Fläche und Volumen

Dr. Hendrik Kasten

17. Mai 2023

Historie

Die Begriffe des **Flächeninhalts** einer ebenen oder gekrümmten Fläche oder des **Volumens** eines räumlichen Körpers erscheinen zunächst selbstverständlich. Daher wurden erst relativ spät die diesen Begriffen innewohnenden grundsätzlichen mathematischen Probleme klar erkannt und gelöst:

- In früheren Jahrhunderten stand nicht die Frage nach einer allgemeingültigen Definition dieser Begriffe im Vordergrund sondern vielmehr die nach der Berechnung ihrer Werte in interessanten Fallbeispielen, wie etwa dem der Kugel durch Archimedes um 250 v. Chr.

Historie

- Erst ab dem 17. Jahrhundert ergaben sich im Zuge der aufkommenden Infinitesimalrechnung allgemeine Formeln, die in der Folge die Behandlung einer gewaltigen Fülle konkreter Probleme erlaubten.
- Im 19. Jahrhundert war schließlich die Zeit reif für eine klare begriffliche Fassung der Grundlagen der Analysis; zentral ist hier die strenge Begründung der Lehre der reellen Zahlen durch Dedekind und Cantor. Die von Cantor geschaffene Mengenlehre bildete schließlich den passenden Rahmen zur Formulierung der Frage nach dem angemessenen Begriff des Volumens einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Problemstellung

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jeweils einen **Inhalt** $\mathrm{vol}(M) \in [0, \infty]$ zuordnen. Durch die Anschauung motiviert fordern wir, dass die so entstandene Funktion

$$\mathrm{vol}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$$

die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Additivität: $\mathrm{vol}(M \cup N) = \mathrm{vol}(M) + \mathrm{vol}(N)$ für je zwei disjunkte Teilmengen M, N von $\mathbb{R}^n$.

Bewegungsinvarianz: $\mathrm{vol}(\varphi(M)) = \mathrm{vol}(M)$ für alle $\varphi \in \mathrm{Bew}(\mathbb{R}^n)$.

Normiertheit: $\mathrm{vol}([0,1]^n) = 1$.

Problemstellung

Inhaltsproblem (Hausdorff, 1914)

Gibt es eine additive, bewegungsinvariante, normierte Funktion $\mathrm{vol}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$?

- Hausdorff (1914): „nein“ für $n \geq 3$.
- Banach (1923): „ja“ für $n \in \{1, 2\}$; allerdings nicht eindeutig.

Zusätzliches Problem: Für die Messung von Inhalten komplizierterer Mengen, etwa von Kreisflächen in $\mathbb{R}^2$, müssen Grenzwerte von Inhalten betrachtet werden. Statt der Additivität fordert man daher stärker die

σ-Additivität: $\mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(M_i)$ für jede Folge $(M_i)_{i=1}^{\infty}$ paarw. disjunkter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Problemstellung

Maßproblem (Lebesgue, 1902)

Gibt es eine σ-additive, bewegungsinvariante, normierte Funktion $\mathrm{vol}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$?

- Vitali (1905): „nein“ für $n = 1$.
- Banach, Tarski (1924): „nein“ für beliebiges n,
  denn: Sei $n \geq 1$ und seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilmengen mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $M_i \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Bewegung $\varphi_i \in \mathrm{Bew}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$M = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \quad \text{und} \quad N = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(M_i).$$

Problemstellung

Fazit

Eine allgemeine Lösung dieser Probleme ist nicht möglich und ein allgemeiner Volumenbegriff für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ lässt sich nicht definieren.

Frage

Lassen sich das Inhaltsproblem und das Maßproblem lösen, wenn man die jeweils gesuchte Funktion vol auf eine geeignete Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ einschränkt, die idealerweise alle „wichtigen“ Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ enthält?

Problemstellung

Wir werden zwei Herangehensweisen an diese Frage näher beleuchten:

- Über **Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit** lässt sich synthetisch eine Lösung des Inhaltsproblems konstruieren, die für sämtliche n-Ecke definiert ist. Dies vermeidet Grenzprozesse, steht in der Tradition von Euklid und findet sich beispielsweise so in Hilberts *Grundlagen der Geometrie* von 1899.
- Aufbauend auf Borels Arbeit aus dem Jahr 1898 konstruierte Lebesgue 1902 mit dem nach ihm benannten **Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}^2$ analytisch eine Lösung des Maßproblems, die für alle offenen und abgeschlossenen Mengen definiert ist. Dieser Volumenbegriff ist in der modernen Mathematik mittlerweile der Standard.

Eine synthetische Lösung des Inhaltsproblems

Unser synthetischer Flächeninhalt ist auf sogenannten Figuren erklärt.

Definition (H)

- *Zwei Dreiecke heißen* ***nicht überlappend****, wenn es keinen Punkt in* P *gibt, der im Inneren beider Dreiecke liegt.*
- *Eine endliche Vereinigung sich paarweise nicht überlappender Dreiecke nennen wir eine* ***Figur****.*

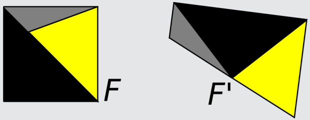
Man kann leicht zeigen, dass endliche Vereinigungen und endliche Durchschnitte von Figuren wieder Figuren sind.

Definition (H)

Zwei Figuren F, F' sind genau dann ***zerlegungsgleich****, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$, zwei n-Tupel sich paarweise nicht überlappender Dreiecke $(\triangle_1, \ldots, \triangle_n)$ und $(\triangle_1', \ldots, \triangle_n')$ und Bewegungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gibt mit*

$$F = \triangle_1 \cup \ldots \cup \triangle_n, \quad F' = \triangle_1' \cup \ldots \cup \triangle_n',$$

$$\text{und } \triangle_i' = \varphi_i(\triangle_i) \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$



Eine synthetische Lösung des Inhaltsproblems

Satz (H)

Zerlegungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Figuren.

Ein über Zerlegungsgleichheit definierter Flächeninhalt ist nicht zwangsläufig additiv. Wir fassen die Begriffe noch ein bisschen weiter:

Definition (H)

- *Ein Punkt heißt* ***innerer Punkt*** *einer Figur, wenn er im Inneren eines Dreiecks liegt, das vollständig in der Figur enthalten ist.*
- *Zwei Figuren heißen* ***nicht überlappend****, wenn sie keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen.*

Eine synthetische Lösung des Inhaltsproblems

Definition (H)

Zwei Figuren F, F' sind genau dann ***ergänzungsgleich****, wenn es zwei weitere Figuren G, G' gibt mit*

1. *F und G sind nicht überlappend.*
2. *F' und G' sind nicht überlappend.*
3. *G und G' sind zerlegungsgleich.*
4. *$F \cup G$ und $F' \cup G'$ sind zerlegungsgleich.*

Eine synthetische Lösung des Inhaltsproblems

Satz (H)

(a) *Ergänzungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Figuren.*

(b) *Zerlegungsgleiche Figuren sind ergänzungsgleich.*

(c) *Sind* F, F' *und* G, G' *zwei Paare ergänzungsgleicher Figuren, so dass* F *und* G *bzw.* F' *und* G' *nicht überlappend sind, dann sind auch* $F \cup G$ *und* $F' \cup G'$ *ergänzungsgleich.*

(d) *Sind* F, F' *und* G, G' *zwei Paare ergänzungsgleicher Figuren mit* $F \subseteq G$ *und* $F' \subseteq G'$*, so sind auch* $G \setminus F$ *und* $G' \setminus F'$ *ergänzungsgleich.*

Eine synthetische Lösung des Inhaltsproblems

In leichter Abwandlung unserer Forderungen vom Anfang definieren wir:

Definition (H)

Bezeichne $\mathcal{F}$ die Menge aller Figuren. Eine Funktion

$$\operatorname{vol}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

heißt ein ***Flächeninhalt****, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

Additivität: $\operatorname{vol}(F \cup G) = \operatorname{vol}(F) + \operatorname{vol}(G)$ *für je zwei nicht überlappende Figuren.*

Bewegungsinvarianz: $\operatorname{vol}(\varphi(F)) = \operatorname{vol}(F)$ *für alle Bewegungen* φ.

Positivität: $\operatorname{vol}(\triangle) > 0$ *für alle Dreiecke* $\triangle \in \mathcal{F}$.

Eine synthetische Lösung des Inhaltsproblems

Satz (H)

Für einen beliebigen Flächeninhalt vol *gilt:*

(a) $\operatorname{vol}(F) > 0$ *für alle Figuren* F *mit nichtleerem Inneren.*

(b) $\operatorname{vol}(F) = \operatorname{vol}(F')$ *für alle zerlegungsgleichen Figuren* F, F'.

(c) $\operatorname{vol}(F) = \operatorname{vol}(F')$ *für alle ergänzungsgleichen Figuren* F, F'.

Satz (E)

Es gibt einen eindeutig bestimmten Flächeninhalt $\operatorname{vol}\colon \mathfrak{F} \to (0, \infty)$ *mit*

△-Normiertheit: $\operatorname{vol}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \|B - A\| \cdot \|C - (h_C \wedge \overleftrightarrow{AB})\|$ *für ein beliebiges Dreieck* $\triangle ABC$.

Eine analytische Lösung des Maßproblems

Für die Definition des Lebesgue-Maßes benötigen wir etwas Maßtheorie:

Definition

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ *heißt eine* ***σ-Algebra*** *über* $\mathbb{R}^2$*, falls gilt:*

1. $\mathbb{R}^2 \in \mathcal{A}$.
2. $M \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad M^c = \mathbb{R}^2 \setminus M \in \mathcal{A}$.
3. $M_1, M_2, M_3, \ldots \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathcal{A}$.

Triviale Beispiele für σ-Algebren über $\mathbb{R}^2$ sind

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \quad \text{und} \quad \mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}.$$

Eine analytische Lösung des Maßproblems

Definition

Für eine beliebige Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ *heißt*

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \ \sigma\text{-Alg. über } \mathbb{R}^2} \mathcal{A}$$

die ***von*** $\mathcal{M}$ ***erzeugte*** σ*-Algebra über* $\mathbb{R}^2$*.*

Man sieht schnell ein, dass $\sigma(\mathcal{M})$ tatsächlich eine σ-Algebra ist – die kleinste, die $\mathcal{M}$ enthält – und dass genau dann $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ gilt, wenn bereits $\mathcal{M}$ selbst eine σ-Algebra ist.

Beispiel

(a) $\sigma(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$.

(b) $\sigma(\{M\}) = \{\emptyset, M, M^c, \mathbb{R}^2\}$ *für jede Teilmenge* $\emptyset \subsetneq M \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Bezeichnet $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ die Standardtopologie von $\mathbb{R}^2$, also das System der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, so heißt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) := \sigma(\mathcal{T})$$

die **Borel-σ-Algebra** von $\mathbb{R}^2$.

Eine analytische Lösung des Maßproblems

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über $\mathbb{R}^2$. Eine Funktion $\mathrm{vol}\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *heißt ein* ***Maß*** *auf $\mathcal{A}$, falls die folgenden zwei Bedingungen gelten:*

- $\mathrm{vol}(M) \geq 0$ *für alle $M \in \mathcal{A}$ und* $\mathrm{vol}(\emptyset) = 0$.
- *σ-Additivität: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ gilt*
$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(A_n).$$

Eine analytische Lösung des Maßproblems

Das **Borel-Maß** auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ist das eindeutig bestimmte (!) Maß vol_B, das Rechtecken ihren anschaulichen Flächeninhalt zuordnet:

$$\mathrm{vol}_B([a,b] \times [c,d]) = (b-a) \cdot (d-c) \quad \text{für alle } a < b \in \mathbb{R}, c < d \in \mathbb{R}.$$

Das **Lebesgue-Maß** ist das Maß vol_L, das man aus diesem Maß erhält, wenn man zu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ alle Mengen M mit

$$\text{Es gibt } M_1, M_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \colon M_1 \subseteq M \subseteq M_2 \text{ und } \mathrm{vol}_B(M_2 \setminus M_1) = 0$$

hinzufügt und $\mathrm{vol}_L(M) := \mathrm{vol}_B(M_1)$ setzt.