Majoranten- und Minorantenkriterium

Montag, 28. Januar 2019 17:09

Majorantenkriterium: Sei $\sum_{k=}^{\infty} a_k$ eine Reihe.
Wenn es eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ gibt mit $|a_k| \leq c_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Minorantenkriterium: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe.
Wenn es eine divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ gibt mit $a_k \geq c_k \geq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Praktische Majoranten / Minoranten:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ $\alpha > 1$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$, $|q| < 1$ konvergieren
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ $\alpha \leq 1$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$, $|q| \geq 1$ divergieren

Woher weiß ich, welches Kriterium ich anwenden soll?

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \rightsquigarrow$ Konvergenzgeschwindigkeit von (a_k) abschätzen

Bsp. 1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{3k^2 - 1}{k^4 + k^3}$

Es gilt: $|a_k| = \frac{\overbrace{3 - \frac{1}{k^2}}^{\leq 3}}{\underbrace{k^2 + k}_{\geq k^2}} \leq \frac{3}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2} = 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergente Majorante

$\Rightarrow \sum$ konvergiert.

Bsp. 2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{k^2}{k^3 - 3}$

Es gilt: $a_k = \frac{1}{k - \frac{3}{k^2}} \geq \frac{1}{k} \geq 0$ für $k \geq 2$. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergente Minorante

$\Rightarrow \sum$ divergiert.

Bsp. 3) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \left(\frac{3 - \frac{1}{k}}{4 + \frac{1}{\sqrt{k}}} \right)^k$

Es gilt: $\frac{3 - \frac{1}{k}\ \} \leq 3}{4 + \frac{1}{\sqrt{k}}\ \} \geq 4} \leq \frac{3}{4} \overset{(\ )^k \text{ monoton}}{\Longrightarrow} a_k \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ ist konvergente Majorante

$\Rightarrow \sum$ konvergiert.