. Die offensichtliche Idee an dieser Stelle wäre nun, diesen Ansatz Eins-zu-Eins für die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*)$ nachzubauen. Nach Korollar 8.12 erhielten wir so für alle zu N teilerfremden Primzahlen p in der Tat dieselben p -primären Komponenten wie schon für die volle Modulgruppe. Für diejenigen Primzahlen p jedoch, die N teilen, wären die p -primären Komponenten trivial. Wir gehen daher durch Auslassen der Teilerfremdheitsbedingung im unteren rechten Eintrag zu einem etwas größeren Monoid über:

Definition 8.13. Für eine natürliche Zahl N , einen positiven Teiler t von N sowie eine Untergruppe $U \subseteq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ schreiben wir

$$\mathbb{M}(U, t, N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M} \mid a + N\mathbb{Z} \in U, t \mid b, N \mid c \right\}.$$

Wegen $\mathbb{M}(U, t, N)_* \subseteq \mathbb{M}(U, t, N)$ ist dann $(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ ein Hecke-Paar,⁸⁶ dessen zugehörige Hecke-Algebra, die **Hecke-Algebra** $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ **der Kongruenzuntergruppe** $\Gamma(U, t, N)$, die in Korollar 8.12 untersuchte Hecke-Algebra enthält.

Um so fortfahren zu können wie im Fall der vollen Modulgruppe, benötigen wir eine Entsprechung von Lemma 4.13 für die Kongruenzuntergruppen vom Typ $\Gamma(U, t, N)$. Der für dessen Beweis benutzte Elementarteilersatz lässt sich jedoch nicht auf alle Kongruenzuntergruppen dieser Form herunterbrechen. Wir leiten nun eine abgeschwächte Version dieser Ergebnisse her, die für alle Gruppen $\Gamma(U, t, N)$ Gültigkeit hat:

⁸⁶Dass dies überhaupt ein Hecke-Paar ist, folgt analog zum Beweis von Korollar 8.6 aus Proposition 8.4.

Definition 8.14. Für zwei natürliche Zahlen $n, N \in \mathbb{N}$ schreiben wir $n \mid N^\infty$, falls alle Primfaktoren von n auch Primfaktoren von N sind.

Lemma 8.15. Seien N eine natürliche Zahl, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Sei weiter $M \in \mathbb{M}(U, t, N)$ mit $\det(M) = mn$ und $n \mid N^\infty$ sowie $\text{ggT}(m, N) = 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N) = \{\tilde{M} \in \mathbb{M}(U, t, N) \mid \det(\tilde{M}) = mn \text{ und für alle primen } p \mid m \text{ stimmen die } p\text{-Anteile der Elementarteiler von } M \text{ und } \tilde{M} \text{ überein}\}$.
- (b) Es gibt ein $\tilde{M} \in \mathbb{M}(N)_*$ mit $\det(\tilde{M}) = m$, so dass die p -Anteile der Elementarteiler von M und \tilde{M} für alle primen $p \mid m$ übereinstimmen. Mit diesem \tilde{M} gilt

$$\begin{aligned} & \Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N) \\ &= \left(\Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N) \right) \cdot \left(\Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N) \right) \\ &= \left(\Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N) \right) \cdot \left(\Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N) \right) \end{aligned}$$

als Produkte in der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$.

Beweis. Wir schreiben kurz $X(M)$ für die rechte Seite von Behauptung (a) und betrachten eine Matrix

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in X(M).$$

Definitionsgemäß gilt dann $\text{ggT}(a, nN) = 1$ und es existiert ein $\tilde{a} \in \mathbb{Z}$ mit $a\tilde{a} \equiv 1 \pmod{nN}$. Nach Proposition 1.30 gibt es daher ein $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$A \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \pmod{nN}$$

und aufgrund von $\tilde{M} \in \mathbb{M}(U, t, N)$ gilt sogar $A \in \Gamma(U, t, N)$. Nach Konstruktion erhalten wir

$$A\tilde{M} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}b \\ ac & ad \end{pmatrix} \pmod{nN}.$$

Wieder aufgrund von $\tilde{M} \in \mathbb{M}(U, t, N)$ gilt

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ac & 1 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{a}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(U, t, N)$$

und insgesamt

$$BA\tilde{M}C \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ac & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}b \\ ac & ad \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{a}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(M) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & mn \end{pmatrix} \pmod{(nN)}.$$

Folglich hat

$$\tilde{M} := B A \tilde{M} C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}^{-1}$$

ganzzahlige Koeffizienten sowie Determinante m und es gilt

$$\tilde{M} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \pmod{(N)},$$

also $\tilde{M} \in \mathbb{M}(N)_*$. Nach Konstruktion stimmen für alle primen $p \mid m$ die p -Anteile der Elementarteiler von \tilde{M} mit denen von \tilde{M} und somit auch mit denen von M überein, so dass wir die erste Teilbehauptung von (b) gezeigt haben.

Wir zeigen nun Behauptung (a). Da offensichtlich $\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N) \subseteq X(M)$ gilt, reicht es zu deren Beweis aus, die umgekehrte Inklusion zeigen. Mit der obigen Diskussion haben wir andererseits bereits gezeigt, dass zu jedem $\tilde{M} \in X(M)$ ein – von \tilde{M} abhängiges – $\tilde{M} \in \mathbb{M}(N)_*$ mit $\det(\tilde{M}) = m$ und

$$\tilde{M} \in \Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N)$$

existiert, so dass für alle primen $p \mid m$ die p -Anteile der Elementarteiler von \tilde{M} mit denen von M übereinstimmen. Behauptung (a) folgt also, wenn wir zeigen können, dass die so konstruierten Doppelnebenklassen für alle Wahlen von $\tilde{M} \in X(M)$ übereinstimmen. Sei dafür \tilde{M}' ein weiteres Element von $\mathbb{M}(N)_*$ mit $\det(\tilde{M}') = m$, so dass für alle primen $p \mid m$ die p -Anteile der Elementarteiler von \tilde{M}' mit denen von M übereinstimmen. Dann sind die Elementarteiler von \tilde{M} und \tilde{M}' identisch und es gilt also

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M}' \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Da \tilde{M} und \tilde{M}' als Elemente von $\mathbb{M}(N)_*$ modulo N den gleichen Rest lassen, folgt hieraus

$$\begin{aligned} & \{L \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid L \equiv \tilde{M} \pmod{(N)}\} \\ &= \{L \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M}' \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid L \equiv \tilde{M}' \pmod{(N)}\} \end{aligned}$$

und nach Lemma 8.8 (b) im Spezialfall $\Gamma = \Gamma(N)$ insbesondere

$$\Gamma(N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(N) = \Gamma(N) \cdot \tilde{M}' \cdot \Gamma(N)$$

bzw.

$$\tilde{M}' = A \tilde{M} B \quad \text{für geeignete } A, B \in \Gamma(N).$$

Nach dem Chinesischen Restsatz gibt es ein $C \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ mit

$$\begin{aligned} C &\equiv I_2 && \text{mod } (nN), \\ C &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}^{-1} \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} && \text{mod } (m), \end{aligned}$$

wobei der Modul in der zweiten Zeile wegen $B^{-1} \in \Gamma(N)$ eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen ist. Nach Konstruktion gilt $\det(C) \equiv 1 \pmod{mnN}$, so dass wir nach Proposition 1.30 ohne Einschränkung annehmen können, C liege in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und wegen der Kongruenzbedingung modulo nN insbesondere in $\Gamma(N)$. Setzen wir nun

$$D := \tilde{M}B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}^{-1} \cdot \tilde{M}^{-1},$$

so gilt $\det(D) = 1$ und $D \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$, wobei man letzteres für jede Primzahl einzeln überprüft. Wegen $B, C \in \Gamma(N)$ gilt zudem

$$D \equiv \tilde{M}B\tilde{M}^{-1} \equiv I_2 \quad \text{mod } (N)$$

und zusammen also $D \in \Gamma(N)$. Direkt aus der Definition von D erhalten wir

$$\begin{aligned} D\tilde{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot C^{-1} &= \tilde{M}B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}^{-1} \cdot \tilde{M}^{-1}\tilde{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot C^{-1} \\ &= \tilde{M}B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und mit $A, C^{-1}, D \in \Gamma(N) \subseteq \Gamma(U, t, N)$ daher auch

$$\begin{aligned} \Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M}' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N) &= \Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M}B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N) \\ &= \Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N). \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir so gezeigt, dass die oben konstruierten Doppelnebenklassen für alle Wahlen von $\tilde{M} \in X(M)$ übereinstimmen, und somit den Beweis von Behauptung (a) abgeschlossen.

Es verbleibt die zweite Teilbehauptung von (b) zu zeigen. Für jedes $\tilde{M} \in \mathbb{M}(N)_*$ mit $\det(\tilde{M}) = m$, so dass für alle primen $p \mid m$ die p -Anteile der Elementarteiler von \tilde{M} mit denen von M übereinstimmen, folgt bereits direkt aus der Definition von $X(M)$

$$\begin{aligned} \Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N) &= \Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N) \\ &= \Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N). \end{aligned}$$

Zum Beweis der Behauptung verbleibt zu zeigen, dass die Multiplizität der Doppelnebenklasse $\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N)$ in den Produkten

$$\begin{aligned} & (\Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N)) \cdot (\Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N)), \\ & (\Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N)) \cdot (\Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N)) \end{aligned}$$

jeweils Eins ist. Da die Argumentation in beiden Fällen gleich verläuft, beschränken wir uns hier darauf, das erste Produkt zu untersuchen. Für alle $M, M' \in \mathbb{M}(U, t, N)$ gilt zunächst

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M' \implies \Gamma(U, t, N) \cdot M = \Gamma(U, t, N) M', \quad (8.7)$$

denn: Für $M_1, M_2 \in \mathbb{M}(U, t, N)$ mit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_2$ gibt es ein $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M_2 = AM_1$. Schreiben wir modulo N

$$\pi_N(M_1) = \begin{pmatrix} a_1 & tb_1 \\ 0 + N\mathbb{Z} & a_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad \pi_N(M_2) = \begin{pmatrix} a_2 & tb_2 \\ 0 + N\mathbb{Z} & a_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad \pi_N(A) = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix},$$

so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a_2 & tb_2 \\ 0 + N\mathbb{Z} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e & tb_1 e + f a_1^{-1} \\ a_1 g & * \end{pmatrix}$$

und insbesondere

$$e = a_2 a_1^{-1} \in U, \quad f \in t \cdot \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \quad g = 0 + N\mathbb{Z}.$$

Es ist also A bereits ein Element von $\Gamma(U, t, N)$ und es gilt $\Gamma(U, t, N) \cdot M_1 = \Gamma(U, t, N) M_2$. #

Seien nun

$$\begin{aligned} \Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N) &= \bigsqcup_j \Gamma(U, t, N) \cdot M_j, \\ \Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N) &= \bigsqcup_i \Gamma(U, t, N) \cdot N_i \end{aligned}$$

disjunkte Zerlegungen in $\Gamma(U, t, N)$ -Linksnebenklassen. Nach (8.7) sind nun jeweils auch die entsprechenden $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Linksnebenklassen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j$ bzw. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i$ paarweise disjunkt und nach Lemma 4.13 (b) sowie Bemerkung 4.14 gilt

$$\begin{aligned} & (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \\ &= \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \tilde{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &= \bigsqcup_{i,j} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i. \end{aligned}$$

Aufgrund der Disjunktheit dieser Zerlegung in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Nebenklassen gibt es höchstens ein Paar (i, j) mit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M$. Aufgrund von $\Gamma(U, t, N) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es aber dann auch höchstens ein Paar (i, j) mit $\Gamma(U, t, N) \cdot M_j N_i = \Gamma(U, t, N) \cdot M$. Es folgt, dass die Multiplizität der Doppelnebenklasse $\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N)$ im Produkt

$$(\Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N)) \cdot (\Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N))$$

höchstens Eins und also genau Eins ist, und somit Behauptung (b). \square

Wir nutzen Lemma 8.15, um die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ in ihre p -primären Komponenten zu zerlegen, und definieren diesen Begriff dafür zunächst:

Definition 8.16. Seien N eine natürliche Zahl, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Primzahl p setzen wir

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(U, t, N)^n &:= \{M \in \mathbb{M}(U, t, N) \mid \det(M) = n\}, \\ \mathbb{M}(U, t, N)_p &:= \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathbb{M}(U, t, N)^{p^r}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist dann auch $(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_p)$ wieder ein Hecke-Paar. Die zugehörige Hecke-Algebra

$$\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_p)$$

heißt die p -primäre Komponente der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$.

Analog zum Vorgehen im Fall der vollen Modulgruppe führen wir zudem auch hier wieder Kurzschreibweisen für bestimmte Elemente der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ ein, nämlich:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}(a, d) &\text{ für das Element von } \mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*), && \text{für } a \mid d \text{ und} \\ &\text{das unter dem Isomorphismus aus Korollar 8.12} && \text{ggT}(d, N) = 1, \\ &\text{auf } \mathfrak{D}(a, d) \text{ abgebildet wird,}^{87} \\ \tilde{\mathfrak{D}}(n) &:= \sum_M \Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N) && \text{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

wobei in letzterer Summe $M \in \Gamma(U, t, N) \backslash \mathbb{M}(U, t, N)^n / \Gamma(U, t, N)$ ein Vertretersystem durchläuft. Es gilt nun:

⁸⁷Nach Konstruktion ist $\tilde{\mathfrak{D}}(a, d)$ stets eine $\Gamma(U, t, N)$ -Doppelnebenklasse, jedoch können wir nur im Fall $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(U, t, N)_*$ auch

$$\tilde{\mathfrak{D}}(a, d) = \Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N)$$

schreiben. Letzteres ist für allgemeine a, d nur im Fall $U = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ möglich, in dem sich auch eine Version des Elementarteilersatzes beweisen lässt – siehe auch Übungsaufgabe 8.1.

Satz 8.17. Seien N eine natürliche Zahl, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Dann lässt sich die Hecke-Algebra des Paares $(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ als Tensorprodukt

$$\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)) = \bigotimes_{p \text{ prim}} \mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_p)$$

ihrer p -primären Komponenten schreiben. Für eine beliebige Primzahl p gilt dabei

$$\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}[\tilde{\mathfrak{D}}(p, p), \tilde{\mathfrak{D}}(p)] & \text{für } p \nmid N, \\ \mathbb{Z}[\tilde{\mathfrak{D}}(p)] & \text{für } p \mid N. \end{cases}$$

Beweis. In Analogie zum Beweis von Satz 4.16 wählen wir für $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ und für jede seiner p -Komponenten die jeweilig passenden $\Gamma(U, t, N)$ -Doppelnebenklassen als Basis. Nun lässt sich jede Doppelnebenklasse $\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N)$ mit $M \in \mathbb{M}(U, t, N)$ in $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ eindeutig als ein Produkt der Form

$$\tilde{\mathfrak{D}}(a, d)\tilde{\mathfrak{D}}(n) = \tilde{\mathfrak{D}}(n)\tilde{\mathfrak{D}}(a, d) \quad \text{mit } n \mid N^\infty, a \mid d \text{ und } \text{ggT}(d, N) = 1 \quad (8.8)$$

schreiben,

denn: Für $\det(M) = mn$ mit $\text{ggT}(m, N) = 1$ und $n \mid N^\infty$ ist die Doppelnebenklasse $\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N)$ nach Lemma 8.15 das Produkt

$$\begin{aligned} & (\Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N)) \cdot (\Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N)) \\ &= (\Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N)) \cdot (\Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N)), \end{aligned}$$

mit einem $\tilde{M} \in \mathbb{M}(N)_* \subseteq \mathbb{M}(U, t, N)_*$, so dass die p -Anteile der Elementarteiler von M und \tilde{M} für alle primen $p \mid m$ übereinstimmen, so dass wir in der Notation aus (4.4)

$$\Gamma(U, t, N) \cdot \tilde{M} \cdot \Gamma(U, t, N) = \tilde{\mathfrak{D}}(e_1^{(\tilde{M})}, e_2^{(\tilde{M})})$$

erhalten, was nach Konstruktion nicht von der Wahl von \tilde{M} abhängt. Da die obige Zerlegung für alle M zutrifft, gilt zudem

$$\Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \Gamma(U, t, N) = \tilde{\mathfrak{D}}(n)$$

und insgesamt somit die Behauptung. #

Da der in Korollar 8.12 nachgewiesene \mathbb{Z} -Algebrenisomorphismus

$$\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}(N))$$

Determinanten erhält, lässt er sich offenbar für alle primen p mit $p \nmid N$ zu einem \mathbb{Z} -Algebrenisomorphismus

$$\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_p) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$$

einschränken. Nach Satz 4.16 zerfällt daher die $\Gamma(U, t, N)$ -Doppelnebenklasse $\tilde{\mathfrak{D}}(a, d)$ in (8.8) eindeutig in ein Produkt von $\Gamma(U, t, N)$ -Doppelnebenklassen in $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_p)$ für solche p und die zugehörige p -primäre Komponente hat nach Satz 4.20 die behauptete Gestalt.

Wir untersuchen nun den Faktor $\tilde{\mathfrak{D}}(n)$ mit $n \mid N^\infty$ aus der Zerlegung in (8.8) genauer: Für ein beliebiges $M \in \mathbb{M}(U, t, N)^n$ mit $n \mid N^\infty$ gilt zunächst:

$$\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N) = \mathbb{M}(U, t, N)^n = \bigsqcup_{r=0}^{n-1} \Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & rt \\ 0 & n \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

denn: Die erste Identität ist ein Spezialfall von Lemma 8.15 (a). Da zudem die $\Gamma(U, t, N)$ -Linksnebenklassen auf der rechten Seite der zweiten Identität offensichtlich in der linken Seite enthalten sind, müssen wir zum Beweis dieser Identität nur noch die umgekehrte Inklusion zeigen. Sei dafür $\tilde{M} \in \mathbb{M}(U, t, N)^n$. Wie im Beweis von Lemma 8.15 im Spezialfall $m = 1$ gibt es dann Matrizen $A, B \in \Gamma(U, t, N)$ und ganze Zahlen \tilde{a}, \tilde{b} mit $\text{ggT}(\tilde{a}, N) = 1$ sowie $t \mid \tilde{b}$, so dass

$$B A \tilde{M} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}\tilde{b} \\ 0 & n \end{pmatrix} \pmod{(nN)}$$

gilt. Es gibt also ganze Zahlen e, f, g, h mit

$$\begin{aligned} B A \tilde{M} &= \begin{pmatrix} 1 + enN & \tilde{a}\tilde{b} + fnN \\ gnN & n + hnN \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + enN & \tilde{a}\tilde{b} + fnN \\ gnN & n + hnN \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\tilde{a}\tilde{b}}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}\tilde{b} \\ 0 & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + enN & -\tilde{a}\tilde{b}eN + fN \\ gnN & -\tilde{a}\tilde{b}gN + 1 + hN \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}\tilde{b} \\ 0 & n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die linke Matrix in der letzten Zeile offensichtlich ganzzahlige Einträge aufweist, nach Konstruktion Determinante 1 hat, modulo N kongruent zur Einheitsmatrix ist und insgesamt also in $\Gamma(N) \subseteq \Gamma(U, t, N)$ liegt. Zerlegen wir via Division mit Rest zudem $\frac{\tilde{a}\tilde{b}}{t} = nq + r$ mit $0 \leq r < n$ und schreiben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}\tilde{b} \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & qt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & rt \\ 0 & n \end{pmatrix} \in \Gamma(U, t, N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & rt \\ 0 & n \end{pmatrix},$$

so erhalten wir schließlich, dass \tilde{M} in einer der $\Gamma(U, t, N)$ -Linksnebenklassen aus der rechten Seite der zweiten Identität liegt. Zum Beweis der Behauptung verbleibt, die paarweise Disjunktheit dieser Linksnebenklassen nachzuweisen. Seien dafür $0 \leq r \leq s \leq n - 1$ und ein $A = \begin{pmatrix} a & bt \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(U, t, N)$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & rt \\ 0 & n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & st \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ast + btn \\ c & cst + dn \end{pmatrix}.$$

Dann können wir sofort $c = 0, d = 1$ und $a = 1$ ablesen und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & rt \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (s + bn)t \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Beschränktheit von r, s folgt nun zusätzlich $b = 0$, also $r = s$ und somit die Disjunktheit. #

Es folgt unmittelbar, dass $\tilde{\mathfrak{D}}(n)$ für jedes $n \mid N^\infty$ eine Doppelnebenklasse von Grad

$$\deg(\tilde{\mathfrak{D}}(n)) = n \quad (8.10)$$

ist, wobei der Grad einer Doppelnebenklasse wie in Bemerkung 4.7 als die Anzahl der dort auftretenden Linksnebenklassen definiert sei. Darüber hinaus gilt die starke Multiplikativitätsbeziehung

$$\tilde{\mathfrak{D}}(n)\tilde{\mathfrak{D}}(\tilde{n}) = \tilde{\mathfrak{D}}(n\tilde{n}) \quad \text{für alle } n, \tilde{n} \mid N^\infty, \quad (8.11)$$

denn: Die Faktoren $\tilde{\mathfrak{D}}(n)$ und $\tilde{\mathfrak{D}}(\tilde{n})$ sind in (8.9) explizit durch ihre Zerlegungen in $\Gamma(U, t, N)$ -Linksnebenklassen gegeben, so dass ihr Produkt als Menge in $\tilde{\mathfrak{D}}(n\tilde{n})$ enthalten ist. Da das Produkt nach Konstruktion zudem $\Gamma(U, t, N)$ -rechtsinvariant ist, gilt in der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ somit

$$\tilde{\mathfrak{D}}(n)\tilde{\mathfrak{D}}(\tilde{n}) = c \cdot \tilde{\mathfrak{D}}(n\tilde{n}) \quad \text{für ein } c \in \mathbb{Z}.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass der Faktor c trivial ist. Um dies nachzuweisen, setzen wir zunächst den Begriff des Grades einer Doppelnebenklasse für ein allgemeines Hecke-Paar (R, S) via

$$\deg\left(\sum_{s \in S} a_s R s R\right) := \sum_s a_s \deg(R s R)$$

\mathbb{Z} -linear auf beliebige Elemente der Hecke-Algebra fort, was offensichtlich wohldefiniert ist. Aufgrund von (8.10) folgt die Behauptung, wenn wir zeigen können, dass der so erweiterte Grad auf der allgemeinen Hecke-Algebra $\mathcal{H}(R, S)$ multiplikativ ist. Aufgrund der Definition über \mathbb{Z} -lineare Fortsetzung reicht es weiter aus, die Multiplikativität für das Produkt zweier R -Doppelnebenklassen in S nachzuweisen. Sind $R s R = \bigsqcup_{j=1}^{\deg(R s R)} R s_j$ und $R t R = \bigsqcup_{k=1}^{\deg(R t R)} R t_k$ zwei solche Doppelnebenklassen mit Produkt $(R s R)(R t R) = \sum_u a_u R u R$, so gilt nach Bemerkung 4.7

$$\begin{aligned} \deg((R s R)(R t R)) &= \deg\left(\sum_u a_u R u R\right) \\ &= \sum_u a_u \deg(R u R) \\ &= \sum_u |\{(j, k) : R u R = R s_j t_k R\}| \\ &= \deg(R s R) \cdot \deg(R t R). \end{aligned}$$

Es folgt die Multiplikativität des Grades und insgesamt die Behauptung. #

Nach (8.11) zerfällt der zweite Faktor $\tilde{\mathfrak{D}}(n)$ aus (8.8) eindeutig in das Produkt

$$\tilde{\mathfrak{D}}(n) = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \mid N}} \tilde{\mathfrak{D}}(p^{v_p(n)}) = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \mid N}} \tilde{\mathfrak{D}}(p)^{v_p(n)}$$

von $\Gamma(U, t, N)$ -Doppelnebenklassen aus den p -primären Komponenten mit $p \mid N$ und letztere sind offensichtlich als \mathbb{Z} -Moduln durch $\mathbb{Z}[\tilde{\mathfrak{D}}(p)]$ beschrieben. Insgesamt folgt so der Satz. \square

Im folgenden Korollar aus Satz 8.17 heben wir den dort gezeigten Zusammenhang zwischen der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ der Kongruenzuntergruppe $\Gamma(U, t, N)$ und der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ der vollen Modulgruppe noch einmal ausdrücklich hervor:

Korollar 8.18. *Seien N eine natürliche Zahl, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Dann ist die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ der Kongruenzuntergruppe $\Gamma(U, t, N)$ das Bild der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ der vollen Modulgruppe unter dem durch*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(n) &\rightarrow \tilde{\mathfrak{D}}(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ \mathfrak{D}(p, p) &\rightarrow \begin{cases} \tilde{\mathfrak{D}}(p, p) & \text{für } p \nmid N, \\ 0 & \text{für } p \mid N \end{cases} \end{aligned}$$

gegebenen \mathbb{Z} -Algebrenhomomorphismus.

Beweis. Nach Satz 8.17 reicht es zum Beweis des Korollars aus, die entsprechende Aussage für alle p -primären Komponenten nachzuweisen. Im Fall $p \nmid N$ erfüllen die Elemente $\tilde{\mathfrak{D}}(p^r)$ und $\tilde{\mathfrak{D}}(p, p)$ nach Korollar 8.12 dieselben Rechenregeln wie in Lemma 4.18. Im Fall $p \mid N$ gilt

$$\tilde{\mathfrak{D}}(p^r)\tilde{\mathfrak{D}}(p^s) = \tilde{\mathfrak{D}}(p^{r+s}) + \sum_{i=1}^{\min\{r,s\}} p^i 0^i \tilde{\mathfrak{D}}(p^{r+s-2i}) \quad \text{für alle } r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

was gerade das homomorphe Bild der Rechenregel aus Lemma 4.18 (e) ist. \square

In Analogie zu Korollar 4.19 und Korollar 4.21 erhalten wir zwei weitere Folgerungen:

Korollar 8.19. *Seien N eine natürliche Zahl, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Dann gilt*

$$\tilde{\mathfrak{D}}(m)\tilde{\mathfrak{D}}(n) = \sum_{\substack{0 < d \mid \mathrm{ggT}(m,n) \\ \mathrm{ggT}(d,N)=1}} d \tilde{\mathfrak{D}}(d, d) \tilde{\mathfrak{D}}\left(\frac{mn}{d^2}\right) \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Dies folgt nach Zerlegen von m und n in Primzahlpotenzen unmittelbar aus den Korollaren 8.18 und 4.19. \square

Korollar 8.20. *Seien N eine natürliche Zahl, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Dann lässt sich die **rationale Hecke-Algebra***

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)) := \mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)) \otimes \mathbb{Q}$$

erzeugen als

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)) = \mathbb{Q}[\tilde{\mathfrak{D}}(n) \mid n \in \mathbb{N}].$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Korollar 8.18, wobei wir beachten, dass sich die im Beweis von Korollar 4.19 benutzte Beziehung

$$p\mathfrak{D}(p, p) = (\mathfrak{D}(p)^2 - \mathfrak{D}(p^2))$$

für alle $p \nmid N$ in unsere Situation überträgt und dort dieselben Auswirkungen hat. \square

Wie wir nun eingesehen haben, lässt sich die Hecke-Algebra einer Kongruenzuntergruppe vom Typ $\Gamma(U, t, N)$ genauso konstruieren wie diejenige der vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und hat bis auf Beiträge in den p -primären Komponenten für $p \mid N$ dieselbe Struktur wie diese. In Abschnitt 8.3 werden wir einsehen, dass diese Unterschiede in endlich vielen Faktoren erhebliche Konsequenzen für ihr Wirken als Hecke-Operatoren nach sich ziehen.

8.3 Hecke-Operatoren

Wie in der Hecke-Theorie zur vollen Modulgruppe lassen sich auch den Elementen der in Abschnitt 8.2 studierten Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ Operatoren auf einem Raum von Modulformen zuordnen:

Seien N eine natürliche Zahl, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$. Sei weiter $M \in \mathbb{M}(U, t, N)$ beliebig und sei

$$\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N) = \bigsqcup_j \Gamma(U, t, N) \cdot M_j$$

eine disjunkte Zerlegung von $\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N)$ in $\Gamma(U, t, N)$ -Linksnebenklassen. In kompletter Analogie zum Vorgehen in Abschnitt 4.3 ist dann für jedes $k \in \mathbb{Z}$ durch

$$\tilde{T}_M: \begin{cases} M_k(\Gamma(U, t, N)) & \rightarrow M_k(\Gamma(U, t, N)), \\ f & \mapsto f|_k \tilde{T}_M := \sum_j f|_k M_j \end{cases}$$

eine lineare Abbildung vom Vektorraum $M_k(\Gamma(U, t, N))$ der holomorphen Modulformen von Gewicht k bezüglich der Kongruenzuntergruppe $\Gamma(U, t, N)$ in sich selbst definiert. Wir nennen \tilde{T}_M auch den **Hecke-Operator** zur Doppelnebenklasse $\Gamma(U, t, N) \cdot M \cdot \Gamma(U, t, N)$. Durch \mathbb{Q} -lineares Fortsetzen erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{Z}$ und jedes $\tilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N))$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, den **Hecke-Operator**

$$\tilde{T}_{\tilde{\mathfrak{D}}}: M_k(\Gamma(U, t, N)) \rightarrow M_k(\Gamma(U, t, N))$$

zu $\tilde{\mathfrak{D}}$. In Hinsicht auf Korollar 8.19 interessieren wir uns besonders zu jedem $n \in \mathbb{N}$ für den (**normierten**) n -ten **Hecke-Operator**

$$\tilde{T}_n: \begin{cases} M_k(\Gamma(U, t, N)) & \rightarrow M_k(\Gamma(U, t, N)), \\ f & \mapsto (f|_k \tilde{T}_n)(z) := n^{\frac{k}{2}-1} \cdot (f|_k \tilde{T}_{\tilde{\mathfrak{D}}(n)})(z). \end{cases}$$

Genau wie Satz 4.23 zeigt man nun:

Satz 8.21. Seien N eine natürliche Zahl, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist dann die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)) &\rightarrow \text{End}(M_k(U, t, N)), \\ \tilde{\mathfrak{D}} &\mapsto (f \mapsto f|_k \tilde{T}_{\tilde{\mathfrak{D}}}) \end{aligned}$$

ein \mathbb{Q} -Algebrenhomomorphismus, so dass sich die in Korollar 8.19 gezeigten Rechenregeln für Elemente der Hecke-Algebra auf die Hecke-Operatoren übertragen. Dabei bildet jeder Hecke-Operator Spitzenformen auf Spitzenformen ab.

Beweis. Die Homomorphie zeigt man genauso wie im Beweis von Satz 4.23. Dass Spitzenformen auf Spitzenformen geschickt werden, zeigt man für die einzelnen Doppelnebenklassen – das hätten wir in Kapitel 4 auch schon so machen können. \square

In der Hecke-Theorie zur vollen Modulgruppe war an dieser Stelle die in Satz 4.24 nachgewiesene Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren bezüglich des Petersson-Skalarprodukts zentral, da wir aus diesem Resultat in Satz 4.32 die Existenz einer Basis von S_k aus Hecke-Eigenformen herleiten konnten. Im Kontext der von uns untersuchten Kongruenzuntergruppen gilt das folgende, schwächere Resultat:

Satz 8.22. Seien k, N natürliche Zahlen, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Für alle $M \in \mathbb{M}(U, t, N)$ gilt dann

$$\langle f|_k \tilde{T}_M | g \rangle_{\Gamma(U, t, N)} = \langle f | g|_k \tilde{T}_{M^\#} \rangle_{\Gamma(U, t, N)} \quad \text{für alle } f, g \in S_k(\Gamma(U, t, N)),$$

wobei $M^\#$ die Adjunkte von M bezeichnet.

Nach Korollar 8.12 ist die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*)$ isomorph zur nach Beispiel 4.12 kommutativen Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}(N))$. Diese Kommutativität überträgt sich dann auf die rationale Hecke-Algebra

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*) &:= \mathcal{H}(\Gamma(U, t, N), \mathbb{M}(U, t, N)_*) \otimes \mathbb{Q} \\ &= \mathbb{Q}[\tilde{\mathfrak{D}}(n) : n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(n, N) = 1]. \end{aligned}$$

Zusammen mit Satz 8.22 erhalten wir nun eine Abschwächung des Ergebnisses aus Abschnitt 4.4 in unserer Situation:

Korollar 8.23. Seien k, N natürliche Zahlen, t ein positiver Teiler von N und U eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Für alle $M \in \mathbb{M}(N)_*$ sind dann die Hecke-Operatoren \tilde{T}_M paarweise kommutativ und normal bezüglich des Petersson-Skalarprodukts auf $S_k(\Gamma(U, t, N))$.

8.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1. Seien N eine natürliche Zahl und t ein positiver Teiler von N . Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

(a) Für alle $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ mit $\text{ggT}(a, N) = 1$ und $N \mid c$ gibt es eine Matrix $A \in \Gamma((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, t, N)$ mit

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ggT}(a, c) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Für jedes $M \in \mathbb{M}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, t, N)$ enthält die Linksnebenklasse $\Gamma((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, t, N) \cdot M$ einen Vertreter der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, t, N) \quad \text{mit } a, d, \in \mathbb{N} \text{ und } 0 \leq b < td.$$

(c) Die Doppelnebenklasse $\Gamma((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, t, N) \cdot M \cdot \Gamma((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, t, N)$ für ein beliebiges $M \in \mathbb{M}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, t, N)$ enthält einen Vertreter der Form

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, t, N) \quad \text{mit } e_1, e_2 \in \mathbb{N} \text{ und } e_1 \mid e_2.$$

Hierbei sind die Zahlen e_1 bzw. e_2 eindeutig und durch die Elementarteiler von M gegeben.

Bemerkung: In diesem Spezialfall lässt sich der Beweis von Satz 8.17 genauso wie für die volle Modulgruppe und also erheblich weniger aufwändig als im allgemeinen Fall führen.