

Modulformen 1

Wintersemester 2023

Vorlesungsskript

Dr. Hendrik Kasten

5. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Möbius-Transformationen	3
1.1	Die Gruppe der Möbius-Transformationen	3
1.2	Fixpunkte von Möbius-Transformationen	6
1.3	Gruppenaktionen via Möbius-Transformationen	10
1.4	Die volle Modulgruppe	16
1.5	Kongruenzuntergruppen	22
1.6	Übungsaufgaben	39
2	Der Begriff der Modulform	43
2.1	Fourier-Entwicklungen	43
2.2	Modularität	52
2.3	Das Petersson-Skalarprodukt	59
2.4	Die Hecke-Abschätzung	65
2.5	Die Valenzformel	69
2.6	Übungsaufgaben	80
3	Modulformen zur vollen Modulgruppe	83
3.1	Eisenstein-Reihen	83
3.2	Der Struktursatz für holomorphe Modulformen	91
3.3	Poincaré-Reihen	98
3.4	Der Struktursatz für meromorphe Modulformen	104
3.5	Übungsaufgaben	107
4	Hecke-Theorie	109
4.1	Die allgemeine Hecke-Algebra	109
4.2	Die Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe	115
4.3	Hecke-Operatoren	123
4.4	Hecke-Eigenformen	128
4.5	Übungsaufgaben	133
5	Der Eichler-Shimura-Isomorphismus	136
5.1	Die Polynomdarstellung	136
5.2	Das Shimura-Produkt	143

5.3	Integration in der erweiterten oberen Halbebene	149
5.4	Der Eichler-Shimura-Isomorphismus	154
5.5	Eichler-Kohomologie	167
5.6	Übungsaufgaben	175

Möbius-Transformationen

In diesem Kapitel behandeln wir mit den Möbius-Transformationen eine spezielle Klasse von Abbildungen, die für die Theorie der Modulformen von grundlegender Bedeutung sind. Erstmals systematisch untersucht wurden die Möbius-Transformationen von ihrem Namensgeber AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790 - 1868).

1.1 Die Gruppe der Möbius-Transformationen

Für eine beliebige invertierbare komplexe (2×2) -Matrix

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \det A \neq 0\}$$

ist durch

$$\varphi_M(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ \infty & \text{für } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

für $c \neq 0$ beziehungsweise

$$\varphi_M(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{d} & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für $c = 0$ eine meromorphe Funktion φ_M auf $\overline{\mathbb{C}}$ gegeben,

denn: Im Fall $c = 0$ ist φ_M offensichtlich ein Polynom von Grad $n = 1$ und insbesondere eine meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$. Im Fall $c \neq 0$ ist $\varphi_M|_{\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}}$ holomorph, und $-\frac{d}{c}$ wegen

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{c} \cdot \frac{1}{z - (-\frac{d}{c})} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(-\frac{d}{c}), r \text{ hinreichend klein,}$$

ein Pol erster Ordnung. Hierbei ist zu beachten, dass $\frac{az+b}{c}$ für $z = -\frac{d}{c}$ wegen $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ von Null verschieden ist. $\varphi_M|_{\mathbb{C}}$ ist also eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} . Desweiteren gilt auf einer kleinen Umgebung von $z = 0$ in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$

$$\hat{\varphi}_M(z) = \varphi_M\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a\frac{1}{z} + b}{c\frac{1}{z} + d} = \frac{a + bz}{c + dz} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{a}{c},$$

die Singularität von φ_M in ∞ ist also hebbar. #

Definition 1.1. Für $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ beliebig heißt die so definierte meromorphe Funktion φ_M eine **Möbius-Transformation**. Für ein gegebenes $z \in \hat{\mathbb{C}}$ schreiben wir dabei oft auch einfacher $M\langle z \rangle$ für $\varphi_M(z)$.

Nach Konstruktion gilt offensichtlich

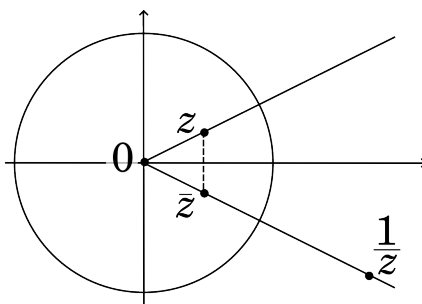
$$\varphi_{\lambda M} = \varphi_M \quad \text{für alle } M \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ und } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Es gibt insbesondere keinen Eins-zu-eins-Zusammenhang zwischen Matrizen aus $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ und Möbius-Transformationen.

Beispiel 1.2. Wählen wir

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}),$$

so erhalten wir die Möbius-Transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$, die insbesondere $M\langle 0 \rangle = \infty$ und $M\langle \infty \rangle = 0$ erfüllt.



Veranschaulichen können wir uns diese als Hintereinanderausführung der Spiegelung an der reellen Achse und der Inversion am Einheitskreis.

Proposition 1.3. (a) Für alle $M, N \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt $\varphi_M \circ \varphi_N = \varphi_{MN}$.

(b) Für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ ist φ_M bijektiv mit Umkehrabbildung $(\varphi_M)^{-1} = \varphi_{M^{-1}}$.

(c) Die Möbius-Transformationen bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Beweis. Behauptung (b) folgt aus (a), wenn man dort M^{-1} für N einsetzt, und Behauptung (c) folgt aus (a) und (b),

denn: Die Assoziativität der Hintereinanderausführung folgt aus (a) und der Assoziativität der Matrizenmultiplikation. $\varphi_{I_2} = \text{id}$ ist offensichtlich das neutrale Element. Nach (b) hat jede Möbius-Transformation schließlich ein Inverses. #

Behauptung (a) kann man schließlich direkt nachrechnen. Mit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

gilt nämlich außerhalb der Sonderfälle

$$\begin{aligned} (\varphi_M \circ \varphi_N)(z) &= \varphi_M\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) = \frac{a \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + b}{c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d} \\ &= \frac{a(a'z + b') + b(c'z + d')}{c(a'z + b') + d(c'z + d')} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \\ &= \varphi_{MN}(z). \end{aligned}$$

Den Rest rechnet man analog nach. (vgl. Übungsaufgabe 1.1) □

Geometrisch sind drei spezielle Typen von Möbius-Transformationen interessant, die wir nun untersuchen wollen. Da man alle anderen Möbius-Transformationen auf diese zurückführen kann, nennt man sie *Elementartypen*. Diese sind

Die Inversion. Der erste Elementartyp ist die bereits studierte Inversion aus Beispiel 1.2.

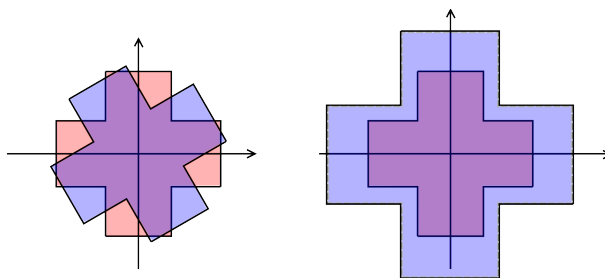
Drehstreckungen. Für

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ist durch

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} az & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

eine Drehstreckung mit Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ und Streckungsfaktor $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben.



Verschiebungen. Für

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit einem beliebigen } b \in \mathbb{C}$$

ist durch

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} z + b & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

eine Verschiebung um den festen Vektor b gegeben.

Proposition 1.4. Die Gruppe der Möbius-Transformationen wird von den Elementartypen erzeugt.

Beweis. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Ist hierbei $c = 0$, so gilt

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & \text{für } z \neq \infty, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

und wir können φ_M als Hintereinanderausführung einer Drehstreckung und einer Translation darstellen.

Ist $c \neq 0$, so errechnet man sofort

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} & \text{für } z \notin \{-\frac{d}{c}, \infty\}, \\ \infty & \text{für } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

Dies lässt sich auf folgende Weise aus Inversionen, Drehstreckungen und Translationen zusammensetzen.

$$z \mapsto cz \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{bc - ad}{c(cz + d)} \mapsto \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \varphi_M(z);$$

die beiden Sonderfälle überprüft man wieder separat. (vgl. Übungsaufgabe 1.2) □

1.2 Fixpunkte von Möbius-Transformationen

Definition 1.5. Sei $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$. Ein Punkt $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ heißt **Fixpunkt** bezüglich der Möbius-Transformation φ_M , falls $\varphi_M(z_0) = z_0$ gilt.

Beispiel 1.6. (a) Für $M = I_2$ ist jeder Punkt Fixpunkt von φ_M .

(b) Für $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat φ_M genau einen Fixpunkt, nämlich $z_0 = \infty$.

(c) Für $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat φ_M genau zwei Fixpunkte, nämlich $z_0 = \infty$ und $z_1 = -1$.

Proposition 1.7. Jede von der Identität verschiedene Möbius-Transformation hat entweder genau einen oder genau zwei Fixpunkte.

Beweis. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $\varphi_M \neq \text{id}$.

Fall 1: $c = 0$. Nach Definition ist dann ∞ ein Fixpunkt von φ_M und wegen $d \neq 0$ können wir

$$\varphi_M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad \text{für alle } z \neq \infty$$

schreiben. Für $a = d$ hat dies keinen weiteren Fixpunkt,

denn: Für $b \neq 0$ ist dies klar, da wir so eine Translation um $\frac{b}{d} \neq 0$ erhalten. Andererseits kann nicht gleichzeitig $c = 0$, $a = d$ und $b = 0$ gelten, da sonst M als skalares Vielfaches der Einheitsmatrix trivial operierte, was wir in unserer Voraussetzung ausgeschlossen hatten. #

Nehmen wir also $a \neq d$ an. Dann gilt

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ Fixpunkt von } \varphi_M \iff \frac{a}{d}z_0 + \frac{b}{d} = z_0 \iff z_0 = \frac{b}{d-a}.$$

In diesem Fall hat also φ_M genau einen oder genau zwei Fixpunkte.

Fall 2: $c \neq 0$. In diesem Fall ist weder ∞ noch $-\frac{d}{c}$ ein Fixpunkt von φ_M . Betrachten wir also $z \notin \{-\frac{d}{c}, \infty\}$. Ähnlich wie in Fall 1 gilt dann

$$\begin{aligned} z_0 \text{ Fixpunkt von } \varphi_M &\iff \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0 \\ &\iff cz_0^2 + (d-a)z_0 - b = 0 \\ &\iff z_0^2 + \frac{d-a}{c}z_0 - \frac{b}{c} = 0 \\ &\iff \left(z_0 + \frac{d-a}{2c}\right)^2 = \frac{b}{c} + \frac{(d-a)^2}{4c^2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat genau dann zwei komplexe Lösungen für $z_0 + \frac{d-a}{2c}$ und somit auch für z_0 , falls die rechte Seite ungleich Null ist. Ist andererseits die rechte Seite gleich Null, so ist offensichtlich $z_0 = -\frac{d-a}{2c}$ die einzige Lösung. Auch in diesem Fall hat also φ_M genau einen oder genau zwei Fixpunkte. \square

Korollar 1.8. Jede Möbius-Transformation ist durch die Angabe der Bilder dreier verschiedener Punkte eindeutig festgelegt.

Beweis. Seien φ und ψ Möbius-Transformationen und seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ mit

$$\varphi(z_k) = \psi(z_k) \quad \text{für } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Da die Möbius-Transformationen nach Proposition 1.3 eine Gruppe bilden, ist $\psi^{-1} \circ \varphi$ wieder eine Möbius-Transformation. Diese hat nach Konstruktion die drei Fixpunkte z_1, z_2, z_3 , ist nach Proposition 1.7 also die Identität. Es folgt $\psi = \varphi$ und somit das Korollar. \square

An dieser Stelle ist die offensichtliche nächste Frage, ob es andersherum auch für vorgegebene Bilder von drei Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ immer eine Möbius-Transformation gibt, die diese annimmt. Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir ein wenig ausholen:

Proposition 1.9. *Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschiedene Punkte und $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ein weiterer Punkt. Seien weiter Abbildungen gegeben wie folgt:*

Für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = z_3, \\ \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2} & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für $z_1 = \infty$:

$$DV(z, \infty, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{z-z_2}{z-z_3} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = z_3, \\ 1 & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für $z_2 = \infty$:

$$DV(z, z_1, \infty, z_3) := \begin{cases} \frac{z_1-z_3}{z-z_3} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = z_3, \\ 0 & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für $z_3 = \infty$:

$$DV(z, z_1, z_2, \infty) := \begin{cases} \frac{z-z_2}{z_1-z_2} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

In jedem Fall ist $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ eine Möbius-Transformation mit

$$DV(z_1, z_1, z_2, z_3) = 1, \quad DV(z_2, z_1, z_2, z_3) = 0 \quad \text{und} \quad DV(z_3, z_1, z_2, z_3) = \infty. \quad (1.1)$$

Für $z \notin \{z_1, z_2, z_3\}$ heißt die Zahl $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ das **Doppelverhältnis** der Punkte z, z_1, z_2, z_3 .

Bemerkung 1.10. (a) Die Spezialfälle für $z_k = \infty$ mit einem $k \in \{1, 2, 3\}$ ergeben sich aus dem endlichen Fall durch den Grenzübergang $z_k \rightarrow \infty$.

(b) Nach Korollar 1.8 ist $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ für gegebene z_1, z_2, z_3 die einzige Möbius-Transformation, die (1.1) erfüllt.

Beweis (Proposition 1.9). Wir zeigen die Proposition nur im Fall $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Die Fälle, in denen einer der Punkte z_1, z_2, z_3 gleich ∞ ist, behandelt man genauso (vgl. Übungsaufgabe 1.4).

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} z_1 - z_3 & -z_2(z_1 - z_3) \\ z_1 - z_2 & -z_3(z_1 - z_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Da nach Voraussetzung die Punkte z_1, z_2, z_3 paarweise verschieden sind, gilt

$$\det M = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3) \neq 0$$

und somit $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$. Wegen

$$\frac{(z_1 - z_3)z - z_2(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)z - z_3(z_1 - z_2)} = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}$$

stimmt $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ in diesem Fall offensichtlich mit der Möbius-Transformation φ_M überein und erfüllt bereits nach Definition

$$DV(z_3, z_1, z_2, z_3) = \infty.$$

Durch Einsetzen in die Formel der Proposition sieht man zudem sofort

$$\begin{aligned} DV(z_1, z_1, z_2, z_3) &= \frac{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_2)} = 1, \\ DV(z_2, z_1, z_2, z_3) &= \frac{(z_2 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_2)} = 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 1.11. Sind (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) jeweils Tripel paarweise verschiedener Punkte aus $\overline{\mathbb{C}}$, so gibt es genau eine Möbius-Transformation φ mit

$$\varphi(z_k) = w_k \quad \text{für } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Beweis. Nach Proposition 1.9 gibt es durch Doppelverhältnisse definierte Möbius-Transformationen φ_1 und φ_2 mit

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= 1, & \varphi_1(z_2) &= 0, & \varphi_1(z_3) &= \infty, \\ \varphi_2(w_1) &= 1, & \varphi_2(w_2) &= 0, & \varphi_2(w_3) &= \infty. \end{aligned}$$

Da die Möbius-Transformationen nach Proposition 1.3 unter Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden, ist auch $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ eine Möbius-Transformation. Nach Konstruktion erfüllt diese die verlangten Eigenschaften. Mit Korollar 1.8 folgt die Eindeutigkeit. □

Proposition 1.12 (Invarianz des Doppelverhältnisses). Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden und $z \in \overline{\mathbb{C}}$ beliebig, und sei φ eine beliebige Möbius-Transformation. Dann gilt

$$DV(\varphi(z), \varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3)) = DV(z, z_1, z_2, z_3).$$

Beweis. Wie im Beweis von Korollar 1.11 eingesehen lässt sich jede Möbius-Transformation φ schreiben als $\varphi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ mit zwei durch Doppelverhältnisse gegebenen Möbius-Transformationen φ_1 und φ_2 , die

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= 1, & \varphi_1(z_2) &= 0, & \varphi_1(z_3) &= \infty, \\ \varphi_2(\varphi(z_1)) &= 1, & \varphi_2(\varphi(z_2)) &= 0, & \varphi_2(\varphi(z_3)) &= \infty. \end{aligned}$$

erfüllen. Das ist äquivalent zu

$$\varphi_2(\varphi(z)) = \varphi_1(z),$$

was nach Einsetzen der Definitionen von φ_1 und φ_2 die Behauptung ergibt. \square

1.3 Gruppenaktionen via Möbius-Transformationen

Spannende Informationen über Möbius-Transformationen erhält man, wenn man sie danach klassifiziert, wie sie auf der RIEMANN'schen Zahlkugel¹ $\overline{\mathbb{C}}$ operieren. Dies untersuchen wir in diesem Abschnitt.

Definition 1.13. Sei $G = (G, \star)$ eine Gruppe und S eine Menge. Man sagt dann, G *operiere* (von links) auf S ,² falls es eine Abbildung

$$\circ : \begin{cases} G \times S & \rightarrow S, \\ (g, s) & \mapsto g \circ s \end{cases}$$

gibt mit

- (i) Das neutrale Element e_G von G erfüllt $e_G \circ s = s$ für alle $s \in S$.
- (ii) Es gilt $(g \star h) \circ s = g \circ (h \circ s)$ für alle $g, h \in G$ und alle $s \in S$.

Weiter nennt man

- $G_s := \{g \in G \mid g \circ s = s\}$ den **Stabilisator** von s in G ,
- $G \circ s := \{g \circ s \mid g \in G\}$ die **Bahn** von s unter G .

Durch $t \sim s :\iff t \in G \circ s$ ist eine Äquivalenzrelation auf S gegeben, und man hat eine disjunkte Zerlegung

$$S = \bigsqcup_j (G \circ s_j),$$

wobei s_j ein Vertretersystem der verschiedenen Bahnen durchläuft. Gibt es dabei nur eine Bahn, so nennt man die Aktion von G auf S auch **transitiv**.

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

²Um nicht mit der Verwendung des Wortes „Operation“ unguete Assoziationen zu wecken, werden wir im Folgenden stets von der **Aktion** der Gruppe G auf der Menge S sprechen, wenn G auf S operiert. Umgekehrt klingt es auch nicht besonders schön zu sagen, die Gruppe G „agiere“ auf S . Unsere Notation ist in diesem Fall also eine zusammengesetzte.

Beispiel 1.14. Die Gruppe $GL_2(\mathbb{C})$ operiert via Möbius-Transformationen

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{C}) \times \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \\ (M, z) &\mapsto \varphi_M(z) \end{aligned}$$

transitiv auf der Riemann'schen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$,

denn: Dass $GL_2(\mathbb{C})$ auf $\overline{\mathbb{C}}$ operiert, folgt mit Teil (a) von Proposition 1.3 und da die Einheitsmatrix offensichtlich trivial operiert. Die Transitivität folgt mit Korollar 1.11. #

Wir wollen nun die Elemente von $GL_2(\mathbb{C})$ danach klassifizieren, wie sie auf $\overline{\mathbb{C}}$ operieren.

Nach dem Satz über die JORDAN'sche Normalform³ ist jedes $M \in GL_2(\mathbb{C})$ zu einer der folgenden Matrizen konjugiert:

- (i) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$,
- (ii) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$,
- (iii) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}^\times$.

In Fall (i) ist hierbei φ_M trivial. In Fall (ii) ist φ_M im Wesentlichen⁴ eine Translation

$$z \mapsto \begin{cases} z + \lambda^{-1} & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

und M heißt *parabolisch*. In Fall (iii) ist die Transformation im Wesentlichen eine Homothetie

$$z \mapsto \begin{cases} cz & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases} \quad \text{mit } c := \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\},$$

und M heißt *elliptisch*, falls $|c| = 1$, *hyperbolisch*, falls $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und *loxodromisch* sonst. Diese Bezeichnungen gelten nicht nur für die jeweilige Matrix M sondern auch für die zugehörige Möbius-Transformation φ_M .

Wir beschränken uns nun auf Matrizen aus $SL_2(\mathbb{C})$ – das ist keine starke Einschränkung, da das Zentrum $\mathbb{C} \cdot I_2$ ja trivial operiert – und können so die Möbius-Transformationen über die Spur der zugehörigen Matrizen klassifizieren.⁵

Proposition 1.15. Sei $M \in SL_2(\mathbb{C}) \setminus \{\pm I_2\}$. Dann gilt

$$M \text{ ist } \begin{cases} \text{parabolisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \in \{\pm 2\}, \\ \text{elliptisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ und } |\operatorname{tr}(M)| < 2, \\ \text{hyperbolisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ und } |\operatorname{tr}(M)| > 2, \\ \text{loxodromisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

³Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

⁴Bis auf den Beitrag der Konjugationsmatrizen: Möbius-Transformationen sind im Allgemeinen nicht konjugationsinvariant. Eine offensichtliche Ausnahme bildet Fall (i), in dem die betrachteten Matrizen im Zentrum liegen.

⁵Das ist naheliegend, da die Spur einer Matrix bekanntlich konjugationsinvariant ist.



Beweis. Wegen $\det M = 1$ und $M \notin \{\pm I_2\}$ ist die Jordan'sche Normalform von M von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C}^\times \setminus \{\pm 1\}.$$

Die erste Äquivalenz ist damit offensichtlich und wir müssen uns nur noch mit Matrizen beschäftigen, deren Normalform vom zweiten Typ ist.

Ist nun M elliptisch, so gilt für das zugehörige λ nach Definition $|\lambda|^2 = \left| \frac{\lambda}{\lambda^{-1}} \right| = 1$; es liegt also auf dem Einheitskreis. Mit $\lambda \notin \{\pm 1\}$ folgt

$$\operatorname{tr}(M) = \lambda + \lambda^{-1} = \lambda + \bar{\lambda} = 2\operatorname{Re}(\lambda) \in (-2, 2) \subseteq \mathbb{R}.$$

Ist M hyperbolisch, so gilt für das zugehörige λ nach Definition $\lambda^2 = \frac{\lambda}{\lambda^{-1}} \in \mathbb{R}_{>0}$ und insbesondere $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es folgt

$$|\operatorname{tr}(M)| = |\lambda| + |\lambda|^{-1} > 2 \iff |\lambda|^2 + 1 > 2|\lambda| \iff (|\lambda| - 1)^2 > 0.$$

Letztere Aussage ist korrekt wegen $\lambda \notin \{\pm 1\}$.

Sei nun umgekehrt M konjugiert zu $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ mit reeller Spur $\lambda + \lambda^{-1}$. Falls λ reell ist, muss M nach Definition hyperbolisch sein. Ist λ nicht reell, so folgt mit $\lambda^{-1} = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2}$ sofort $|\lambda| = 1$ und M ist elliptisch.

Nebenbei haben wir mit dem letzten Argument gezeigt, dass M nicht loxodromisch sein kann, wenn seine Spur reell ist. Die letzte Äquivalenz folgt, da die vier Bedingungen auf der rechten Seite sich paarweise gegenseitig ausschließen. \square

Für unsere Zwecke sind vor allen Dingen reelle Matrizen aus $\operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ von Belang:

Definition 1.16. Für einen Unterring $R \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir die Untergruppe $\operatorname{GL}_2(R)^+ \subseteq \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$ durch

$$\operatorname{GL}_2(R)^+ := \{M \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det M > 0\}.$$

Die Untergruppeneigenschaft $\operatorname{GL}_2(R)^+ \subseteq \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$ begründet sich aus der Tatsache, dass $R^\times \cap (0, \infty)$ eine Untergruppe von R^\times ist. Zu beachten ist, dass für einen Unterring $R \subseteq \mathbb{R}$ die Gruppe $\operatorname{SL}_2(R)$ natürlich eine Untergruppe von $\operatorname{GL}_2(R)^+$ ist. Durch diese reelle Einschränkung gilt:

Proposition 1.17. (a) Die Gruppen $\operatorname{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ operieren transitiv auf der **oberen Halbebene** \mathbb{H} .

(b) Die Gruppen $\operatorname{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ operieren transitiv auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(c) $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})_i = \operatorname{SO}_2(\mathbb{R})$.

(d) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{H}, \\ M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\mapsto M\langle i \rangle \end{aligned}$$

ist eine Bijektion von Mengen.⁶

Beweis. Wegen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ reicht es aus zu zeigen, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ auf der oberen Halbebene \mathbb{H} operiert. Als Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ operiert $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ auf der Riemann'schen Zahlenkugel $\bar{\mathbb{C}}$, so dass es sogar genügt zu zeigen, dass für jedes $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und jedes $z \in \mathbb{H}$ der Bildpunkt $M\langle z \rangle$ wieder in \mathbb{H} liegt. Das ist der Fall, denn in dieser Situation gilt

$$\mathrm{Im}(M\langle z \rangle) = \mathrm{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \mathrm{Im} \left(\frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2} \right) = \frac{\det(M) \cdot \mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0. \quad (1.2)$$

Um die Transitivität der Gruppenaktion zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass es für alle $z = x + iy \in \mathbb{H}$ ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M\langle i \rangle = z$ gibt. Das ist der Fall, denn in dieser Situation gilt

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \langle i \rangle = \frac{\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = x + iy = z.$$

Insgesamt haben wir somit Behauptung (a) gezeigt, denn wegen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ ist die Transitivität für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ offensichtlich.

Zum Beweis von Behauptung (b) stellen wir zunächst fest, dass Matrizen aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ wegen ihrer reellen Einträge offensichtlich Elemente aus $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wieder in diese Menge abbilden und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und also auch $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ somit auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ operiert. Die Transitivität der Aktion folgt, da ein beliebiges $s \in \mathbb{R}$ von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ nach ∞ geschickt wird.

Wir wollen nun Behauptung (c) zeigen. Zum Einen gilt für ein $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$$M\langle i \rangle = i \iff a = d \text{ und } b = -c.$$

Zum Anderen folgt in dieser Situation aus $\det(M) = 1$ auch $a^2 + b^2 = 1$ und wir sind fertig.

Behauptung (d) ergibt sich schließlich wie folgt:

$$\mathbb{H} \stackrel{(a)}{\cong} \{ \{ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid M\langle i \rangle = z \} \mid z \in \mathbb{H} \} \stackrel{(c)}{=} \{ M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \mid M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \}.$$

□

Es fällt nun auf, dass es in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ nach Proposition 1.15 keine loxodromischen Elemente geben kann. Die restlichen Typen lassen sich über die Fixpunkte der zugehörigen Möbius-Transformationen klassifizieren:

⁶Versieht man $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$, so wird diese Bijektion sogar zu einem Homöomorphismus.

⁷Da wir $z \in \mathbb{H}$ gewählt haben, entfällt die bei Möbius-Transformationen sonst übliche Fallunterscheidung und wir können einheitlich $M\langle z \rangle = \frac{az+b}{cz+d}$ schreiben.

Proposition 1.18. Sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$. Dann gilt

$$M \text{ ist } \begin{cases} \text{parabolisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau einen Fixpunkt und dieser liegt in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ \text{elliptisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau zwei Fixpunkte, diese sind zueinander konjugiert} \\ & \text{und einer von ihnen liegt in } \mathbb{H}, \\ \text{hyperbolisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau zwei Fixpunkte und diese liegen in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \end{cases}$$

Beweis. Nach Teil (a) von Proposition 1.17 gibt es zu jedem $z \in \mathbb{H}$ ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M\langle i \rangle = z$. Nach Teil (c) derselben Proposition gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_z &= M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \right\} \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \cdot M^{-1}. \end{aligned}$$

Der Stabilisator von z in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ besteht also ausschließlich aus Matrizen, die in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ konjugiert zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi)$$

sind. Mit der Ausnahme von $\pm I_2$ haben daher Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, die ein $z \in \mathbb{H}$ festlassen, je zwei verschiedene Eigenwerte von Betrag 1, sind definitionsgemäß also elliptisch.

Andererseits ist $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ auch der Stabilisator von $-i$, und mit $M\langle i \rangle = z$ gilt offensichtlich auch $M\langle -i \rangle = \bar{z}$. Ein Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, das ein $z \in \mathbb{H}$ stabilisiert, lässt also auch dessen komplex konjugiertes $\bar{z} \in \overline{\mathbb{H}}$ fest.⁸ Nach Proposition 1.7 hat jede nichttriviale Möbius-Transformation höchstens zwei Fixpunkte in $\overline{\mathbb{C}}$. Es folgt, dass jedes Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ höchstens ein $z \in \mathbb{H}$ stabilisieren kann.

Zusammengefasst: Wenn ein Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ein $z \in \mathbb{H}$ stabilisiert, dann ist es entweder $\pm I_2$ oder elliptisch. In letzterem Fall sind z und \bar{z} die einzigen Fixpunkte.

Sei nun $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ nach Teil (b) von Proposition 1.17 transitiv auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ operiert, gibt es ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M\langle \infty \rangle = s$. Wie für die Stabilisatoren in der oberen Halbebene gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_s = M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_\infty \cdot M^{-1}. \quad (1.3)$$

Der Stabilisator von ∞ lässt sich leicht aus Definition 1.1 ablesen; es gilt nämlich

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

⁸ $\overline{\mathbb{H}}$ bezeichnet hier die untere Halbebene der komplexen Zahlen mit negativem Imaginärteil.

Ein Element von $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ mit mindestens einem Fixpunkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ hat demnach reelle Eigenwerte, ist also entweder parabolisch oder hyperbolisch. Eine parabolische Transformation hat als Konjugat einer Translation offensichtlich nur einen Fixpunkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, eine hyperbolische Transformation als Konjugat der Multiplikation mit einem $c \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ zwei.

Da die Zerlegung von $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ in elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente disjunkt ist, folgt die Proposition. \square

Korollar 1.19. Seien $M \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $M^m \neq \pm I_2$. Dann gilt: M^m ist genau dann elliptisch bzw. parabolisch bzw. hyperbolisch, wenn M es auch ist.

Beweis. Die Rückrichtung folgt unmittelbar aus Proposition 1.18 und der Tatsache, dass wegen (1.3) jede Potenz einer parabolischen Matrix wieder parabolisch ist. Die Hinrichtung folgt dann mit der vollständigen Zerlegung von $SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ in elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente. \square

Definition 1.20. Sei $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ eine Untergruppe. Dann definieren wir

- (a) Ein Punkt $z \in \mathbb{H}$ heißt ein **elliptischer Punkt** bezüglich Γ , wenn es ein elliptisches Element $M \in \Gamma$ gibt mit $M\langle z \rangle = z$.
- (b) Ein Punkt $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt ein **parabolischer Punkt** oder eine **Spitze** bezüglich Γ , wenn es ein parabolisches Element $M \in \Gamma$ gibt mit $M\langle s \rangle = s$.

Proposition 1.21. Sei $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ eine Untergruppe, und sei $z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein elliptischer bzw. parabolischer Punkt bezüglich Γ mit einem elliptischen bzw. parabolischen $M \in \Gamma$ mit $M\langle z \rangle = z$. Dann ist für alle $A \in \Gamma$ auch $A\langle z \rangle$ wieder elliptisch bzw. parabolisch.

Beweis. Mit M ist auch AMA^{-1} elliptisch bzw. parabolisch, und es gilt

$$(AMA^{-1})\langle A\langle z \rangle \rangle = A\langle z \rangle.$$

\square

Definition 1.22. Eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{H}$ heißt **Fundamentbereich** für die Aktion einer Untergruppe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{H} , wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.

- (i) F ist abgeschlossen in \mathbb{H} und hat ein zusammenhängendes Inneres.⁹
- (ii) Jeder Punkt $z \in \mathbb{H}$ ist zu einem Punkt in F äquivalent.
- (iii) Je zwei verschiedene Punkte aus dem Inneren von F sind inäquivalent.

⁹ \mathbb{H} ist mit der Teilraumtopologie bezüglich $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ausgestattet.

1.4 Die volle Modulgruppe

Wir wollen in diesem Abschnitt die gegen Ende von Abschnitt 1.3 eingeführten Begriffe für die Aktion der *vollen Modulgruppe* $SL_2(\mathbb{Z})$ explizit bestimmen:

Proposition 1.23. (a) Die Menge der Spitzen von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist durch $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gegeben.

(b) Jedes parabolische Element von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist von der Form $M \cdot A \cdot M^{-1}$ mit $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ und

$$A \in SL_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Beweis. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ein beliebiges parabolisches Element von $SL_2(\mathbb{Z})$. Nach Proposition 1.18 hat dann φ_M genau einen Fixpunkt s . Ist $s \neq \infty$, so folgt sofort $c \neq 0$ ¹⁰ und es gilt

$$s = M\langle s \rangle = \frac{as + b}{cs + d}.$$

Der Punkt s ist also eine Nullstelle des quadratischen Polynoms

$$\begin{aligned} cX^2 + (d-a)X - b &= cX^2 + (d-a)X + \frac{1-ad}{c} && (ad-bc = \det(M) = 1) \\ &= cX^2 + (d-a)X + \frac{(a+d)^2 - 4ad}{4c} && ((a+d)^2 = \operatorname{tr}(M)^2 = 4) \\ &= cX^2 + (d-a)X + \frac{(a-d)^2}{4c} \\ &= c \cdot \left(X - \frac{a-d}{2c}\right)^2, \end{aligned}$$

also offensichtlich in \mathbb{Q} . Es folgt, dass die Menge der Spitzen in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ enthalten ist.

Umgekehrt ist der Punkt ∞ tatsächlich eine Spitze von $SL_2(\mathbb{Z})$, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = \infty \quad \text{und} \quad \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Ist weiter $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $\operatorname{ggT}(p, q) = 1$, so finden wir mit dem Lemma von BÉZOUT¹¹ zwei ganze Zahlen u, t mit $pt - uq = 1$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} p & u \\ q & t \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} p & u \\ q & t \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = \frac{p}{q}.$$

¹⁰Ist $c = 0$, so liegt M in

$$SL_2(\mathbb{Z})_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Da parabolische Elemente genau einen Punkt aus $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ stabilisieren, folgt entgegen unserer Annahme $s = \infty$.

Mit Proposition 1.21 ist dann auch $\frac{p}{q}$ eine Spitze, so dass wir nun insgesamt Teil (a) der Proposition gezeigt haben.

Teil (b) folgt sofort, da jedes parabolische Element (genau) eine Spitze stabilisiert und die Stabilisatoren der Spitzen gerade die $SL_2(\mathbb{Z})$ -Konjugate von $SL_2(\mathbb{Z})_\infty$ sind. \square

Bemerkung 1.24. Im Beweis von Proposition 1.23 haben wir sogar mehr gezeigt als behauptet, wir haben nämlich gezeigt, dass die Menge der Spitzen von $SL_2(\mathbb{Z})$ nichts anderes als die $SL_2(\mathbb{Z})$ -Bahn von ∞ ist. Die Spitzen von $SL_2(\mathbb{Z})$ bilden also bezüglich der in Definition 1.13 eingeführten Äquivalenzrelation eine Äquivalenzklasse. Nach Bemerkung 18.9 aus der Algebra gilt zudem

$$SL_2(\mathbb{Z}) / SL_2(\mathbb{Z})_\infty \cong SL_2(\mathbb{Z}) \langle \infty \rangle = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}. \quad (1.4)$$

Proposition 1.25. (a) Die Menge der elliptischen Punkte von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist durch $SL_2(\mathbb{Z}) \langle i \rangle \cup SL_2(\mathbb{Z}) \langle \rho \rangle$ mit $\rho = e^{2\pi i/3}$ gegeben.

(b) Jedes elliptische Element von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist von der Form $M \cdot A \cdot M^{-1}$ mit $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ und

$$A \in (SL_2(\mathbb{Z})_i \cup SL_2(\mathbb{Z})_\rho) \setminus \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beweis. Ist M ein elliptisches Element von $SL_2(\mathbb{Z})$, so ist

$$\operatorname{tr}(M) \in \{-1, 0, 1\}$$

nach Proposition 1.15. Für das charakteristische Polynom von M folgt somit

$$\operatorname{charpoly}(M) = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M) \in \{X^2 + 1, X^2 \pm X + 1\}.$$

Nehmen wir nun an, es gelte $\operatorname{charpoly}(M) = X^2 + 1$, das heißt $\operatorname{tr}(M) = 0$ und $\det(M) = 1$. Zu zeigen ist dann, dass jede Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ mit $\det(M) = -a^2 - bc = 1$ konjugiert zu einer der Matrizen $\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Wir können dabei ohne Einschränkung annehmen, dass a von allen Zahlen $a + c\mathbb{Z}$ den kleinsten Absolutbetrag hat und also $|c| \geq 2|a|$ gilt,

denn: Hat $a + ck$ mit $k \in \mathbb{Z}$ den kleinsten Absolutbetrag aller Zahlen $a + c\mathbb{Z}$, so betrachten wir statt M die dazu konjugierte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ck & -2ak - ck^2 + b \\ c & -(a + ck) \end{pmatrix}.$$

#

Ohne Einschränkung dürfen wir dann außerdem $|b| \leq |a|$ annehmen,

denn: Gilt nämlich $|b| > |a|$, so folgt

$$1 = \det(M) = -a^2 - bc \stackrel{-bc > 0}{=} -a^2 + |b||c| \geq -a^2 + 2|a||b| > -a^2 + 2a^2 = a^2$$

¹¹Étienne Bézout (1730-1783)

und somit $a = 0$. Es folgt $M \in \{\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$, und wir sind fertig. #

Es gibt daher eine Zahl $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, für die die Diagonaleinträge der zu M konjugierten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \varepsilon b & b \\ -2\varepsilon a + c - b & -(a + \varepsilon b) \end{pmatrix}.$$

einen echt kleineren Absolutbetrag haben als a . Ist dieser Betrag gleich Null, so ist die neue Matrix in $\{\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ enthalten, und wir sind fertig. Ansonsten wiederholen wir die gesamte Argumentation rekursiv mit der jeweils neu erhaltenen Matrix. Da der Absolutbetrag der Diagonaleinträge dabei in jedem Schritt echt kleiner wird, terminiert dieser Algorithmus, und die Behauptung ist bewiesen.

Ganz ähnlich zeigt man den Fall $\text{charpoly}(M) = X^2 \pm X + 1$ (*Übung!*) und somit Behauptung (b). Behauptung (a) folgt, indem man für jedes elliptische Element $M \cdot A \cdot M^{-1}$ die quadratische Gleichung $MAM^{-1}\langle z \rangle = z$ löst. Wegen

$$MAM^{-1}\langle M\langle z \rangle \rangle = M\langle z \rangle \iff A\langle z \rangle = z$$

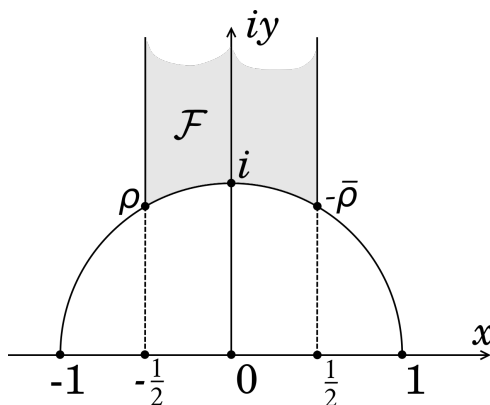
genügt es dabei, die speziellen Matrizen aus Aussage (b) zu betrachten. \square

Bemerkung 1.26. Analog zur Bemerkung nach Proposition 1.23 stellen wir fest, dass es zwei Äquivalenzklassen elliptischer Punkte von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt, die durch i und ρ vertreten werden.

Satz 1.27. Die Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1 \text{ und } |\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

ist ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} und wird auch als **Standardfundamentalbereich** bezeichnet.



Beweis. Wir müssen die drei Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 1.22 überprüfen. Bedingung (i), also die Abgeschlossenheit und der Zusammenhang des Inneren, ist klar.

Wir wollen nun Bedingung (ii) überprüfen und erinnern uns daran, dass nach (1.2)

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gilt. Jede Bahn $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle$ in \mathbb{H} enthält Punkte maximalen Imaginärteils und diese sind charakterisiert durch

$$\operatorname{Im}(w) \text{ maximal in } \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle \iff |cw+d| \geq 1 \text{ für alle } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \operatorname{ggT}(c, d) = 1,$$

denn: Für ein festes $z \in \mathbb{H}$ definiert die Ungleichung $|cz+d| \leq 1$ ein Kompaktum in \mathbb{R}^2 . Der Durchschnitt dieses Kompaktums mit dem Gitter $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$ ist endlich, so dass die Ungleichung nur endlich viele Lösungen $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ hat. Es gilt andererseits

$$|cz+d| \leq 1 \iff \operatorname{Im}(M\langle z \rangle) \geq \operatorname{Im}(z) \quad \text{für alle } M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Da der Imaginärteil von $M\langle z \rangle$ nur von der zweiten Zeile von M abhängt, gibt es innerhalb einer Bahn Punkte maximalen Imaginärteils.

Sei nun $w \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(w) \text{ maximal in } \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle &\iff \operatorname{Im}(w) \geq \operatorname{Im}(M\langle z \rangle) \text{ für alle } M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &\iff \operatorname{Im}(w) \geq \operatorname{Im}(M\langle w \rangle) \text{ für alle } M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &\iff |cw+d| \geq 1 \text{ für alle } \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Äquivalenz benutzt haben, dass w und z in derselben Bahn liegen. Die Behauptung folgt mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \implies ad - bc = \det(M) = 1 \implies \operatorname{ggT}(c, d) = 1$$

und

$$(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } \operatorname{ggT}(c, d) = 1 \implies \exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } ad - bc = 1,$$

wobei sich die letzte Folgerung aus dem Lemma von Bézout ergibt. #

Nun nutzen wir aus, dass der Imaginärteil unter Anwendung von Translationen $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{Z}$ unverändert bleibt. Offensichtlich gibt es für jedes $w \in \mathbb{H}$ ein $b \in \mathbb{Z}$ mit

$$\left| \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle w \rangle\right) \right| = |\operatorname{Re}(w+b)| \leq \frac{1}{2}.$$

Wir haben also gezeigt, dass jeder Punkt $z \in \mathbb{H}$ zu einem Punkt in

$$\mathcal{F}' := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |cz+d| \geq 1 \text{ für alle } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \operatorname{ggT}(c, d) = 1 \text{ und } |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

äquivalent ist. Bedingung (ii) folgt, wenn wir $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ zeigen können. Dem ist aber so,

denn: Wegen $\text{ggT}(1,0) = 1$ ist offensichtlich $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Sei jetzt umgekehrt $z = x + iy \in \mathcal{F}$, und seien $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(c, d) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= (cx + d)^2 + c^2y^2 = c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2 = c^2|z|^2 + 2cd\text{Re}(z) + d^2 \\ &\stackrel{z \in \mathcal{F}}{\geq} c^2 - |cd| + d^2 \geq 1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung gilt, weil die quadratische Form $X^2 - XY + Y^2$ positiv definit ist.¹² #

Es verbleibt Bedingung (iii) zu zeigen. Seien dafür z, w zwei Punkte aus dem Inneren von \mathcal{F} mit $w = M\langle z \rangle$ für ein $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, es gelte

$$\text{Im}(z) \leq \text{Im}(w) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

und somit

$$|c| \cdot \text{Im}(z) = |\text{Im}(cz + d)| \leq |cz + d| \leq 1. \quad (1.5)$$

Nach Definition von \mathcal{F} gilt $\text{Im}(z) > \text{Im}(\rho) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nach (1.5) folgt daraus $|c| \leq 1$.

Fall 1: $|c| = 1$. Aus (1.5) erhalten wir sofort $|z \pm d| \leq 1$. Andererseits gilt

$$|z + \tilde{d}| > 1 \quad \text{für alle } (z + \tilde{d}) \in (\mathcal{F} + \tilde{d}) \text{ mit } \tilde{d} \in \mathbb{Z},$$

so dass der Fall $|c| = 1$ nicht eintreten kann.

Fall 2: $c = 0$. Wegen $\det(M) = ad = 1$ gilt dann $a = d \in \{\pm 1\}$ und somit

$$w = M\langle z \rangle = z \pm b.$$

Da z und w beide im Inneren von \mathcal{F} liegen, folgt $b = 0$ und somit $w = z$.

Insgesamt folgt, dass z und w aus dem Inneren von \mathcal{F} nur dann äquivalent sein können, wenn sie übereinstimmen. \square

¹²Eine (binäre) quadratische Form $q(X, Y)$ heißt *positiv semidefinit*, wenn

$$q(x, y) \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

gilt. Erfüllt sie zusätzlich

$$q(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0),$$

so heißt die Form *positiv definit*. Das ist die von uns benutzte Eigenschaft. In Definition 22.13 aus der Linearen Algebra ist festgelegt, dass $q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ genau dann positiv (semi-)definit ist, wenn die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

diese Eigenschaft hat. Im Fall von $q(X, Y) = X^2 - XY + Y^2$ lassen sich die Eigenwerte leicht zu $\lambda_1 = \frac{1}{2} > 0$ und $\lambda_2 = \frac{3}{2} > 0$ berechnen; die quadratische Form ist also tatsächlich positiv definit.



Korollar 1.28. Die Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ wird erzeugt von den Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei $\langle S, T \rangle \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ die von S und T erzeugte Untergruppe und $z \in \mathbb{H}$. Dann gibt es ein $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$ mit $\tilde{M}\langle z \rangle \in \mathcal{F}$,

denn: Wie im Beweis von Bedingung (ii) in Satz 1.27 sehen wir ein, dass jede $\langle S, T \rangle$ -Bahn in \mathbb{H} Elemente maximalen Imaginärteils enthält, und wählen ein $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$, für das $\tilde{M}\langle z \rangle$ maximalen Imaginärteil hat. Wieder wie im Beweis von Bedingung (ii) in Satz 1.27 finden wir eine ganze Zahl b mit

$$|\operatorname{Re}((T^b \tilde{M})\langle z \rangle)| \leq \frac{1}{2}.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass der Betrag von $w := (T^b \tilde{M})\langle z \rangle$ mindestens 1 ist. Nehmen wir dafür an, es gälte $|w| < 1$. Dann erhielten wir nach Anwendung von $S \in \langle S, T \rangle$

$$\operatorname{Im}(S\langle w \rangle) = \frac{\operatorname{Im}(w)}{|w|^2} > \operatorname{Im}(w),$$

was nicht sein kann, da ja der Imaginärteil von w als maximal in $\langle S, T \rangle\langle z \rangle$ gewählt war. #

Wir wählen nun einen festen Punkt z_0 im Inneren von \mathcal{F} und eine Matrix $M \in SL_2(\mathbb{Z})$. Nach der soeben gezeigten Behauptung gibt es dann ein $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$ mit $(\tilde{M}M)\langle z_0 \rangle \in \mathcal{F}$. Da \mathcal{F} insbesondere Bedingung (iii) für Fundamentalbereiche erfüllt und z_0 im Inneren von \mathcal{F} gewählt war, folgt $(\tilde{M}M)\langle z_0 \rangle = z_0$. Da es nach Proposition 1.25 und der Definition von \mathcal{F} im Inneren von \mathcal{F} keine elliptischen Punkte gibt, folgt $(\tilde{M}M) \in \{\pm I_2\}$ nach Proposition 1.18 und somit

$$M \in \langle -I_2, S, T \rangle \stackrel{S^2 = -I_2}{=} \langle S, T \rangle.$$

□

Korollar 1.29. Für einen Punkt $z \in \mathcal{F}$ ist der Stabilisator in $SL_2(\mathbb{Z})$ gegeben durch

$$SL_2(\mathbb{Z})_z = \begin{cases} \langle S \rangle & \text{falls } z = i, \\ \langle ST \rangle & \text{falls } z = \rho, \\ \langle TS \rangle & \text{falls } z = -\bar{\rho}, \\ \langle -I_2 \rangle & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ordnung der erzeugenden Gruppenelemente ist hierbei 2 im Falle von $-I_2$, 4 im Falle von S und 6 im Falle von ST bzw. TS .

Beweis. Folgt direkt aus Satz 1.27 und Proposition 1.25. □

1.5 Kongruenzuntergruppen

In diesem Abschnitt wollen wir eine besonders wichtige Klasse von Untergruppen der vollen Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ betrachten, die sogenannten Kongruenzuntergruppen. Um diese einzuführen müssen wir ein wenig ausholen. Für jedes $N \in \mathbb{N}^{13}$ ist durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + N\mathbb{Z} & b + N\mathbb{Z} \\ c + N\mathbb{Z} & d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ mit Kern

$$\Gamma(N) := \{M \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid M \equiv I_2 \pmod{N}\}$$

gegeben. Nach **Bemerkung 2.10** aus der Algebra ist daher $\Gamma(N)$ ein *Normalteiler*, es gilt also $M^{-1}\Gamma(N)M = \Gamma(N)$ für alle $M \in SL_2(\mathbb{Z})$. Wir halten fest:

Proposition 1.30. *Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist die kanonische Projektion $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\Gamma(N)$. Insbesondere gilt die Isomorphie von Gruppen*

$$SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N) \cong SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Beweis. Für $N = 1$ ist die Proposition klar, sei im Folgenden also $N > 1$. Weiter gilt offenbar Homomorphie und $\Gamma(N)$ ist nach Konstruktion der Projektionskern. Es verbleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei dafür

$$M = \begin{pmatrix} a + N\mathbb{Z} & b + N\mathbb{Z} \\ c + N\mathbb{Z} & d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

beliebig. Dann gilt $\text{ggT}(c, d, N) = 1$,

denn: Nach Voraussetzung ist $ad - bc + N\mathbb{Z} = 1 + N\mathbb{Z}$, also $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$ und schließlich $\text{ggT}(c, d) \equiv 1 \pmod{N}$. Hieraus folgt $\text{ggT}(\text{ggT}(c, d), N) = 1$ und somit die Behauptung. #

Daher existieren zueinander teilerfremde $\tilde{c} = c + sN$ und $\tilde{d} = d + tN$ mit $s, t \in \mathbb{Z}$,

denn: Im Fall $c \neq 0$ setzen wir $s = 0$ und finden mit dem Chinesischen Restsatz ein $t \in \mathbb{Z}$ mit

$$t \equiv \begin{cases} 1 \pmod{p} & \text{für } p \mid \text{ggT}(c, d), \\ 0 \pmod{p} & \text{für } p \nmid d, p \mid c. \end{cases}$$

Dann teilt einerseits jeder Primfaktor von $\text{ggT}(c, d)$ weder N noch t und daher auch nicht $\text{ggT}(c, d + tN)$. Andererseits ist jeder Primfaktor von c , der d nicht teilt, nach Konstruktion ein Teiler von t und teilt somit ebenfalls nicht $\text{ggT}(c, d + tN)$. Das zeigt die Behauptung in diesem Fall. Im Fall $c = 0$ gilt $d \neq 0$ wegen $N > 1$ und wir können ein analoges Argument angeben. #

¹³In diesem Skript ist Null keine natürliche Zahl und wir schreiben stets $\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ sowie $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.



Zu M betrachten wir nun das Urbild

$$\tilde{M} := \begin{pmatrix} a + kN & b + lN \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$$

unter der kanonischen Projektion, wobei $k, l \in \mathbb{Z}$ zunächst noch beliebig sind. Wegen $a\tilde{d} - b\tilde{c} \equiv 1 \pmod{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$\det(\tilde{M}) = a\tilde{d} - b\tilde{c} + (k\tilde{d} - l\tilde{c})N = 1 + (m + k\tilde{d} - l\tilde{c})N.$$

Da \tilde{c} und \tilde{d} teilerfremd sind, können nun nach dem Lemma von Bézout k und l so gewählt werden, dass $m + k\tilde{d} - l\tilde{c} = 0$ und somit $\tilde{M} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt. Damit ist die Projektion in der Tat surjektiv, und nun folgt die Behauptung mit dem Homomorphiesatz. \square

Korollar 1.31. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist der Index¹⁴ der Untergruppe $\Gamma(N)$ in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ endlich. Genauer gilt

$$[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = |\text{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N^3 \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} (1 - p^{-2}).$$

Beweis. Nach Proposition 1.30 genügt es zum Beweis des Korollars die Ordnung der Gruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ zu bestimmen. Sei dafür $N = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p}$ die Primfaktorzerlegung von N . Nach dem Chinesischen Restsatz gilt dann

$$|\text{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = \prod_{p \text{ prim}} |\text{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})|.$$

Das Korollar folgt also, wenn wir

$$|\text{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})| = p^{3v_p}(1 - p^{-2}) \quad \text{für alle Primzahlen } p \mid N$$

zeigen können. Wegen der offensichtlichen Zerlegung

$$\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z}) = \bigcup_{x+p^{v_p}\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^\times} \begin{pmatrix} x + p^{v_p}\mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 1 + p^{v_p}\mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})$$

nach Nebenklassen gleicher Determinante folgt das Korollar dann genauso aus

$$\begin{aligned} |\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})| &= \varphi(p^{v_p}) \cdot p^{3v_p}(1 - p^{-2}) \\ &= p^{4v_p}(1 - p^{-1})(1 - p^{-2}) \quad \text{für alle Primzahlen } p \mid N. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass letztere Aussage tatsächlich korrekt ist. Zunächst gibt es

$$p^{2v_p} - p^{2v_p-2} = p^{2v_p}(1 - p^{-2})$$

Möglichkeiten, die erste Spalte einer Matrix aus $\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})$ zu wählen,

¹⁴Der **Index** $[G : H]$ einer Untergruppe H in einer Gruppe G ist definiert als die Mächtigkeit der Menge (sic!) $H \backslash G$ der Linksnebenklassen.

denn: Wir müssen genau diejenigen Vektoren ausschließen, die sich vom Nullvektor additiv um ein Element der Menge

$$p \cdot (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x + p^{v_p}\mathbb{Z} \\ y + p^{v_p}\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^2 : p \mid x \text{ und } p \mid y \right\}$$

unterscheiden. Die Behauptung folgt, da $p \cdot (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^2$ offenbar genau p^{2v_p-2} Elemente hat. #

Weiter gibt es

$$p^{2v_p} - p^{2v_p-1} = p^{2v_p}(1 - p^{-1})$$

Möglichkeiten für die zweite Spalte einer solchen Matrix,

denn: Wir müssen genau diejenigen Vektoren ausschließen, die sich von einem skalaren Vielfachen der ersten Spalte additiv um ein Element der Menge $p \cdot (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^2$ unterscheiden. Nach Konstruktion ist mindestens einer der Einträge der ersten Spalte eine Einheit, so dass sich die Produkte der ersten Spalte mit den Skalaren aus $(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})$ paarweise unterscheiden. Modulo $p \cdot (\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})^2$ stimmen diese Produkte genau dann überein, wenn die zugehörigen Skalare modulo p übereinstimmen. Es folgt, dass wir insgesamt $p \cdot p^{2v_p-2} = p^{2v_p-1}$ Elemente ausschließen, und somit die Behauptung. #

Das Korollar folgt, da wir so die Ordnung von $GL_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})$ in Übereinstimmung mit der oben postulierten Formel berechnet haben. \square

Definition 1.32. Die oben eingeführten Gruppen $\Gamma(N)$ für $N \in \mathbb{N}$ heißen die **Hauptkongruenzuntergruppen** von $SL_2(\mathbb{Z})$. Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$, die eine Hauptkongruenzuntergruppe enthält, nennt man **Kongruenzuntergruppe** von $SL_2(\mathbb{Z})$.

Korollar 1.33. Für jede Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] < \infty,$$

der Index von Γ in $SL_2(\mathbb{Z})$ ist also endlich.

Beweis. Nach Definition 1.32 gibt es zu jeder Kongruenzuntergruppe Γ eine natürliche Zahl N mit

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z}).$$

Es folgt, dass sich jede Linksnebenklasse aus $\Gamma \backslash SL_2(\mathbb{Z})$ als Vereinigung von Linksnebenklassen aus der nach Korollar 1.31 endlichen Menge $\Gamma(N) \backslash SL_2(\mathbb{Z})$ schreiben lässt, und somit das Korollar. \square

Die Umkehrung von Korollar 1.33 ist nicht richtig: Es gibt durchaus auch Untergruppen von endlichem Index in $SL_2(\mathbb{Z})$, die keine Kongruenzuntergruppen von $SL_2(\mathbb{Z})$ sind. Diese werden **Nichtkongruenzuntergruppen** von $SL_2(\mathbb{Z})$ genannt und machen auf geeignete Weise gemessen sogar die Mehrheit der Untergruppen von endlichem Index in $SL_2(\mathbb{Z})$ aus. In der Theorie der Modulformen beschränkt man sich jedoch ihrer reichen Struktur halber zumeist auf das Studium von Kongruenzuntergruppen und das werden wir in diesem Skript auch so halten.

Beispiel 1.34. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sind

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}$$

Kongruenzuntergruppen.

Nach Korollar 1.33 haben Kongruenzuntergruppen endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, es gibt also für jede Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein $n \in \mathbb{N}$ und Matrizen $A_1, \dots, A_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{v=1}^n \Gamma A_v. \quad (1.6)$$

Da die negative Einheitsmatrix $-I_2$ trivial operiert, aber nicht in jeder Kongruenzuntergruppe enthalten sein muss, ist es für viele Anwendungen von Vorteil, sich dieser Matrix zu entledigen. Für eine beliebige Untergruppe $G \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ führen wir daher die Notation

$$\overline{G} := G \cdot \{\pm I_2\} / \{\pm I_2\}$$

ein. Dabei nennen wir bequemlichkeitshalber die Elemente von \overline{G} Matrizen und rechnen mit ihnen wie mit Elementen aus G .¹⁵ Hat G endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, so folgt offensichtlich

$$\varepsilon \cdot [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{G}] = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : G] \quad \text{mit } \varepsilon \in \{1, 2\}.$$

Sei nun $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Statt der Zerlegung (1.6) von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in Γ -Nebenklassen betrachten wir nun eine Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\overline{\Gamma}$ -Nebenklassen

$$\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \bigsqcup_{\mu=1}^m \overline{\Gamma} A_\mu \quad \text{mit } A_1, \dots, A_m \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \quad (1.7)$$

wobei in der oben eingeführten Notation $m = n/\varepsilon$ gilt.

Beispiel 1.35. Sei N eine natürliche Zahl. In diesem Beispiel konstruieren wir im Falle der Kongruenzuntergruppen $\Gamma_0(N)$ bzw. $\Gamma_1(N)$ konkrete Zerlegungen in der Form von (1.6). Hierfür betrachten wir zunächst die Menge

$$P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} c + N\mathbb{Z} \\ d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \mid \text{es gibt } a + N\mathbb{Z}, b + N\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \text{mit } (a + N\mathbb{Z})(d + N\mathbb{Z}) - (b + N\mathbb{Z})(c + N\mathbb{Z}) = 1 + N\mathbb{Z} \right\}$$

¹⁵Offensichtlich lässt sich jeder Matrix aus G ein eindeutiger Vertreter in \overline{G} zuordnen, so dass wir auch sinnhaft eine Multiplikation von Matrizen aus G mit Matrizen aus \overline{G} definieren können, die ihre Werte in \overline{G} annimmt.

und lassen die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ via Skalarmultiplikation darauf operieren. Diese Aktion definiert eine Äquivalenzrelation \sim auf $P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, deren Klassen durch die Bahnen

$$(c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z}) := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \cdot \begin{pmatrix} c + N\mathbb{Z} \\ d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} c + N\mathbb{Z} \\ d + N\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$$

gegeben sind. Für die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen schreiben wir

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) := P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) / \sim.$$

Dann ist die Abbildung

$$\pi_0: \begin{cases} \Gamma_0(N) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \\ \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto (c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z}) \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv,

denn: Für ein beliebiges $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und einen beliebigen Vertreter $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Nebenklasse $\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} \pi_0\left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \pi_0\left(\begin{pmatrix} * & * \\ ar + cs & br + ds \end{pmatrix}\right) \\ &= (ar + cs + N\mathbb{Z} : br + ds + N\mathbb{Z}) \\ &\stackrel{N|r}{=} (cs + N\mathbb{Z} : ds + N\mathbb{Z}) \\ &= (c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

so dass die Abbildung π_0 wohldefiniert ist.

Für ein beliebiges $(c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z}) \in P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ finden wir offensichtlich ein Urbild unter π_0 , indem wir die Einträge $c + N\mathbb{Z}$ und $d + N\mathbb{Z}$ einzeln von $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ nach \mathbb{Z} liften und das so entstandene Paar mit dem Lemma von Bézout zu einer Matrix in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ergänzen. Die Abbildung π_0 ist also auch surjektiv.

Zum Nachweis der Injektivität von π_0 betrachten wir nun zwei Restklassen

$$\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix},$$

deren Bilder unter π_0 übereinstimmen, für die es also ein $\lambda + N\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ mit

$$(\lambda + N\mathbb{Z})(c + N\mathbb{Z}) = (\tilde{c} + N\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad (\lambda + N\mathbb{Z})(d + N\mathbb{Z}) = (\tilde{d} + N\mathbb{Z})$$

gibt. Hieraus folgt sofort

$$\tilde{c}d - c\tilde{d} \equiv \lambda cd - c\lambda d \equiv 0 \pmod{N}.$$

Die Behauptung folgt, da letzteres gleichbedeutend zu

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \in \Gamma_0(N)$$

ist und also dazu, dass die zwei gegebenen Restklassen übereinstimmen. #

Als Spezialfall von (1.6) folgt hieraus sofort

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{(c+N\mathbb{Z}:d+N\mathbb{Z}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

wobei c, d so gewählt seien, dass $(c + N\mathbb{Z} : d + N\mathbb{Z})$ ein Vertretersystem von $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ durchlaufe und a, b im Sinne des Bijektivitätsbeweises von π_0 zu jeder Vorgabe von c, d beliebig so gewählt seien, dass $ad - bc = 1$ erfüllt ist. Es gilt daher

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = |\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad (1.9)$$

denn: Die erste Identität folgt unmittelbar aus dem zuvor Hergeleiteten. Weiter ist die rechte Seite der zweiten Identität offensichtlich schwach multiplikativ und nach dem Chinesischen Restsatz trifft das auf ihre linke Seite zu. Es reicht daher zu zeigen, dass die zweite Identität für $N = p^r$ mit einer beliebigen Primzahl p und einer beliebigen natürlichen Zahl r gilt. In diesem Fall gilt aber offensichtlich

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{j=0}^{p^r-1} \{(j + p^r\mathbb{Z} : 1 + p^r\mathbb{Z})\} \sqcup \bigsqcup_{j=0}^{p^{r-1}-1} \{(1 + p^r\mathbb{Z} : jp + p^r\mathbb{Z})\}$$

und also

$$|\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})| = p^r + p^{r-1} = p^r \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

was auch die zweite Identität zeigt. Tatsächlich erhalten wir im behandelten Spezialfall ein besonders übersichtliches Vertretersystem im Sinne von (1.6), es gilt nämlich:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{j=0}^{p^r-1} \Gamma_0(p^r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix} \sqcup \bigsqcup_{j=0}^{p^{r-1}-1} \Gamma_0(p^r) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & pj \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

#

Weiter lässt sich auch schnell zeigen, dass die Abbildung

$$\pi_1 : \begin{cases} \Gamma_1(N) \setminus \Gamma_0(N) & \rightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, \\ \Gamma_1(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto d + N\mathbb{Z} \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Nach (1.8) und der Konstruktion von $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ folgt hieraus als Spezialfall von (1.6) sofort

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{\substack{(c+N\mathbb{Z}) \\ (d+N\mathbb{Z}) \in P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})}} \Gamma_1(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei c, d so gewählt seien, dass $\begin{pmatrix} c+N\mathbb{Z} \\ d+N\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ ein Vertretersystem von $P(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ durchlaufe und a, b zu jeder Vorgabe von c, d beliebig so gewählt seien, dass $ad - bc = 1$ erfüllt ist. Es gilt daher

$$\begin{aligned} [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_1(N)] &= [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] \cdot [\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)] \\ &\stackrel{(1.9)}{=} N \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \varphi(N) \\ &= N \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot N \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= N^2 \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \end{aligned}$$

Da die Kongruenzuntergruppen Teilmengen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sind, müssen auch die zugehörigen Mengen von elliptischen und parabolischen Elementen in den entsprechenden Mengen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ enthalten sein. Das trifft dann nach Definition auch auf die elliptischen bzw. parabolischen Punkte zu. Tatsächlich stimmt die Menge der Spitzen bezüglich einer Kongruenzuntergruppe mit derjenigen bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ überein:

Proposition 1.36. Die Menge der Spitzen bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist durch $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gegeben.

Beweis. Die eine Inklusion ist klar: Jede Spitze bezüglich Γ ist nach Definition insbesondere eine Spitze bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und somit nach Proposition 1.23 in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Wir wollen nun zeigen, dass umgekehrt auch jedes $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ tatsächlich eine Spitze bezüglich Γ ist. Da Γ eine Kongruenzuntergruppe ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, für das die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ in Γ enthalten ist. Mit derselben Argumentation wie gerade eben langt es dann zu zeigen, dass s von einem parabolischen Element aus $\Gamma(N)$ stabilisiert wird. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit $M(\infty) = s$. Dann gilt

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - Nac & Na^2 \\ -Nc^2 & 1 + Nac \end{pmatrix} \in \Gamma(N),$$

wobei wir im letzten Schritt $ad - bc = \det(M) = 1$ verwendet haben. Die Behauptung folgt, da $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ den Punkt ∞ stabilisiert. \square

In Bemerkung 1.24 haben wir gezeigt, dass alle Spitzen in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ in derselben $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Bahn liegen. Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe Γ stimmt das nicht mehr: Hier kann die Menge der Spitzen in mehrere Γ -Bahnen zerfallen. Jede solche Γ -Bahn nennt man eine **Spitzenklasse** bezüglich Γ . Zu einer gegebenen Spitze s bezüglich Γ nennen wir die Spitzenklasse $\mathfrak{s} := \Gamma \langle s \rangle$; die Menge der Spitzenklassen bezüglich Γ bezeichnen wir mit $\mathrm{Cusps}(\Gamma)$.

Proposition 1.37. *Die Menge der Spitzenklassen in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist endlich.*

Beweis. Da der Index von Γ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ endlich ist, können wir in der Notation von (1.7)

$$\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \langle \infty \rangle = \bigcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} A_\mu \langle \infty \rangle$$

schreiben. Offensichtlich enthält also die Menge $\{A_1 \langle \infty \rangle, \dots, A_m \langle \infty \rangle\}$ ein Vertretersystem der Spitzenklassen bezüglich Γ , und die Proposition ist gezeigt. \square

Beispiel 1.38. *Es gilt*

$$\mathrm{Cusps}(\Gamma_0(2)) = \{\Gamma_0(2) \langle \infty \rangle, \Gamma_0(2) \langle 0 \rangle\},$$

denn: Nach (1.10) gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und wegen $-I_2 \in \Gamma_0(2)$ können wir diese Zerlegung unverändert als Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\overline{\Gamma_0(2)}$ -Restklassen übernehmen. Nach den Überlegungen im Beweis von Proposition 1.37 enthält daher die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle \right\} = \{\infty, 1, 0\}$$

ein Vertretersystem der Spitzenklassen bezüglich $\Gamma_0(2)$. Wegen $T \in \Gamma_0(2)$ und $T \langle 0 \rangle = 1$ sind dabei einerseits die Spitzen 0 und 1 äquivalent. Andererseits ist die Menge der Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, die ∞ auf 0 abbilden, durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a = 0 \right\}$$

gegeben und hat offensichtlich leeren Durchschnitt mit $\Gamma_0(2)$. Es folgt, dass ∞ und 0 in verschiedenen Spitzenklassen liegen, und insgesamt die Behauptung. $\#$

Einer gegebenen Spitzenklasse lässt sich mit der sogenannten Breite eine quantifizierende Invariante zuordnen. Diese wollen wir nun einführen und müssen dafür zunächst ein wenig ausholen:

Lemma 1.39. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und seien $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$, $s \in \mathfrak{s}$ sowie $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle\infty\rangle = s$ beliebig. Dann hängt die Menge

$$H_s := H_{\mathfrak{s}} := M^{-1}\Gamma M \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \quad (1.11)$$

nicht von der Wahl von s und M ab und trägt die Struktur einer Untergruppe von endlichem Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$.

Beweis. Seien für diesen Beweis $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$, $s \in \mathfrak{s}$ eine beliebige Spitze und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine beliebige Matrix mit $M\langle\infty\rangle = s$ fest gewählt. Es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{M} \in \Gamma_s &\iff \tilde{M} \in \Gamma \text{ mit } \tilde{M}\langle s \rangle = s \\ &\iff \tilde{M} \in \Gamma \text{ mit } M^{-1}\tilde{M}M\langle\infty\rangle = \infty \\ &\iff \tilde{M} \in \Gamma \text{ mit } M^{-1}\tilde{M}M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \end{aligned}$$

und somit auch

$$\Gamma_s = \Gamma \cap M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}M^{-1}.$$

Offensichtlich erhalten wir so eine injektive Abbildung

$$\Gamma_s \backslash (M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}M^{-1}) \hookrightarrow \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

und wir erkennen, dass die Untergruppe Γ_s endlichen Index in $M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}M^{-1}$ hat. Wir konjugieren mit M und sehen, dass

$$M^{-1}\Gamma_s M = M^{-1}\Gamma M \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} = H_s$$

eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ ist.

Zum Beweis des Lemmas verbleibt zu zeigen, dass H_s als Menge nicht von der Wahl von s und M abhängt. Seien dafür $\tilde{s} \in \mathfrak{s}$ eine weitere Spitze und $\tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine beliebige Matrix mit $\tilde{M}\langle\infty\rangle = \tilde{s}$. Wegen $\tilde{s} \sim s$ gibt es ein $A \in \Gamma$ mit $A\langle\tilde{s}\rangle = s$. Mit diesem gilt $(A\tilde{M}M^{-1})\langle s \rangle = s$ und somit $A\tilde{M}M^{-1} \in \Gamma_s$. Es folgt

$$H_s = M^{-1}\Gamma_s M = M^{-1}(A\tilde{M}M^{-1})^{-1}\Gamma_s(A\tilde{M}M^{-1})M = \tilde{M}^{-1}A^{-1}\Gamma_s A\tilde{M} = \tilde{M}^{-1}\Gamma_{\tilde{s}}\tilde{M},$$

was das Lemma zeigt. \square

Lemma 1.40. Die Untergruppen $H \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ von endlichem Index sind gegeben durch:

- (i) $\langle T^h \rangle$ mit $h \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\langle -(T^{-h}) \rangle$ mit $h \in \mathbb{N}$,
- (iii) $\langle T^h, -I_2 \rangle$ mit $h \in \mathbb{N}$.

In allen drei Fällen gilt $h = \overline{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} : H]}$.

Beweis. Bekanntlich gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\} = \langle T \rangle \oplus \{\pm I_2\}.$$

Die Untergruppen von endlichem Index in $\langle T \rangle$ sind gerade diejenigen von Typ (i), da die Untergruppen von endlichem Index in der zyklischen Gruppe \mathbb{Z} bekanntermaßen von der Gestalt $h\mathbb{Z}$ mit einem $h \in \mathbb{N}$ sind. Hieraus folgt sofort die erste Teilbehauptung. Da weiter in allen drei Fällen $\overline{H} \cong \langle T^h \rangle$ gilt, erhalten wir stets

$$h = [\langle T \rangle : \langle T^h \rangle] = [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty} : \overline{H}]$$

und somit auch die zweite Teilbehauptung. □

Definition 1.41. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und seien $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$ sowie $s \in \mathfrak{s}$ beliebig. Dann heißt die natürliche Zahl

$$h_\Gamma(s) := h_\Gamma(\mathfrak{s}) := [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty} : \overline{H_\mathfrak{s}}]$$

die **Breite** der Spitze s bzw. der Spitzenklasse \mathfrak{s} . Gilt in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40

$$H_\mathfrak{s} = \langle -(T^{-h_\Gamma(s)}) \rangle = \langle -(T^{-h_\Gamma(\mathfrak{s})}) \rangle,$$

so heißt die Spitze s bzw. die Spitzenklasse \mathfrak{s} **irregulär**, ansonsten **regulär**.

Bemerkung 1.42. Ist $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein Normalteiler, so haben offensichtlich alle Spitzenklassen bezüglich Γ dieselbe Breite und sind entweder alle regulär oder alle irregulär. Es reicht hier also aus, die Regularität einer einzigen Spitzenklasse zu überprüfen.

Beispiel 1.43. Irreguläre Spitzen sind extrem selten:

- (a) Sei N eine natürliche Zahl. Dann sind alle Spitzen bezüglich der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ regulär,

denn: Da $\Gamma(N)$ normal in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, reicht es nach Bemerkung 1.42 aus, die Regularität der Spitze ∞ zu untersuchen. Es gilt

$$H_\infty = \Gamma(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \begin{cases} \langle T^N \rangle & \text{für } N > 2, \\ \langle T^N, -I_2 \rangle & \text{für } N \leq 2, \end{cases}$$

was in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40 in Fall (i) bzw. (iii) liegt. #

- (b) Sei N eine natürliche Zahl. Dann sind alle Spitzen bezüglich der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ regulär,

denn: Wegen $-I_2 \in \Gamma_0(N)$ liegt $H_\mathfrak{s}$ für alle Spitzenklassen \mathfrak{s} bezüglich $\Gamma_0(N)$ in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40 in Fall (iii). #

- (c) Sei $N \neq 4$ eine natürliche Zahl. Dann sind alle Spitzen bezüglich der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_1(N)$ regulär,

denn: Seien s eine beliebige Spitze bezüglich $\Gamma_1(N)$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle\infty\rangle = s$. Wir untersuchen nun, welche Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ in H_s liegen und betrachten daher gemäß der Konstruktion von H_s in (1.11) für ein beliebiges $h \in \mathbb{Z}$

$$M \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - ach & a^2h \\ -c^2h & 1 + ach \end{pmatrix},$$

$$\text{bzw. } M \begin{pmatrix} -1 & -h \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 + ach & -a^2h \\ c^2h & -1 - ach \end{pmatrix}.$$

Dass die jeweiligen rechten Seiten in $\Gamma_1(N)$ liegen, erfordert

$$N \mid c^2h \quad \text{sowie} \quad 1 - ach \equiv 1 + ach \equiv 1 \pmod{N},$$

$$\text{bzw. } N \mid c^2h \quad \text{sowie} \quad -1 - ach \equiv -1 + ach \equiv 1 \pmod{N}.$$

Dies lässt sich noch etwas vereinfachen zu

$$N \mid c^2h \quad \text{sowie} \quad N \mid ach,$$

$$\text{bzw. } N \mid c^2h \quad \text{sowie} \quad ach \equiv 2 \equiv -2 \pmod{N}. \tag{1.12}$$

Der zweite Fall, dass also eine Matrix der Form $-T^h$ mit einem $h \in \mathbb{Z}$ in H_s liegt, kann daher offensichtlich nur für $N \mid 4$ auftreten. Für $N \nmid 4$ sind daher alle Spitzen s bezüglich $\Gamma_1(N)$ in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40 in Fall (i). Die Behauptung folgt, da für $N \in \{1, 2\}$ die Matrix $-I_2$ in $\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N)$ enthalten ist und daher alle Spitzen s bezüglich $\Gamma_1(N)$ in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40 in Fall (iii) liegen. #

Bezüglich $\Gamma_1(4)$ ist aber die Spitze $\frac{1}{2}$ tatsächlich irregulär,

denn: Wählen wir in der obigen Argumentation

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{mit} \quad M\langle\infty\rangle = \frac{1}{2},$$

so erhalten wir in (1.12) die Bedingungen

$$4 \mid 4h \quad \text{sowie} \quad 4 \mid 2h,$$

$$\text{bzw. } 4 \mid 4h \quad \text{sowie} \quad 2h \equiv 2 \pmod{4}.$$

Es folgt

$$H_{\frac{1}{2}} = \{T^h : h \in \mathbb{Z} \text{ gerade}\} \cup \{-T^h : h \in \mathbb{Z} \text{ ungerade}\} = \langle -T \rangle,$$

so dass die Spitze $\frac{1}{2}$ bezüglich $\Gamma_1(4)$ in der Fallunterscheidung von Lemma 1.40 in Fall (ii) liegt. #

Die Breiten der Spitzenklassen der gegebenen Kongruenzuntergruppe Γ erfüllen eine erstaunliche Eigenschaft, für deren Beweis wir noch ein gruppentheoretisches Lemma benötigen, eine Verallgemeinerung der **Bahngleichung 18.10** aus der Algebra:



Lemma 1.44. Sei (G, \star) eine Gruppe, S eine Menge, auf der G über eine Abbildung $\circ : G \times S \rightarrow S$ transitiv operiert, und $U \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Dann gilt:

(a) Für jedes $s \in S$ hat U_s endlichen Index in G_s und es gibt eine Einbettung

$$U_s \backslash G_s \hookrightarrow U \backslash G$$

mit Bild $U \backslash (U \star G_s)$.

(b) Für ein festes $s_0 \in S$ ist durch

$$U \star g \mapsto (U \star g) \circ s_0 = U \circ (g \circ s_0)$$

eine Surjektion $U \backslash G \rightarrow U \backslash S$ gegeben und für jedes $s \in S$ hat das Urbild von $U \circ s$ unter dieser Surjektion die Kardinalität $[G_s : U_s]$.

(c) Es gilt

$$\sum_{s \in U \backslash S} [G_s : U_s] = [G : U],$$

wobei s in der Summe links ein Vertretersystem der Aktion von U auf S durchlaufe.

Beweis. Im Spezialfall, dass $U \trianglelefteq G$ ein Normalteiler ist, folgt Behauptung (a) unmittelbar mit dem **Ersten Isomorphiesatz** für Gruppen. Auf den Fall einer beliebigen Untergruppe $U \subseteq G$ lässt sich der Beweis dort leicht anpassen.

Wir zeigen nun Behauptung (b). Wegen der Transitivität von \circ existiert für jedes $s \in S$ ein $g_s \in G$ mit $g_s \circ s_0 = s$, so dass die angegebene Abbildung tatsächlich surjektiv ist. Bezeichne nun

$$F_{U \circ s} := \{U \star g \in U \backslash G \mid U \circ (g \circ s_0) = U \circ s\}$$

das Urbild von $U \circ s$ unter dieser Surjektion. Da G auf sich selbst via Rechtstranslation transitiv operiert, durchläuft mit g auch $\tilde{g} := g \star g_s^{-1}$ ganz G und es gilt

$$\begin{aligned} F_{U \circ s} &\cong \{U \star \tilde{g} \in U \backslash G \mid U \circ ((\tilde{g} \star g_s) \circ s_0) = U \circ s\} \\ &= \{U \star \tilde{g} \in U \backslash G \mid U \circ (\tilde{g} \circ s) = U \circ s\} \\ &= U \backslash (U \star G_s) \\ &\stackrel{(a)}{\cong} U_s \backslash G_s. \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich die Behauptung über die Kardinalität und somit Behauptung (b).

Behauptung (c) erhalten wir nun durch

$$[G : U] = |U \backslash G| = \sum_{s \in U \backslash S} |F_{U \circ s}| \stackrel{(b)}{=} \sum_{s \in U \backslash S} [G_s : U_s],$$

wobei s jeweils ein Vertretersystem der Aktion von U auf S durchlaufe. □



Proposition 1.45. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Dann gilt

$$\sum_{s \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)} h_\Gamma(s) = [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \bar{\Gamma}].$$

Beweis. Setzen wir in Teil (c) von Lemma 1.44

$$G = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \quad U = \bar{\Gamma}, \quad S = \mathbb{Q} \cup \{\infty\},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \bar{\Gamma}] &= \sum_{s \in \bar{\Gamma} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [(\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})})_s : (\bar{\Gamma})_s] \\ &= \sum_{s \in \bar{\Gamma} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_s : \bar{\Gamma}_s] \\ &= \sum_{s \in \bar{\Gamma} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}_\infty : H_s] = \sum_s h_\Gamma(s), \end{aligned}$$

wobei wir beim vorletzten Gleichheitszeichen die beteiligten Gruppen mit einer Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle\infty\rangle = s$ konjugiert haben, was den Wert des Index erhält. \square

Bei den elliptischen Punkten kann verschiedenes passieren, bis dahin, dass es überhaupt keine mehr gibt. Das sieht man gut an dem folgenden Beispiel:

Beispiel 1.46. Für $N \in \mathbb{N}_{>1}$ gibt es bezüglich $\Gamma(N)$ keine elliptischen Punkte,

denn: Nach Proposition 1.25 sind alle elliptischen Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu einer der Matrizen

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

konjugiert. Für $N > 1$ liegt keine dieser Matrizen in $\Gamma(N)$, denn sie sind modulo N nicht kongruent zur Einheitsmatrix I_2 . Die Behauptung folgt, da $\Gamma(N)$ als Normalteiler von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Konjugate seiner Elemente enthält. $\#$

In Analogie zu Proposition 1.37 gilt allerdings auch hier:

Proposition 1.47. Die Menge der Γ -Äquivalenzklassen elliptischer Punkte in \mathbb{H} bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist endlich.

Beweis. Da der Index von Γ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ endlich ist, können wir in der Notation von (1.7)

$$\mathbb{H} = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \langle \mathcal{F} \rangle = \bigcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$$

schreiben. Offensichtlich enthält also die Menge $\bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$ ein Vertretersystem der Γ -Äquivalenzklassen bezüglich Γ elliptischer Punkte in \mathbb{H} . In \mathcal{F} und somit auch in jeder der

endlich vielen Mengen $A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$ liegen dabei genau drei – nicht notwendigerweise $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -inäquivalente – bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ elliptische Punkte. Da bezüglich Γ elliptische Punkte automatisch auch bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ elliptisch sind, haben wir so eine endliche Menge von Punkten in \mathbb{H} gefunden, die ein Vertretersystem der Γ -Äquivalenzklassen bezüglich Γ elliptischer Punkte in \mathbb{H} enthält. Die Proposition folgt. \square

Beispiel 1.48. Die einzige Klasse bezüglich $\Gamma_0(2)$ elliptischer Punkte ist

$$\Gamma_0(2) \left\langle \frac{1+i}{2} \right\rangle,$$

denn: Nach (1.10) gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und wegen $-I_2 \in \Gamma_0(2)$ können wir diese Zerlegung unverändert als Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\overline{\Gamma_0(2)}$ -Restklassen übernehmen. Nach den Überlegungen im Beweis von Proposition 1.47 enthält daher die Menge

$$\begin{aligned} & \left\{ i, \varrho, -\bar{\varrho}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \langle i \rangle, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \langle \varrho \rangle, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \langle -\bar{\varrho} \rangle, S \langle i \rangle, S \langle \varrho \rangle, S \langle -\bar{\varrho} \rangle \right\} \\ &= \left\{ i, \varrho, -\bar{\varrho}, \frac{1+i}{2}, -\bar{\varrho}, \frac{1-\bar{\varrho}}{3}, i, -\bar{\varrho}, \varrho \right\} \\ &= \left\{ i, \varrho, -\bar{\varrho}, \frac{1+i}{2}, \frac{1-\bar{\varrho}}{3} \right\} \end{aligned}$$

ein Vertretersystem der Klassen bezüglich $\Gamma_0(2)$ elliptischer Punkte. Für jeden dieser Punkte untersuchen wir nun, ob es ein elliptisches Element $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ gibt, das diesen fixiert. Wegen $\det(M) = 1$ und $2 \mid c$ gilt für jedes elliptische Element von $\Gamma_0(2)$

(i) a, d ungerade.

Mit $|\mathrm{tr}(M)| \in \{0, 1, -1\}$ folgt daraus sofort

(ii) $d = -a$.

Weiter gilt $bc = ad - \det(M) = -a^2 - 1 \equiv 2 \pmod{4}$ und wegen $2 \mid c$ somit

(iii) b ungerade.

Wir betrachten jetzt die oben hergeleiteten Kandidaten für elliptische Punkte einzeln:

- i ist bezüglich $\Gamma_0(2)$ nicht elliptisch, denn sonst gäbe es ein elliptisches Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \langle i \rangle = i \iff (b+c) + 2ai = 0$$

und wegen $2 \mid c$ und $2 \nmid b$ kann dies nicht sein.

- ϱ ist bezüglich $\Gamma_0(2)$ nicht elliptisch, denn sonst gäbe es ein elliptisches Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \langle \varrho \rangle = \varrho &\iff (a - b - \frac{c}{2}) - (a + \frac{c}{2})\sqrt{3}i = 0 \\ &\iff c = -2a \text{ und } b = 2a \end{aligned}$$

und wegen $2 \nmid b$ kann dies nicht sein.

- $-\bar{\varrho}$ ist bezüglich $\Gamma_0(2)$ nicht elliptisch, denn sonst gäbe es ein elliptisches Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \langle -\bar{\varrho} \rangle = -\bar{\varrho} &\iff (a - b - \frac{c}{2}) - (a - \frac{c}{2})\sqrt{3}i = 0 \\ &\iff c = 2a \text{ und } b = 0 \end{aligned}$$

und wegen $2 \nmid b$ kann dies nicht sein.

- $\frac{1+i}{2}$ ist bezüglich $\Gamma_0(2)$ elliptisch, denn $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$ ist wegen seiner verschwindenden Spur elliptisch und erfüllt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \langle \frac{1+i}{2} \rangle = \frac{\frac{1+i}{2} - 1}{(1+i) - 1} = \frac{1+i}{2}.$$

- $\frac{1-\bar{\varrho}}{3}$ ist bezüglich $\Gamma_0(2)$ nicht elliptisch, denn sonst gäbe es ein elliptisches Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ von $\Gamma_0(2)$ mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \langle \frac{1-\bar{\varrho}}{3} \rangle = \frac{1-\bar{\varrho}}{3} &\iff (a + b - \frac{c}{6}) - (a - \frac{c}{2})\frac{1}{\sqrt{3}}i = 0 \\ &\iff c = 2a \text{ und } 3b = -2a \end{aligned}$$

und wegen $2 \nmid b$ kann dies nicht sein.

#

Ist ein Vertretersystem einer Kongruenzuntergruppe Γ in der vollen Modulgruppe bekannt, so lässt sich aus dem aus Satz 1.27 bekannten Fundamentalbereich \mathcal{F} ein Fundamentalbereich für die Aktion von Γ auf \mathbb{H} gewinnen. Genauer gilt:

Proposition 1.49. Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sei

$$\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \bigsqcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} A_\mu \quad \text{mit } A_1, \dots, A_m \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$

eine Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\bar{\Gamma}$ -Nebenklassen wie in (1.7) mit der Zusatzbedingung, dass

$$\mathcal{F}_\Gamma := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$$

ein zusammenhängendes Inneres hat. Dann ist \mathcal{F}_Γ ein Fundamentalbereich der Aktion von Γ auf \mathbb{H} .

Beweis. Die Menge \mathcal{F}_Γ ist abgeschlossen, da \mathcal{F} als Fundamentalbereich der Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} abgeschlossen ist, Möbius-Transformationen auf \mathbb{H} als Homöomorphismen operieren und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. Da wir zudem vorausgesetzt haben, dass \mathcal{F}_Γ ein zusammenhängendes Inneres hat, erfüllt dieses somit Eigenschaft (i) in Definition 1.22.

Dass \mathcal{F}_Γ auch Eigenschaft (ii) in Definition 1.22 genügt, ergibt sich unmittelbar aus seiner Konstruktion,

denn: Sei $z \in \mathbb{H}$ beliebig. Da \mathcal{F} ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} ist, gibt es ein $w \in \mathcal{F}$ und ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $z = M \langle w \rangle$. Wegen der vorausgesetzten Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ gibt es ein $\mu \in \{1, \dots, m\}$, ein $M_\mu \in \Gamma$ und ein Vorzeichen $\varepsilon_\mu \in \{\pm 1\}$ mit

$$M = \varepsilon_\mu M_\mu A_\mu.$$

Wir erhalten

$$z = (\varepsilon_\mu M_\mu A_\mu) \langle w \rangle = M_\mu \langle A_\mu \langle w \rangle \rangle \in \Gamma \langle \mathcal{F}_\Gamma \rangle$$

und somit die Behauptung. #

Schließlich erfüllt \mathcal{F}_Γ auch Eigenschaft (iii) in Definition 1.22,

denn: Seien z, w zwei Punkte im Inneren $\mathring{\mathcal{F}}_\Gamma$ von \mathcal{F}_Γ mit $w = M \langle z \rangle$ für ein $M \in \Gamma$. Dann gibt es $\varepsilon, \delta > 0$ mit

$$U_\varepsilon(z), U_\delta(w) \subseteq \mathring{\mathcal{F}}_\Gamma.$$

Da Möbius-Transformationen auf \mathbb{H} als Homöomorphismen operieren, ist mit $U_\varepsilon(z)$ auch $M \langle U_\varepsilon(z) \rangle$ offen. Da letzteres nach Konstruktion den Punkt w enthält, ist somit

$$U := M \langle U_\varepsilon(z) \rangle \cap U_\delta(w) \subseteq \mathring{\mathcal{F}}_\Gamma$$

offen und nichtleer. Daher und wegen $\mathcal{F}_\Gamma = \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle$ gibt es ein $\mu \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$U \cap (A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle) \neq \emptyset$$

und insbesondere

$$M \langle U_\varepsilon(z) \rangle \cap (A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle) \neq \emptyset.$$

Da die Möbius-Transformation $\varphi_{M^{-1}}$ auf \mathbb{H} als Homöomorphismus operiert, ist wiederum

$$V := U_\varepsilon(z) \cap ((M^{-1}\mathring{A}_\mu)\langle\mathcal{F}\rangle) \subseteq \mathring{\mathcal{F}}_\Gamma$$

offen und nichtleer. Daher und wegen $\mathcal{F}_\Gamma = \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu\langle\mathcal{F}\rangle$ gibt es ein $\nu \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$V \cap (A_\nu\langle\mathcal{F}\rangle) \neq \emptyset$$

und insbesondere

$$((M^{-1}\mathring{A}_\mu)\langle\mathcal{F}\rangle) \cap (A_\nu\langle\mathcal{F}\rangle) \neq \emptyset.$$

Da \mathcal{F} ein Fundamentalbereich der Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} ist, folgt hieraus, dass $M^{-1}A_\mu$ und A_ν als Elemente von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ übereinstimmen und daraus wegen $M \in \Gamma$ auch

$$\bar{\Gamma}A_\nu = \bar{\Gamma}M^{-1}A_\mu = \bar{\Gamma}A_\mu.$$

Nach Definition unserer $\bar{\Gamma}$ -Nebenklassen gilt somit $\nu = \mu$, so dass $M^{-1}A_\mu$ und A_μ als Elemente von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ übereinstimmen, was $M^{-1} \in \{\pm I_2\}$ und also die Behauptung impliziert. #

□

Beispiel 1.50. Nach (1.10) gilt die Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \Gamma_0(2) \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \Gamma_0(2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \Gamma_0(2) \sqcup \Gamma_0(2)TST \sqcup \Gamma_0(2)S \end{aligned}$$

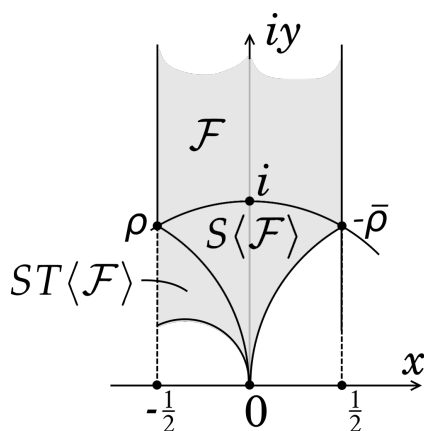
in $\Gamma_0(2)$ -Nebenklassen, welche sich aufgrund von $-I_2 \in \Gamma_0(2)$ identisch auf die zugehörige Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\bar{\Gamma}_0(2)$ -Nebenklassen übertragen lässt. Leider hat aber die korrespondierende Menge

$$\mathcal{F} \cup (TST)\langle\mathcal{F}\rangle \cup S\langle\mathcal{F}\rangle$$

kein zusammenhängendes Inneres. Dies lässt sich jedoch korrigieren, wenn man $TST\langle\mathcal{F}\rangle$ durch $T^{-1} \in \Gamma_0(2)$ um 1 nach links verschiebt. Nach Proposition 1.49 ist dann die so erhaltene Menge

$$\mathcal{F}_{\Gamma_0(2)} = \mathcal{F} \cup (ST)\langle\mathcal{F}\rangle \cup S\langle\mathcal{F}\rangle$$

ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\Gamma_0(2)$ auf \mathbb{H} .



Bemerkung 1.51. Für jede Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es tatsächlich eine Zerlegung von $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ in $\overline{\Gamma}$ -Nebenklassen, für welche die in Menge \mathcal{F}_Γ ein zusammenhängendes Inneres hat und nach Proposition 1.49 somit ein Fundamentalbereich der Aktion von Γ auf \mathbb{H} ist.

1.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. Beenden Sie den Beweis von Proposition 1.3.

Aufgabe 1.2. Beenden Sie den Beweis von Proposition 1.4.

Aufgabe 1.3. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Kreise und Geraden lassen sich einheitlich schreiben als

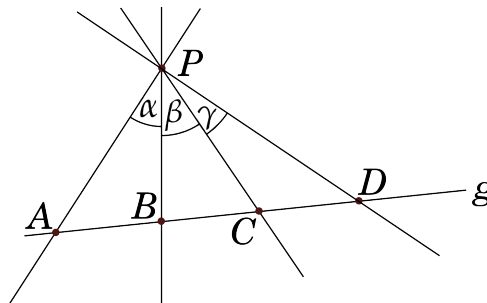
$$\alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \quad \text{mit } \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \text{ und } \beta\bar{\beta} > \alpha\gamma.$$

Im Fall der Kreislinien ist $\alpha \neq 0$, im Fall der Geraden ist $\alpha = 0$. Die Menge aller solchen Kreise und Geraden nennt man auch **verallgemeinerte Kreise**.

(b) Möbius-Transformationen bilden verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.

Aufgabe 1.4. Beenden Sie den Beweis von Proposition 1.9.

Aufgabe 1.5. In der komplexen Ebene seien vier paarweise verschiedene Geraden mit gemeinsamem Schnittpunkt $P \in \mathbb{C}$ gegeben und weiter eine Gerade g , die nicht durch P geht und die anderen Geraden wie in der Abbildung dargestellt in Punkten $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ schneidet.



Zeigen Sie, dass für das Doppelverhältnis der Punkte A, B, C, D dann die Identität

$$\text{DV}(A, B, C, D) = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \sin(\beta)}$$

gilt, wobei die Winkel α , β und γ wie in der Abbildung definiert seien. Insbesondere hängt also das Doppelverhältnis $\text{DV}(A, B, C, D)$ nicht von der genauen Lage von g ab.

Hinweis: Im Beweis dürfen Sie den **Sinussatz** aus der Elementargeometrie verwenden, der besagt, dass in einem beliebigen Dreieck mit Ecken $X, Y, Z \in \mathbb{C}$ und Innenwinkeln φ bei X und ψ bei Y die Gleichung

$$\frac{\sin(\varphi)}{|Y - Z|} = \frac{\sin(\psi)}{|X - Z|}$$

gilt.

Aufgabe 1.6. Sei $s \in \mathbb{C}$, und sei $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ hyperbolisch mit $M\langle s \rangle = s$. Zeigen Sie, dass dann $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt.

Aufgabe 1.7. Seien $M, M' \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ mit $MM' = M'M$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- Ist M parabolisch, so auch M' .
- Gilt $M\langle z \rangle = z$ für ein $z \in \overline{\mathbb{C}}$, so auch $M'\langle z \rangle = z$.

Aufgabe 1.8. Seien z_1, z_2 zwei Punkte in \mathbb{H} , und seien U_1 bzw. U_2 offene Umgebungen von z_1 bzw. z_2 , deren kompakte Abschlüsse in \mathbb{H} liegen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- Für alle bis auf endlich viele teilerfremde Paare $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ gilt die Abschätzung

$$\sup \{ \text{Im}(M\langle z \rangle) \mid M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ und } z \in U_1 \} < \inf_{z \in U_2} \text{Im}(z).$$

- Es gibt nur endlich viele Matrizen $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$M\langle U_1 \rangle \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Tatsache, dass Möbius-Transformationen zu Matrizen aus $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ als Homöomorphismen auf \mathbb{H} operieren.



Aufgabe 1.9. In Korollar 1.28 haben wir gesehen, dass die volle Modulgruppe von den Matrizen T und S erzeugt wird. Für beliebige Kongruenzuntergruppen ist das Auffinden von Erzeugern schwieriger, und die Anzahl der Erzeuger kann beliebig groß werden. Andererseits ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nicht die einzige Kongruenzuntergruppe, die von einer Translation und der Stürzung erzeugt wird. Auch die sogenannte **Thetagruppe** Γ_ϑ , die von T^2 und S erzeugt wird, ist eine Kongruenzuntergruppe. Um das zu einzusehen, zeigen Sie

$$\Gamma_\vartheta := \langle T^2, S \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : a + b + c + d \equiv 0 \pmod{2} \right\},$$

was unmittelbar $\Gamma(2) \subseteq \Gamma_\vartheta$ impliziert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $|a| \neq |b|$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\vartheta$.

Aufgabe 1.10. Zeigen Sie für eine beliebige Primzahl p die folgenden Aussagen:

- (a) Die Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(p)$ besitzt genau 2 Spitzenklassen mit Vertretern ∞ und 0. Dabei gilt

$$h_{\Gamma_0(p)}(\infty) = 1 \quad \text{und} \quad h_{\Gamma_0(p)}(0) = p.$$

- (b) Die Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(p^2)$ besitzt genau $p + 1$ Spitzenklassen mit Vertretern in den Punkten $\infty, 0$ und $-\frac{1}{kp}$ für $k \in \{1, \dots, p-1\}$.

Hinweis: Benutzen Sie Proposition 1.45.

Aufgabe 1.11. Zeigen Sie für eine natürliche Zahl N die folgenden Aussagen:

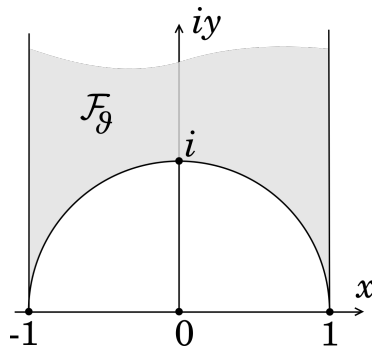
- (a) Ist $N > 3$, so gibt es keine bezüglich $\Gamma_1(N)$ elliptischen Punkte in \mathbb{H} .
- (b) Ist N durch eine Primzahl p mit $p \equiv -1 \pmod{12}$ teilbar, so gibt es keine bezüglich $\Gamma_0(N)$ elliptischen Punkte in \mathbb{H} .

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für $N = p \equiv -1 \pmod{12}$.

Aufgabe 1.12. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Menge

$$\mathcal{F}_\vartheta := \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1, |\mathrm{Re}(z)| \leq 1\}$$

ein Fundamentalbereich der Aktion der bereits in Aufgabe 1 eingeführten Thetagruppe Γ_ϑ auf \mathbb{H} ist.

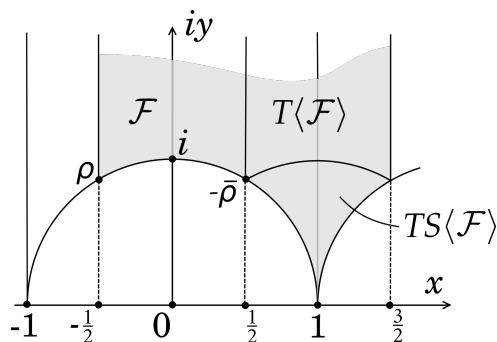




Hinweis: Zum Beweis von Bedingung (iii) aus *Definition 1.22* zeigen Sie zunächst, dass \mathcal{F}_θ genau dann ein Fundamentalbereich für die Aktion von Γ_θ auf \mathbb{H} ist, falls dies auch auf

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\theta = \mathcal{F} \cup T\langle \mathcal{F} \rangle \cup (TS)\langle \mathcal{F} \rangle$$

zutrifft, wobei \mathcal{F} den Standardfundamentalbereich der vollen Modulgruppe bezeichne.



Der Begriff der Modulform

In diesem Kapitel führen wir mit den Modulformen das Hauptstudienobjekt unserer Vorlesung ein. Diese sind meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene \mathbb{H} , die sich unter Möbius-Transformationen wohlverhalten und deshalb eine Fourier-Entwicklung aufweisen. In Abschnitt 2.1 werden wir daher zunächst Fourier-Entwicklungen in diesem Kontext studieren, was uns erlaubt, in Abschnitt 2.2 den Begriff der Modulform zu definieren. Interessante Beispiele werden wir erst in Kapitel 3 kennenlernen; in Abschnitt 2.5 werden wir aber mit der Valenzformel eine beschreibende Eigenschaft für Modulformen nachweisen, mit deren Hilfe wir immerhin zeigen können, zu welchen Parametern es keine Modulformen geben kann.

2.1 Fourier-Entwicklungen

Definition 2.1. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit Periode $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wenn

$$f(x+r) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Beispiel 2.2. Aus der reellen Analysis wissen wir, dass die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus Periode 2π haben.

Bemerkung 2.3. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodisch mit Periode $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann hat die Funktion

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ x & \mapsto f(xr) \end{cases}$$

Periode 1, denn es gilt

$$g(x+1) = f((x+1)r) = f(xr+r) = f(xr) = g(x).$$

In diesem Abschnitt beschränken wir uns daher auf die Untersuchung 1-periodischer Funktionen.

Nun können wir das Konzept der Fourier-Reihen einführen:

Definition 2.4. Zu einer stetigen, 1-periodischen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir den n -ten Fourier-Koeffizienten durch

$$a_n(f) := \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x n} dx.$$

Die **Fourier-Reihe** von f ist definiert¹⁶ durch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n x}.$$

Zu beachten ist der formale Charakter dieser Definition. Während die Koeffizienten $a_n(f)$ wegen der von f geforderten Stetigkeit stets existieren, muss dies auf die Fourier-Reihe keinesfalls zutreffen. Sie kann jedoch abseits jeglicher analytischer Überlegungen als formales Objekt betrachtet werden. So ist etwa im Verband aller Fourier-Reihen eine Addition und mit der Faltung auch eine Multiplikation definiert, ohne dass wir Konvergenz an irgendeiner Stelle voraussetzen müssen – das ist analog zu den Verknüpfungen im Ring der formalen Potenz- oder Laurent-Reihen in der Algebra. Da wir uns nichtsdestotrotz für die analytischen Eigenschaften einiger periodischer Funktionen interessieren, werden wir Kriterien ausarbeiten, die uns garantieren, dass sich die in Definition 2.4 betrachtete Funktion f in die dort angegebene Fourier-Reihe entwickeln lässt. Ein erster Schritt hierzu ist der folgende Satz:

Satz 2.5. Erfüllt eine stetige, 1-periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die Bedingung

$$a_n(f) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

so ist diese bereits die Nullfunktion.

Beweis. Wir nehmen an, f wäre nicht die Nullfunktion, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Wir betrachten zunächst den Fall, dass f seine Werte in den reellen Zahlen annimmt. Ohne Einschränkung könnten wir dann annehmen, dass f auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ definiert ist und $f(0) > 0$ erfüllt,

¹⁶Analog zum Vorgehen bei den LAURENT-Reihen¹⁷ in der Funktionentheorie verstehen wir unter einer **unendlichen Reihe** der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ das Paar

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \right).$$

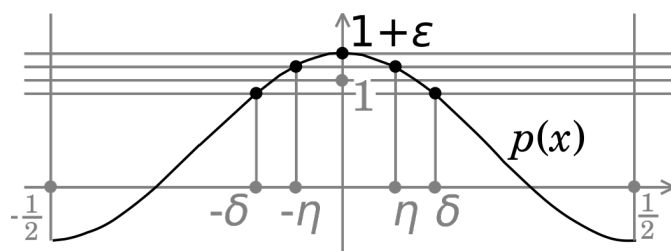
Eine solche Reihe heißt **konvergent**, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ beide konvergieren; in diesem Fall heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ der **Grenzwert** von $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$, und wir schreiben

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}.$$

Im selben Sinn verwenden wir die Begriffe **absoluter Konvergenz** und **gleichmäßiger Konvergenz** bei obigen Reihen.

¹⁷Pierre Alphonse Laurent (1813-1854)

denn: Nach Voraussetzung wäre f nicht die Nullfunktion und nähme somit auf einem $x_0 \in \mathbb{R}$ einen reellen Wert ungleich Null an. Durch Verschieben der Integrationsvariablen um x_0 änderten sich die Werte der Fourier-Koeffizienten nur um einen Vorfaktor ungleich Null und f erfüllte nach eventuellem Multiplizieren mit -1 die gewünschten Eigenschaften. #



Wegen der Stetigkeit von f im Punkt $x_0 = 0$ gäbe es daher ein $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$ mit

$$f(x) > \frac{f(0)}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \delta$$

und wir könnten

$$p(x) := \cos(2\pi x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq \frac{1}{2},$$

$$p_k(x) := p(x)^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq \frac{1}{2}$$

setzen, wobei $\varepsilon > 0$ passend zu δ so klein gewählt wäre, dass

$$|p(x)| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}$$

gälte. Weiter gäbe es natürlich auch ein $\eta \in (0, \delta)$ mit

$$p(x) \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \eta.$$

Dann gälte einerseits

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) p_k(x) dx = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

denn: Nach Konstruktion wären die Funktionen p_k für alle $k \in \mathbb{N}$ Polynome in der Variablen $\cos(2\pi x)$ und also insbesondere Polynome in den Variablen $e^{2\pi i x}$ und $e^{-2\pi i x}$. Die Behauptung folgte somit aus der Linearität des Integrals, der 1-Periodizität des Integranden und da wir $a_n(f) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt haben. #

Andererseits gälte aber auch

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) p_k(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty, \quad (2.2)$$

denn: Als stetige Funktion ist f auf dem Kompaktum $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ betragsmäßig durch ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ beschränkt, es gilt also $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \frac{1}{2}$. Über die Standardabschätzung erhielten wir so

$$\left| \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} f(x) p_k(x) dx \right| \leq M \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k.$$

Ferner wären nach unserer Wahl von δ die Werte $f(x)$ und $p_k(x)$ für $|x| < \delta$ nichtnegativ und es folgte

$$\int_{\eta \leq |x| < \delta} f(x) p_k(x) dx \geq 0.$$

Schließlich hätten wir über die Standardabschätzung nach unten

$$\int_{-\eta}^{\eta} f(x) p_k(x) dx \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k.$$

Durch Aufsummieren dieser drei Ausdrücke erhielten wir eine Abschätzung des zu untersuchenden Integrals, die offensichtlich im Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ gegen unendlich ginge. #

Offensichtlich stehen die beiden von uns hergeleiteten Aussagen (2.1) und (2.2) im Widerspruch zueinander, so dass unsere Annahme, die Funktion f sei im Falle, dass f nur reelle Werte annimmt, nicht die Nullfunktion, nicht wahr sein kann.

Für den Fall, dass f komplexwertig ist, definieren wir die reellwertigen Funktionen

$$u(x) := \frac{f(x) + \bar{f}(x)}{2}, \quad v(x) := \frac{f(x) - \bar{f}(x)}{2i}$$

und erhalten $f = u + iv$. Aus $a_n(\bar{f}) = \overline{a_{-n}(f)}$ folgt, dass die Fourier-Koeffizienten von u und v allesamt verschwinden, und wir können unsere oberen Überlegungen anwenden. Damit ist alles bewiesen. \square

Aus Satz 2.5 ergeben sich zwei wichtige Korollare:

Korollar 2.6 (Identitätssatz für Fourier-Reihen). Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zwei stetige, 1-periodische Funktionen mit

$$a_n(f) = a_n(g) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Dann stimmen f und g bereits auf ganz \mathbb{R} identisch überein.

Beweis. Das folgt unmittelbar durch Anwenden von Satz 2.5 auf die stetige, 1-periodische Funktion $f - g$. \square

Korollar 2.7 (Darstellungssatz für Fourier-Reihen). Konvergiert die Fourier-Reihe einer stetigen, 1-periodischen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig, so konvergiert sie gegen f .

Beweis. Mit den nach Voraussetzung gegebenen Fourier-Koeffizienten $a_n(f)$ definieren wir die Funktion

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n x} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n(f) e^{2\pi i n x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Diese ist nach Voraussetzung wohldefiniert, als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen selbst wieder stetig und natürlich 1-periodisch; ihre Fourier-Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_n(g) = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(f) \int_0^1 e^{2\pi i (m-n)x} dx = a_n(f).$$

Nach dem Identitätssatz für Fourier-Reihen 2.6 gilt damit bereits $f \equiv g$ und die Fourier-Reihe von f konvergiert gleichmäßig gegen f . \square

Für den Fall, dass die betrachtete Funktion mehrfach differenzierbar ist, lässt sich damit schließlich die gleichmäßig absolute Konvergenz der Fourier-Reihe gegen die zugehörige Funktion zeigen:

Satz 2.8. *Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare, 1-periodische Funktion. Dann konvergiert die zu f gehörige Fourier-Reihe gleichmäßig absolut gegen f .*

Beweis. Mit zweifacher partieller Integration folgt für die Fourier-Koeffizienten mit der 1-Periodizität der Funktionen

$$x \mapsto f(x) e^{-2\pi i n x} \quad \text{und} \quad x \mapsto f'(x) e^{-2\pi i n x}$$

die Asymptotik

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \left[-\frac{f(x) e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n} \right]_0^1 + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 f'(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \left[-\frac{f'(x) e^{-2\pi i n x}}{(2\pi i n)^2} \right]_0^1 + \frac{1}{(2\pi i n)^2} \int_0^1 f''(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{für } |n| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Durch Abschätzen mit der bekanntermaßen konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ folgt die gleichmäßig absolute Konvergenz der Fourier-Reihe von f und zwar gegen f , wie der Darstellungssatz für Fourier-Reihen 2.7 besagt. \square

Die Idee der Fourier-Reihen lässt sich auf gewisse Funktionen auf offenen Teilmengen in \mathbb{C} übersetzen, wobei in Hinsicht auf Satz 2.8 der Fokus auf holomorphe Funktionen besonders vielversprechend erscheint. Wir müssen hierfür zunächst den Begriff der Periodizität geeignet anpassen:

Definition 2.9. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **periodisch** mit Periode $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wenn

$$z + \omega \in D \quad \text{und} \quad f(z + \omega) = f(z) \quad \text{für alle } z \in D.$$

gilt.

Beispiel 2.10. Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass die komplexen trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus Periode 2π haben und die komplexe Exponentialfunktion Periode $2\pi i$.

Mit demselben Argument wie in Bemerkung 2.3 können wir uns auch jetzt wieder auf die Untersuchung 1-periodischer Funktionen beschränken.

Betrachten wir nun speziell für $-\infty \leq a < b \leq \infty$ den **Horizontalstreifen**

$$\mathbb{H}_{a,b} := \{z \in \mathbb{C} \mid a < \text{Im}(z) < b\} \quad (2.3)$$

und schreiben dabei kurz $\mathbb{H}_a := \mathbb{H}_{a,\infty}$ sowie $\mathbb{H} := \mathbb{H}_0$. Dieser Horizontalstreifen $\mathbb{H}_{a,b}$ wird offensichtlich durch die Abbildung

$$e: \begin{cases} \mathbb{H}_{a,b} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto q := e^{2\pi iz} \end{cases}$$

auf das Ringgebiet

$$D_{e^{-2\pi b}}^{e^{-2\pi a}} := \{q \in \mathbb{C} \mid e^{-2\pi b} < |q| < e^{-2\pi a}\}$$

in der komplexen q -Ebene abgebildet, wobei wir die Identifikationen $e^{-2\pi \infty} = 0$ und $e^{-2\pi(-\infty)} = \infty$ verwenden. Daraus motiviert sich der folgende Satz:

Satz 2.11 (Fourier-Entwicklung periodischer holomorpher Funktionen). Für gegebene $-\infty \leq a < b \leq \infty$ definiert die Zuordnung¹⁸

$$\left(q \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n \right) \mapsto \left(z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \right),$$

einen Isomorphismus zwischen dem \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{O}(D_{e^{-2\pi b}}^{e^{-2\pi a}})$ der holomorphen Funktionen auf dem Ringgebiet $D_{e^{-2\pi b}}^{e^{-2\pi a}}$ und dem \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{O}_{\text{per},1}(\mathbb{H}_{a,b})$ der 1-periodischen, holomorphen Funktionen auf dem Horizontalstreifen $\mathbb{H}_{a,b}$.

¹⁸Wir werden im Folgenden oft diese Identifikation ausnutzen und abkürzend

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) q^n$$

für die Fourier-Entwicklung einer 1-periodischen Funktion f schreiben. Wir setzen dann also stillschweigend $q := e^{2\pi iz}$.

Insbesondere hat jede 1-periodische, holomorphe Funktion $f: \mathbb{H}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$ eine **Fourier-Entwicklung**¹⁹

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) q^n =: f_{i\infty}(q) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_{a,b}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_n(f) \in \mathbb{C}$. Die Reihe ist gleichmäßig absolut konvergent auf Teilmengen $\overline{\mathbb{H}_{c,d}} \subseteq \mathbb{H}_{a,b}$ mit $a < c < d < b$ und es gilt unabhängig für alle $z_0 \in \mathbb{H}_{a,b}$ die Formel

$$a_n(f) = \int_0^1 f(z_0 + t) e^{-2\pi i n(z_0 + t)} dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Beweis. Offenbar gilt $e^{-2\pi b} < |q| = |e^{2\pi i z}| < e^{-2\pi a}$ genau für $a < \text{Im}(z) < b$, weshalb die Reihen $f_{i\infty}(q)$ und $f(z)$ gegenseitig ihre Konvergenz implizieren. Es ist daher die offenbar lineare Abbildung nach dem Identitätssatz für Potenzreihen wohldefiniert und wegen des Identitätssatzes für Fourier-Reihen 2.6 injektiv. Es verbleibt, die Surjektivität zu zeigen. Ist $f: \mathbb{H}_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 1-periodische, holomorphe Funktion, so wird einerseits zu jedem $a < y_1 < b$ eine 1-periodische Abbildung $x \mapsto f(x + iy_1)$ auf den reellen Zahlen \mathbb{R} definiert. Wegen der Holomorphie von f besitzt diese nach Satz 2.8 eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe

$$f(x + iy_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y_1, f) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n y_1} a_n(y_1, f) e^{2\pi i n(x + iy_1)}. \quad (2.5)$$

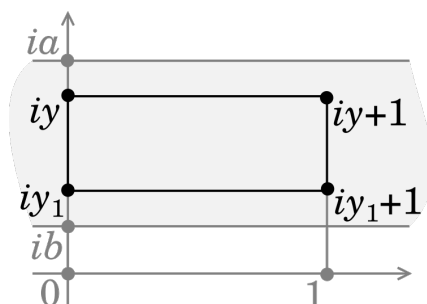
Andererseits ist für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ auch die Funktion $g_n(z) := f(z) e^{-2\pi i n z}$ auf $\mathbb{H}_{a,b}$ holomorph und 1-periodisch. Wenden wir für feste $y_1, y \in (a, b)$ und $n \in \mathbb{Z}$ den CAUCHY'schen Integralsatz²⁰ längs des Randes des Rechtecks mit Ecken $iy_1, iy, iy + 1$ und $iy_1 + 1$ auf die Funktion g_n an, so folgt

$$\begin{aligned} e^{2\pi i n y_1} a_n(y_1, f) &\stackrel{(2.5)}{=} \int_0^1 f(x + iy_1) e^{-2\pi i n(x + iy_1)} dx \\ &= \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi i n(x + iy)} dx \\ &\stackrel{(2.5)}{=} e^{2\pi i n y} a_n(y, f), \end{aligned}$$

da sich die Integrale über die vertikalen Seiten wegen der Periodizität des Integranden gegenseitig wegheben.

¹⁹Im Gegensatz zur Geometrie auf der Riemann'schen Zahlenkugel, die wir in Kapitel 1 im Kontext der Möbius-Transformationen betrachtet haben, hat der Punkt ∞ in der Fourier-Analyse keine einheitliche Bedeutung mehr: Für periodische Funktionen macht es einen Unterschied, aus welcher Richtung sich ihr Argument dem Punkt ∞ nähert. Hintergrund ist, dass nicht die gesamte komplexe Ebene sondern nur ein im Realteil beschränkbarer Streifen konform auf eine geeignete gelochte Kreisscheibe abgebildet wird. Daher geben wir in den ab jetzt folgenden analytischen Aspekten dem Punkt ∞ eine Verortung und bezeichnen ihn als $i\infty$. Dies bedeutet in der Praxis, dass für eine Folge $z_n \rightarrow i\infty$ auch $\text{Im}(z_n) \rightarrow \infty$ gelten muss.

²⁰Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)



Folglich ist $y \mapsto e^{2\pi ny} a_n(y, f)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine konstante Funktion auf dem Intervall (a, b) , deren Wert wir als $a_n(f)$ bezeichnen, und das Integral (2.4) hängt wegen der Periodizität von f nicht von der Wahl z_0 ab. Aus der gleichmäßig absoluten Konvergenz der Laurent-Reihe $f_{i\infty}$ auf den kompakten Teilmengen $\overline{D_{e^{-2\pi c}}^{e^{-2\pi a}}} \subseteq D_{e^{-2\pi d}}^{e^{-2\pi a}}$ folgt ebendiese von f in den Bereichen $\overline{\mathbb{H}_{c,d}} \subseteq \mathbb{H}_{a,b}$ mit $a < c < d < b$, womit alles gezeigt ist. \square

Bemerkung 2.12. Offenbar folgt in der Situation von Satz 2.11 insbesondere die gleichmäßig absolute Konvergenz der Fourier-Reihe auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{H}_{a,b}$, da jedes solche K in einer Menge $\overline{\mathbb{H}_{c,d}}$ mit $a < c < d < b$ enthalten ist.

Das folgende Beispiel einer Fourier-Entwicklung werden wir in Abschnitt 3.1 benötigen:

Beispiel 2.13. Sei $k \geq 2$ eine ganze Zahl, und sei $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{0,\infty}$ die obere Halbebene. Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H},$$

denn: Für eine beliebige kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $K \subseteq \overline{U_c(0)}$, also mit

$$|z - n| \geq |n| - |z| \geq |n| - c \geq \frac{|n|}{2} \quad \text{für alle } n \geq 2c.$$

Es folgt

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2c}} |z - n|^{-k} \leq 2^k \cdot \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2c}} \frac{1}{n^k} < \infty$$

und somit die gleichmäßig absolute Konvergenz der Reihe auf der linken Seite unserer Behauptung auf dem beliebigen Kompaktum $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Insbesondere stellt diese Reihe eine auf \mathbb{H} holomorphe Funktion dar. Wegen der absoluten Konvergenz können wir sie auch umordnen und sehen so ein, dass die untersuchte Funktion 1-periodisch ist. Nach Satz 2.11 hat daher die linke Seite als holomorphe, 1-periodische Funktion auf \mathbb{H} eine Fourier-Entwicklung.

Mit dem Satz von MITTAG-LEFFLER²¹ aus der Funktionentheorie lässt sich die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\pi \cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \leq N}} (z-n)^{-1}\end{aligned}\tag{2.6}$$

des Kotangens und deren absoluter Konvergenz herleiten. Andererseits gilt für alle $z \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}\pi \cot(\pi z) &= \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{2} \frac{2i}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} = \pi i \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\ &= \pi i \frac{(q-1) + 2}{q-1} = \pi i \left(1 + \frac{2}{q-1} \right) \\ &= \pi i \left(1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n,\end{aligned}\tag{2.7}$$

wobei wir die geometrische Reihenformel anwenden dürfen, da für $z \in \mathbb{H}$ die Voraussetzung $|q| < 1$ erfüllt ist. Fügen wir diese beiden Resultate zusammen, so erhalten wir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \leq N}} (z-n)^{-1} = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Da beide Seiten dieser Gleichung auf Kompakta in \mathbb{H} gleichmäßig absolut konvergieren, dürfen wir sie beliebig oft gliedweise ableiten. Wie man leicht überprüft, ergibt $(k-1)$ -maliges Ableiten nach z

$$(-1)^k (k-1)! \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^k} = (2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

und somit die Behauptung. #

Wenn wir darauf achten, dass $f_{i\infty}(q)$ in $q = 0$ keine nicht-isolierte Singularität erhält, können wir Satz 2.11 auf eine meromorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit ganzzahliger Periode anwenden, um für eine solche Funktion eine Fourier-Entwicklung zu erhalten. Tatsächlich definieren wir:

Definition 2.14. (a) Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Zu einer holomorphen, 1-periodischen Funktion $f: \mathbb{H}_a \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es nach Satz 2.11 eine holomorphe Funktion $f_{i\infty}: D_0^{e^{-2\pi a}} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_{i\infty} \circ e = f$. Wir nennen f **holomorph** bzw. **meromorph** in $z = i\infty$, wenn $f_{i\infty}$ in $q = 0$ holomorph bzw. meromorph ist.

²¹Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927)

- (b) Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $h \in \mathbb{N}$. Zu einer holomorphen, h -periodischen Funktion $f: \mathbb{H}_a \rightarrow \mathbb{C}$ ist nach Bemerkung 2.3 die Funktion $g(z) := f(hz)$ holomorph und 1-periodisch. Die Funktion f heißt **holomorph** bzw. **meromorph in $z = i\infty$** , wenn dies im Sinne von (a) auf die Funktion g zutrifft.
- (c) Sei nun speziell $a = 0$, und sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe, h -periodische Funktion mit $h \in \mathbb{N}$. Wir nennen f **holomorph** bzw. **meromorph in $z = i\infty$** , wenn

- die Menge

$$\{y \in \mathbb{R}_{>0} \mid \text{es gibt eine Polstelle von } f \text{ mit Imaginärteil } y\}$$

nach oben beschränkt ist, so dass die Einschränkung von f auf ein geeignetes \mathbb{H}_a holomorph ist,

- diese Einschränkung $f|_{\mathbb{H}_a}$ im Sinne von (b) holomorph bzw. meromorph in $z = i\infty$ ist.

2.2 Modularität

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der Modulform bezüglich einer beliebigen, fest vorgegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ einführen. Modulformen sind meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene \mathbb{H} , die sich unter den in Kapitel 1 behandelten Möbius-Transformationen wohlverhalten bzw. invariant unter dem mit diesen verwandten PETERSSON'sche Strichoperator²² sind, den wir nun definieren werden:

Proposition 2.15. Für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ ist über die Zuordnung $(M, f) \mapsto f|_k M$ mit

$$(f|_k M)(z) := \det(M)^{\frac{k}{2}} (cz + d)^{-k} f(M\langle z \rangle)$$

eine Aktion von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ auf der Menge der auf \mathbb{H} meromorphen Funktionen gegeben.²³ Der zugehörige Operator $\cdot|_k$ heißt der (k -te) **Petersson'sche Strichoperator**.

Beweis. Für ein beliebiges $z \in \mathbb{H}$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ setzen wir

$$j(M, z) := cz + d.²⁴$$

Wie man leicht überprüft, gilt dann für beliebige $M, \tilde{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und alle $z \in \mathbb{H}$ die **Kozykelbedingung**

$$j(M\tilde{M}, z) = j(M, \tilde{M}\langle z \rangle)j(\tilde{M}, z).$$

Es folgt für dieselben Matrizen M, \tilde{M} und alle $z \in \mathbb{H}$

$$(f|_k(M\tilde{M}))(z) = \det(M\tilde{M})^{\frac{k}{2}} j(M\tilde{M}, z)^{-k} f(M\tilde{M}\langle z \rangle)$$

²²Hans Petersson (1902-1984)

²³Man beachte, dass die Potenz der Determinante so gewählt wurde, dass das Zentrum von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ trivial operiert. Wir lassen allerdings in diesem Kapitel nur Matrizen mit Determinante 1 operieren, wo dieser Faktor keine Rolle spielt.

$$\begin{aligned}
&= \det(M)^{\frac{k}{2}} \det(\tilde{M})^{\frac{k}{2}} (j(\tilde{M}, z)^{-k} j(M, \tilde{M}\langle z \rangle)^{-k}) f(M\langle \tilde{M}\langle z \rangle \rangle) \\
&= \det(\tilde{M})^{\frac{k}{2}} j(\tilde{M}, z)^{-k} \left(\det(M)^{\frac{k}{2}} j(M, \tilde{M}\langle z \rangle)^{-k} f(M\langle \tilde{M}\langle z \rangle \rangle) \right) \\
&= \det(\tilde{M})^{\frac{k}{2}} j(\tilde{M}, z)^{-k} (f|_k M)(\tilde{M}\langle z \rangle) \\
&= ((f|_k M)|_k \tilde{M})(z).
\end{aligned}$$

Da offensichtlich für alle $z \in \mathbb{H}$ die Beziehung $(f|_k I_2)(z) = f(z)$ gilt, folgt die Proposition. \square

Lemma 2.16. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Ist $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion mit

$$(f|_k \tilde{M})(z) = f(z) \quad \text{für alle } \tilde{M} \in \Gamma,$$

so hat $f|_k M$ für $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M(i\infty) = s \in \mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$ die Periode

$$\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s}) := \tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s}) := \begin{cases} h_\Gamma(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ regulär,} \\ 2h_\Gamma(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ irregulär,} \end{cases}$$

wobei $h_\Gamma(\mathfrak{s})$ die in Definition 1.41 gegebene Breite der Spitzenklasse \mathfrak{s} ist, und eine Fourier-Entwicklung der Form

$$(f|_k M)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (f|_k M) q^{\frac{n}{\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s})}}, \quad (2.8)$$

die in jedem Horizontalstreifen \mathbb{H}_a mit $a \geq 0$ lokal absolut und gleichmäßig konvergiert, in welchem die Einschränkung von $f|_k M$ holomorph ist.

Beweis. Im Beweis von Lemma 1.39 haben wir $H_\mathfrak{s} = M^{-1}\Gamma_\mathfrak{s}M$ eingesehen. Für ein beliebiges $M^{-1}\tilde{M}M \in H_\mathfrak{s}$ gilt daher nach Voraussetzung

$$(f|_k M)|_k(M^{-1}\tilde{M}M) = f|_k(MM^{-1}\tilde{M}M) = f|_k(\tilde{M}M) = f|_k M.$$

Die erste Behauptung des Lemmas folgt daher unmittelbar aus Definition 1.41 und die zweite mit Definition 2.14 aus der ersten. \square

Lemma 2.16 belegt die Sinnhaftigkeit der folgenden Definition:

Definition 2.17. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und sei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig. Eine meromorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(V_1) \quad (f|_k M)(z) = f(z) \quad \text{für alle } M \in \Gamma,$$

$$(V_2) \quad f|_k M \text{ ist meromorph in } z = i\infty \text{ für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

²⁴Diese Schreibweise ist in der Theorie der Modulformen etabliert und hat den Vorteil, ohne Namen für die Einträge der Matrix M auszukommen.

heißt eine **meromorphe Modulform** von **Gewicht** k bezüglich Γ .

Nach Definition ist die Nullfunktion $f \equiv 0$ eine meromorphe Modulform bezüglich Γ und beliebigen Gewichts. Für $f \not\equiv 0$ ist dies anders:

Bemerkung 2.18. Das Gewicht einer meromorphen Modulform $f \not\equiv 0$ bezüglich einer gegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist eindeutig bestimmt,

denn: Sei f eine Modulform bezüglich Γ sowohl von Gewicht k als auch von Gewicht ℓ mit $k \neq \ell \in \mathbb{Z}$ und sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Nach Axiom (V_1) gilt dann

$$(cz + d)^k f(z) = f(M\langle z \rangle) = (cz + d)^\ell f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

und also auch

$$(cz + d)^k = (cz + d)^\ell \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H} \text{ mit } f(z) \neq 0, \quad (2.9)$$

wobei nach einem **Korollar** des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen die Nullstellenmenge von f in \mathbb{H} abgeschlossen ist und aus isolierten Punkten besteht.

Als Kongruenzuntergruppe hat Γ nach Korollar 1.33 endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Wegen (1.4) ist daher Γ nicht vollständig in

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c = 0 \right\}$$

enthalten, weshalb wir ohne Einschränkung $M \notin \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$, also $c \neq 0$, annehmen können. Wenden wir auf Gleichung (2.9) den **Identitätssatz für Potenzreihen** an, so folgt insbesondere die Gleichheit der Grade $k = \ell$ und somit unsere Behauptung. #

Axiom (V_2) lässt sich noch etwas hübscher formulieren. Dafür müssen wir ein wenig ausholen:

Lemma 2.19. Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, die Axiom (V_1) bezüglich einer gegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit einem Gewicht k erfüllt. Seien weiter $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$ eine Spitzenklasse, $s, \tilde{s} \in \mathfrak{s}$ und $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle i\infty \rangle = s$ und $\tilde{M}\langle i\infty \rangle = \tilde{s}$. Dann gilt: Ist $f|_k M$ meromorph in $z = i\infty$, so auch $f|_k \tilde{M}$.

Beweis. Da für $f \equiv 0$ nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, f und damit auch $f|_k M$ und $f|_k \tilde{M}$ seien nicht konstant Null. Nach Lemma 2.16 hat $f|_k M$ dann eine Fourier-Entwicklung

$$(f|_k M)(z) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n(f|_k M) q^{\frac{n}{h_\Gamma(s)}}$$

mit einem $\nu \in \mathbb{Z}$ und Koeffizienten $a_n(f|_k M) \in \mathbb{C}$. Da s und \tilde{s} nach Voraussetzung Γ -äquivalent sind, gibt es ein $A \in \Gamma$ mit $A\langle \tilde{s} \rangle = s$. Offenbar liegt $M^{-1}A\tilde{M}$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$, es gibt also ein $h \in \mathbb{Z}$ mit $M^{-1}A\tilde{M} = \pm T^h$. Es folgt

$$(f|_k \tilde{M})(z) = (f|_k (A\tilde{M}))(z)$$

$$\begin{aligned}
&= (f|_k(MM^{-1}A\tilde{M}))(z) \\
&= ((f|_kM)|_k(M^{-1}A\tilde{M}))(z) \\
&= \pm \sum_{n=-v}^{\infty} a_n(f|_kM) e^{\frac{2\pi i n(z+h)}{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}} \\
&= \sum_{n=-v}^{\infty} (\pm a_n(f|_kM) e^{\frac{2\pi i n h}{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}}) e^{\frac{2\pi i n z}{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die wegen der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung eindeutig bestimmte Fourier-Entwicklung von $f|_k\tilde{M}$ gefunden. Die Funktion $f|_k\tilde{M}$ ist also meromorph in $z = i\infty$ und das Lemma bewiesen. \square

Im Beweis von Lemma 2.19 haben wir noch etwas mehr bewiesen, denn wir haben auch gezeigt, dass der kleinste Index $n \in \mathbb{Z}$, für den der n -te Fourier-Koeffizient nicht verschwindet, in beiden Fourier-Entwicklungen übereinstimmt. Insbesondere können wir wohldefiniert die folgenden Begriffe einführen:

Definition 2.20. Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, die Axiom (V_1) bezüglich einer gegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit einem Gewicht k erfüllt. Seien weiter $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$, $s \in \mathfrak{s}$ und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M(i\infty) = s$.

- (a) Ist dann $(f|_kM)(z)$ in $z = i\infty$ holomorph bzw. meromorph, so nennen wir f **holomorph** bzw. **meromorph in der Spitze** s bzw. der Spitzenklasse \mathfrak{s} .
- (b) Den kleinsten Index $n \in \mathbb{Z}$, für den der Fourier-Koeffizient $a_n(f|_kM)$ in (2.8) nicht verschwindet, nennen wir die **Ordnung** $\mathrm{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})$ bzw. $\mathrm{ord}_{\Gamma}(f; s)$ von f in der Spitze s bzw. der Spitzenklasse \mathfrak{s} .

In dieser Sprache fordert Axiom (V_2) also Meromorphie in allen Spitzen bezüglich Γ ein und nach Lemma 2.19 ist dies äquivalent zu dem folgenden, leichter zu überprüfenden Axiom:

(V'_2) f ist meromorph in jedem $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$.²⁵

Im für uns wichtigsten Fall $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es nach Bemerkung 1.24 nur eine Äquivalenzklasse von Spitzen. Nach (V'_2) genügt es in diesem Fall also, die Meromorphie einer meromorphen Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ in $z = i\infty$ zu überprüfen.

Die Menge der meromorphen Modulformen festen Gewichts zur gegebenen Kongruenzuntergruppe Γ trägt offensichtlich die Struktur eines \mathbb{C} -Vektorraums. Diesen und einige wichtige Untervektorräume wollen wir nun benennen:

Definition 2.21. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und sei $k \in \mathbb{Z}$.

- (a) Für den \mathbb{C} -Vektorraum der meromorphen Modulformen von Gewicht k bezüglich Γ schreiben wir $V_k(\Gamma)$.

²⁵Nach Proposition 1.37 ist dies eine endliche Menge.

- (b) Den Unterraum der auf ganz $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ holomorphen Modulformen aus $V_k(\Gamma)$ bezeichnen wir mit $M_k(\Gamma)$ und nennen seine Elemente die **(ganzen) Modulformen** von Gewicht k bezüglich Γ .
- (c) Für den Unterraum der in allen Spitzen verschwindenden Modulformen aus $M_k(\Gamma)$ schreiben wir $S_k(\Gamma)$; seine Elemente heißen die **Spitzenformen** bzw. die **cuspidalen Modulformen** von Gewicht k bezüglich Γ .

Im Spezialfall $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ schreiben wir auch einfacher V_k, M_k, S_k statt $V_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

Multipliziert man zwei meromorphe Modulformen bezüglich Γ , so erhält man wieder eine meromorphe Modulform bezüglich Γ . Die jeweiligen Gewichte addieren sich hierbei auf. Wir formalisieren diese Entdeckung und erinnern dazu zunächst an ein Konzept aus der Algebra:

Definition 2.22. Seien K ein Körper und $(M, +)$ ein kommutatives Monoid. Eine **M -Graduierung** auf einem gegebenen K -Vektorraum V ist ein System $(V_m)_{m \in M}$ von Untervektorräumen von V mit

$$V = \bigoplus_{m \in M} V_m.$$

Eine **M -Graduierung** auf einer gegebenen K -Algebra A ist eine Graduierung auf A als Vektorraum mit

$$A_m \cdot A_{\tilde{m}} \subseteq A_{m+\tilde{m}} \quad \text{für alle } m, \tilde{m} \in M.$$

Proposition 2.23. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Dann sind

$$V(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\Gamma), \quad M(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma) \quad \text{und} \quad S(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\Gamma)$$

\mathbb{Z} -graduierte \mathbb{C} -Algebren. Im Spezialfall $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ schreiben wir auch einfacher V, M, S statt $V(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), M(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), S(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

Beweis. Nach Bemerkung 2.18 ist das Gewicht einer nichttrivialen meromorphen Modulform eindeutig. Damit folgt, dass

$$V(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\Gamma), \quad M(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma) \quad \text{und} \quad S(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\Gamma)$$

jeweils direkte Summen von \mathbb{C} -Vektorräumen sind. Auf $V(\Gamma)$ – und analog auf $M(\Gamma)$ bzw. $S(\Gamma)$ – lässt sich durch

$$\begin{aligned} V_k(\Gamma) \times V_\ell(\Gamma) &\rightarrow V_{k+\ell}(\Gamma), \\ (f, g) &\mapsto fg \end{aligned}$$

eine Multiplikation definieren,

denn: Als Produkt zweier auf \mathbb{H} meromorphen Funktionen ist fg wieder auf \mathbb{H} meromorph. Zudem gilt für alle $M \in \Gamma$

$$(fg)(M\langle z \rangle) = f(M\langle z \rangle) \cdot g(M\langle z \rangle)$$

$$\begin{aligned}
&= j(M, z)^k f(z) \cdot j(M, z)^\ell g(z) \\
&= j(M, z)^{k+\ell} (fg)(z),
\end{aligned}$$

so dass fg Axiom (V_1) bezüglich Γ mit Gewicht $k + \ell$ erfüllt. Die Fourier-Entwicklung von fg ergibt sich als das Produkt der jeweiligen Fourier-Entwicklungen von f und g . Die Meromorphie in $z = i\infty$ von fg folgt also aus der entsprechenden Eigenschaft von f und g . Das Produkt fg erfüllt daher auch Axiom (V'_2) , so dass insgesamt die Behauptung folgt. $\#$

Also haben wir eine wohldefinierte Multiplikation, bezüglich derer sich das Gewicht additiv verhält, was $V(\Gamma)$ – und analog auf $M(\Gamma)$ bzw. $S(\Gamma)$ – zu einer \mathbb{Z} -graduierten \mathbb{C} -Algebra macht. \square

Wir haben noch keine Beispiele für Modulformen angegeben und werden dies auch erst in Kapitel 3 nachholen, weil die Konstruktion der klassischen Beispiele recht aufwändig ist. Erste Überlegungen zu Modulformen können wir jedoch schon hier anstellen:

Proposition 2.24. *Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe mit $-I_2 \in \Gamma$. Dann gilt $V_k(\Gamma) = \{0\}$ für alle ungeraden Werte von k .*

Beweis. Ist $-I_2 \in \Gamma$, so gilt nach (V_1) für ein beliebiges $f \in V_k(\Gamma)$

$$f(z) = (f|_k(-I_2))(z) = (0 \cdot z + (-1))^{-k} f((-I_2)\langle z \rangle) = (-1)^k f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Für ungerades k folgt sofort $f \equiv 0$, wie behauptet. \square

Proposition 2.25. *Sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ gegeben. Dann ist mit Γ auch*

$$(A^{-1}\Gamma A \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

eine Kongruenzuntergruppe und für eine beliebige auf \mathbb{H} holomorphe bzw. meromorphe Funktion f , die Axiom (V_1) bezüglich Γ mit einem Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt, ist

$$g := f|_k A$$

auch holomorph bzw. meromorph auf \mathbb{H} und erfüllt Axiom (V_1) bezüglich der Kongruenzuntergruppe $A^{-1}\Gamma A \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit Gewicht k .

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass es ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{N}A, \tilde{N}A^{-1} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ und $\Gamma(\tilde{N}) \subseteq \Gamma$ gibt. Für $N := \tilde{N}^3$ gilt dann

$$\begin{aligned}
A\Gamma(N)A^{-1} &\subseteq A(I_2 + \tilde{N}^3\mathbb{Z}^{2 \times 2})A^{-1} = I_2 + \tilde{N}(\tilde{N}A)\mathbb{Z}^{2 \times 2}(\tilde{N}A^{-1}) \subseteq I_2 + \tilde{N}\mathbb{Z}^{2 \times 2}, \\
A\Gamma(N)A^{-1} &\subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})
\end{aligned}$$

und also

$$A\Gamma(N)A^{-1} \subseteq \Gamma(\tilde{N}).$$

Nach Konjugieren mit A folgt

$$\Gamma(N) \subseteq A^{-1}\Gamma(\tilde{N})A \subseteq A^{-1}\Gamma A$$

und, indem wir alles mit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ schneiden, also die erste Behauptung.

Die Funktion $f|_k A$ ist holomorph bzw. meromorph auf \mathbb{H} nach Proposition 2.15. Ebenfalls mit Proposition 2.15 gilt

$$(f|_k A)|_k(A^{-1}MA) = f|_k(MA) = (f|_k M)|_k A = f|_k A \quad \text{für alle } M \in \Gamma,$$

womit auch die zweite Behauptung folgt. \square

Korollar 2.26. Sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ gegeben. Liegt dann eine Funktion f in $V_k(\Gamma)$ bzw. $M_k(\Gamma)$ bzw. $S_k(\Gamma)$ für eine Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und ein $k \in \mathbb{Z}$, so liegt $f|_k A$ in $V_k(\tilde{\Gamma})$ bzw. $M_k(\tilde{\Gamma})$ bzw. $S_k(\tilde{\Gamma})$ mit $\tilde{\Gamma} := A^{-1}\Gamma A \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Beweis. Die Holomorphie bzw. Meromorphie der Funktion $f|_k A$ auf \mathbb{H} sowie Axiom (V_1) bezüglich $\tilde{\Gamma}$ mit Gewicht k folgen mit Proposition 2.25. Axiom (V_2) gilt, da offenkundig genau dann $(f|_k A)|_k M = f|_k(AM)$ für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ holomorph bzw. meromorph in $z = i\infty$ ist, wenn dies auf $f|_k M$ zutrifft. Ist f zudem eine Spitzenform, so nach Proposition 1.17 (b) auch $f|_k A$. Damit ist alles bewiesen. \square

Proposition 2.27. Seien $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$ sowie $f \in V_k(\Gamma)$. Ist weiter A_1, \dots, A_n ein Vertretersystem von Γ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wie in (1.6), so gilt

$$\mathrm{tr}(f) := \sum_{v=1}^n f|_k A_v \in V_k \quad \text{und} \quad F := \prod_{v=1}^n f|_k A_v \in V_{kn},$$

wobei wir die durch $f \mapsto \mathrm{tr}(f)$ induzierte Abbildung $V_k(\Gamma) \rightarrow V_k$ auch als **Spurbildung** bezeichnen.

Beweis. Nach Korollar 2.26 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$f|_k A_v \in V_k(\Gamma(N)) \quad \text{für alle } v \in \{1, \dots, n\}$$

und mit Proposition 2.23 folgt

$$\mathrm{tr}(f) \in V_k(\Gamma(N)) \quad \text{und} \quad F \in V_{nk}(\Gamma(N)).$$

Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathrm{tr}(f)$ und F Axiom (V_1) bezüglich ganz $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und nicht nur bezüglich $\Gamma(N)$ erfüllen. Tatsächlich gilt für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(f)(M\langle z \rangle) &= \sum_{v=1}^n (f|_k A_v)(M\langle z \rangle) & F(M\langle z \rangle) &= \prod_{v=1}^n (f|_k A_v)(M\langle z \rangle) \\ &= \sum_{v=1}^n j(M, z)^k ((f|_k A_v)|_k M)(z) & &= \prod_{v=1}^n j(M, z)^k \cdot ((f|_k A_v)|_k M)(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= j(M, z)^k \cdot \sum_{v=1}^n (f|_k(A_v M))(z) &= j(M, z)^{nk} \cdot \prod_{v=1}^n (f|_k(A_v M))(z) \\
&= j(M, z)^k \cdot \operatorname{tr}(f)(z) &= j(M, z)^{nk} \cdot F(z),
\end{aligned}$$

wobei die jeweils letzte Gleichheit gilt, da wegen

$$\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) = \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M = \left(\bigsqcup_{v=1}^n \Gamma A_v \right) \cdot M = \bigsqcup_{v=1}^n \Gamma(A_v M). \quad (2.10)$$

mit A_v auch $A_v M$ ein Vertretersystem von Γ in $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ durchläuft. Insgesamt folgt die Proposition. \square

2.3 Das Petersson-Skalarprodukt



Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Konstruktion eines „natürlichen“ Skalarprodukts auf dem \mathbb{C} -Vektorraum $S_k(\Gamma)$ der Spitzenformen von Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ bezüglich der fest vorgegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$. Hierzu benötigen wir zunächst ein Γ -invariantes Maß (vgl. [hier](#)) auf \mathbb{H} :

Lemma 2.28. *Die Differentialform*

$$d\omega(z) := \frac{dx \wedge dy}{y^2} \quad \text{für alle } z = x + iy \in \mathbb{H}$$

ist invariant unter $\operatorname{GL}_2(\mathbb{R})^+$, es gilt also

$$d\omega(M\langle z \rangle) = d\omega(z) \quad \text{für alle } M \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})^+ \text{ und alle } z = x + iy \in \mathbb{H}.$$

Beweis. Einerseits gilt für alle $z = x + iy \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
d\omega(z) &= \frac{1}{y^2} \cdot (dx \wedge dy) \\
&= \frac{i}{2y^2} \cdot (0 - i \cdot dx \wedge dy - i \cdot dx \wedge dy + 0) \\
&= \frac{i}{2y^2} \cdot (dx \wedge dx - i \cdot dx \wedge dy + i \cdot dy \wedge dx + dy \wedge dy) \\
&= \frac{i}{2y^2} \cdot (dx + i \cdot dy) \wedge (dx - i \cdot dy) \\
&= \frac{i}{2y^2} \cdot (dz \wedge \bar{d}z).
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Andererseits gilt für ein beliebiges $M \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und ein beliebiges $z \in \mathbb{H}$

$$\frac{dM\langle z \rangle}{dz} = \frac{d \frac{az+b}{cz+d}}{dz} = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{\det(M)}{j(M, z)^2}. \quad (2.12)$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
d\omega(M\langle z \rangle) &\stackrel{(2.11)}{=} \frac{i}{2 \cdot \operatorname{Im}(M\langle z \rangle)^2} \cdot (dM\langle z \rangle \wedge \overline{dM\langle z \rangle}) \\
&\stackrel{(2.12)}{=} \frac{i}{2 \cdot \operatorname{Im}(M\langle z \rangle)^2} \cdot \left(\frac{\det(M) \cdot dz}{j(M, z)^2} \wedge \overline{\frac{\det(M) \cdot dz}{j(M, z)^2}} \right) \\
&\stackrel{(1.2)}{=} \frac{i \cdot |j(M, z)|^4}{2 \cdot \det(M)^2 \cdot y^2} \cdot \frac{\det(M)^2}{|j(M, z)|^4} \cdot (dz \wedge \overline{dz}) \\
&\stackrel{(2.11)}{=} d\omega(z)
\end{aligned}$$

und somit das Lemma. □

Lemma 2.29. Sei $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und seien F_1 und F_2 Fundamentalbereiche für die Aktion von Γ auf \mathbb{H} , so dass die Ränder ∂F_1 von F_1 und ∂F_2 von F_2 Nullmengen, also Mengen von Maß Null, sind. Sei $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ messbar (vgl. *hier*) und Γ -invariant, gelte also $g(M\langle z \rangle) = g(z)$ für alle $M \in \Gamma$. Weiter gelte



$$\int_{F_1} |g(z)| d\omega(z) < \infty,$$

also dass $|g|$ über F_1 integrierbar ist – dies impliziert, dass auch g über F_1 integrierbar ist. Dann ist g auch über F_2 integrierbar und es gilt

$$\int_{F_2} g(z) d\omega(z) = \int_{F_1} g(z) d\omega(z).$$

Beweis. Nach Bedingung (ii) in Definition 1.22 gilt

$$\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \bar{\Gamma}} M\langle F_1 \rangle = \bigcup_{M \in \bar{\Gamma}} M\langle F_2 \rangle, \quad (2.13)$$

nach Bedingung (iii) zudem

$$M\langle \mathring{F}_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \mathring{F}_1 \rangle = \emptyset \quad \text{für alle } M \neq \pm \tilde{M} \text{ in } \bar{\Gamma}. \quad (2.14)$$

Da mit ∂F_1 auch für alle $M, \tilde{M} \in \bar{\Gamma}$ die Translate $M\langle \partial F_1 \rangle, \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle$ Nullmengen sind, trifft dies folglich im Fall $M \neq \pm \tilde{M}$ auch auf

$$\begin{aligned}
&M\langle F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle F_1 \rangle \\
&= M\langle \mathring{F}_1 \cup \partial F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \mathring{F}_1 \cup \partial F_1 \rangle \\
&= (M\langle \mathring{F}_1 \rangle \cup M\langle \partial F_1 \rangle) \cap (\tilde{M}\langle \mathring{F}_1 \rangle \cup \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle) \\
&\stackrel{(2.14)}{=} (M\langle \mathring{F}_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle) \cup (M\langle \partial F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \mathring{F}_1 \rangle) \cup (M\langle \partial F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle)
\end{aligned}$$

zu. Es gilt

$$\int_{F_1} g(z) d\omega(z) = \int_{\mathbb{H} \cap F_1} g(z) d\omega(z)$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2.13)}{=} \int_{(\cup_{M \in \Gamma} M(F_2)) \cap F_1} g(z) \, d\omega(z) \\
&= \int_{\cup_{M \in \Gamma} (M(F_2) \cap F_1)} g(z) \, d\omega(z),
\end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, dass es sich hierbei um eine abzählbare Vereinigung messbarer Mengen handelt. Da die paarweisen Durchschnitte nach der obigen Überlegung jeweils Nullmengen sind, gilt die abzählbare Additivität des Integrals und somit

$$\begin{aligned}
\int_{F_1} g(z) \, d\omega(z) &= \sum_{M \in \Gamma} \int_{M(F_2) \cap F_1} g(z) \, d\omega(z) \\
&= \sum_{M \in \Gamma} \int_{F_2 \cap M^{-1}(F_1)} g(M\langle z \rangle) \, d\omega(M\langle z \rangle) \\
&\stackrel{2.28}{=} \sum_{M \in \Gamma} \int_{F_2 \cap M^{-1}(F_1)} g(z) \, d\omega(z) \\
&= \dots = \int_{F_2} g(z) \, d\omega(z).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.30. Der Rand des in Satz 1.27 eingeführten Standardfundamentalbereichs \mathcal{F} für die Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} ist offensichtlich eine Nullmenge. Weiter gilt

$$\mathrm{vol}(\mathcal{F}) := \int_{\mathcal{F}} d\omega(z) = \frac{\pi}{3} < \infty,$$

denn: Setzen wir für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}_{>1}$

$$\mathcal{F}_c := \mathcal{F} \cap \overline{\mathbb{H}_{0,c}} = \{z \in \mathcal{F} : \mathrm{Im}(z) \leq c\},$$

so gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}} d\omega(z) &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} \frac{dx \wedge dy}{y^2} \\
&= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} \frac{d^2x \cdot y - dy \wedge dx}{y^2} + i \cdot \frac{d^2y \cdot y - dy \wedge dy}{y^2} \\
&= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} d\left(\frac{dx + i dy}{y}\right) \\
&= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} d\left(\frac{dz}{y}\right) \\
&= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\partial \mathcal{F}_c} \frac{dz}{y},
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit mit dem Satz von Stokes ergibt. Für das Integral über die Strecke

$$z(t) = t + ic \quad \text{mit } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$



gilt

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d(t+ic)}{c} = \frac{1}{c} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{c} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0.$$

Die Integrale über die beiden Strecken

$$z(t) = \pm \frac{1}{2} + it \quad \text{mit } t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, c \right]$$

heben sich auf, da letztere in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und der Integrand offensichtlich invariant unter der Ersetzung $z \mapsto z + 1$ ist. Es verbleibt das Integral über den Kreisbogen

$$z(t) = e^{it} = \cos(t) + i \sin(t) \quad \text{mit } t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right].$$

Dieses Integral muss reellwertig sein und hat damit den Wert

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dz(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\sin(t)} dt &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{i \cos(t) - \sin(t)}{\sin(t)} dt \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{Re} \left(\frac{i \cos(t) - \sin(t)}{\sin(t)} \right) dt \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (-1) dt \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

#

Nach Lemma 2.29 stimmt das Volumen sämtlicher Fundamentalbereiche für die Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} , deren Rand eine Nullmenge ist, überein, so dass sich der Wert $\operatorname{vol}(\mathcal{F})$ auch als Volumen der Doppelnebenklasse

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \stackrel{1.17}{\cong} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

ansehen lässt, welche die Struktur einer sogenannten kompakten Riemann'schen Fläche trägt.

Wir suchen nun nach einem aus Modulformen bezüglich einer gegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zusammengesetzten Integranden, der Γ -invariant und auf \mathbb{H} beschränkt ist:

Proposition 2.31. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $f \in M_k(\Gamma)$ setzen wir

$$g(z) := y^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Es gelten nun die folgenden Aussagen:

(a) g ist Γ -invariant.

(b) Ist speziell $f \in S_k(\Gamma)$, so ist g auf \mathbb{H} beschränkt.

Beweis. Behauptung (a) können wir einfach nachrechnen. Tatsächlich gilt für jedes $M \in \Gamma$ und jedes $z = x + iy \in \mathbb{H}$

$$g(M\langle z \rangle) = \operatorname{Im}(M\langle z \rangle)^{\frac{k}{2}} \cdot |f(M\langle z \rangle)| \stackrel{(1.2), (V_1)}{=} \frac{y^{\frac{k}{2}}}{|j(M, z)|^k} \cdot |j(M, z)^k \cdot f(z)| = y^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)| = g(z).$$

Zum Beweis von Behauptung (b) genügt es nach (2.13) und Aussage (a), die Beschränktheit von g auf einem Fundamentalbereich der Aktion von Γ auf \mathbb{H} nachzuweisen. Sei

$$\mathcal{F}_\Gamma := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle \quad \text{für } A_1, \dots, A_m \in \overline{\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} \text{ mit } \overline{\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} = \bigsqcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} A_\mu$$

ein solcher Fundamentalbereich, wie wir ihn in Proposition 1.49 eingeführt haben. Sei nun $c \in \mathbb{R}_{>1}$ beliebig. Dann ist g als stetige Funktion auf dem Kompaktum

$$(\mathcal{F}_\Gamma)_c := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F}_c \rangle$$

beschränkt. Es verbleibt also zu zeigen, dass g für $z \rightarrow A_\mu \langle i\infty \rangle$ mit $\mu \in \{1, \dots, m\}$ beschränkt ist, wobei wir $z \in \mathcal{F}_\Gamma$ annehmen dürfen. Wir verlagern diese Fragestellung für die verschiedenen Werte von μ durch Anwenden der jeweiligen Matrix A_μ^{-1} in den Standardfundamentalbereich \mathcal{F} . Die Proposition folgt nun, wenn wir für alle $\mu \in \{1, \dots, m\}$

$$\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle) \rightarrow \infty \text{ für } A_\mu^{-1}\langle z \rangle \in \mathcal{F} \implies g(z) \rightarrow 0$$

zeigen können. Tatsächlich hat nach (V₂) für jedes $\mu \in \{1, \dots, m\}$ die Funktion $f|_k A_\mu$ in $i\infty$ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$(f|_k A_\mu)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_k A_\mu) q^{\frac{n}{h_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Lassen wir auf beiden Seiten A_μ^{-1} operieren, so erhalten wir

$$f(z) = j(A_\mu^{-1}, z)^{-k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_k A_\mu) e^{\frac{2\pi i n A_\mu^{-1}(z)}{h_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Für ein beliebiges $z \in A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle \setminus A_\mu \langle \mathcal{F}_c \rangle$ folgt $\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle) > c$ und somit

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |y^{\frac{k}{2}}| \cdot |f(z)| \\ &= |y|^{\frac{k}{2}} \cdot |j(A_\mu^{-1}, z)|^{-k} \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_k A_\mu) e^{\frac{2\pi i n A_\mu^{-1}(z)}{h_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \right| \\ &\stackrel{(1.2)}{\leq} |\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)|^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\frac{2\pi \operatorname{Im}(A_\mu^{-1}(z))}{h_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f|_k A_\mu)| \cdot e^{-\frac{2\pi(n-1)\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}(z))}{h_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\frac{2\pi\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f|_k A_\mu)| \cdot e^{-\frac{2\pi(n-1)c}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \\
&= \frac{\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)^{\frac{k}{2}}}{\frac{2\pi\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)}{e^{\frac{2\pi c}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}}}} \cdot \left(e^{\frac{2\pi c}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f|_k A_\mu)| \cdot e^{-\frac{2\pi n c}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}} \right) \\
&\ll \frac{\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)^{\frac{k}{2}}}{\frac{2\pi\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle)}{e^{\frac{2\pi c}{\tilde{h}_\Gamma(A_\mu(i\infty))}}}} \xrightarrow{\operatorname{Im}(A_\mu^{-1}\langle z \rangle) \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Das ist Behauptung (b). □

Definition 2.32. Sei $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $f, g \in M_k(\Gamma)$ mit $f \cdot g \in S_{2k}(\Gamma)$ ist das **Petersson-Skalarprodukt** definiert durch

$$\langle f | g \rangle_\Gamma := \frac{1}{[\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]} \cdot \int_F f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z), \quad (2.15)$$

wobei F einen Fundamentalbereich für die Aktion von Γ auf \mathbb{H} bezeichne, dessen Rand eine Nullmenge in \mathbb{H} ist. Im Fall $\Gamma = \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ schreiben wir auch kurz $\langle \cdot | \cdot \rangle$ statt $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})}$.

Satz 2.33. Seien $\Gamma \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$ und $f, g \in M_k(\Gamma)$ mit $f \cdot g \in S_{2k}(\Gamma)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Das Integral in (2.15) konvergiert absolut und ist unabhängig von der Wahl des benutzten Fundamentalbereichs F .
- (b) Die Zuordnung

$$\begin{aligned}
S_k(\Gamma) \times S_k(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{C}, \\
(f, g) &\mapsto \langle f | g \rangle_\Gamma
\end{aligned}$$

definiert ein Skalarprodukt auf $S_k(\Gamma)$.

- (c) Gilt zusätzlich $f, g \in M_k(\tilde{\Gamma})$ für eine weitere Kongruenzuntergruppe $\tilde{\Gamma} \subseteq \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$, so gilt

$$\langle f | g \rangle_{\tilde{\Gamma}} = \langle f | g \rangle_\Gamma,$$

das Petersson-Skalarprodukt ist in diesem Sinne also unabhängig von der Wahl von Γ .

Beweis. Wegen $|f(z)\overline{g(z)}y^k| = y^k \cdot |(fg)(z)|$ können wir Proposition 2.31 anwenden und erhalten die Γ -Invarianz und Beschränktheit des Integranden $f(z)\overline{g(z)}y^k$ auf \mathbb{H} . Da \mathcal{F}_Γ eine endliche Vereinigung von Kopien des Standardfundamentalbereichs \mathcal{F} ist, ergibt sich mit Beispiel 2.30

$$\int_{\mathcal{F}_\Gamma} d\omega(z) < \infty$$

und daher auch

$$\int_{\mathcal{F}_\Gamma} |f(z)\overline{g(z)}y^k| d\omega(z) < \infty.$$

Die Unabhängigkeit von der Wahl des Fundamentalbereichs und somit auch Behauptung (a) folgt nun mit Lemma 2.29.

Behauptung (b), dass also das Petersson-Skalarprodukt eingeschränkt auf $S_k(\Gamma) \times S_k(\Gamma)$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt, ist schnell überprüft und soll hier nicht vorgeführt werden.

Es verbleibt Behauptung (c) zu zeigen. Da für je zwei Kongruenzuntergruppen $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ ihr Durchschnitt $\Gamma \cap \tilde{\Gamma}$ wieder eine Kongruenzuntergruppe ist, können wir dabei ohne Einschränkung $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ annehmen. Analog zu (1.7) gilt dann nach Bemerkung 1.51

$$\bar{\Gamma} = \bigsqcup_{\varrho=1}^r \tilde{\Gamma} B_{\varrho} \quad \text{mit } B_1, \dots, B_r \in \bar{\Gamma}$$

und für einen beliebigen Fundamentalbereich \mathcal{F}_{Γ} für die Aktion von Γ auf \mathbb{H} ist analog zu Proposition 1.49 durch

$$\mathcal{F}_{\bar{\Gamma}} := \bigcup_{\varrho=1}^r B_{\varrho} \langle \mathcal{F}_{\Gamma} \rangle$$

ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\tilde{\Gamma}$ auf \mathbb{H} gegeben. Wegen der in Teil (a) gezeigten Wohldefiniertheit des Petersson-Skalarprodukt unter der Wahl eines Fundamentalbereichs gilt nun

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle_{\bar{\Gamma}} &= \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \tilde{\Gamma}]} \cdot \int_{\mathcal{F}_{\bar{\Gamma}}} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\ &= \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \tilde{\Gamma}]} \cdot \int_{\bigcup_{\varrho=1}^r B_{\varrho} \langle \mathcal{F}_{\Gamma} \rangle} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\ &\stackrel{f, g \in M_k(\Gamma)}{=} \frac{[\bar{\Gamma} : \tilde{\Gamma}]}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \tilde{\Gamma}]} \cdot \int_{\mathcal{F}_{\Gamma}} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\ &= \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \bar{\Gamma}]} \cdot \int_{\mathcal{F}_{\bar{\Gamma}}} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\ &= \langle f | g \rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

und somit Behauptung (c). □

2.4 Die Hecke-Abschätzung

In diesem Abschnitt wollen wir uns erstmals in größerem Detail den Fourier-Koeffizienten einer ganzen Modulform widmen. Deren Studium ist damit jedoch nicht abgeschlossen, und wird im weiteren Verlauf der Vorlesung immer wieder aus verschiedenen Perspektiven vorangetrieben. Dennoch liefern vergleichsweise elementare Ansätze bereits sehr nützliche Kriterien, um ganze Modulformen bezüglich einer gegebenen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ innerhalb der auf der oberen Halbebene \mathbb{H} holomorphen Funktionen zu charakterisieren:

Proposition 2.34. Seien $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda > 0$ und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}}$ eine auf \mathbb{H} holomorphe Funktion, die Axiom (V_1) bezüglich Γ mit Gewicht k erfüllt. Gibt es dann eine Konstante $A > 0$ mit

$$|f(x + iy)| = O(y^{-A}) \quad \text{für } y \rightarrow 0^+ \quad (2.16)$$

gleichmäßig in x , so gilt bereits $f \in M_k(\Gamma)$. Im Fall $A < k$ gilt sogar $f \in S_k(\Gamma)$.

Beweis. Seien $s \neq i\infty$ eine beliebige Spitze und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle s \rangle = i\infty$. Nach Proposition 2.25 ist dann $M\Gamma M^{-1}$ wieder eine Kongruenzuntergruppe und es gilt

$$f|_k M^{-1} A = f|_k M^{-1} \quad \text{für alle } A \in M\Gamma M^{-1}.$$

Da f nach Voraussetzung holomorph auf der oberen Halbebene \mathbb{H} ist, gibt es nach Lemma 1.39 und Satz 2.11 somit ein $\mu \in \mathbb{N}$ mit

$$f|_k M^{-1}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (f|_k M^{-1}) q^{\frac{n}{\mu}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Wir zeigen nun $a_n (f|_k M^{-1}) = 0$ für alle $n < 0$, um die Holomorphie von f in s zu folgern. Einerseits gilt nach (2.4) für ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} a_n (f|_k M^{-1}) &= \int_0^1 (f|_k M^{-1})(\mu(z_0 + t)) e^{-2\pi i n(z_0 + t)} dt \\ &= \frac{1}{\mu} \int_{\mu z_0}^{\mu z_0 + \mu} (f|_k M^{-1})(z) e^{-\frac{2\pi i n z}{\mu}} dz. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Andererseits gilt für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ wegen $M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $c \neq 0$ die auf dem Kompaktum $|x| \leq \frac{\mu}{2}$ gleichmäßige Abschätzung

$$\mathrm{Im} \left(M^{-1}\langle z \rangle \right) = \frac{y}{|cz + d|^2} \ll \frac{y}{c^2 y^2} < \frac{1}{y} \quad \text{für } y \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Mit der Voraussetzung folgt

$$\begin{aligned} |(f|_k M^{-1})(z)| &= |(cz + d)^{-k} f(M^{-1}\langle z \rangle)| \\ &\stackrel{(2.16)}{\ll} |(cy)^{-k} \mathrm{Im} \left(M^{-1}\langle z \rangle \right)^{-A}| \\ &\stackrel{(2.18)}{\ll} y^{A-k}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wählen wir nun $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{y}{\mu}i$ in (2.17), so folgt mit der Standardabschätzung für Integrale

$$\begin{aligned} |a_n (f|_k M^{-1})| &\leq \frac{1}{\mu} \int_{-\frac{\mu}{2} + iy}^{\frac{\mu}{2} + iy} |(f|_k M^{-1})(z) e^{-\frac{2\pi i n z}{\mu}}| dz \\ &\ll y^{A-k} e^{\frac{2\pi n y}{\mu}} \quad \text{für } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $y \rightarrow \infty$ erhalten wir also $a_n(f|_k M^{-1}) = 0$ für $n < 0$ und zudem $a_0(f|_k M^{-1}) = 0$, falls zusätzlich $A < k$. Also hat f im Fall $A < k$ eine Nullstelle in s . Die Aussage weitet sich auch auf die Spitze $i\infty$ aus, da es $\Gamma \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ stets nichtleer ist, und somit eine zu $i\infty$ äquivalente Spitze $s \in \mathbb{Q}$ gefunden werden kann. \square

Lemma 2.35. Seien $A > -1$ sowie $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}} \quad \text{für ein } \lambda > 0$$

eine auf \mathbb{H} holomorphe Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Gilt $a_n = O(n^A)$, so auch $f(x + iy) = O(y^{-A-1})$ für $y \rightarrow 0^+$ gleichmäßig in x .
 (b) Gilt umgekehrt $f(x + iy) = O(y^{-A-1})$ für $y \rightarrow 0^+$ gleichmäßig in x , so auch $a_n = O(n^{A+1})$.

Beweis. Zum Beweis von Behauptung (a) schließen wir aus dem Satz über die Laurent-Entwicklung, dass der Hauptteil

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n q^{\frac{n}{\lambda}}$$

der Entwicklung von f um $q = 0$ gleichmäßig auf Kompakta in \mathbb{C} konvergiert. Es genügt also, in den folgenden Abschätzungen lediglich den zugehörigen Nebenteil

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}}$$

zu betrachten. Wegen $a_n = O(n^A)$ erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x + iy)| &\ll_f \sum_{n=1}^{\infty} n^A e^{-\frac{2\pi ny}{\lambda}} \\ &\ll \int_0^{\infty} x^A e^{-\frac{2\pi xy}{\lambda}} dx = \Gamma(A + 1) \left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right)^{-A-1} \end{aligned}$$

und letzteres ist in $O(y^{-A-1})$ für $y \rightarrow 0^+$.

Für den Beweis der Umkehrung (b) benutzen wir die bekannte Formel (2.4) für die Fourier-Koeffizienten und erhalten für alle $y > 0$

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(x + iy) e^{-\frac{2\pi i n(x+iy)}{\lambda}} dx.$$

Durch die Wahl $y = \frac{1}{n}$ bekommen wir damit nach Voraussetzung

$$|a_n| \leq \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} \left| f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right| e^{-\frac{2\pi}{\lambda}} \ll n^{A+1},$$

was die Behauptung zeigt. \square

Bemerkung 2.36. Lemma 2.35 kann für einen eleganten und zugleich offensichtlichen Beweis herangezogen werden, dass die Koeffizienten c_n der Faltung

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n q^n \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n q^n,$$

höchstens polynomiell anwachsen, wenn dies jeweils auf die a_n bzw. b_n zutrifft und beide Faktoren holomorph für $0 < |q| < 1$ sind,

denn: Beschränken $O(y^{-A-1})$ und $O(y^{-B-1})$ das Wachstum für $|q| \rightarrow 1^-$ der jeweiligen Faktoren im Produkt, so beschränkt $O(y^{-A-B-2})$ wiederum das Wachstum des Produkts. #

Diese hübsche Aussage kann natürlich alternativ auch direkt mittels Reihenabschätzungen gezeigt werden.

Möchte man die Modularität einer Funktion zeigen, so muss neben dem Transformationsverhalten noch die Holomorphie in den Spitzen nachgewiesen werden, was bei komplizierten Kongruenzuntergruppen schwierig sein kann. Zum Glück gibt es aber ein einfaches Kriterium, welches diese umständliche Analyse überflüssig macht. Dieses ist Gegenstand des nächsten Satzes:

Satz 2.37. Seien $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$ und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}} \quad \text{für ein } \lambda > 0$$

eine auf \mathbb{H} holomorphe Funktion, die Axiom (V_1) bezüglich Γ mit Gewicht k erfüllt. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Es ist $a_n = 0$ für alle $n < 0$ und $a_n = O(n^k)$ für $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Es gibt ein $A > 0$ mit $a_n = O(n^A)$ für $n \rightarrow \infty$.
- (iii) Es ist $f \in M_k(\Gamma)$.

Beweis. Zunächst impliziert Aussage (i) offensichtlich Aussage (ii), wenn wir $A := k$ wählen.

Gelte nun also Aussage (ii). Mit Lemma 2.35 folgt dann $|f(x + iy)| = O(y^{-A-1})$ für $y \rightarrow 0^+$ gleichmäßig in x und mit Proposition 2.34 hieraus wiederum Aussage (iii).

Zum Beweis der verbleibenden Implikation gelte schließlich Aussage (iii). Wegen der Holomorphie von f in $z = i\infty$ gilt dann bereits $a_n = 0$ für alle $n < 0$. Es verbleibt also $a_n = O(n^k)$ zu zeigen. Dafür betrachten wir eine gegen Null konvergierende Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{H}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.27 gibt es dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $M_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M_n \langle z_n \rangle \in \mathcal{F}$. Nach Korollar 2.26 ist weiter für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $g_n := f|_k M_n^{-1}$ eine Modulform in $M_k(M_n \Gamma M_n^{-1})$, wobei die Menge $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ wegen $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] < \infty$ endlich ist. Da alle g_n eine Fourier-Entwicklung der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(g_n) q^{\frac{k}{\lambda_n}} \quad \text{mit einem } \lambda_n > 0$$

besitzen und auf Kompakta der Form $\mathcal{F}_c = \mathcal{F} \cap \overline{\mathbb{H}_{0,c}}$ für ein $c > 1$ beschränkt sind, gilt insbesondere

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in \mathcal{F}} |g_n(z)| < \infty. \quad (2.20)$$

Dies können wir benutzen, um eine Betragsabschätzung der Funktionswerte $f(z_n)$ zu erhalten, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} f(z_n) &= (f|_k M_n^{-1})(M_n \langle z_n \rangle) \\ &= (c_n z_n + d_n)^{-k} g_n(M_n \langle z_n \rangle) \quad \text{mit } M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $|z_n| < \frac{1}{2}$ für n hinreichend groß und $|M_n \langle z_n \rangle| \leq \frac{1}{2}$ nach Konstruktion können wir dabei ohne Einschränkung $c_n \neq 0$ annehmen. Es gilt dann

$$|f(z_n)| \ll y_n^{-k} |g_n(M_n \langle z_n \rangle)| \stackrel{(2.20)}{\ll} y_n^{-k} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Mit Lemma 2.35 folgt $a_n = O(n^k)$ und somit Aussage (i). \square

Satz 2.37 gibt nicht nur ein einfaches Kriterium für die Eigenschaft, eine ganze Modulform zu sein, sondern liefert auch die Abschätzung $a_n = O(n^k)$ der Fourier-Koeffizienten a_n im Falle des Gewichts k . Die 1937 von HECKE²⁶ bewiesene Abschätzung liefert nun eine Verschärfung für den Fall von Spitzenformen:

Satz 2.38 (Hecke-Abschätzung). *Seien $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$ und*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^{\frac{n}{h_\Gamma(i\infty)}} \in S_k(\Gamma)$$

eine Spitzenform bezüglich Γ vom Gewicht k . Dann gilt bereits $a_n(f) = O(n^{\frac{k}{2}})$.

Beweis. Nach Proposition 2.31 gilt für ein beliebiges $f \in S_k(\Gamma)$ die Asymptotik

$$|f(x + iy)| = O(y^{-\frac{k}{2}}) \quad \text{für } y \rightarrow 0^+ \text{ gleichmäßig in } x.$$

Setzen wir $A := \frac{k}{2} - 1 > -1$ in Lemma 2.35, so folgt damit $a_n = O(n^{A+1}) = O(n^{\frac{k}{2}})$ wie behauptet. \square

2.5 Die Valenzformel

Für meromorphe Modulformen bezüglich der vollen Modulgruppe gilt die folgende bemerkenswerte Formel:

²⁶Erich Hecke (1887-1947)

Satz 2.39. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq f \in V_k$. Dann gilt die **Valenzformel**, auch $\frac{k}{12}$ -**Formel** genannt, die besagt:

$$\text{ord}(f; i\infty) + \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(f; i) + \frac{1}{3} \cdot \text{ord}(f; \rho) + \sum_{z \neq i, \rho} \text{ord}(f; z) = \frac{k}{12}.$$

Hierbei laufe z über die Elemente eines Vertretersystem modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ in \mathbb{H} , die weder zu i noch zu ρ äquivalent sind.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Summe in der Valenzformel stets endlich ist: Nach Definition 2.17 ist jedes $f \in V_k$ meromorph in $z = i\infty$ und nach Definition 2.14 gibt es ein $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$c_1 > y \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ die Imaginärteil einer Polstelle von } f \text{ sind.}$$

Zudem gibt es ein $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$c_2 > y \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ die Imaginärteil einer Nullstelle von } f \text{ sind,}$$

denn: Bekanntermaßen ist f holomorph auf $\mathbb{H}_{c_1, \infty}$ und hat Periode 1. Nach Satz 2.11 hat f daher eine Fourier-Entwicklung, es gibt also eine holomorphe Funktion $f_{i\infty}: D_0^{e^{-2\pi c_1}} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(f_{i\infty} \circ \rho)(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_{c_1, \infty},$$

die sich wegen $f \in V_k$ meromorph nach $U_{e^{-2\pi c_1}}(0)$ fortsetzen lässt. Gäbe es kein c_2 wie in der Behauptung, läge in jeder noch so kleinen Umgebung von $q = 0$ eine Nullstelle von $f_{i\infty}$, so dass $q = 0$ kein Pol von $f_{i\infty}$ sein könnte. Der Punkt $q = 0$ wäre also ein Häufungspunkt von Nullstellen der auf $U_{e^{-2\pi c_1}}(0)$ holomorphen Funktion $f_{i\infty}$, die dort nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen konstant Null sein müsste.

Dies träfe dann offensichtlich auch auf die Einschränkung von f auf $\mathbb{H}_{c_1, i\infty}$ und wieder nach dem Identitätssatz auch für f auf ganz \mathbb{H} ohne die Polstellenmenge von f zu. Im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes erhielten wir nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz $f \equiv 0$. #

Insgesamt folgt, dass sämtliche Null- und Polstellen von f im Horizontalstreifen $\mathbb{H}_{0, c}$ mit

$$c := \max\{c_1, c_2\}$$

liegen. Nach der Definition von Meromorphie und dem Identitätssatz sind die Null- und die Polstellenmenge von f jeweils abgeschlossen in $\mathbb{H}_{0, 2c}$ und bestehen nur aus isolierten Punkten. Die Menge $\mathcal{F}_c = \mathcal{F} \cap \overline{\mathbb{H}_{0, c}}$ ist offensichtlich abgeschlossen in $\mathbb{H}_{0, 2c}$ und beschränkt, also kompakt. Es folgt, dass f nur endlich viele Null- bzw. Polstellen in \mathcal{F}_c hat. Die Endlichkeit der Summe in der Valenzformel folgt, da \mathcal{F}_c nach Konstruktion ein Vertretersystem modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ sämtlicher Punkte in \mathbb{H} mit $\text{ord}(f; z) \neq 0$ enthält und $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -äquivalente Punkte in \mathbb{H} wegen

$$\text{ord}(f; M\langle z \rangle) = \text{ord}(f|_k M^{-1}; M\langle z \rangle) = \text{ord}(f(z); z) \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}), z \in \mathbb{H}$$

dieselbe Ordnung haben, wobei wir für die letzte Gleichheit die Holomorphie des Automorphiefaktors $j(M^{-1}, z)$ auf \mathbb{H} ausgenutzt haben.

Für den Nachweis der Valenzformel nehmen wir nun zunächst an, f habe auf dem Rand $\partial\mathcal{F}$ keine Null- und Polstellen mit der möglichen Ausnahme der Punkte i und ϱ (und dann auch $-\bar{\varrho}$). Sei γ die in Abbildung 2.1 dargestellte stückweise glatte geschlossene Kurve, die in mathematisch positiver Richtung einfach durchlaufen werde.

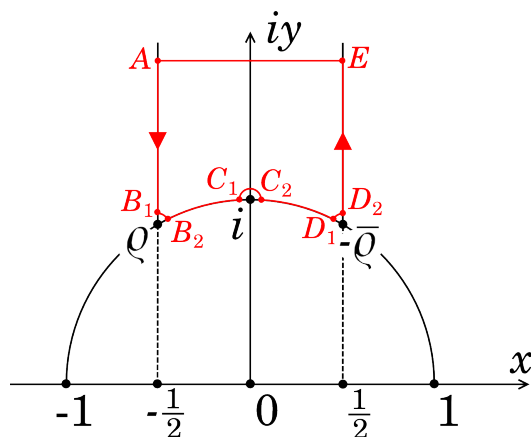


Abbildung 2.1: Die Punkte A und E sind so gewählt, dass es – mit möglicher Ausnahme von $i\infty$, das wir uns hier als $\lim_{y \rightarrow \infty} iy$ vorstellen sollten – keine Null- oder Polstelle von f mit Imaginärteil größer $\text{Im}(A) = \text{Im}(E)$ gibt. Die Punkte B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 bzw. D_1, D_2 sind so gewählt, dass das Kurvenstück von ϱ bzw. i bzw. $-\bar{\varrho}$ bis zu ihnen Länge $\varepsilon > 0$ hat. Hierbei ist ε so klein gewählt, dass im Inneren der Kurve γ von jeder Null- und Polstelle von f – mit möglicher Ausnahme von ϱ und i – jeweils genau ein Vertreter modulo Γ liegt.

Nach Konstruktion und dem Argumentprinzip gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z \in \mathcal{F} \\ z \neq i, \varrho}} \text{ord}(f; z).$$

Wir wollen das Integral nun auch abschnittsweise per Hand ausrechnen und das Ergebnis mit dieser Formel vergleichen.

- (i) Die Geradenstücke $\overline{AB_1}$ und $\overline{ED_2}$ werden unter Anwendung von T aufeinander abgebildet. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{ED_2}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(T\langle z \rangle)}{f(T\langle z \rangle)} dT\langle z \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(z+1)}{f(z+1)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

- (ii) Der Kreisbogen $\widehat{B_1 B_2}$ von B_1 nach B_2 wird parametrisiert durch $z = \varrho + \varepsilon e^{it}$ für $t \in [\alpha(\varepsilon), \frac{\pi}{2}]$ mit einem geeigneten Winkel $\alpha(\varepsilon)$. In einer den Kreisbogen ganz enthalten-

den punktierten Kreisscheibe um ϱ können wir f nach dem Satz von der Laurent-Entwicklung schreiben als

$$f(z) = (z - \varrho)^m g(z)$$

mit $m = \text{ord}(f; \varrho)$ und einer in der ganzen Kreisscheibe holomorphen Funktion g mit $g(\varrho) \neq 0$. In dieser Notation gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - \varrho} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(\varepsilon)} \left(\frac{m}{\varepsilon e^{it}} + \frac{g'(\varrho + \varepsilon e^{it})}{g(\varrho + \varepsilon e^{it})} \right) i \varepsilon e^{it} dt \\ &= \frac{m}{2\pi} \left(\alpha(\varepsilon) - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(\varepsilon)} \frac{g'(\varrho + \varepsilon e^{it})}{g(\varrho + \varepsilon e^{it})} e^{it} dt \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m}{2\pi} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right) + 0 \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \text{ord}(f; \varrho), \end{aligned}$$

denn der Integrand im zweiten Term ist beschränkt. Analog gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{D_1 \hat{D}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{6} \cdot \text{ord}(f; \varrho),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Ordnungen in $-\bar{\varrho}$ wegen der Äquivalenz dieselben wie in ϱ sind, und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \cdot \text{ord}(f; i).$$

- (iii) Die Kreisbögen $B_2 \hat{C}_1$ und $D_1 \hat{C}_2$ werden unter Anwendung von S aufeinander abgebildet, denn auf der Einheitskreislinie gilt

$$S(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = -\bar{z}, \quad \text{also } S(x + iy) = -x + iy.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{f'(S(z))}{f(S(z))} dS(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{f'(S(z))}{z^k f(z)} \left(\frac{\partial S(z)}{\partial z} \right) dz. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Leiten wir die gerade schon benutzte Beziehung $f(S\langle z \rangle) = z^k f(z)$ ab, so erhalten wir

$$f'(S\langle z \rangle) \frac{\partial S\langle z \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} f(S\langle z \rangle) = kz^{k-1} f(z) + z^k f'(z).$$

Eingesetzt in (2.21) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{kz^{k-1} f(z) + z^k f'(z)}{z^k f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \left(\frac{k}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{k}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

Für das erste Integral auf der rechten Seite gilt hierbei

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{k}{z} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{k}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{k}{12}.$$

- (iv) Die Abbildung $e: z \mapsto e^{2\pi iz}$ bildet das Geradenstück \overline{EA} auf eine genau einmal negativ durchlaufene Kreislinie K um $q = 0$ ab, in deren Inneren mit der möglichen Ausnahme von $q = 0$ keine Null- und Polstellen von $f \circ e^{-1}$ liegen. Mit dem bekannten Zusammenhang

$$f(z) = \sum_{n \geq N} a_n(f) e^{2\pi inz} = \sum_{n \geq N} a_n(f) q^n = (f \circ e^{-1})(q)$$

zwischen der Fourier-Entwicklung von f bei $z = i\infty$ und der Laurent-Entwicklung von $f \circ e^{-1}$ um $q = 0$ gilt dann

$$f'(z) = 2\pi i \sum_{n \geq N} n a_n(f) e^{2\pi inz} = 2\pi i q \sum_{n \geq N} n a_n(f) q^{n-1} = 2\pi i q (f \circ e^{-1})'(q)$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{EA} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{2\pi i q (f \circ e^{-1})'(q)}{(f \circ e^{-1})(q)} \frac{dq}{2\pi i q} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{(f \circ e^{-1})'(q)}{(f \circ e^{-1})(q)} dq \\ &= -\text{ord}((f \circ e^{-1}); 0) \\ &= -\text{ord}(f; i\infty), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit mit dem Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral folgt.

Offensichtlich haben wir hiermit die Valenzformel für den Fall bewiesen, dass f auf $\partial\mathcal{F}$ mit der möglichen Ausnahme von i und ρ keine Null- und Polstellen hat. Für den Fall, dass es doch solche Null- und Polstellen gibt, modifiziert man die Integrationskurve wie in Abbildung 2.2 angegeben und verfährt entsprechend.

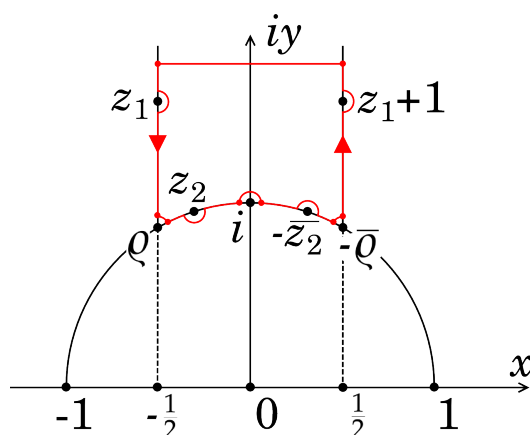


Abbildung 2.2: Die Punkte z_1 und z_2 repräsentieren die beiden möglichen Typen von Null- bzw. Polstellen, die nun noch hinzukommen. Man beachte, dass die jeweiligen Kreisbögen unter T bzw. S aufeinander abgebildet werden.

□

Die Valenzformel 2.39 lässt sich auf meromorphe Modulformen bezüglich der beliebigen Kongruenzuntergruppe Γ verallgemeinern:

Satz 2.40. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq f \in V_k(\Gamma)$. Für ein beliebiges $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$ setzen wir zudem

$$\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}} := \begin{cases} 2 & -I_2 \in \Gamma \text{ oder } \mathfrak{s} \text{ ist irregulär,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt die **Valenzformel**

$$\sum_{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H}} \frac{\text{ord}(f; z)}{|\Gamma_z|} + \sum_{\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}} = \frac{k \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]}{24},$$

wobei z ein Vertretersystem modulo Γ in \mathbb{H} durchläuft.²⁷

Beweis. Seien $n := [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ und A_1, \dots, A_n ein Vertretersystem von Γ in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ wie in (1.6). Nach Proposition 2.27 gilt dann

$$F := \prod_{\nu=1}^n f|_k A_{\nu} \in V_{kn},$$

²⁷Es fällt bei dieser Formel auf, dass die rechte Seite im Falle $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ nicht zum zunächst erwarteten Ergebnis $\frac{k}{12}$, sondern zu $\frac{k}{24}$ führt. Es ist jedoch $-I_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu beachten, womit jeder Summand der linken Seite einen zusätzlichen Faktor $\frac{1}{2}$ hat. Multipliziert man also mit 2, ergibt sich die Formel aus Satz 2.39.

so dass wir die bereits bewiesene Valenzformel 2.39 auf F anwenden können. Nach dieser gilt

$$\text{ord}(F; i\infty) + \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i) + \frac{1}{3} \cdot \text{ord}(F; \rho) + \sum_{\substack{z \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \\ z \neq i, \rho}} \text{ord}(F; z) = \frac{kn}{12},$$

wobei z über die Elemente eines Vertretersystem modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ in \mathbb{H} laufe, die weder zu i noch zu ρ äquivalent sind. Mit Korollar 1.29 lässt sich dies umformulieren zu

$$\frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i\infty) + \sum_{z \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \frac{\text{ord}(F; z)}{|\text{SL}_2(\mathbb{Z})_z|} = \frac{kn}{24} \quad (2.22)$$

wobei z ein vollständiges Vertretersystem modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ in \mathbb{H} durchlaufe.

Für ein festes $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{ord}(F; z) &= \sum_{v=1}^n \text{ord}(f|_k A_v; z) \\ &= \sum_{v=1}^n \text{ord}(f; A_v \langle z \rangle) \\ &= \sum_{w \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle} [\text{SL}_2(\mathbb{Z})_w : \Gamma_w] \cdot \text{ord}(f; w), \end{aligned} \quad (2.23)$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass die Ordnung von f an der Stelle $A_v \langle z \rangle$ nicht von der Wahl von A_v abhängt, und Teil (b) von Lemma 1.44 auf

$$G = \text{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad U = \Gamma, \quad S = \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle$$

angewendet haben. Da $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_w$ endlich und unabhängig von der Wahl von $w \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle$ ist, gilt

$$[\text{SL}_2(\mathbb{Z})_w : \Gamma_w] = \frac{|\text{SL}_2(\mathbb{Z})_z|}{|\Gamma_w|}$$

und eingesetzt in (2.23) somit

$$\frac{\text{ord}(F; z)}{|\text{SL}_2(\mathbb{Z})_z|} = \sum_{w \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle} \frac{\text{ord}(f; w)}{|\Gamma_w|}.$$

Summieren wir über ein Vertretersystem der Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \frac{\text{ord}(F; z)}{|\text{SL}_2(\mathbb{Z})_z|} &= \sum_{z \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \sum_{w \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle} \frac{\text{ord}(f; w)}{|\Gamma_w|} \\ &= \sum_{w \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{\text{ord}(f; w)}{|\Gamma_w|}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Valenzformel 2.40 folgt nun aus (2.22) und (2.24), wenn wir

$$\frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i\infty) = \sum_{\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}} \quad (2.25)$$

zeigen können.

Dafür müssen wir ein wenig ausholen: Wir betrachten den Quotienten $\text{SL}_2(\mathbb{Z})/\langle T \rangle$ mit der natürlichen Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ über Linkstranslation und die Abbildung

$$\pi: \begin{cases} \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\langle T \rangle & \twoheadrightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} & \xrightarrow{\sim} \text{SL}_2(\mathbb{Z})\langle i\infty \rangle = \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}, \\ M \cdot \langle T \rangle & \mapsto M \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} & \mapsto M\langle i\infty \rangle. \end{cases}$$

Diese ist offensichtlich surjektiv, verträglich mit den jeweiligen Aktionen von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und bildet die Klasse $I_2 \cdot \langle T \rangle = \langle T \rangle$ auf $i\infty$ ab. Faktorisieren wir überall von links Γ heraus, erhalten wir die surjektive Abbildung

$$\pi_{\Gamma}: \begin{cases} \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\langle T \rangle & \twoheadrightarrow \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} & \xrightarrow{\sim} \text{Cusps}(\Gamma), \\ \Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle & \mapsto \Gamma \cdot M \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} & \mapsto \Gamma \langle M\langle i\infty \rangle \rangle. \end{cases}$$

Für ein beliebiges $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$ gilt nach Definition von $\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}$

$$|\pi_{\Gamma}^{-1}(\mathfrak{s})| = \frac{2}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}}. \quad (2.26)$$

Betrachten wir nun noch die surjektive Abbildung

$$\pi_{\Gamma, T}: \begin{cases} \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) & \twoheadrightarrow \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\langle T \rangle, \\ \Gamma \cdot M & \mapsto \Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle. \end{cases}$$

Für $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$, $s \in \mathfrak{s}$ und $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle i\infty \rangle = s$ gilt dann

$$|\pi_{\Gamma, T}^{-1}(\Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle)| = \tilde{h}_{\Gamma}(\mathfrak{s}) := \begin{cases} h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ regulär,} \\ 2h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ irregulär,} \end{cases} \quad (2.27)$$

denn: Aus der Definition von $\pi_{\Gamma, T}$ können wir

$$|\pi_{\Gamma, T}^{-1}(\Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle)| = [\langle T \rangle : (M^{-1}\Gamma M) \cap \langle T \rangle]$$

ablesen. Nach Lemma 1.39 gilt

$$H_{\mathfrak{s}} = M^{-1}\Gamma M \cap \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} = M^{-1}\Gamma M \cap \langle T, -I_2 \rangle$$

und nach Lemma 1.40 lassen sich drei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $H_{\mathfrak{s}} = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle$. Dann gilt

$$M^{-1}\Gamma M \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle.$$

Fall 2: $H_{\mathfrak{s}} = \langle -(T^{-h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}) \rangle$. Dann gilt

$$M^{-1}\Gamma M \cap \langle T \rangle = \langle -(T^{-h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}) \rangle \cap \langle T \rangle = \langle T^{2h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle.$$

Fall 3: $H_{\mathfrak{s}} = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}, -I_2 \rangle$. Dann gilt

$$M^{-1}\Gamma M \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}, -I_2 \rangle \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle.$$

Mit Definition 1.41 folgt hieraus die Behauptung. #

Nach Definition 1.32 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Nach Konstruktion ist $\Gamma(N)$ normal in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, so dass nach Bemerkung 1.42 für alle $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma(N))$ der Wert $\tilde{h}_{\Gamma(N)}(\mathfrak{s})$ übereinstimmt. Wir können daher auf die Kennzeichnung der jeweiligen Spitzenklasse verzichten und kurz $\tilde{h}_{\Gamma(N)}$ schreiben. Betrachten wir nun noch die surjektive Abbildung

$$\pi_{\Gamma(N),\Gamma}: \begin{cases} \Gamma(N) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \twoheadrightarrow \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ \Gamma(N) \cdot M & \mapsto \Gamma \cdot M. \end{cases}$$

Mit ähnlichen Überlegungen wie beim Beweis der Isomorphiesätze für Gruppen folgt dann für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$|\pi_{\Gamma(N),\Gamma}^{-1}(\Gamma \cdot M)| = [\Gamma : \Gamma(N)]. \quad (2.28)$$

Schließlich benötigen wir noch eine Möglichkeit, die Ordnungen einer gegebenen meromorphen Modulform in Spitzenklassen bezüglich zweier ineinander enthaltener Kongruenzuntergruppen miteinander zu vergleichen. Seien dafür $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ zwei Kongruenzuntergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und sei $f \in V_k(\Gamma) \subseteq V_k(\tilde{\Gamma})$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Seien weiter $\tilde{\mathfrak{s}} \in \mathrm{Cusps}(\tilde{\Gamma})$ und \mathfrak{s} das Bild von $\tilde{\mathfrak{s}}$ unter der natürlichen Abbildung $\mathrm{Cusps}(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \mathrm{Cusps}(\Gamma)$. Dann gilt zunächst

$$h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) \mid h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}}) \quad \text{und} \quad \tilde{h}_{\Gamma}(\mathfrak{s}) \mid \tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}}), \quad (2.29)$$

denn: Sei $\tilde{\mathfrak{s}} \in \tilde{\mathfrak{s}} \subseteq \mathfrak{s}$ und sei $\tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\tilde{M}\langle i\infty \rangle = \tilde{\mathfrak{s}}$. Dann ist $H_{\tilde{\mathfrak{s}}}$ wegen

$$H_{\tilde{\mathfrak{s}}} = \tilde{M}^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{M} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \subseteq \tilde{M}^{-1}\Gamma\tilde{M} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} = H_{\mathfrak{s}}$$

eine Untergruppe von $H_{\mathfrak{s}}$ und es gilt

$$h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) = [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}} : \overline{H_{\mathfrak{s}}}] \mid [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}} : \overline{H_{\tilde{\mathfrak{s}}}}] = h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}}).$$

Das ist die erste Teilbehauptung. Mit (2.27) folgt hieraus auch die zweite Teilbehauptung außer für den Fall, dass \mathfrak{s} irregulär, $\tilde{\mathfrak{s}}$ aber regulär ist. In letzterem Fall gilt

$$H_{\mathfrak{s}} = \langle -T^{-h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle \not\cong -I_2$$

und wegen $H_{\tilde{\mathfrak{s}}} \subseteq H_{\mathfrak{s}}$ somit auch

$$H_{\tilde{\mathfrak{s}}} = \langle T^{h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})} \rangle.$$

Wieder mit $H_{\mathfrak{s}} \subseteq H_{\mathfrak{s}}$ folgern wir

$$\tilde{h}_{\Gamma}(\mathfrak{s}) = 2h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) \mid h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}}) = \tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})$$

und somit die zweite Teilbehauptung auch in diesem Fall. #

Hieraus folgt

$$\frac{\text{ord}_{\tilde{\Gamma}}(f; \tilde{\mathfrak{s}})}{\tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})} = \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}{\tilde{h}_{\Gamma}(\mathfrak{s})}, \quad (2.30)$$

denn: Sei wieder $\tilde{\mathfrak{s}} \in \tilde{\mathfrak{s}} \subseteq \mathfrak{s}$ und sei $\tilde{M} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\tilde{M}\langle i\infty \rangle = \tilde{\mathfrak{s}}$. Nach (2.8) und Teil (b) von Definition 2.20 hat die Funktion $f|_k \tilde{M}$ bezüglich $\tilde{\Gamma}$ bzw. Γ die Fourier-Entwicklungen

$$\begin{aligned} (f|_k \tilde{M})(z) &= \sum_{n=\text{ord}_{\tilde{\Gamma}}(f; \tilde{\mathfrak{s}})}^{\infty} \tilde{a}_n(f|_k \tilde{M}) q^{\frac{n}{h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})}}, \\ (f|_k \tilde{M})(z) &= \sum_{n=\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}^{\infty} a_n(f|_k \tilde{M}) q^{\frac{n}{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}}. \end{aligned}$$

Wegen (2.29) und Satz 2.11 lassen sich diese Reihen identifizieren. Insbesondere stimmen die kleinsten Exponenten von q mit nichtverschwindenden Koeffizienten überein, woraus sofort die Behauptung folgt. #

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i\infty) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{ord}(F; i\infty)}{\tilde{h}_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}} \\ &\stackrel{(2.30)}{=} \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma(N)}(F; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\ &= \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma(N)}(\prod_{v=1}^n f|_k A_v; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\ &= \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\sum_{v=1}^n \text{ord}_{\Gamma(N)}(f|_k A_v; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \end{aligned}$$

Nach Teil (b) von Definition 2.20 gilt

$$\text{ord}_{\Gamma(N)}(f|_k A_v; \mathfrak{s}_N) = \text{ord}_{\Gamma(N)}(f; A_v \langle \mathfrak{s}_N \rangle) \quad \text{für alle } \mathfrak{s}_N \in \text{Cusps}(\Gamma(N)).$$

Da $\Gamma(N)$ normal in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, gilt

$$\begin{aligned} A_v \langle (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M) \rangle &= (A_v \Gamma(N)M) \langle i\infty \rangle \\ &= (\Gamma(N)A_v M) \langle i\infty \rangle \end{aligned}$$

$$= (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)A_\nu M).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i\infty) \\ &= \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\sum_{\nu=1}^n \text{ord}_{\Gamma(N)}(f; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)A_\nu M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\ &= \sum_{\nu=1}^n \left(\sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma(N)}(f; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)A_\nu M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \right) \\ &= \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] \cdot \text{ord}_{\Gamma(N)}(f; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\ &\stackrel{(2.30)}{=} \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; (\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T} \circ \pi_{\Gamma(N),\Gamma})(\Gamma(N)M))}{2 \cdot [\Gamma : \Gamma(N)] \cdot \tilde{h}_{\Gamma}((\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T} \circ \pi_{\Gamma(N),\Gamma})(\Gamma(N)M))} \\ &\stackrel{(2.28)}{=} \frac{1}{2} \cdot \sum_{\Gamma M \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; (\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T})(\Gamma M))}{\tilde{h}_{\Gamma}((\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T})(\Gamma M))} \\ &\stackrel{(2.27)}{=} \frac{1}{2} \cdot \sum_{\Gamma M \langle T \rangle \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) / \langle T \rangle} \text{ord}_{\Gamma}(f; \pi_{\Gamma}(\Gamma M \langle T \rangle)) \\ &\stackrel{(2.26)}{=} \sum_{\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}}, \end{aligned}$$

also (2.25) und somit auch die Valenzformel 2.40. \square

Eine wichtige Anwendung der Valenzformel ist, dass wir mit ihr eine Aussage über die Struktur der Vektorräume $M_k(\Gamma)$ und $S_k(\Gamma)$ treffen können. Für nicht-positive Werte von k werden wir dies gleich durchführen und zeigen, dass es dort nicht sehr viele holomorphe Modulformen gibt. In Kapitel 3 werden wir diese Methode wieder aufgreifen und im Spezialfall $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mithilfe der sogenannten EISENSTEINREIHEN²⁸ interessantere Aussagen für allgemeines k beweisen.

Korollar 2.41. Es gilt $M_k(\Gamma) = \begin{cases} \{0\} & \text{für } k < 0, \\ \mathbb{C} & \text{für } k = 0. \end{cases}$

Beweis. Gäbe es für ein $k < 0$ eine ganze Modulform $f \in M_k(\Gamma)$ ungleich 0, so wäre aufgrund der Holomorphie von f die linke Seite der Valenzformel 2.40 nicht-negativ, die rechte nach Voraussetzung jedoch negativ. Ein solches f kann es also nicht geben.

Die Inklusion $\mathbb{C} \subseteq M_0(\Gamma)$ ist klar. Andererseits liegt für jedes $f \in M_0(\Gamma)$ und jedes $z_0 \in \mathbb{H}$ auch

$$g(z) := f(z) - f(z_0) \in M_0(\Gamma).$$

²⁸Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852)

Wegen der Holomorphie von g und $g(z_0) = 0$ kann g die Valenzformel 2.40 nicht erfüllen. Es folgt $g \equiv 0$ und somit $f \equiv f(z_0) \in \mathbb{C}$. \square

Im Beweis von Korollar 2.41 haben wir gesehen, dass wir eine holomorphe Modulform negativen Gewichts zu Null erkennen können, weil sie sonst die Valenzformel 2.40 nicht erfüllen kann. Diese Überlegung lässt sich auf Modulformen verallgemeinern, deren Nullstellenordnung bei $i\infty$ größer ist als die zugehörige rechte Seite der Valenzformel. Dieser einfache Gedanke liefert eine nützliche Schranke dafür, die wie viel ersten Fourier-Koeffizienten einer gegebenen Modulform Null sein müssen, damit diese die Nullfunktion ist. Bewiesen wurde dieses Resultat – ausgehend von der Valenzformel für die volle Modulgruppe – zuerst 1987 von STURM²⁹:

Korollar 2.42. Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $f \in M_k(\Gamma)$. Gilt dann

$$\text{ord}(f; i\infty) > \frac{k \cdot \varepsilon_{\Gamma, i\infty} \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]}{24} \quad (2.31)$$

oder etwas schwächer

$$\text{ord}(f; i\infty) > \frac{k \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]}{12} =: B_{\Gamma, k}, \quad (2.32)$$

so ist f die konstante Nullfunktion. Die nur von Γ und k abhängige Konstante $B_{\Gamma, k}$ heißt auch die **Sturm-Schranke** für $M_k(\Gamma)$.

Beweis. Gäbe es eine ganze Modulform $f \in M_k(\Gamma)$ ungleich 0, welche eine der Voraussetzungen (2.31) oder (2.32) erfüllt, so wäre aufgrund der Holomorphie von f die linke Seite der Valenzformel 2.40 echt größer als die rechte. Ein solches f kann es also nicht geben. \square

2.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. Wir betrachten eine Familie von auf $[0, 1]$ differenzierbaren Funktionen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die sich rekursiv wie folgt definieren lassen:

- (i) $P_0 \equiv 1$,
- (ii) $P'_{n+1} = P_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,
- (iii) $\int_0^1 P_n(x) dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Funktionen P_n durch die Bedingungen (i) bis (iii) eindeutig bestimmte Polynome. Normiert zu $B_n := n!P_n$ nennt man sie auch die **Bernoulli-Polynome**.
- (b) Für alle $n \geq 2$ gilt $P_n(0) = P_n(1)$, so dass sich P_n zu einer stetigen, 1-periodischen Funktion auf ganz \mathbb{R} fortsetzen lässt, die wir wieder P_n nennen.

²⁹Jacob Sturm (* ???)

(c) Für alle $n \geq 2$ gilt

$$a_k(P_n) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2\pi i k}\right)^n & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

für die Fourier-Koeffizienten von P_n . Die zugehörige Fourier-Reihe

$$-\frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^n}$$

konvergiert absolut gleichmäßig auf ganz \mathbb{R} .

Hinweis: Führen Sie zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten eine Induktion nach n durch!

(d) Für alle $n \in 2\mathbb{N}$ und alle $x \in [0, 1]$ gilt

$$P_n(x) = -\frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^n} = \frac{2(-1)^{\frac{n+2}{2}}}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k x)}{k^n}.$$

Nach Berechnung von P_2 , P_4 und P_6 erhalten wir so die bemerkenswerten Identitäten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie für eine beliebige Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und ein beliebige Gewichte $k, \ell \in \mathbb{Z}$ die folgenden Aussagen über Modulformen und Ableitungen:

- (a) $f \in V_0(\Gamma) \implies f' \in V_2(\Gamma)$.
 (b) $f \in V_k(\Gamma), g \in V_\ell(\Gamma) \implies \ell f'g - kf'g' \in V_{k+\ell+2}(\Gamma)$.
 (c) $f \in V_k(\Gamma), g \in V_\ell(\Gamma) \implies \ell(\ell+1)f''g - 2(k+1)(\ell+1)f'g' + k(k+1)fg'' \in V_{k+\ell+4}(\Gamma)$.

Bemerkung: Die aufgeführten Modulformen sind Beispiele sogenannter RANKIN-COHEN-Klammerm. ³⁰ Diese wurden 1994 von ZAGIER ³¹ benannt, als dieser Rankin-Cohen-Algebren als theoretischen Überbau für diese einführte.

Aufgabe 2.3. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede Modulform $f \in M_k \setminus S_k$ mindestens eine Nullstelle in \mathbb{H} besitzt.

Aufgabe 2.4. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

³⁰Robert Alexander Rankin (1915-2001), Henri Cohen (* 1946)

³¹Don Bernard Zagier (* 1951)

eine holomorphe Funktion darstellt, für $\text{Im}(z) > 1$ beschränkt ist und den Transformationsformeln

$$\vartheta(z+2) = \vartheta(z) \quad \text{und} \quad \vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \vartheta(z)$$

genügt, wobei die Quadratwurzel aus $\frac{z}{i}$ über den Hauptzweig des Logarithmus definiert ist. Folgern Sie daraus

$$\vartheta^8 \in M_4(\Gamma_\vartheta),$$

wobei $\Gamma_\vartheta = \langle S, T^2 \rangle$ die in Übungsaufgabe 1.9 eingeführte Thetagruppe bezeichne.

Aufgabe 2.5. Sei $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe, sei k eine ganze Zahl und seien $f, g \in M_k(\Gamma)$ mit $f \cdot g \in S_{2k}(\Gamma)$. Sei weiter

$$\Omega(f, g)(z) := f(z)\overline{g(z)}(\text{Im}z)^k d\omega(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})^+$ gilt

$$\Omega(f|_k M, g|_k M)(z) = \Omega(f, g)(M\langle z \rangle).$$

(b) Für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ mit $M\Gamma M^{-1} \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$[\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}] = [\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{M\Gamma M^{-1}}].$$

Seien ab sofort f und g bereits beide Spitzenformen. Zeigen Sie dann auch die folgenden Aussage:

(c) Für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ mit $M\Gamma M^{-1} \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $f, g \in M_k(M\Gamma M^{-1})$, sowie ihre **Adjunkte** $M^\# := \det(M) \cdot M^{-1}$ gilt

$$\langle f|_k M | g|_k M \rangle_\Gamma = \langle f | g \rangle_\Gamma \quad \text{und} \quad \langle f|_k M | g \rangle_\Gamma = \langle f | g|_k M^\# \rangle_\Gamma.$$

Modulformen zur vollen Modulgruppe

In Kapitel 2 haben wir den Begriff der Modulform eingeführt, aber keine interessanten Beispiele kennengelernt. Mit den Eisenstein-Reihen und den Thetareihen gibt es zwei Hauptklassen holomorpher Modulformen bezüglich der vollen Modulgruppe, aus denen sich jeweils die komplette Algebra dieser Modulformen erzeugen lässt. In diesem Kapitel studieren wir die Eisenstein-Reihen und leiten mit ihrer Hilfe aus der Valenzformel 2.39 mit den Struktursätzen 3.13 und 3.24 explizite Beschreibungen der Vektorräume M_k und V_k der holomorphen bzw. meromorphen Modulformen von Gewicht k bezüglich der vollen Modulgruppe her. In Abschnitt 3.3 verallgemeinern wir die Eisenstein-Reihen zu POINCARÉ-Reihen³² und zeigen, dass sich mit diesen und dem in Abschnitt 2.3 eingeführten Petersson'schen Skalarprodukt die Fourier-Koeffizienten von Spitzenformen auslesen lassen.

3.1 Eisenstein-Reihen

In Proposition 2.27 haben wir mit der Spurbildung eine Möglichkeit kennengelernt, aus einer Modulform bezüglich einer Kongruenzuntergruppe Γ eine Modulform bezüglich der vollen Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ zu konstruieren. Der Gedanke hierbei war, durch Summation über ein Vertretersystem die Invarianz unter dem Petersson'schen Strichoperator und also Axiom (V_1) bezüglich der vollen Modulgruppe zu erzwingen.

Mit einer ähnlichen Idee betrachten wir für ein gerades³³ $k \in \mathbb{Z}$ die Reihe

$$\sum_{M \in SL_2(\mathbb{Z})} (1|_k M)(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

³²Henri Poincaré (1854-1912)

³³Da wir ein nichttriviales Element von M_k suchen, dürfen wir uns nach Proposition 2.24 ohne Einschränkung auf gerade Werte von k beschränken.

In ihrem Konvergenzgebiet erfüllt diese automatisch Axiom (V_1) . Da wegen $(1|_k T^b)(z) = 1$ für alle $b \in \mathbb{Z}$ unabhängig von z unendlich viele Summanden Betrag 1 haben, ist dieses Konvergenzgebiet allerdings leer. Wir wollen dies verbessern. Tatsächlich gilt für zwei Matrizen $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$(1|_k M)(z) = (1|_k \tilde{M})(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \iff \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \cdot M = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \cdot \tilde{M},$$

denn: Die linke Seite der Behauptung ist offensichtlich äquivalent zu

$$j(M\tilde{M}^{-1}, z)^{-k} = (1|_k(M\tilde{M}^{-1}))(z) = 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Da wir k als gerade vorausgesetzt haben, ist dies äquivalent zu

$$M\tilde{M}^{-1} \in \langle T, -I_2 \rangle = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty,$$

was die Behauptung zeigt. #

Davon inspiriert definieren wir:

Definition 3.1. Sei $k \geq 4$ eine gerade ganze Zahl. Dann heißt

$$E_k(z) := \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} (1|_k M)(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{H},$$

wobei M ein Vertretersystem von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durchläuft, die (**normierte**) **Eisenstein-Reihe** vom Gewicht k .

Mit den Eisenstein-Reihen erhalten wir unsere erste systematisch eingeführte Klasse von Beispielen nichttrivialer holomorpher Modulformen:

Satz 3.2. Für jede gerade ganze Zahl $k \geq 4$ liegt die Eisenstein-Reihe E_k in M_k .

Wir beweisen Satz 3.2 in den folgenden Resultaten, führen aber keinen geschlossenen Beweis.

Wieder mit den Argumenten aus dem Beweis von Proposition 2.27 sehen wir, dass auch die durch $E_k(z)$ gegebene Funktion in ihrem Konvergenzgebiet Axiom (V_1) erfüllt. Wir untersuchen daher nun die Konvergenz von $E_k(z)$ und stellen dafür zunächst

$$E_k(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} j(M, z)^{-k} = 1 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(c,d)=1, c>0}} (cz + d)^{-k} \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \quad (3.1)$$

fest. Dies gilt, da offensichtlich jeder Summand links die Gestalt $(cz + d)^{-k}$ mit $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$ hat. An dieser Stelle lässt sich auch die Wohldefiniertheit von E_k klären: Da k als gerade vorausgesetzt war, gilt

$$j(-M, z)^{-k} = j(M, z)^{-k}.$$

Dass auf beiden Seiten über dieselben Paare (c, d) aufsummiert wird, ergibt sich nun unmittelbar aus (1.4).

Lemma 3.3. Für jede gerade ganze Zahl $k \geq 4$ konvergiert E_k gleichmäßig absolut auf Bereichen der Form

$$D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(z) \geq \varepsilon, \operatorname{Re}(z)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\} \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Insbesondere ist die durch E_k gegebene Funktion nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß auf \mathbb{H} holomorph, da sich jedes Kompaktum in \mathbb{H} in einem der Bereiche D_ε wiederfindet.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für ein festes $z \in \mathbb{H}$ die Reihe $E_k(z)$ konvergiert. Dafür betrachten wir die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto \left| \frac{xz+y}{xi+y} \right|^k. \end{cases}$$

Diese hat offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

- $f(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- f nimmt auf dem Kompaktum $\mathcal{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ sein Minimum an, ist dort also durch eine Konstante $C > 0$ nach unten beschränkt.

Erinnern wir uns an die Polarkoordinatendarstellung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und wenden diese drei Eigenschaften von f an, so erhalten wir

$$f(x,y) \geq C \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Diese Abschätzung gilt natürlich insbesondere für $(x,y) = (c,d) \in \mathbb{Z}^2$ mit teilerfremden c,d , so dass wir

$$|cz + d|^{-k} \leq \frac{1}{C} \cdot |ci + d|^{-k}$$

erhalten. Die Konvergenz von $E_k(z)$ für festes $z \in \mathbb{H}$ folgt also mit dem Majorantenkriterium, wenn wir

$$\sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \operatorname{ggT}(c,d)=1}} |ci + d|^{-k} < \infty$$

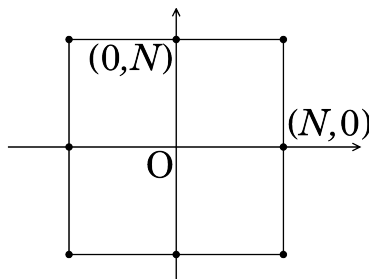
zeigen können. Hierbei haben wir die euklidische Norm $|ci + d| = \sqrt{c^2 + d^2}$ verwendet. Das müssen wir jedoch nicht, da in \mathbb{R}^2 alle Normen äquivalent sind. Insbesondere dürfen wir statt der euklidischen die *Maximumsnorm*

$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$$

verwenden und es genügt

$$\sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \operatorname{ggT}(c,d)=1}} \|(c,d)\|_\infty^{-k} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{|\{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \operatorname{ggT}(c,d) = 1 \text{ und } \|(c,d)\|_\infty = N\}|}{N^k} < \infty$$

zu zeigen. Wie man der Abbildung



entnimmt, gilt hierbei

$$|\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{ggT}(c, d) = 1 \text{ und } \|(c, d)\|_\infty = N\}| \leq 8N.$$

Die Konvergenz von $E_k(z)$ für festes $z \in \mathbb{H}$ folgt mit

$$8 \cdot \sum_{N=1}^{\infty} N^{1-k} < \infty \quad \text{für } k > 2.$$

Zum Beweis des Lemmas genügt es wegen $k > 2$, der soeben gezeigten Konvergenz von $E_k(z)$ für festes $z \in \mathbb{H}$ und dem Majorantenkriterium zu zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|cz + d|^2 \geq \delta |ci + d|^2 = \delta(c^2 + d^2) \quad \text{für alle } z \in D_\varepsilon \text{ und alle } c, d \in \mathbb{Z}.$$

Schreiben wir wie üblich $z = x + iy$, so lässt sich dies äquivalent umformen dazu, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$(x^2 + y^2 - \delta)c^2 + 2xcd + (1 - \delta)d^2 \geq 0 \quad \text{für alle } z \in D_\varepsilon \text{ und alle } c, d \in \mathbb{Z}.$$

Etwas algebraischer formuliert heißt das nichts anderes als, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in D_\varepsilon$ die quadratische Form

$$(x^2 + y^2 - \delta)X^2 + 2xXY + (1 - \delta)Y^2$$

positiv semidefinit ist.¹² Es gilt also zu zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in D_\varepsilon$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - \delta & x \\ x & 1 - \delta \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist, also für die Hauptminoren gilt

- (i) $x^2 + y^2 - \delta \geq 0$,
- (ii) $(x^2 + y^2 - \delta)(1 - \delta) - x^2 = -\delta x^2 + (1 - \delta)y^2 - \delta(1 - \delta) \geq 0$.

Nach Definition von D_ε genügt es $\delta < \varepsilon^2$ zu setzen, um Bedingung (i) zu erfüllen. Für Bedingung (ii) nehmen wir nun ohne Einschränkung $\delta < 1$ an. Dann gilt für alle $z \in D_\varepsilon$ die Abschätzung

$$-\delta x^2 + (1-\delta)y^2 - \delta(1-\delta) \geq -\delta\varepsilon^{-1} + (1-\delta)\varepsilon^2 - \delta(1-\delta),$$

und Bedingung (ii) folgt, wenn wir zeigen können, dass es ein $\delta \in (0, 1)$ gibt mit

$$\varepsilon^2 \geq \delta \frac{\varepsilon^{-1} + (1-\delta)}{1-\delta}.$$

Das Lemma folgt, da die rechte Seite offensichtlich für $\delta \rightarrow 0$ gegen Null geht. \square

Zum Beweis von Satz 3.2 verbleibt (V'_2) , also die Holomorphie von E_k in $z = i\infty$, nachzuweisen:

Lemma 3.4. Für jede gerade ganze Zahl $k \geq 4$ ist die Eisenstein-Reihe E_k holomorph in $z = i\infty$ und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} E_k(z) = 1.$$

Beweis. Zu zeigen ist nach Definition 2.14 und dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz, dass $E_k \circ e^{-1}$ in einer kleinen Umgebung von $q = 0$ beschränkt ist. Das ist sicherlich richtig, wenn

$$\lim_{q \rightarrow 0} (E_k \circ e^{-1})(q) = \lim_{z \rightarrow i\infty} E_k(z)$$

existiert. Sei also $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in \mathbb{H} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im}(z_n) = \infty$. Wegen $E_k(z+1) = E_k(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$ können wir ohne Einschränkung $|\text{Re}(z_n)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Dann liegen alle Punkte z_n ab einem hinreichend großen n in

$$D_1 := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) \geq 1, \text{Re}(z)^2 \leq 1\}.$$

Nach Lemma 3.3 konvergiert die Eisenstein-Reihe E_k auf D_1 gleichmäßig, so dass wir den Grenzübergang gliedweise vollziehen dürfen. Wir erhalten

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} E_k(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_k(z_n) = 1 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1, c>0}} \lim_{n \rightarrow \infty} (cz_n + d)^{-k} = 1,$$

womit das Lemma gezeigt ist. \square

Da nun Satz 3.2 bewiesen ist und wir wissen, dass die Eisenstein-Reihe E_k für jede gerade ganze Zahl $k \geq 4$ in M_k liegt, interessieren wir uns für ihre Fourier-Entwicklung, die interessante zahlentheoretische Informationen kodiert:

Satz 3.5. Die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihe E_k mit $k \geq 4$ ganz und gerade ist durch

$$E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

gegeben, wobei die Reihe

$$\zeta(k) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$$

wegen $k > 1$ bekanntlich zu einer positiven reellen Zahl konvergiert³⁴ und σ_{k-1} die $(k-1)$ -te Teilersummenfunktion bezeichnet.

Beweis. Da die Reihe nach Lemma 3.3 absolut konvergiert, dürfen wir sie in einen Teil mit $c = 0$ und einen Teil mit $c \neq 0$ aufspalten und erhalten so

$$E_k(z) = 1 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1, c>0}} (cz+d)^{-k} = 1 + \frac{1}{\zeta(k)} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d \in \mathbb{Z}} (cz+d)^{-k}.$$

Desweiteren gilt für alle ganzen $k \geq 2$

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} (w+d)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} e^{2\pi i d w} \quad \text{für alle } w \in \mathbb{H},$$

wie wir in Beispiel 2.13 eingesehen haben. Wenden wir dies mit $w = cz$ an, und nutzen wieder aus, dass k gerade ist, so erhalten wir

$$E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} q^{cd}.$$

Setzen wir nun $n := cd$, so durchläuft d alle positiven Teiler von n , und es gilt

$$E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{k-1} \right) q^n.$$

Nach Definition der $(k-1)$ -ten Teilersummenfunktion haben wir somit den Satz bewiesen. \square

Mithilfe der im Folgenden eingeführten BERNOULLI-Zahlen³⁵ lässt sich die Fourier-Entwicklung aus Satz 3.5 noch etwas systematischer darstellen:

Lemma 3.6. Die **Bernoulli-Zahlen** B_n für $n \in \mathbb{N}_0$ sind definiert durch die Taylor-Entwicklung von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n := \frac{z}{e^z - 1}, \quad \text{für alle } z \in U_{2\pi}(0).$$

Für sie gelten die folgenden Eigenschaften:

³⁴Sie ist ein spezieller Funktionswert der berühmten Riemann'schen Zetafunktion ζ .

³⁵Jakob I. Bernoulli (1655-1705), wobei die Bezeichnung „I.“ zur Abgrenzung von seinem ebenfalls in der Mathematik tätigen Großneffen Jakob II. Bernoulli (1759-1789) dient.

- (a) $B_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Speziell gelten $B_0 = 1$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$.
- (b) Es gilt die Rekursionsformel $(-1)^n B_n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_\nu$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Für ungerades $n > 1$ gilt $B_n = 0$.
- (d) Für gerades $n \geq 2$ gilt $B_n = \frac{(-1)^{n/2-1} n!}{2^{n-1} \pi^n} \zeta(n)$.

Beweis. Zunächst gilt es den Konvergenzbereich der Taylor-Reihe aus dem Lemma zu bestimmen. Dafür betrachten wir die Funktion $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$. Diese hat in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität und nimmt dort den Wert 1 an. Desweiteren hat sie Polstellen in den Punkten $z_\nu = 2\pi i\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Das sind alle Singularitäten von f . Nach dem **Potenzreihenentwicklungssatz** aus der Funktionentheorie konvergiert also die Taylor-Reihe von f um $z = 0$ in $U_{2\pi}(0)$.

Sei also $z \in U_{2\pi}(0)$. Dann gilt zum Einen

$$1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} z^n = B_0.$$

zum Anderen haben wir

$$\begin{aligned} -z &= z \left(\frac{1 - e^z}{e^z - 1} \right) = z \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{e^z}{e^z - 1} \right) = z \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{1 - e^{-z}} \right) \\ &= \frac{z}{e^z - 1} - \frac{-z}{e^{-z} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (1 - (-1)^n) z^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{2B_n}{n!} z^n, \end{aligned}$$

so dass wir nach Koeffizientenvergleich

$$B_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad B_n = 0 \quad \text{für alle ungeraden } n > 1$$

und insbesondere (c) erhalten. Daraus, aus $B_0 = 1$ und aus der Rekursionsformel (b) für $n + 1$ folgt $B_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit Behauptung (a).

Die Rekursionsformel (b) wiederum folgt mit Koeffizientenvergleich aus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_\nu \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{B_\nu}{\nu!(n-\nu)!} z^n \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!\mu!} z^{\nu+\mu} \\ &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu \right) \cdot \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu!} \right) \\ &= \frac{z}{e^z - 1} \cdot e^z \\ &= \frac{-z}{e^{-z} - 1} \end{aligned}$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Es verbleibt Behauptung (d) zu zeigen. Dafür setzen wir $z = 2\pi iw$. Für $w \in U_1(0)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2\pi iw)^n &= \frac{2\pi iw}{e^{2\pi iw} - 1} \\ &= \pi iw \frac{2}{e^{2\pi iw} - 1} \\ &= \pi iw \left(\frac{e^{2\pi iw} + 1}{e^{2\pi iw} - 1} - \frac{e^{2\pi iw} - 1}{e^{2\pi iw} - 1} \right) = \pi iw \left(\frac{e^{\pi iw} + e^{-\pi iw}}{e^{\pi iw} - e^{-\pi iw}} - 1 \right) \\ &= \pi w (\cot(\pi w) - i). \end{aligned}$$

Mit $B_1 = -\frac{1}{2}$ folgt

$$\pi w \cot(\pi w) = 1 + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^n B_n}{n!} w^n \quad \text{für alle } w \in U_1(0).$$

Andererseits gilt mit der Partialbruchzerlegung (2.6) des Kotangens

$$\begin{aligned} \pi w \cot(\pi w) &= 1 + w \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{w - m} + \frac{1}{m} \right) = 1 + w \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w - m} + \frac{1}{w + m} \right) \\ &= 1 + 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{w^2 - m^2} = 1 - 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{w}{m})^2} \\ &= 1 - 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{m} \right)^{2n} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n+2}} \right) w^{2n+2} \\ &= 1 - 2 \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \zeta(n) w^n. \end{aligned}$$

Behauptung (d) folgt aus einem weiteren Koeffizientenvergleich. □

Beispiel 3.7. Die Werte der ersten nicht-trivialen Bernoulli-Zahlen sind:

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$

Nach Lemma 3.6 ist die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihen durch

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \tag{3.2}$$

gegeben. Mit $B_4 = -\frac{1}{30}$ und $B_6 = \frac{1}{42}$ gilt also im Speziellen

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n \quad \text{und} \quad E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n.$$

Bemerkung 3.8. Da die Bernoulli-Zahlen nach Lemma 3.6 rationale Zahlen sind, trifft dies auch auf die Fourier-Koeffizienten der normierten Eisenstein-Reihen E_k mit $k \geq 4$ ganz und gerade zu. In den Spezialfällen E_4 und E_6 sehen wir, dass die Koeffizienten sogar ganzzahlig sind.

3.2 Der Struktursatz für holomorphe Modulformen

Eine wichtige Anwendung der Valenzformel 2.39 ist, dass wir mit ihr und unserem Wissen um die Eisenstein-Reihen eine Aussage über die Struktur der Vektorräume M_k und S_k treffen können. Um diese übersichtlicher präsentieren zu können, führen wir zunächst eine weitere Modulform ein:

Proposition 3.9. Die Diskriminante

$$\Delta(z) := \frac{1}{1728} (E_4^3(z) - E_6^2(z)) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

ist eine Funktion in S_{12} . Ihre Fourier-Entwicklung ist von der Form

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n = 0 + q - 24q^2 + O(q^3).$$

Die hierdurch definierte Zuordnung $n \mapsto \tau(n)$ heißt die RAMANUJAN- τ -Funktion.³⁶

Beweis. Wegen der Algebrenstruktur von M liegen E_4^3 und E_6^2 und somit auch Δ im Vektorraum M_{12} . Der Rest der Proposition ergibt sich, wenn wir die explizit bekannten Fourier-Entwicklungen von E_4 und E_6 dazu benutzen, um ebensolche für E_4^3 und E_6^2 zu bestimmen. In der Tat gelten

$$\begin{aligned} E_4^3(z) &= 1 + 720q + 179280q^2 + \text{Terme höherer Ordnung,} \\ E_6^2(z) &= 1 - 1008q + 220752q^2 \pm \text{Terme höherer Ordnung.} \end{aligned}$$

□

In Übungsaufgabe 3.1 zeigen wir, dass die Fourier-Koeffizienten von Δ ganze Zahlen sind.

Proposition 3.10. (a) Für gerades³⁷ k gilt

$$M_k = \begin{cases} \{0\} & \text{für } k < 0, \\ \mathbb{C} & \text{für } k = 0, \\ \{0\} & \text{für } k = 2, \\ \mathbb{C}E_k \oplus S_k & \text{für } k \geq 4. \end{cases}$$

³⁶Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

³⁷Dass die Vektorräume M_k für ungerades k nur aus der Null bestehen, hatten wir schon in Proposition 2.24 eingesehen.

(b) Die Abbildung $f \mapsto f \cdot \Delta$ ist ein \mathbb{C} -Vektorraumisomorphismus von M_{k-12} nach S_k .

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Die Fälle für $k \leq 0$ haben wir bereits in Korollar 2.41 gezeigt. Im Fall $k = 2$ ist die Lösbarkeit der Valenzformel gleichbedeutend damit, nicht-negative ganze Zahlen n_q, n_i und n_{sonst} mit

$$\frac{n_q}{3} + \frac{n_i}{2} + n_{\text{sonst}} = \frac{1}{6}$$

zu finden. Da es solche Zahlen nicht gibt, folgt die Behauptung auch in diesem Fall. Für $k \geq 4$ betrachten wir eine Modulform $f \in M_k$ mit Fourier-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)q^n$ und setzen $g := f - a_0(f)E_k$. Nach Definition hat E_k konstanten Fourier-Koeffizienten 1, so dass g in S_k liegt. Es folgt $f = a_0(f)E_k + g \in \mathbb{C}E_k \oplus S_k$.

Zum Beweis von Behauptung (b) genügt es, die Surjektivität der Zuordnung $f \mapsto f \cdot \Delta$ zu überprüfen; die Injektivität ist klar. Für eine beliebige Spitzenform $g \in S_k$ setzen wir $f := g/\Delta$. Es gilt

$$0\text{-ord}(\Delta; \infty) = 1 \quad \text{und} \quad 0\text{-ord}(\Delta; z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}, \quad (3.3)$$

denn: Nach Proposition 3.9 ist der Koeffizient von q bei der Fourier-Entwicklung von Δ gerade 1; es gilt also $0\text{-ord}(\Delta; i\infty) = 1$. Der Rest der Behauptung ist eine direkte Anwendung der Valenzformel 2.39. #

Einerseits folgt die Holomorphie von f auf \mathbb{H} , andererseits wegen $g \in S_k$ die Abschätzung

$$0\text{-ord}(f; i\infty) = 0\text{-ord}(g; i\infty) - 0\text{-ord}(\Delta; i\infty) = 0\text{-ord}(g; i\infty) - 1 \geq 0$$

und somit die Holomorphie von f in $i\infty$. Wegen $g \in M_k$ und $\Delta \in M_{12}$ gilt $f \in M_{k-12}$, und wir haben ein Urbild gefunden. \square

Korollar 3.11 (Dimensionsformel). Sei $k \geq 0$ gerade. Dann gilt

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{für } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

Beweis. Nach Proposition 3.10 gilt

$$S_k = \{0\} \quad \text{und somit} \quad M_k = \mathbb{C}E_k \quad \text{für } k \in \{4, 6, 8, 10\}.$$

Zusammen mit den in der Proposition explizit angegebenen Fällen $k \in \{0, 2\}$ folgt so die Behauptung für $0 \leq k \leq 10$. Wieder nach Proposition 3.10 gilt

$$\dim M_k = 1 + \dim S_k = 1 + \dim M_{k-12} \quad \text{für alle } k \geq 4$$

und somit induktiv die Behauptung. \square

Korollar 3.12. Sei $k \geq 4$ gerade. Dann gilt bezüglich des Petersson-Skalarprodukts

$$\mathbb{C}E_k = S_k^\perp := \{f \in M_k \mid \langle f \mid g \rangle = 0 \text{ für alle } g \in S_k\}.$$

Beweis. Nach Teil (b) von Satz 2.33 ist das Petersson-Skalarprodukt eingeschränkt auf S_k ein Skalarprodukt und somit insbesondere nicht ausgeartet. Daher folgt

$$S_k^\perp \cap S_k = \{0\}.$$

Andererseits gilt nach Teil (a) von Proposition 3.10

$$M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k.$$

Damit und wegen der Linearität des Petersson-Skalarprodukts genügt es zum Beweis des Korollars

$$\langle g \mid E_k \rangle = 0 \quad \text{für alle } g \in S_k$$

zu zeigen. Nach den Definitionen 2.32 und 3.1 gilt

$$\begin{aligned} \langle g \mid E_k \rangle &= \int_{\mathcal{F}} \overline{E_k(z)} g(z) y^k \, d\omega(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \overline{(1|_k M)(z)} g(z) \mathrm{Im}(z)^k \right) d\omega(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \overline{(1|_k M)(z)} g(M\langle z \rangle) (1|_k M)(z) \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^k \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot |(1|_k M)(z)|^{-2} \right) d\omega(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} g(M\langle z \rangle) \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^k \right) d\omega(z). \end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe gilt

$$\begin{aligned} \langle g \mid E_k \rangle &= \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\int_{\mathcal{F}} g(M\langle z \rangle) \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^k \, d\omega(z) \right) \\ &= \int_{\bigcup_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} M\langle \mathcal{F} \rangle} g(z) \mathrm{Im}(z)^k \, d\omega(z). \end{aligned}$$

Für geeignete Wahlen eines Vertretersystems von $SL_2(\mathbb{Z})_\infty$ in $SL_2(\mathbb{Z})$ ist analog zu Proposition 1.49 die Menge

$$\mathcal{F}_\infty := \bigcup_{M \in \overline{SL_2(\mathbb{Z})_\infty} \setminus \overline{SL_2(\mathbb{Z})}} M\langle \mathcal{F} \rangle = \bigcup_{M \in SL_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus SL_2(\mathbb{Z})} M\langle \mathcal{F} \rangle$$

ein Fundamentalbereich für die Aktion von $SL_2(\mathbb{Z})_\infty$ auf \mathbb{H} , wobei analog zu Lemma 2.29 das Integral nicht von der Wahl dieses Vertretersystems abhängt. Wählen wir speziell

$$\mathcal{F}_\infty = \{z \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\},$$

so erhalten wir mit $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)q^n$

$$\begin{aligned} \langle g \mid E_k \rangle &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(z) (\operatorname{Im}z)^k d\omega(z) \\ &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) e^{-2\pi ny} y^{k-2} e^{2\pi inx} \right) dx \wedge dy \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi inx} dx \right) a_n(g) e^{-2\pi ny} y^{k-2} dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Satz 3.13 (Struktursatz für holomorphe Modulformen). Für $k \geq 0$ gerade gilt

$$M_k = \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \mathbb{C} E_4^\alpha E_6^\beta.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die angegebenen Funktionen den \mathbb{C} -Vektorraum M_k erzeugen.

Fall 1: $k \leq 6$. Das haben wir bereits im Beweis von Korollar 3.11 eingesehen.

Fall 2: $k = 8$. Nach Korollar 3.11 gilt $\dim M_8 = 1$. Andererseits sind die konstanten Terme der Fourier-Entwicklungen von $E_8, E_4^2 \in M_8$ definitionsgemäß beide 1. Es folgt $E_8 = E_4^2$ und somit die Behauptung für $k = 8$.

Fall 3: $k = 10$. Nach Korollar 3.11 gilt $\dim M_{10} = 1$. Andererseits sind die konstanten Terme der Fourier-Entwicklungen von $E_{10}, E_4 E_6 \in M_{10}$ nach Definition beide 1. Es folgt $E_{10} = E_4 E_6$ und somit die Behauptung für $k = 10$.

Fall 4: $k \geq 12$. In diesem Fall gibt es offenbar stets $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ mit $4\alpha + 6\beta = k$, und die Fourier-Entwicklung der zugehörigen Modulform $g := E_4^\alpha E_6^\beta$ hat den konstanten Term 1. Sei nun $f \in M_k$ eine beliebige Modulform mit Fourier-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)q^n$. Dann ist $f - a_0(f)g \in S_k$, nach Teil (b) von Proposition 3.10 gibt es also ein $h \in M_{k-12}$ mit

$$f - a_0(f)g = h\Delta.$$

Nach Definition ist die Diskriminante eine \mathbb{C} -Linearkombination von E_4^3 und E_6^2 . Wir können nun annehmen, schon gezeigt zu haben, dass sich h als \mathbb{C} -Linearkombination von „Monomen“ $E_4^\gamma E_6^\delta$ mit $4\gamma + 6\delta = k - 12$ schreiben lässt. Tatsächlich stellt dieser Fall den Schritt von $k - 12$ auf k eines Induktionsbeweises dar, dessen Anfang wir in den Fällen $k \leq 10$ behandelt haben.

Nun wollen wir zeigen, dass die Menge

$$\{E_4^\alpha E_6^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 4\alpha + 6\beta = k\}$$

\mathbb{C} -linear unabhängig ist. Für den Beweis unterscheiden wir die Fälle $k \equiv 0 \pmod{4}$ und $k \equiv 2 \pmod{4}$. Wir zeigen hier nur den ersten Fall; der zweite geht sehr ähnlich. Nehmen wir also an, es gelte

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \lambda_{\alpha, \beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0 \quad \text{mit gewissen } \lambda_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}. \quad (3.4)$$

Wegen $4\alpha + 6\beta = k$ ist im von uns behandelten Fall β gerade, es gibt also ein $\beta' \in \mathbb{N}_0$ mit $\beta = 2\beta'$. Für dieses gilt dann $\alpha = \frac{k}{4} - 3\beta'$ und somit

$$E_4^\alpha E_6^\beta = E_4^{\frac{k}{4} - 3\beta'} E_6^{2\beta'} = E_4^{\frac{k}{4}} \left(\frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'}.$$

Eingesetzt in (3.4) erhalten wir so

$$E_4^{\frac{k}{4}} \sum_{\beta' \in \mathbb{N}_0} \lambda_{\frac{k}{4} - 3\beta', 2\beta'} \left(\frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'} = 0.$$

Nehmen wir nun an, es gäbe einen Koeffizienten ungleich Null in dieser Gleichung. Dann wäre E_6^2/E_4^3 Nullstelle eines von Null verschiedenen Polynoms aus $\mathbb{C}[X]$ und somit gleich einer Konstanten,

denn: Die meromorphen Funktionen auf \mathbb{H} bilden nach [Proposition 6.23](#) aus der Funktionentheorie einen Körper $\mathcal{M}(\mathbb{H})$, der \mathbb{C} umfasst. Ein von Null verschiedenes Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ hat also in $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ höchstens $\deg(P)$ Nullstellen.

Es folgt, dass alle Nullstellen von P in $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ konstant sind, da es nach dem [Fundamentalsatz der Algebra](#) aus der Funktionentheorie bereits $\deg(P)$ Nullstellen von P in \mathbb{C} gibt. #

Diese Konstante wäre gleich Null,

denn: Zum Einen gilt

$$E_6(i) = (E_6|_6 S)(i) = i^{-6} E_6\left(-\frac{1}{i}\right) = -E_6(i)$$

und somit $E_6(i) = 0$. Zum Anderen gilt nach (3.2)

$$E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{-2\pi n} > 0.$$

#

Es folgte $E_6 \equiv 0$, was nicht sein kann. Es gibt also keinen Koeffizienten ungleich Null, und wir haben die lineare Unabhängigkeit im Fall $k \equiv 0 \pmod{4}$ bewiesen. \square

Der Struktursatz 3.13 liefert uns eine konkrete Basis des Vektorraums M_k , deren Elemente – wichtig für zahlentheoretische Anwendungen – nach Bemerkung 3.8 ganzzahlige Fourier-Koeffizienten aufweisen. Für rechnerische Zwecke ist diese Basis jedoch nicht besonders praktisch. Gemäß einer zuerst 1975 von MILLER³⁸ publizierten Idee lässt sich die Situation allerdings verbessern. Um uns gedanklich darauf vorzubereiten, formulieren wir die Aussage des Struktursatzes zunächst ein wenig um:

Korollar 3.14. Für $k \geq 0$ gerade gilt

$$M_k = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta' \in \mathbb{N}_0 \\ 4\alpha + 12\beta' = k}} \mathbb{C} E_4^\alpha \Delta^{\beta'} & \text{für } k \equiv 0 \pmod{4}, \\ \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta' \in \mathbb{N}_0 \\ 4\alpha + 12\beta' = k-6}} \mathbb{C} E_4^\alpha E_6 \Delta^{\beta'} & \text{für } k \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Beweis. Nach dem Struktursatz 3.13 ist

$$\mathcal{B} := \{E_4^\alpha E_6^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, 4\alpha + 6\beta = k\}$$

eine \mathbb{C} -Basis von M_k . Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: $k \equiv 0 \pmod{4}$. Dann ist β für alle Elemente von \mathcal{B} gerade und lässt sich also als $\beta = 2\beta'$ mit einem $\beta' \in \mathbb{N}_0$ schreiben. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= \left| \{E_4^\alpha E_6^{2\beta'} : \alpha, \beta' \in \mathbb{N}_0, 4\alpha + 3\beta' = k\} \right| \\ &= \left| \{E_4^\alpha \Delta^{\beta'} : \alpha, \beta' \in \mathbb{N}_0, 4\alpha + 3\beta' = k\} \right|, \end{aligned}$$

so dass es zum Beweis der Behauptung in diesem Fall genügt zu zeigen, dass sich jedes Element von \mathcal{B} als \mathbb{C} -Linearkombination der Monome in der Behauptung darstellen lässt. Wegen

$$\begin{aligned} E_4^\alpha E_6^\beta &= E_4^\alpha E_6^{2\beta'} \\ &= E_4^\alpha (1728\Delta - E_4^3)^{\beta'} \\ &= E_4^\alpha \sum_{\beta''=0}^{\beta'} \binom{\beta'}{\beta''} (1728\Delta)^{\beta''} (-E_4^3)^{\beta'-\beta''} \end{aligned}$$

ist dem aber offensichtlich so.

Fall 2: $k \equiv 2 \pmod{4}$. Für $k = 2$ steht auf beiden Seiten der Behauptung der Nullraum, so dass nichts zu zeigen ist. Ansonsten enthält in diesem Fall jedes Element von \mathcal{B} mindestens einen Faktor E_6 und nach Ausklammern desselben folgt das Korollar für k aus der bereits in Fall 1 gezeigten Aussage für $k - 6$. \square

³⁸Victor Saul Miller (*1947)

Das Interessante an der in Korollar 3.14 angegebenen neuen Basis von M_k ist, dass ihre Elemente paarweise unterschiedliche Nullstellenordnungen bei $i\infty$ aufweisen. Das ist der Ansatzpunkt für das Resultat von Miller:

Satz 3.15. Für $k \geq 0$ gerade besitzt M_k eine Basis $\{f_0, \dots, f_{\dim S_k}\}$ aus Formen mit ganzzahligen Fourier-Koeffizienten, die der Bedingung

$$a_m(f_j) = \delta_{mj} \quad \text{für alle } 0 \leq m, j \leq \dim S_k$$

genügen.³⁹ Eine solche Basis bezeichnen wir auch als **Miller-Basis** von M_k . Durch Weglassen des Elements f_0 erhalten wir in dieser Situation stets eine Basis von S_k . Jede solche Basis nennen wir eine **Miller-Basis** von S_k .

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $k \geq 12$ annehmen,

denn: Nach Proposition 3.10 ist M_k für $k < 12$ stets höchstens eindimensional und die jeweils im Beweis des Struktursatzes explizit angegebenen Produkte aus (normierten) Eisenstein-Reihen sind eine mögliche Wahl für f_0 . #

Für $k \geq 12$ gilt nach der Dimensionsformel 3.11

$$\begin{aligned} 12 \dim S_k &= 12 \cdot \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor - 1 & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{für } k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases} \\ &= \begin{cases} k - 14 & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ k - r \text{ mit } 0 \leq r < 12 \text{ und } r \equiv k \pmod{12} & \text{für } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases} \end{aligned}$$

Wenden wir dies auf die Formel in Korollar 3.14 an, so können wir dort im Index nach α auflösen und erhalten dort

$$M_k = \bigoplus_{j=0}^{\dim S_k} \mathbb{C}g_j$$

mit

$$g_j := \begin{cases} E_4^{3(\dim S_k - j) + \frac{r}{4}} \Delta^j & \text{für } k \equiv 0 \pmod{4}, \\ E_4^{3(\dim S_k - j) + \frac{r-6}{4}} E_6 \Delta^j & \text{für } k \equiv 2 \pmod{4} \text{ und } k \not\equiv 2 \pmod{12}, \\ E_4^{3(\dim S_k - j) + 2} E_6 \Delta^j & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

³⁹Hierbei bezeichne wie üblich

$$\delta_{a,b} := \begin{cases} 1 & \text{für } a = b, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}$$

das nach Leopold KRONECKER (1823-1891) benannte **Kronecker-Delta**.

für alle $j \in \{0, \dots, \dim S_k\}$. Mit den bekannten Fourier-Entwicklungen von E_4 , E_6 und Δ erhalten wir die Formel

$$a_m(g_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } m < j, \\ 1 & \text{für } m = j. \end{cases}$$

Die gesuchte Miller-Basis $\{f_0, \dots, f_{\dim S_k}\}$ erreichen wir nun analog zum Rückwärtseinsetzen im Gauß-Verfahren in der Linearen Algebra iterativ durch

$$\begin{aligned} f_{\dim S_k} &:= g_{\dim S_k}, \\ f_j &:= g_j - \sum_{m=j+1}^{\dim S_k} a_m(g_j) f_m \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, \dim S_k - 1\}. \end{aligned}$$

□

3.3 Poincaré-Reihen

In diesem Abschnitt wollen wir ein Phänomen untersuchen, dem wir in einem Spezialfall bereits in Abschnitt 3.2 begegnet sind. In Korollar 3.12 haben wir für gerades $k \geq 4$

$$a_0(g) = 0 = \langle g \mid E_k \rangle \quad \text{für alle } g \in S_k$$

festgestellt, wobei $a_0(g)$ den 0-ten Fourier-Koeffizienten von g bezeichne. Mit Methoden aus der Funktionalanalysis stellt man fest, dass sich dieser Zusammenhang verallgemeinern lässt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung

$$\begin{cases} S_k & \rightarrow \mathbb{C}, \\ g & \mapsto a_n(g) = n\text{-ter Fourier-Koeffizient von } g \end{cases}$$

ist ein lineares Funktional. Nach dem Darstellungssatz von FRÉCHET-RIESZ⁴⁰ existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutig bestimmtes $\tilde{P}_{n,k} \in S_k$ mit der (n, k) -Fréchet-Riesz-Eigenschaft

$$a_n(g) = \langle g \mid \tilde{P}_{n,k} \rangle \quad \text{für alle } g \in S_k.$$

Wir geben nun $\tilde{P}_{n,k}$ explizit an und weisen diese Eigenschaft nach:

Definition 3.16. Seien $k \geq 4$ eine gerade ganze Zahl und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt die formale Reihe

$$P_{n,k}(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} (e^{2\pi i n \cdot} |_{kM})(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} j(M, z)^{-k} e^{2\pi i n M(z)},$$

wobei M ein Vertretersystem von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durchläuft, die n -te **Poincaré-Reihe** vom Gewicht k bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Der Begriff der Poincaré-Reihe ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl des Vertretersystems, das M durchläuft, da die Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ als Translationen um ganze Zahlen operieren und die Exponentialfunktion $2\pi i$ -periodisch ist.

⁴⁰Maurice René Fréchet (1878-1973) und Frigyes Riesz (1880-1956)

Beispiel 3.17. Offensichtlich gilt $P_{0,k} = E_k \in M_k \setminus S_k$. Nach dem eingangs erwähnten Korollar 3.12 erfüllt $P_{0,k}$ also die $(0,k)$ -Fréchet-Riesz-Eigenschaft.

Satz 3.18. Für $n \geq 1$ und gerades $k \geq 4$ gilt $P_{n,k} \in S_k$.

Beweis. Wie schon im Fall der Eisenstein-Reihe ist nach Konstruktion klar, dass die durch $P_{n,k}$ gegebene Funktion in ihrem Konvergenzgebiet Axiom (V_1) erfüllt. Tatsächlich konvergiert $P_{n,k}$ auf ganz \mathbb{H} ,

denn: Wegen $M\langle z \rangle \in \mathbb{H}$ für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und alle $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$|e^{2\pi i n M\langle z \rangle}| < 1$$

und daher auch

$$\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} |j(M, z)|^{-k} |e^{2\pi i n M\langle z \rangle}| < \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} |j(M, z)|^{-k},$$

sodass die Reihe der Absolutbeträge bezüglich $P_{n,k}$ durch die Reihe der Absolutbeträge bezüglich E_k majorisiert wird. Letztere konvergiert nach Lemma 3.3 auf Kompakta in \mathbb{H} gleichmäßig. Da die Teilsummen in $P_{n,k}$ offensichtlich auf \mathbb{H} holomorphe Funktionen darstellen, folgt die Holomorphie von $P_{n,k}$ auf \mathbb{H} mit dem **Approximationssatz von Weierstraß** aus der Funktionentheorie. #

Es verbleibt zu zeigen, dass $P_{n,k}$ in $z = i\infty$ und somit in allen Spitzen verschwindet. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gilt für $z \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} P_{n,k}(z) &\stackrel{(3.1)}{=} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(e^{2\pi i n z} + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(c,d)=1, c>0 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \right) \\ &= 0 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(c,d)=1, c>0 \\ ad-bc=1}} \lim_{z \rightarrow \infty} \left((cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Summiert wird hierbei über die Paare (c, d) und zu jedem Paar ist ein Paar $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ mit $ad - bc = 1$ zu bestimmen. Der Funktionswert ist dabei unabhängig von der Wahl von $a, b \in \mathbb{Z}$, denn ist auch $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbb{Z}^2$ ein solches Paar, so gilt $\tilde{a} = a + mc$ und $\tilde{b} = b + md$ für ein $m \in \mathbb{Z}$,

denn: Für $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gilt

$$ad - bc = (a+k)d - (b+\ell)c = (ad - bc) + (kd - \ell c) \iff kd - \ell c = 0.$$

Wegen $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$ bedingt dies $c \mid k$ und $d \mid \ell$, wir erhalten also

$$\frac{k}{c} \cdot cd - \frac{\ell}{d} \cdot cd = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{k}{c} = \frac{\ell}{d} =: m \in \mathbb{Z}.$$

Die Behauptung folgt, da umgekehrt die angegebenen Werte für $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{Z}$ offensichtlich die Determinantenbedingung erfüllen. #

In (3.5) gilt

$$\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H} \quad \text{und also} \quad |e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}}| < 1,$$

so dass wegen $(cz+d)^{-k} \rightarrow 0$ jeder einzelne Summand verschwindet. Insgesamt haben wir den Satz gezeigt. \square

Satz 3.19. Für $n \geq 1$ und gerades $k \geq 4$ erfüllt

$$\tilde{P}_{n,k} := \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} \cdot P_{n,k}$$

die (n, k) -Fréchet-Riesz-Eigenschaft.

Beweis. Für ein beliebiges

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(g) q^m \in S_k$$

zeigt man analog zum Beweis von Korollar 3.12

$$\begin{aligned} \langle g | P_{n,k} \rangle &= \int_0^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(z) \overline{e^{2\pi i n z}} (\operatorname{Im} z)^k d\omega(z) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(g) e^{2\pi i m z} \overline{e^{2\pi i n z}} y^{k-2} \right) dx \wedge dy \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(m-n)x} dx \right) a_m(g) e^{-2\pi(m+n)y} y^{k-2} dy. \end{aligned}$$

Offenkundig gilt

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i r x} dx = \delta_{r,0} \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Z}$$

und somit auch

$$\begin{aligned} \langle g | P_{n,k} \rangle &= \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{m,n} a_m(g) e^{-2\pi(m+n)y} y^{k-2} dy \\ &= \int_0^{\infty} a_n(g) e^{-4\pi n y} y^{k-2} dy \\ &= \frac{a_n(g)}{(4\pi n)^{k-1}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-y} y^{k-2} dy. \end{aligned}$$

Nach Übungsaufgabe 3.2 nimmt das Integral auf der rechten Seite den Wert $(k-2)!$ an, so dass wir den Satz gezeigt haben. \square

Korollar 3.20. Für $k \geq 4$ gerade bilden die Poincaré-Reihen $P_{1,k}, \dots, P_{\dim S_k, k}$ eine Basis von S_k , es gilt also

$$S_k = \langle P_{1,k}, \dots, P_{\dim S_k, k} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Beweis. Dass die genannten Poincaré-Reihen Spitzenformen sind, haben wir in Satz 3.18 gezeigt. Das Korollar folgt, wenn wir zeigen können, dass sie auch \mathbb{C} -linear unabhängig sind. Nehmen wir also an, es gelte

$$\sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j P_{j,k} = 0 \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_{\dim S_k} \in \mathbb{C}.$$

Für jede Miller-Basis $\{f_1, \dots, f_{\dim S_k}\}$ von S_k wie in Satz 3.15 gilt dann bereits

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j P_{j,k} \mid f_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\dim S_k} \lambda_j \langle P_{j,k} \mid f_\ell \rangle \\ &\stackrel{3.15, 3.19}{=} \lambda_\ell \frac{(k-2)!}{(4\pi\ell)^{k-1}} \quad \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, \dim S_k\} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Satz 3.21. Für $n \geq 1$ und $k \geq 4$ gerade hat die Poincaré-Reihe $P_{n,k}$ die Fourier-Entwicklung

$$P_{n,k}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(n, k) q^m$$

mit den Koeffizienten

$$g_m(n, k) := \delta_{m,n} + 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c} \cdot K(m, n, c) \cdot J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right)$$

und der **KLOOSTERMAN-Summe**⁴¹

$$K(m, n, c) := \sum_{\substack{d \bmod (c) \\ \text{ggT}(c,d)=1}} e^{2\pi i \frac{md+nd'}{c}} \quad \text{mit } dd' \equiv 1 \pmod{(c)},$$

sowie der **BESSEL-Funktion**⁴²

$$J_{k-1}(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^\ell}{\ell!(k-1+\ell)!}.$$

⁴¹Hendrik Douwe Kloosterman (1900-1968)

⁴²Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 P_{n,k}(z) &\stackrel{(3.5)}{=} e^{2\pi i n z} + \sum_{\substack{(c,\tilde{d}) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,\tilde{d})=1, c>0 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \\
 &= e^{2\pi i n z} + \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{\tilde{d} \bmod (c) \\ \text{ggT}(c,\tilde{d})=1 \\ a\tilde{d}-bc=1}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+\tilde{d})^{-k} e^{2\pi i n \frac{a(z+m)+\tilde{b}}{c(z+m)+\tilde{d}}}, \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

denn: Zu einem festen $c > 0$ und einem festen Vertretersystem $\tilde{d} \bmod (c)$ schreiben wir jedes $d \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(c,d) = 1$ in der Form

$$d = \tilde{d} + mc \quad \text{mit } \tilde{d} \text{ im vorgegebenen Vertretersystem und } m \in \mathbb{Z}.$$

Mit $\tilde{b} = b - ma$ folgt

$$1 = ad - bc = a(\tilde{d} + mc) - (\tilde{b} + ma)c = a\tilde{d} - \tilde{b}c$$

und die obige Darstellung folgt durch Ausklammern von c und a . #

Im Folgenden schreiben wir wieder d und b statt \tilde{d} und \tilde{b} . Wir wollen nun die innere Summe auf der rechten Seite von (3.6) genauer untersuchen und holen dafür ein wenig aus. Für beliebiges $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $z \in \mathbb{H}$ gilt zunächst

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (z+m)^{-k} e^{-2\pi i \nu \frac{1}{z+m}} = 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(4\pi\sqrt{m\nu}) \cdot e^{2\pi i m z}, \tag{3.7}$$

denn: Die linke Seite von (3.7) konvergiert gleichmäßig absolut auf Kompakta in \mathbb{H} und geht für $z \rightarrow \infty$ gegen Null – das zeigt man wie im Beweis von Satz 3.18. Sie hat daher nach Satz 2.11 eine Fourier-Entwicklung

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\mu} q^{\mu} \quad \text{mit } c_{\mu} = \int_{ic}^{ic+1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (z+m)^{-k} e^{-2\pi i \nu \frac{1}{z+m}} \right) e^{2\pi i \mu z} dz.$$

Man kann nachweisen, dass es sich hierbei im Wesentlichen um eine Integraldarstellung eines bestimmten Wertes der Bessel-Funktion handelt, genauer gilt

$$c_{\mu} = 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(4\pi\sqrt{\mu\nu}),$$

was die Behauptung zeigt. Die benötigten Formeln finden sich in den üblichen Integraltabellen; der Nachweis ist uns hier zu mühsam. #

Sei nun $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige Matrix in $SL_2(\mathbb{R})$. Ersetzen wir in (3.7) erst z durch $z + \frac{d}{c}$ sowie ν durch $\frac{\nu}{c^2}$ und multiplizieren dann mit $c^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c}}$, so erhalten wir für beliebiges $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a(z+m)+b}{c(z+m)+d}} \\ &= \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\nu}}{c}\right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(va+md)} e^{2\pi i m z}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

denn: Die linke Seite von (3.7) wird so zu

$$\begin{aligned} & c^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c}} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\left(z + \frac{d}{c}\right) + m\right)^{-k} e^{-2\pi i \frac{\nu}{c^2} \frac{1}{\left(z + \frac{d}{c}\right) + m}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c} - 2\pi i \frac{\nu}{c} \frac{1}{cz+d+cm}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \frac{\nu}{c} \left(\frac{a(cz+d+cm)-1}{cz+d+cm}\right)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \frac{\nu}{c} \left(\frac{ac(z+m)+(ad-1)}{c(z+m)+d}\right)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \frac{\nu}{c} \left(\frac{ac(z+m)+bc}{c(z+m)+d}\right)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i \nu \left(\frac{a(z+m)+b}{c(z+m)+d}\right)} \end{aligned}$$

und die rechte Seite zu

$$\begin{aligned} & c^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c}} \cdot 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{mc^2}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(4\pi\sqrt{\frac{m\nu}{c^2}}\right) \cdot e^{2\pi i m \left(z + \frac{d}{c}\right)} \\ &= \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\nu}}{c}\right) \cdot e^{2\pi i \nu \frac{a}{c}} e^{2\pi i m \left(z + \frac{d}{c}\right)} \\ &= \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\nu}}{c}\right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(va+md)} e^{2\pi i m z}. \end{aligned}$$

#

Setzen wir nun (3.8) mit $\nu = n$ in (3.6) ein, so erhalten wir unter Beachtung von $ad = 1 - bc \equiv 1 \pmod{c}$

$$P_{n,k}(z) = e^{2\pi i n z} + \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{d \pmod{c} \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(na+md)} e^{2\pi i m z}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2\pi iz} + \sum_{c=1}^{\infty} 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{c} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \cdot \sum_{\substack{d \bmod(c) \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} e^{\frac{2\pi i}{c}(na+md)} \cdot q^m \\
&= e^{2\pi iz} + \sum_{c=1}^{\infty} 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{c} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \cdot K(m, n, c) \cdot q^m.
\end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz lassen sich die Summen über c und über m vertauschen. Das führt zu

$$\begin{aligned}
P_{n,k}(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\delta_{m,n} + \sum_{c=1}^{\infty} 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{1}{c} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \cdot K(m, n, c) \right) q^m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\delta_{m,n} + 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c} \cdot K(m, n, c) \cdot J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \right) q^m.
\end{aligned}$$

□

Kloosterman-Summen spielen aufgrund der oberen Beobachtung eine wichtige Rolle in der Theorie der Modulformen, sie tauchen aber auch in der analytischen Zahlentheorie auf. Bemerkenswert ist die von André Weil gezeigte Weil-Schranke

$$|K(a, b, p)| \leq 2\sqrt{p} \quad \text{für alle } 1 \leq a, b \leq p-1$$

mit Primzahlen p , die schwierig zu beweisen ist.

3.4 Der Struktursatz für meromorphe Modulformen

Mithilfe der Eisenstein-Reihen lassen sich ohne Mühe auch meromorphe Modulformen einführen:

Proposition 3.22. *Die j -Invariante oder auch absolute Invariante*

$$j(z) := \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$$

liegt in V_0 , ist holomorph auf \mathbb{H} und hat einen einfachen Pol in $z = i\infty$.

Beweis. Wegen $\Delta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ ist j holomorph auf \mathbb{H} . Zudem gilt

$$\text{ord}(j; i\infty) = \text{ord}(E_4^3; i\infty) - \text{ord}(\Delta; i\infty) = 0 - 1 = -1.$$

Da sowohl E_4^3 als auch Δ in M_{12} liegen, folgt $j \in V_0$ aus der Algebrenstruktur von V . □

Vermöge der j -Invarianten und des Struktursatzes 3.13 können wir die Vektorräume V_k der meromorphen Modulformen von Gewicht k bezüglich der vollen Modulgruppe beschreiben. Dazu holen wir ein wenig aus:

Proposition 3.23. j liefert eine Bijektion $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$.

Beweis. Nach Proposition 3.22 liegt für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion $j_\lambda := j - \lambda$ in V_0 , ist holomorph auf \mathbb{H} und hat einen einfachen Pol in $z = i\infty$. Da für $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$ die Funktionen j_λ und j_μ offenbar keine gemeinsame Nullstelle haben können, langt es zum Beweis der Proposition nun zu zeigen, dass j_λ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ eine modulo $SL_2(\mathbb{Z})$ eindeutig bestimmte Nullstelle hat. Dafür wenden wir auf j_λ die Valenzformel 2.39 an und erhalten

$$-1 + \frac{n}{2} + \frac{n'}{3} + n'' = \text{ord}(j_\lambda; i\infty) + \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(j_\lambda; i) + \frac{1}{3} \cdot \text{ord}(j_\lambda; \rho) + \sum_{z \neq i, \rho} \text{ord}(j_\lambda; z) = \frac{0}{12} = 0$$

mit drei geeigneten Zahlen $n, n', n'' \in \mathbb{N}_0$. Man kann leicht überprüfen, dass die einzigen Lösungen $(n, n', n'') \in \mathbb{N}_0^3$ dieser DIOPHANTischen Gleichung⁴³ durch $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ und $(0, 0, 1)$ gegeben sind. Die Proposition folgt. \square

Satz 3.24 (Struktursatz für meromorphe Modulformen). *Für k gerade gilt*

$$V_k = \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}}.$$

Beweis. Wir zeigen etwas mehr, dass nämlich für eine meromorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $f \in V_k$.
- (ii) Es gibt ein $\ell \in \mathbb{Z}$ mit $f \in \frac{M_{\ell+k}}{M_\ell}$.
- (iii) $f \in \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}}$.

Gelte zunächst Aussage (iii). Dann gibt es Polynome

$$P(X) = \sum_{\mu=0}^m a_\mu X^\mu, \quad Q(X) = \sum_{\nu=0}^n b_\nu X^\nu \quad \in \mathbb{C}[X]$$

mit

$$f = \frac{P(j)}{Q(j)} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \quad \text{und} \quad Q(j)(z) \neq 0.$$

Setzen wir die Definition der j -Invarianten ein, so erhalten wir

$$f = \frac{\sum_{\mu=0}^m a_\mu \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^\mu}{\sum_{\nu=0}^n b_\nu \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^\nu} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} = \frac{\Delta^n \cdot \sum_{\mu=0}^m a_\mu (E_4^3)^\mu \Delta^{m-\mu}}{\Delta^m \cdot \sum_{\nu=0}^n b_\nu (E_4^3)^\nu \Delta^{n-\nu}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}}.$$

⁴³Diophantos von Alexandria (Lebensdaten nicht genau bekannt, zwischen -100 und 350)

Wir unterscheiden nun in Abhängigkeit von Vorzeichen von k zwei Fälle:

Fall 1: $k \geq 0$. Dann sind Zähler und Nenner holomorphe Modulformen vom Gewicht $12(m+n) + 4k$ bzw. $12(m+n) + 3k$.

Fall 2: $k < 0$. Dann schreiben wir

$$f = \frac{\Delta^n \cdot \sum_{\mu=0}^m a_\mu (E_4^3)^\mu \Delta^{m-\mu}}{\Delta^m \cdot \sum_{\nu=0}^n b_\nu (E_4^3)^\nu \Delta^{n-\nu}} \cdot \frac{E_6^{-k}}{E_4^{-k}}.$$

Hier sind Zähler und Nenner holomorphe Modulformen vom Gewicht $12(m+n) - 3k$ bzw. $12(m+n) - 4k$.

In beiden Fällen folgt sofort Aussage (ii).

Dass Aussage (ii) Aussage (i) impliziert, ist klar.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass aus Aussage (i) wieder Aussage (iii) folgt. Sei dafür $f \in V_k$ nicht konstant Null und seien weiter $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ Vertreter der Äquivalenzklassen modulo $SL_2(\mathbb{Z})$ der Polstellen von f sowie $-m_\varrho := \text{ord}(f; z_\varrho)$ für $\varrho \in \{1, \dots, r\}$. Dann erfüllt die Funktion

$$P(z) := \prod_{\varrho=1}^r (j(z) - j(z_\varrho))^{m_\varrho} \in \mathbb{C}[j] \subseteq V_0$$

für alle $\varrho \in \{1, \dots, r\}$ die Eigenschaft

$$\text{ord}(P; z_\varrho) \stackrel{3.23}{=} \text{ord}((j(z) - j(z_\varrho))^{m_\varrho}; z_\varrho) = m_\varrho \cdot \text{ord}(j(z) - j(z_\varrho); z_\varrho) \geq m_\varrho.$$

Es folgt, dass Pf in V_k liegt und auf \mathbb{H} holomorph ist. Wegen $P \in \mathbb{C}[j]$ dürfen wir daher zum Beweis von Aussage (iii) ohne Einschränkung annehmen, f sei auf \mathbb{H} holomorph, und sonst Pf statt f untersuchen. Wegen $\text{ord}(\Delta; i\infty) = 1$ ist $g := \Delta^{-\text{ord}(f; i\infty)} f$ in $z = i\infty$ holomorph und somit eine Modulform aus $M_{k-12\text{ord}(f; i\infty)}$. Nach dem Struktursatz 3.13 ist g daher eine Linearkombination von Monomen $E_4^\alpha E_6^\beta$ mit $4\alpha + 6\beta = k - 12\text{ord}(f; i\infty)$.⁴⁴ Wegen $f = \frac{g}{\Delta^{-\text{ord}(f; i\infty)}}$ genügt es also, die Behauptung für Funktionen vom Typ

$$\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^{-\text{ord}(f; i\infty)}} \quad \text{mit } 4\alpha + 6\beta = k - 12\text{ord}(f; i\infty)$$

zu zeigen. Für Zahlen α, β , die hier vorkommen, gilt insbesondere

$$\alpha \equiv k \pmod{3} \quad \text{und} \quad 2\beta \equiv -k \pmod{4},$$

⁴⁴So etwas gibt es nach Konstruktion. Man bemerke, dass wegen der vorausgesetzten Holomorphie von f in \mathbb{H} die Valenzformel 2.39 für f

$$\text{ord}(f; i\infty) \leq \frac{k}{12}$$

besagt.

so dass wir $\alpha = 3\tilde{\alpha} + k$ und $\beta = 2\tilde{\beta} - \frac{k}{2}$ schreiben können. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^{-\text{ord}(f; i\infty)}} &= \frac{(E_4^3)^{\tilde{\alpha}} E_4^k (E_6^2)^{\tilde{\beta}} E_6^{-\frac{k}{2}}}{\Delta^{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}} \\ &= \frac{(E_4^3)^{\tilde{\alpha}}}{\Delta^{\tilde{\alpha}}} \cdot \frac{(E_6^2)^{\tilde{\beta}}}{\Delta^{\tilde{\beta}}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \\ &= j^{\tilde{\alpha}} \cdot \left(\frac{E_4^3}{\Delta} - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} \right)^{\tilde{\beta}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \\ &= j^{\tilde{\alpha}} \cdot (j - 1728)^{\tilde{\beta}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \in \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Bemerkung 3.25. Schreiben wir kurz $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Dann gilt: Der Quotient $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$ lässt sich auf natürliche Weise mit der Struktur einer kompakten Riemann'schen Fläche ausstatten, indem man die Ränder des Standardfundamentalbereichs \mathcal{F} identifiziert. In dieser Sprache besagt Proposition 3.23, dass j einen Isomorphismus Riemann'scher Flächen

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^* \cong \overline{\mathbb{C}}$$

liefert, so dass sich $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$ topologisch mit der 2-Sphäre S^2 in \mathbb{R}^3 identifizieren lässt. Im Spezialfall $k = 0$ entspricht Satz 3.24 dann der Tatsache, dass die einzigen meromorphen Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$ die rationalen Funktionen sind.

3.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten der Spitzenform $\Delta \in S_{12}$ ganze Zahlen sind.

Hinweis: Zeigen Sie dafür zunächst

$$\sigma_3(n) \equiv \sigma_5(n) \pmod{12} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3.2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Das Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(z) > 0$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Diese nennen wir die **Gammafunktion**.

Hinweis: Zerlegen Sie das Integral in ein Integral von 0 bis 1 und eines von 1 bis ∞ und behandeln Sie diese gesondert.

(b) Es gilt die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration.

(c) Es gilt $\Gamma(1) = 1$ und mit (b) also $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.3. In dieser Aufgabe zeigen wir die **Ramanujan-Kongruenzen**

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für die Fourier-Koeffizienten $\tau(n)$ der Diskriminante $\Delta \in S_{12}$. Zeigen Sie dafür zunächst die Aussagen

(a) $E_{12}(z) = 1 + \frac{65520}{691} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n)q^n$.

(b) $691 \cdot (E_{12} - E_6^2) = (65520 + 691 \cdot 1008) \cdot \Delta$.

und folgern Sie die Behauptung durch Vergleich der Fourier-Koeffizienten auf beiden Seiten. Beachten Sie hierbei Übungsaufgabe 3.1.

Aufgabe 3.4. (a) Drücken Sie E_{16} als Polynom in E_4 und E_6 aus.

(b) Nach Übungsaufgabe 2.2 gilt

$$f := E'_{12}\Delta - E_{12}\Delta' \in V_{26}.$$

Zeigen Sie $f \in M_{26}$ und drücken Sie f als Polynom in E_4 und E_6 aus.

Aufgabe 3.5. Sei $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n$ die Fourier-Entwicklung der Diskriminante $\Delta \in S_{12}$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Äquivalenz

$$\tau(n) = 0 \iff P_{n,12} \equiv 0 \iff g_n(n,12) = 0.$$

Bemerkung: Einer Vermutung von LEHMER⁴⁵ zufolge gilt $\tau(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

⁴⁵Derrick Henry Lehmer (1905-1991)

Hecke-Theorie

Die Hecke-Theorie studiert für alle $n \in \mathbb{N}$ spezielle Endomorphismen T_n auf dem Vektorraum M_k der holomorphen Modulformen eines festen Gewichts k . Als lineare Abbildungen auf Räumen von Modulformen operieren sie auf den Fourier-Koeffizienten, was später für die Zahlentheorie von Bedeutung ist. Entdeckt wurden Hecke-Operatoren durch MORDELL⁴⁶ im Jahr 1917, als dieser die von Ramanujan vermutete schwache Multiplikativität der τ -Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n =: \Delta(z)$$

nachwies. Aber erst Hecke erkannte in den 1930er-Jahren die universelle Bedeutung dieser Konstruktion. Wie zuerst 1959 von SHIMURA⁴⁷ beschrieben, lässt sich den Hecke-Operatoren eine Algebra zuordnen, die sogenannte Hecke-Algebra. Letztere stellt ein zunächst rein algebraisches Objekt dar, das wir in Abschnitt 4.1 in größerer Allgemeinheit behandeln wollen, um dann in Abschnitt 4.2 den Spezialfall einer Hecke-Algebra zur vollen Modulgruppe zu studieren. Hierbei folgen wir jeweils der Darstellung einer 1990 erschienenen Abhandlung von KRIEG.⁴⁸ In den Abschnitten 4.3 und 4.4 wenden wir schließlich die Elemente der Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe als Hecke-Operatoren auf holomorphe Modulformen an und studieren Eigenformen in dieser Situation.

4.1 Die allgemeine Hecke-Algebra

Definition 4.1. Ein Paar (R, S) aus einem Monoid S und einer darin enthaltenen Gruppe $R \subseteq S$, so dass für alle $s \in S$ die Doppelnebenklasse RsR aus nur endlich vielen R -Linksnebenklassen besteht, nennen wir ein **Hecke-Paar**.

⁴⁶Louis Joel Mordell (1888-1972)

⁴⁷Goro Shimura (1930-2019)

⁴⁸Aloys Krieg (*1955)

Beispiel 4.2. Ein Paar (R, S) zweier Gruppen $R \subseteq S$ ist trivialerweise ein Hecke-Paar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) R ist eine endliche Untergruppe von S ,
- (b) R ist in S normal.

Wir führen in Beispiel 4.4 ein erstes interessantes Beispiel eines Hecke-Paares ein, benötigen dafür aber zunächst das folgende Lemma:

Lemma 4.3. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{M}^n := \{M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det(M) = n\} = \bigsqcup_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod (d)}} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

wobei b ein volles Vertretersystem modulo d durchläuft, also etwa $b \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Beweis. Offensichtlich ist die rechte Seite in der linken enthalten. Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion und betrachten dazu eine beliebige Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^n.$$

Wegen $ad - bc = n > 0$ können a und c nicht gleichzeitig Null sein. Mit $g := \mathrm{ggT}(a, c) \in \mathbb{N}$ sind daher $-\frac{c}{g}$ und $\frac{a}{g}$ teilerfremd und nach dem Lemma von Bézout gibt es $e, f \in \mathbb{Z}$ mit $e\frac{a}{g} + \frac{c}{g}f = 1$ und

$$\begin{pmatrix} e & f \\ -\frac{c}{g} & \frac{a}{g} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

so dass wir ohne Einschränkung $c = 0$ annehmen können. Wegen $\det M = n$ gilt dann $ad = n$. Nach möglicher Multiplikation mit $-I_2$ dürfen wir zudem ohne Einschränkung $d > 0$ annehmen. Für ein beliebiges $h \in \mathbb{Z}$ gilt weiter

$$T^h \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + dh \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

so dass wir ohne Einschränkung annehmen können, dass b in einem geeigneten Restesystem modulo d liegt.

Es verbleibt zu zeigen, dass die Vereinigung in der Behauptung disjunkt ist – die Endlichkeit ist nach Konstruktion klar. Angenommen, für zwei Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

mit $ad = n = \tilde{a}\tilde{d}$, $d, \tilde{d} > 0$ und b, \tilde{b} Vertreter zweier Restklassen modulo d bzw. \tilde{d} existiere ein $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Dann folgt, dass der untere linke Eintrag von U Null ist, also $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$. Es gibt also ein Vorzeichen \pm und ein $h \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & h \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm a & \pm b + hd \\ 0 & \pm d \end{pmatrix}.$$

Einerseits folgt $\tilde{d} = \pm d$ und wegen $d, \tilde{d} > 0$ bereits $\tilde{d} = d$ und somit $U = T^h$. Andererseits gilt dann auch $\tilde{b} = b + hd$. Wegen $\tilde{d} = d$ stammen b, \tilde{b} aus dem gleichen Restesystem modulo d . Da sie sich nur um ein Vielfaches von d unterscheiden, folgt $\tilde{b} = b$ und $U = I_2$. Insbesondere haben wir die behauptete Disjunktheit nachgewiesen. \square

Beispiel 4.4. Sei

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ := \{Q \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid \det(Q) > 0\}.$$

Dann ist $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$ ein Hecke-Paar,

denn: Für ein beliebiges $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $mQ \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ und $n := \det(mQ) > 0$. Es gilt deshalb

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot Q \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \frac{1}{m} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot (mQ) \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \frac{1}{m} \cdot \mathbb{M}^n.$$

Die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklasse $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot Q \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zerfällt (disjunkt) in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Linksnebenklassen. Nach Lemma 4.3 ist diese Zerlegung endlich und explizit bekannt. $\#$

Bezüglich eines gegebenen Hecke-Paares (R, S) schreiben wir

- $\mathcal{L}(R, S)$ für den \mathbb{Z} -Modul aller formalen endlichen \mathbb{Z} -Linearkombinationen von R -Linksnebenklassen von S ,
- $\mathcal{H}(R, S)$ für den \mathbb{Z} -Modul aller formalen endlichen \mathbb{Z} -Linearkombinationen von R -Doppelnebenklassen von S .

Nach Voraussetzung ist jede R -Doppelnebenklasse RsR in S die disjunkte Vereinigung endlich vieler R -Linksnebenklassen

$$RsR = Rs_1 \sqcup \dots \sqcup Rs_\ell \quad \text{für ein geeignete } s_1, \dots, s_\ell \in S.$$

Wir ordnen RsR das Element

$$\iota(RsR) := \sum_{j=1}^{\ell} Rs_j \in \mathcal{L}(R, S)$$

zu und setzen ι zu der eindeutig bestimmten \mathbb{Z} -linearen Abbildung

$$\iota: \mathcal{H}(R, S) \rightarrow \mathcal{L}(R, S)$$

fort. Letztere ist offenkundig injektiv; wir wollen nun ihr Bild studieren. Die Gruppe R operiert per Rechtsmultiplikation auf der Menge der R -Linksnebenklassen von S und in \mathbb{Z} -linearer Fortsetzung auf $\mathcal{L}(R, S)$. Den Untermodul der R -Invarianten unter dieser Aktion bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(R, S)^R$. Dann ist

$$\iota: \mathcal{H}(R, S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(R, S)^R$$

ein Isomorphismus von \mathbb{Z} -Moduln,

denn: Ein Element

$$\sum_{s \in R \backslash S} a_s R s \in \mathcal{L}(R, S)$$

ist genau dann R -rechtsinvariant, wenn für alle s, t mit $R s R = R t R$ die Koeffizienten a_s und a_t übereinstimmen. Genau dann können wir

$$\sum_{s \in R \backslash S} a_s R s = \sum_{s \in R \backslash S / R} \sum_{\substack{s_j \in R \backslash S \\ R s_j \subseteq R s R}} a_s R s_j = \sum_{s \in R \backslash S / R} a_s \iota(R s R) = \iota \left(\sum_{s \in R \backslash S / R} a_s R s R \right) \quad (4.1)$$

schreiben. #

Wir werden von nun an $\mathcal{L}(R, S)^R$ mit $\mathcal{H}(R, S)$ identifizieren.

Wir definieren ein Produkt

$$(R s R)(R t) := \left(\bigsqcup_{j=1}^{\ell} R s_j \right) (R t) := \sum_{j=1}^{\ell} R s_j t \in \mathcal{L}(R, S) \quad (4.2)$$

von R -Doppelnebenklassen mit R -Linksnebenklassen. Dieses hängt offensichtlich nicht von der Wahl der Vertreter s_j und t ab und lässt sich \mathbb{Z} -bilinear zu einer Verknüpfung

$$\mathcal{H}(R, S) \times \mathcal{L}(R, S) \rightarrow \mathcal{L}(R, S) \quad (4.3)$$

fortsetzen.

Proposition 4.5. *Sei (R, S) ein Hecke-Paar. Dann ist die in (4.3) definierte Verknüpfung in dem Sinne assoziativ, dass*

$$(\mathfrak{D} \tilde{\mathfrak{D}}) \mathfrak{L} = \mathfrak{D} (\tilde{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}) \quad \text{für alle } \mathfrak{D}, \tilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{H}(R, S) \text{ und } \mathfrak{L} \in \mathcal{L}(R, S)$$

*gilt. Außerdem ist das Produkt zweier Elemente aus $\mathcal{H}(R, S)$ wieder in $\mathcal{H}(R, S)$ enthalten. Es folgt, dass $\mathcal{H}(R, S)$ die Struktur einer assoziativen \mathbb{Z} -Algebra mit Einselement $R = R e_S R$ trägt. Diese nennen wir ab sofort die **Hecke-Algebra** des Hecke-Paares (R, S) .*

Beweis. Das Produkt zweier R -Doppelnebenklassen $RsR = \bigsqcup Rs_j$ und $RtR = \bigsqcup Rt_k$ wird durch die Formel

$$(RsR)(RtR) = \sum_{j,k} Rs_j t_k$$

gegeben. Die Assoziativität ist nun klar. Rechtsmultiplikation mit einem Element $r \in R$ permutiert nur die R -Linksnebenklassen Rt_k , das Produkt bleibt also invariant und liegt somit in $\mathcal{L}(R, S)^R \cong \mathcal{H}(R, S)$ wie behauptet. \square

Wir wollen das Produkt in der Hecke-Algebra noch ein wenig besser kennenlernen:

Proposition 4.6. *Sei (R, S) ein Hecke-Paar. Das Produkt zweier R -Doppelnebenklassen $RsR = \bigsqcup Rs_j$ und $RtR = \bigsqcup Rt_k$ wird durch die Formel*

$$(RsR)(RtR) = \sum a_u RuR$$

gegeben. Dabei durchläuft u ein Vertretersystem derjenigen R -Doppelnebenklassen, die in $RsRtR$ enthalten sind, und es gilt

$$a_u = |\{(j, k) : Ru = Rs_j t_k\}|.$$

a_u hängt nicht von der Wahl der Vertreter s_j, t_k und u ab und ist von 0 verschieden, wenn RuR in $RsRtR$ enthalten ist.

Beweis. Mit den Überlegungen von (4.1) ist das trivial. \square

Bemerkung 4.7. *Man kann die Koeffizienten a_u des Produkts in Proposition 4.6 auch wie folgt beschreiben. Sei $\deg(u)$ die Anzahl aller in RuR enthaltenen Linksnebenklassen. Dann gilt*

$$\deg(u)a_u = |\{(j, k) \mid RuR = Rs_j t_k R\}|.$$

Definition 4.8. *Sei (R, S) ein Hecke-Paar. Ein **Antiautomorphismus** von (R, S) ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S, \\ s &\mapsto s'. \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

- $(s')' = s,$ (Involutorisizität)
- $(st)' = t's',$ (Antihomomorphie)
- $s \in R \implies s' \in R.$ (R-Abgeschlossenheit)

Ausgehend von einer R -Doppelnebenklasse $\mathfrak{D} = RsR = \bigsqcup Rs_j$ ist auch

$$\mathfrak{D}' := \{s \in S \mid s' \in \mathfrak{D}\} = Rs'R = \bigsqcup Rs'_j$$

wieder eine R -Doppelnebenklasse. Die so gegebene Zuordnung $\mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{D}'$ lässt sich \mathbb{Z} -linear zu einer Abbildung auf $\mathcal{H}(R, S)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist nicht zwangsläufig antihomomorph, aber es gilt

Proposition 4.9. Für ein Hecke-Paar (R, S) besitze jede R -Doppelnebenklasse RsR mit $s \in S$ ein simultanes Vertretersystem der R -Rechts- und R -Linksnebenklassen

$$RsR = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} Rs_j = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} s_j R.$$

Dann definiert jeder Antiautomorphismus $s \mapsto s'$ des Hecke-Paares (R, S) einen Antiautomorphismus auf $\mathcal{H}(R, S)$.

Beweis. Seien

$$\mathfrak{D} = RsR = \bigsqcup Rs_j = \bigsqcup s_j R \quad \text{und} \quad \tilde{\mathfrak{D}} = RtR = \bigsqcup Rt_k = \bigsqcup t_k R.$$

Dann gilt nach Bemerkung 4.7

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}} &= \sum a_u RuR & \text{mit } \deg(u)a_u &= |\{(j, k) : RuR = Rs_j t_k R\}|, \\ \tilde{\mathfrak{D}}'\mathfrak{D}' &= \left(\bigsqcup Rt'_k\right) \left(\bigsqcup Rs'_j\right) = \sum b_u RuR & \text{mit } \deg(u)b_u &= |\{(j, k) : RuR = Rt'_k s'_j R\}|. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mit $(Rs_j t_k R)' = Rt'_k s'_j R$ und $\deg(u') = \deg(u)$. \square

Bemerkung 4.10. Die Voraussetzung von Proposition 4.9 ist schon erfüllt, wenn für alle $s \in S$ die Anzahl der R -Rechts- und R -Linksnebenklassen in RsR übereinstimmt,

denn: Gelte $RsR = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} Rs_j = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} t_j R$. Die Behauptung ist offensichtlich gezeigt, wenn wir für jedes j ein u_j finden können mit

$$Rs_j = Ru_j \quad \text{und} \quad t_j R = u_j R.$$

Nach Voraussetzung ist $s_j \in RsR = Rt_j R$, also

$$s_j = rt_j \tilde{r} \quad \text{mit } r, \tilde{r} \in R.$$

Eine mögliche Wahl für u_j ist also $u_j := r^{-1}s_j = t_j \tilde{r}$. $\#$

Satz 4.11. Besitzt das Hecke-Paar (R, S) einen Antiautomorphismus $s \mapsto s'$ mit der Eigenschaft

$$RsR = Rs'R \quad \text{für alle } s \in S,$$

so ist die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(R, S)$ kommutativ.

Beweis. Besitzt der Antiautomorphismus die geforderte Eigenschaft, so ist er die Identität auf $\mathcal{H}(R, S)$. Insbesondere stimmt die Anzahl der R -Rechts- und R -Linksnebenklassen überein, so dass wir nach Bemerkung 4.10 Proposition 4.9 anwenden können. Es gilt dann

$$\mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}})' = \tilde{\mathfrak{D}}'\mathfrak{D}' = \tilde{\mathfrak{D}}\mathfrak{D}$$

und also der Satz. \square

Beispiel 4.12. Nach Beispiel 4.4 ist $(R, S) = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$ ein Hecke-Paar; es lässt sich also jede Doppelnebenklasse als disjunkte Vereinigung endlich vieler Linksnebenklassen schreiben. Die zugehörige Hecke-Algebra

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$$

ist kommutativ,

denn: Offensichtlich ist hier das Transponieren ein Antiautomorphismus. Nach dem Elementarteilersatz gibt es zu einer beliebigen Matrix $M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ Matrizen $U, \tilde{U} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ und eindeutig bestimmte Elementarteiler $e_1, e_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $e_1 \mid e_2$ und

$$UM\tilde{U} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Hat M positive Determinante, so können wir dabei ohne Einschränkung $U, \tilde{U} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$ annehmen. Durch Transponieren der Gleichung ergibt sich

$${}^t\tilde{U} {}^tM {}^tU = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$$

und somit die Gleichheit der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklassen

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) {}^tM\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Diese Überlegung gilt offensichtlich auch für ein beliebiges $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$, so dass tatsächlich die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$ kommutativ ist. #

4.2 Die Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe

Wir bestimmen in diesem Abschnitt die Struktur der Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe.

Lemma 4.13. Gilt für $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ eine der Bedingungen

- (a) $N = r \cdot I_2$ mit $r \in \mathbb{Q}$,
- (b) $M, N \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ mit $\mathrm{ggT}(\det(M), \det(N)) = 1$,

so gilt in $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$

$$(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot MN \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Beweis. In Fall (a) ist die Behauptung klar, da N dann mit beliebigen Matrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ kommutiert.

In Fall (b) seien für $X \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ die Elementarteiler mit $e_1^{(X)}, e_2^{(X)}$ bezeichnet. Dabei gilt nach Konstruktion stets

$$\begin{aligned} e_1^{(X)} &= \mathrm{ggT}\{\text{Einträge von } X\}, \\ e_2^{(X)} &= \frac{\det(X)}{e_1^{(X)}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Behauptung in diesem Fall ist dann äquivalent zur Gültigkeit der Identitäten

$$e_1^{(M)} \cdot e_1^{(N)} = e_1^{(MUN)} \quad \text{und} \quad e_2^{(M)} \cdot e_2^{(N)} = e_2^{(MUN)} \quad \text{für alle } U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Nach dem bereits bewiesenen Fall (a) dürfen wir die Matrix M durch $(e_1^{(M)})^{-1} \cdot M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ und die Matrix N durch $(e_1^{(N)})^{-1} \cdot N \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ ersetzen. Wegen

$$\det(M) \cdot \det(N) = \det(M) \cdot \det(U) \cdot \det(N) = \det(MUN)$$

genügt es daher, unter diesen Voraussetzungen

$$e_1^{(MUN)} = 1 \tag{4.5}$$

zu zeigen. Schreiben wir

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

so gilt

$$MUN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \det(N)b \\ \det(M)c & \det(M)\det(N)d \end{pmatrix}.$$

Jeder gemeinsame Primteiler p der Einträge dieser Matrix erfüllt insbesondere

$$p \mid a, \quad p \mid \det(N)b \quad \text{und} \quad p \mid \det(M)c.$$

Wegen $\det(U) = 1$ gilt aber

$$p \nmid b \quad \text{und} \quad p \nmid c$$

und also

$$p \mid \det(N) \quad \text{und} \quad p \mid \det(M).$$

Das steht im Widerspruch zur Teilerfremdheit von $\det(M)$ und $\det(N)$; einen solchen gemeinsamen Primteiler der Einträge von MUN kann es also nicht geben. Insgesamt haben wir (4.5) und somit Fall (b) des Lemmas gezeigt. \square

Bemerkung 4.14. Schreiben wir in der Situation von Teil (b) von Lemma 4.13

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j,$$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_i \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i,$$

so gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot MN \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{ij} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i,$$

denn: Nach Teil (b) von Lemma 4.13 gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot MN \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \\ &= \left(\bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \right) \cdot \left(\bigsqcup_i \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i \right). \end{aligned}$$

Für ein beliebiges aber festes i ist nun

$$\begin{aligned} \left(\bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \right) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i) &= \bigcup_j (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot N_i \\ &= \bigcup_j (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot N_i \\ &= (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot N_i \\ &= \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, dass die jeweiligen Mengen auf der rechten Seite für verschiedene Werte von i disjunkt sind. Sei dafür $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$M_j N_i = U M_{\tilde{j}} N_{\tilde{i}} \quad \text{für geeignete } j, \tilde{j}, i, \tilde{i}.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$N_i (N_{\tilde{i}})^{-1} = (M_j)^{-1} U M_{\tilde{j}}.$$

Die Nenner der Einträge auf der linken Seite sind Teiler von $|\det(N_{\tilde{i}})| = |\det(N)|$, die auf der rechten Seite Teiler von $|\det(M_j)| = |\det(M)|$. Wegen der Teilerfremdheit von $\det(M)$ und $\det(N)$ sind also alle Einträge ganze Zahlen und somit $j = \tilde{j}$ und $i = \tilde{i}$. #

Wir nehmen Teil (a) von Lemma 4.13 zum Anlass, nur noch Doppelnebenklassen ganzzahliger Matrizen zu betrachten, also

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) \quad \text{mit } \mathbb{M} := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \cap \mathbb{Z}^{2 \times 2} = \{M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det(M) > 0\}.$$

Hierbei ist offensichtlich, dass $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ in Analogie zu Beispiel 4.4 ein Hecke-Paar ist. In Satz 4.16 werden wir Teil (b) von Lemma 4.13 benutzen, um uns das Studium der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ durch eine geeignete Zerlegung zu erleichtern. Wir führen zunächst die passende Notation ein:

Definition 4.15. Für jede Primzahl p setzen wir

$$\mathbb{M}_p := \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathbb{M}^{p^r}.$$

Offensichtlich ist dann auch $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$ in Analogie zu Beispiel 4.4 ein Hecke-Paar. Die zugehörige Hecke-Algebra

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$$

heißt die p -primäre Komponente der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$.

Satz 4.16. Die Hecke-Algebra des Paares $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ ist das Tensorprodukt⁴⁹

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) = \bigotimes_{p \text{ prim}} \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$$

ihrer p -primären Komponenten.

Beweis. Wir können für die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ und für jede ihrer p -Komponenten $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$ die jeweilig passenden $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklassen als Basis wählen. Jede Doppelnebenklasse $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M \in \mathbb{M}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen eindeutig bestimmten Vertreter der Form

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } e_1, e_2 \in \mathbb{N}, e_1 e_2 = n, e_1 \mid e_2.$$

Jede solche Matrix lässt sich eindeutig als Produkt von ebensolchen Matrizen schreiben, deren Einträge jeweils nur Potenzen einer (jeweils nur einmal auftretenden) festen Primzahl sind. Der Satz folgt daher mit Teil (b) von Lemma 4.13. \square

Offenbar genügt es also zum Studium der Hecke-Algebra die einzelnen p -Komponenten zu betrachten. Bevor wir dies tun, führen wir Kurzschreibweisen für bestimmte Elemente der Hecke-Algebra ein, nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(a, d) &:= \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) && \text{für } a, d \in \mathbb{N}, \\ \mathfrak{D}(n) &:= \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^n / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) && \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wie wir im Beweis von Beispiel 4.12 eingesehen haben, beschreibt dabei die erste Zeile nach dem Elementarteilersatz eine ganz allgemeine Doppelnebenklasse. In dieser Sprache lassen sich nun einige unserer bisherigen Ergebnisse neu formulieren:

Lemma 4.17. Für alle $a, d, n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Aussagen:

$$(a) \quad \mathfrak{D}(n) = \sum_{\substack{ad=n \text{ mit } a \mid d \\ a, d > 0}} \mathfrak{D}(a, d).$$

$$(b) \quad \mathfrak{D}(a, d) \mathfrak{D}(n, n) = \mathfrak{D}(an, dn).$$

Beweis. Behauptung (a) folgt unmittelbar aus dem Elementarteilersatz und Behauptung (b) ist eine Umformulierung von Teil (a) von Lemma 4.13. \square

⁴⁹Das Tensorprodukt einer gegebenen Menge von \mathbb{Z} -Moduln $\{M_p \mid p \text{ prim}\}$ mit jeweils zugehörigen Basen B_p kann als der \mathbb{Z} -Modul mit Basis

$$\bigoplus_{p \text{ prim}} B_p = \bigcup_{\substack{I \text{ endliche Menge} \\ \text{von Primzahlen}}} \left(\prod_{p \in I} B_p \right)$$

interpretiert werden, vgl. Satz 13.3 aus der Algebra.



Wir wollen nun die Struktur von $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$ untersuchen. Wie wir bereits im Beweis von Satz 4.16 eingesehen haben, ist dort nach dem Elementarteilersatz jede $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklasse von der Gestalt

$$\mathfrak{D}(p^{k_1}, p^{k_2}) \quad \text{mit } 0 \leq k_1 \leq k_2. \quad (4.6)$$

Für diese gelten die folgenden Rechenregeln:

Lemma 4.18. Für eine beliebige Primzahl p gilt:

- (a) $\mathfrak{D}(1, p) = \mathfrak{D}(p) = \mathbb{M}^p$.
- (b) $\mathfrak{D}(1, p^r) = \mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2})$ für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.
- (c) $\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) = \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1})$ für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.
- (d) $\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(1, p^r) = \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(1, p^{r-1})$ für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.
- (e) $\mathfrak{D}(p^r)\mathfrak{D}(p^s) = \sum_{i=0}^{\min\{r,s\}} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i})$ für alle $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Beweis. Behauptung (a) ist ein Spezialfall von Teil (a) von Lemma 4.17.

Behauptung (b) lässt sich elementar nachweisen; für p prim und $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2}) &= \sum_{\substack{ad=p^r \text{ mit } a|d \\ a, d > 0}} \mathfrak{D}(a, d) - \mathfrak{D}(p, p) \cdot \sum_{\substack{a\tilde{d}=p^{r-2} \text{ mit } a|\tilde{d} \\ \tilde{a}, \tilde{d} > 0}} \mathfrak{D}(\tilde{a}, \tilde{d}) \\ &\stackrel{4.17(b)}{=} \sum_{\alpha+\delta=r \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq \delta} \mathfrak{D}(p^\alpha, p^\delta) - \sum_{\tilde{\alpha}+\tilde{\delta}=r-2 \text{ mit } 0 \leq \tilde{\alpha} \leq \tilde{\delta}} \mathfrak{D}(p^{\tilde{\alpha}+1}, p^{\tilde{\delta}+1}) \\ &= \mathfrak{D}(1, p^r). \end{aligned}$$

Für Behauptung (c) stellen wir zunächst $\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r)$ als Linearkombination

$$\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^{p^{r+1}} / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} a_M \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \quad \text{mit } a_M \in \mathbb{Z}$$

von geeigneten Doppelnebenklassen dar. Nach Aussage (a) und Lemma 4.3 ist ein Vertretersystem von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Linksnebenklassen in $\mathfrak{D}(p)$ gegeben durch die Matrizen

$$M_j := \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad \text{mit } j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \quad \text{und} \quad M_p := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für ein $M \in \mathbb{M}^{p^{r+1}}$, das in der Notation von (4.4) die Teilbarkeitsbedingung $p \mid e_1^{(M)}$ erfüllt, führt die Ganzzahligkeit sämtlicher pM_j^{-1} zu

$$MM_j^{-1} \in \mathbb{M}^{p^r} \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, p\},$$

also zu $a_M = p + 1$. Es gibt nur eine Doppelnebenklasse $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in $\mathbb{M}^{p^{r+1}}$ mit $p \nmid e_1^{(M)}$ und für diese ist

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{r+1} \end{pmatrix}$$

ein möglicher Vertreter. Für diesen ist

$$MM_j^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{j}{p} \\ 0 & p^r \end{pmatrix} & \text{für } j < p, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & p^{r+1} \end{pmatrix} & \text{für } j = p \end{cases}$$

ganzzahlig genau für $j = 0$; es gilt hier also $a_M = 1$. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) &= \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + (p+1) \cdot \sum_{\substack{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^{p^{r+1}} / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ p \nmid e_1^{(M)}}} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &\stackrel{4.17(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + (p+1)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) \\ &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}). \end{aligned}$$

Behauptung (d) folgt aus dem bisher Gezeigten. Im Fall $r = 2$ gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(1, p^2) &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(p)(\mathfrak{D}(p^2) - \mathfrak{D}(p, p)) \\ &= \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^2) - \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p) \\ &\stackrel{(c)}{=} \mathfrak{D}(p^3) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p) - \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p) \\ &\stackrel{4.12}{=} \mathfrak{D}(p^3) + (p-1)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p) \\ &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^3) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p) \\ &\stackrel{(a)}{=} \mathfrak{D}(1, p^3) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(1, p) \end{aligned}$$

und im Fall $r \geq 3$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(1, p^r) &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(p)(\mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2})) \\ &= \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2}) \\ &\stackrel{4.12(c)}{=} \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - \mathfrak{D}(p, p)(\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^{r-2})) \\ &\stackrel{(c)}{=} \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - \mathfrak{D}(p, p)(\mathfrak{D}(p^{r-1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-3})) \\ &= \mathfrak{D}(p^{r+1}) + (p-1)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - p\mathfrak{D}(p, p)^2\mathfrak{D}(p^{r-3}) \\ &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - p\mathfrak{D}(p, p)^2\mathfrak{D}(p^{r-3}) \\ &= \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)(\mathfrak{D}(p^{r-1}) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-3})) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(1, p^{r-1}).$$

Behauptung (e) zeigen wir über eine Induktion nach r , wobei der Fall $r = 0$ trivial ist und der Fall $r = 1$ durch Aussage (c) gegeben ist. Sei also nun $2 \leq r \leq s$ ⁵⁰ und sei als Induktionsvoraussetzung (IV) die Behauptung für $r - 1$ und $r - 2$ bereits gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(p^r)\mathfrak{D}(p^s) &\stackrel{(c)}{=} (\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2}))\mathfrak{D}(p^s) \\ &\stackrel{(IV)}{=} \sum_{i=0}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{(r-1)+s-2i}) - p\mathfrak{D}(p, p) \cdot \sum_{i=0}^{r-2} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{(r-2)+s-2i}) \\ &\stackrel{4.12}{=} \sum_{i=0}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^{r+s-2i-1}) - \sum_{i=1}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i}) \\ &\stackrel{(c)}{=} \sum_{i=0}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i (\mathfrak{D}(p^{r+s-2i}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r+s-2i-2})) - \sum_{i=1}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i}) \\ &= \sum_{i=0}^r p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i}). \end{aligned}$$

□

Zusammen mit Teil (b) von Lemma 4.13 ergibt sich:

Korollar 4.19. $\mathfrak{D}(m)\mathfrak{D}(n) = \sum_{\substack{d|\text{ggT}(m,n) \\ d>0}} d\mathfrak{D}(d, d)\mathfrak{D}\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir zerlegen m und n in Primzahlpotenzen. Dazu betrachten wir für jede ganze Zahl a und jede Primzahl p die p -adische Bewertung, vgl. Definition 15.1 aus der Algebraischen Zahlentheorie,

$$v_p(a) := \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : p^k \mid a\}. \quad (4.7)$$

Es gilt dann

$$m = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(m)} \quad \text{und} \quad n = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(n)}$$

und nach Teil (b) von Lemma 4.13 und der in Beispiel 4.12 gezeigten Kommutativität der Hecke-Algebra also auch

$$\mathfrak{D}(m) = \prod_{p \text{ prim}} \mathfrak{D}(p^{v_p(m)}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}(n) = \prod_{p \text{ prim}} \mathfrak{D}(p^{v_p(n)}).$$

Es folgt

$$\mathfrak{D}(m)\mathfrak{D}(n) \stackrel{4.12}{=} \prod_{p \text{ prim}} \mathfrak{D}(p^{v_p(m)})\mathfrak{D}(p^{v_p(n)})$$

⁵⁰Wegen der in Beispiel 4.12 gezeigten Kommutativität der Hecke-Algebra ist das keine echte Einschränkung.

$$\stackrel{4.18(e)}{=} \prod_{p \text{ prim}} \sum_{i=0}^{\min\{v_p(m), v_p(n)\}} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{v_p(m)+v_p(n)-2i})$$

Nach Teil (a) von Lemma 4.13 gilt für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl i die Rechenregel

$$\mathfrak{D}(p, p)^i = \mathfrak{D}(p^i, p^i).$$

Wenden wir dies an, so erhalten wir

$$\mathfrak{D}(m)\mathfrak{D}(n) = \prod_{p \text{ prim}} \sum_{\substack{d | \text{ggT}(p^{v_p(m)}, p^{v_p(n)}) \\ d > 0}} d \mathfrak{D}(d, d) \mathfrak{D}\left(\frac{p^{v_p(m)} p^{v_p(n)}}{d^2}\right).$$

Das Korollar folgt durch Ausmultiplizieren und unter nochmaliger Anwendung von Teil (b) von Lemma 4.13. \square

Die Aussagen von Lemma 4.18 münden in folgenden

Satz 4.20. Für eine beliebige Primzahl p gilt

$$\mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p) = \mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)],$$

wobei $\mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)]$ ein freier \mathbb{Z} -Modul mit Basis $\{\mathfrak{D}(p, p)^m \mathfrak{D}(p)^n \mid m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ ⁵¹ ist (vgl. Definition 29.11 aus der Linearen Algebra).



Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(1, p^2) &\stackrel{4.18(b)}{=} \mathfrak{D}(p^2) - \mathfrak{D}(p, p) \\ &\stackrel{4.18(c)}{=} (\mathfrak{D}(p)^2 - p\mathfrak{D}(p, p)) - \mathfrak{D}(p, p) \\ &= \mathfrak{D}(p)^2 - (p+1)\mathfrak{D}(p, p). \end{aligned}$$

Mit Teil (d) von Lemma 4.18 folgern wir daraus induktiv

$$\mathfrak{D}(1, p^r) \in \mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)] \quad \text{für alle } r \in \mathbb{N}.$$

Mit Teil (b) von Lemma 4.17 und (4.6) erhalten wir, dass alle in $\mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$ enthaltenen Doppelnebenklassen bereits in $\mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)]$ liegen. Hieraus folgt sofort

$$\mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p) = \mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)].$$

Um zu zeigen, dass die Monome vom Typ $\mathfrak{D}(p, p)^m \mathfrak{D}(p)^n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Basis von $\mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)]$ bilden, genügt es nun, ihre \mathbb{Z} -lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Hierfür genügt es für $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ beliebig diejenigen dieser Monome zu untersuchen, die sich als \mathbb{Z} -Linearkombination von Doppelnebenklassen in \mathbb{M}^{p^r} schreiben lassen, die also $2m + n = r$ erfüllen. Die Anzahl solcher Monome ist $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$. Die \mathbb{Z} -lineare Unabhängigkeit folgt, da es in \mathbb{M}^{p^r} offensichtlich genau $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ Doppelnebenklassen gibt. \square

⁵¹Elemente von $\mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$ lassen sich also als Polynome in den Variablen $\mathfrak{D}(p, p)$ und $\mathfrak{D}(p)$ verstehen.

Korollar 4.21. *Die rationale Hecke-Algebra*

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) := \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) \otimes \mathbb{Q}$$

erfüllt

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) = \mathbb{Q}[\mathfrak{D}(n) : n \in \mathbb{N}].$$

Beweis. Nach Teil (c) von Lemma 4.18 gilt

$$\mathfrak{D}(p, p) = \frac{1}{p}(\mathfrak{D}(p)^2 - \mathfrak{D}(p^2))$$

und nach Satz 4.20 also

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p) \otimes \mathbb{Z}[p^{-1}] = \mathbb{Z}[p^{-1}][\mathfrak{D}(p)].$$

Das Korollar folgt nun mit Satz 4.16. □

4.3 Hecke-Operatoren

Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $M \in \mathbb{M}$ beliebig und sei

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j$$

eine disjunkte Zerlegung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Linksnebenklassen. Dann ist durch

$$T_M := T_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \begin{cases} M_k & \rightarrow M_k, \\ f & \mapsto f|_k T_M := \sum_{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) M \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_k N \end{cases}$$

eine lineare Abbildung vom Vektorraum M_k der holomorphen Modulformen von Gewicht k bezüglich der vollen Modulgruppe in sich selbst definiert,

denn: Da f nach Voraussetzung (V_1) erfüllt und $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ ein Hecke-Paar ist, ist die Summe in der Definition wohldefiniert und endlich. Nach Proposition 2.15 und wegen der Endlichkeit der Summe ist $f|_k T_M$ holomorph auf \mathbb{H} . Wegen

$$(f|_k T_M)|_k A = \sum_{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) M \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_k (NA) = \sum_{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) M \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_k N = f|_k T_M$$

für alle $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllt $f|_k T_M$ zudem (V_1) . Um zu zeigen, dass $f|_k T_M$ auch Axiom (V_2) erfüllt, genügt es nun, Axiom (V'_2) und also die Holomorphie in $z = i\infty$ nachzuweisen. Nach Lemma 4.3 können wir dafür in der Definition von T_M die Matrizen N ohne Einschränkung in der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $ad = \det(M)$, $d > 0$ und $b \in \{0, \dots, d-1\}$ wählen. Da f nach Voraussetzung (V_2) erfüllt, ist dann aber $f|_k T_M$ mit den (endlich vielen) Summandenfunktionen

$$(f|_k N)(z) = \left(f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) (z) = \left(\frac{a}{d} \right)^{\frac{k}{2}} \cdot f\left(\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \right)$$

offensichtlich holomorph in $z = i\infty$. Die Linearität von T_M ist trivial. #

In der Sprache der Funktionalanalysis nennt man eine \mathbb{C} -lineare Abbildung zwischen zwei \mathbb{C} -Vektorräumen auch einen **linearen Operator**; speziell nennt man T_M auch den **Hecke-Operator** zur Doppelnebenklasse $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Durch \mathbb{Q} -lineares Fortsetzen erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{Z}$ und jedes $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, den **Hecke-Operator**

$$T_{\mathfrak{D}} : M_k \rightarrow M_k$$

zu \mathfrak{D} . In Hinsicht auf Korollar 4.21 interessieren wir uns besonders zu jedem $n \in \mathbb{N}$ für den **(normierten) n -ten Hecke-Operator**

$$T_n : \begin{cases} M_k & \rightarrow M_k \\ f & \mapsto (f|_k T_n)(z) := n^{\frac{k}{2}-1} \cdot (f|_k T_{\mathfrak{D}(n)})(z). \end{cases} \quad (4.8)$$

Wir studieren zunächst die Wirkung des n -ten Hecke-Operators in einem Beispiel:

Beispiel 4.22. Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 4$ gerade. Dann gilt

$$P_{m,k}|_k T_n = \sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} P_{\frac{mn}{d^2},k},$$

denn: Es gilt

$$\begin{aligned} & (P_{m,k}|_k T_n)(z) \\ & \stackrel{(4.8)}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{M}^n} (P_{m,k}|_k N)(z) \\ & \stackrel{3.16}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{\substack{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{M}^n \\ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}} (e^{2\pi i m \cdot} |_k MN)(z) \\ & = n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathbb{M}^n} (e^{2\pi i m \cdot} |_k M)(z). \end{aligned}$$

Nach Übungsaufgabe 4.4 ist die Menge

$$\left\{ NM \mid N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad = n, d > 0, b \bmod(d) \text{ und} \right. \\ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mit } (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2, \text{ so dass } (\gamma > 0, \mathrm{ggT}(\gamma, \delta) = 1) \text{ oder } (\gamma = 0, \delta = 1) \text{ gilt,} \\ \left. (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \text{ fix mit } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}$$

ein Vertretersystem von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ in \mathbb{M}^n . Somit können wir die Matrizen im Exponenten im Prinzip vertauschen und es folgt

$$(P_{m,k}|_k T_n)(z)$$

$$\begin{aligned}
&= n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod d}} e^{2\pi i m \cdot} \Big|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) \Big|_k M \right) (z) \\
&= n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d>0 \\ b \bmod d}} n^{\frac{k}{2}} d^{-k} e^{2\pi i m (\frac{n}{d^2} \cdot + \frac{b}{d})} \right) \Big|_k M \right) (z).
\end{aligned}$$

Dies lässt sich noch vereinfachen, denn es gilt

$$\sum_{b \bmod d} \left(e^{2\pi i \frac{m}{d}} \right)^b = \begin{cases} \sum_{b \bmod d} 1 = d & \text{für } d \mid m, \\ \frac{1 - e^{2\pi i m}}{1 - e^{2\pi i \frac{m}{d}}} = 0 & \text{für } d \nmid m. \end{cases} \quad (4.9)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
&(P_{m,k} \Big|_k T_n)(z) \\
&= \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left(\frac{n}{d} \right)^{k-1} e^{2\pi i m (\frac{n}{d^2} \cdot)} \right) \Big|_k M \right) (z) \\
&= \sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left(\frac{n}{d} \right)^{k-1} \cdot \left(\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} e^{2\pi i \frac{mn}{d^2} \cdot} \Big|_k M \right) (z)
\end{aligned}$$

und mit Definition 3.16 somit die Behauptung. #

Ganz allgemein gilt:

Satz 4.23. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), M) &\rightarrow \mathrm{End}(M_k), \\
\mathfrak{D} &\mapsto (f \mapsto f \Big|_k T_{\mathfrak{D}})
\end{aligned}$$

ein \mathbb{Q} -Algebrenhomomorphismus, so dass sich die in Abschnitt 4.2 gezeigten Rechenregeln für Elemente der Hecke-Algebra auf die Hecke-Operatoren übertragen. Dabei bildet jeder Hecke-Operator Spitzenformen auf Spitzenformen ab. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) q^m \in M_k$ gilt speziell

$$(f \Big|_k T_n)(z) := (n^{\frac{k}{2}-1} \cdot f \Big|_k T_{\mathfrak{D}(n)})(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) \right) q^m.$$

Beweis. Schreiben wir für zwei Doppelnebenklassen

$$\mathfrak{D}_M := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j,$$

$$\mathfrak{D}_N := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_i \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i,$$

so gilt wie in Bemerkung 4.14

$$\begin{aligned} \iota(\mathfrak{D}_M \mathfrak{D}_N) &= \iota\left(\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\right) \cdot \left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\right)\right) \\ &= \sum_{j,i} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i, \end{aligned}$$

wobei nicht ausgeschlossen ist, dass verschiedene Summanden in der Summe rechts übereinstimmen. Es folgt für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $f \in M_k$

$$f|_k T_{\mathfrak{D}_M \mathfrak{D}_N} = \sum_{j,i} f|_k M_j N_i = \sum_i \left(\sum_j f|_k M_j\right)|_k N_i = (f|_k T_{\mathfrak{D}_M})|_k T_{\mathfrak{D}_N}$$

und in linearer Fortsetzung, dass die Abbildung aus dem Satz ein \mathbb{Q} -Algebrenhomomorphismus ist.

Für alle $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ und alle $f \in M_k$ gilt speziell

$$\begin{aligned} (f|_k T_n)(z) &\stackrel{(4.8)}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^n} (f|_k N)(z) \\ &\stackrel{4.3}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod(d)}} \left(f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)(z) \\ &= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod(d)}} d^{-k} \cdot f\left(\frac{az+b}{d}\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Setzen wir $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) q^m \in M_k$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (f|_k T_n)(z) &= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \sum_{b \bmod(d)} d^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) e^{2\pi i m \frac{az+b}{d}} \\ &= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) e^{2\pi i \frac{am}{d} z} \sum_{b \bmod(d)} \left(e^{2\pi i \frac{m}{d}}\right)^b, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die absolute Konvergenz der Fourier-Entwicklung von f ausgenutzt haben. Die innerste Summe auf der rechten Seite lässt sich noch mit (4.9) vereinfachen; dann gilt:

$$\begin{aligned} (f|_k T_n)(z) &= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^{1-k} \cdot \sum_{\substack{m=0 \\ d|m}}^{\infty} a_m(f) e^{2\pi i \frac{am}{d} z} \\ &\stackrel{m \rightarrow md}{=} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} a^{k-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_{md}(f) e^{2\pi i am z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{am \rightarrow m}{=} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \sum_{\substack{m=0 \\ a|m}}^{\infty} a^{k-1} \cdot a_{\frac{mn}{a^2}}(f) e^{2\pi imz} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{a|\text{ggT}(m,n) \\ a>0}} a^{k-1} \cdot a_{\frac{mn}{a^2}}(f) \right) q^m.
\end{aligned}$$

Hiermit ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die behauptete Fourier-Entwicklung von $f|_k T_n$ nachgewiesen. Dass Hecke-Operatoren Spitzenformen auf Spitzenformen abbilden, ergibt sich nun aus dem Spezialfall

$$a_0(f|_k T_n) = \sigma_{k-1}(n) a_0(f) = 0$$

und Korollar 4.21. □

Wie Petersson im Jahr 1939 können wir nun die Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren bezüglich des Petersson-Skalarprodukts nachweisen:

Satz 4.24. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist die Einschränkung eines beliebigen Hecke-Operators $T_{\mathfrak{D}}$ mit $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ auf S_k selbstadjungiert bezüglich des Petersson-Skalarprodukts; es gilt also

$$\langle f|_k T_{\mathfrak{D}} | g \rangle = \langle f | g|_k T_{\mathfrak{D}} \rangle \quad \text{für alle } f, g \in S_k.$$

Beweis. Nach Korollar 4.21 genügt es, den Satz für die n -ten Hecke-Operatoren zu beweisen. Normalerweise untersucht man dafür zunächst den Spezialfall $n = p$ prim, indem man das Skalarprodukt über einer geeigneten Kongruenzuntergruppe auswertet, und nutzt dann den durch Korollar 4.19 induzierten Zusammenhang zwischen den Hecke-Operatoren aus, um iterativ die allgemeine Behauptung zu beweisen. Ein alternativer Beweis ergibt sich jedoch unmittelbar aus den uns bereits bekannten Resultaten zu Poincaré-Reihen:

Nach Korollar 3.20 genügt es sogar,

$$\langle f|_k T_n | P_{m,k} \rangle = \langle f | P_{m,k}|_k T_n \rangle \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

zu zeigen. Tatsächlich gilt für die linke Seite der Behauptung

$$\begin{aligned}
\langle f|_k T_n | P_{m,k} \rangle &\stackrel{3.19}{=} \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} a_m(f|_k T_n) \\
&\stackrel{4.23}{=} \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{\substack{d|\text{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f)
\end{aligned}$$

und für die rechte Seite

$$\langle f | P_{m,k}|_k T_n \rangle \stackrel{4.22}{=} \sum_{\substack{d|\text{ggT}(m,n) \\ d>0}} \binom{n}{d}^{k-1} \langle f | P_{\frac{mn}{d^2},k} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{3.19}{=} \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \frac{(k-2)!}{(4\pi \frac{mn}{d^2})^{k-1}} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) \\
&= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f).
\end{aligned}$$

□

4.4 Hecke-Eigenformen

Definition 4.25. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine Modulform $0 \neq f \in M_k$ heißt eine (*simultane*) **Hecke-Eigenform**, wenn es für jeden Hecke-Operator $T_{\mathfrak{D}}$ mit $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ ein $\lambda_{\mathfrak{D}}(f) \in \mathbb{C}$ mit

$$T_{\mathfrak{D}}f = \lambda_{\mathfrak{D}}(f)f$$

gibt.

Nach Korollar 4.21 und Satz 4.23 genügt es, die definierende Eigenschaft einer Hecke-Eigenform für alle $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ nachzuweisen. Für eine Hecke-Eigenform $f \in M_k$ und ein $n \in \mathbb{N}$ heißt der Eigenwert

$$\lambda_n(f) := n^{\frac{k}{2}-1} \lambda_{\mathfrak{D}(n)}(f)$$

zum n -ten Hecke-Operator der *n -te Hecke-Eigenwert* von f . Aus Satz 4.23 folgt durch Koeffizientenvergleich zwischen den Fourier-Entwicklungen von f und $f|_k T_n$ sofort:

Lemma 4.26. Für alle $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ und jede Hecke-Eigenform $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$ mit Hecke-Eigenwerten $\lambda_n(f)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_n(f)a_m(f) &= \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) && \text{für allgemeines } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\
\lambda_n(f)a_1(f) &= a_n(f) && \text{für } m = 1.
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt die sogenannte **Multiplizität-Eins-Eigenschaft**: Die Dimension des (simultanen) Eigenraums der Hecke-Operatoren T_n mit $n \in \mathbb{N}$ zu den jeweiligen Eigenwerten $\lambda_n(f)$ ist genau 1.

Lemma 4.26 bedingt unmittelbar, dass sich die in Korollar 4.19 hergeleitete Rechenregel in der Hecke-Algebra im Wesentlichen auf die Fourier-Koeffizienten einer gegebenen Hecke-Eigenform überträgt. Genauer gilt:

Satz 4.27. Für $k \in \mathbb{Z}$ und ein nichtkonstantes $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist eine Hecke-Eigenform.

(ii) Es ist $a_1(f) \neq 0$ und es gilt

$$a_m(f)a_n(f) = a_1(f) \cdot \sum_{d|\text{ggT}(m,n)} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \quad (4.11)$$

mit den Spezialfällen

$$\begin{aligned} a_m(f)a_n(f) &= a_1(f) \cdot a_{mn}(f) && \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(m, n) = 1, \\ a_p(f)a_{p^r}(f) &= a_1(f) \cdot (a_{p^{r+1}}(f) + p^{k-1}a_{p^{r-1}}(f)) && \text{für } p \text{ prim und } r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweis. Gilt Aussage (i), so auch (4.11) nach Lemma 4.26. Wäre nun $a_1(f) = 0$, so folgte wieder mit dem Lemma

$$a_n(f) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

und also $f \in \mathbb{C}$, was im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen steht. Es gilt daher $a_1(f) \neq 0$ und somit insgesamt Aussage (ii).

Gelte umgekehrt Aussage (ii). Summieren wir Gleichung (4.11) für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ über alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ auf, so folgt mit der aus Satz 4.23 bekannten Fourier-Entwicklung von $f|_k T_n$ die Identität

$$a_1(f) \cdot f|_k T_n = a_n(f) \cdot f.$$

Dividieren wir diese durch $a_1(f) \neq 0$, so erhalten wir, dass f eine Hecke-Eigenform mit Hecke-Eigenwerten

$$\lambda_n(f) = \frac{a_n(f)}{a_1(f)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (4.12)$$

ist, also Aussage (i). □

Beispiel 4.28. Für jedes gerade $k \geq 4$ ist die Eisenstein-Reihe $E_k \in M_k$ eine Hecke-Eigenform mit Hecke-Eigenwerten $\lambda_n(E_k) = \sigma_{k-1}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

denn: Wir zeigen die Behauptung zunächst für $n = p$ prim. Hier gilt für alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} a_m(E_k|_k T_p) &\stackrel{4.23}{=} \begin{cases} a_{pm}(E_k) & \text{für } p \nmid m, \\ a_{pm}(E_k) + p^{k-1}a_{\frac{m}{p}}(E_k) & \text{für } p \mid m \end{cases} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \begin{cases} -\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(pm) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot (\sigma_{k-1}(pm) + p^{k-1}\sigma_{k-1}(\frac{m}{p})) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit der (elementar nachweisbaren) schwachen Multiplikativität

$$\sigma_{k-1}(m)\sigma_{k-1}(n) = \sigma_{k-1}(mn) \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(m, n) = 1,$$

der $(k-1)$ -ten Teilersummenfunktion ergibt sich

$$a_m(E_k|_k T_p) \stackrel{(4.7)}{=} \begin{cases} -\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(p) \cdot \sigma_{k-1}(m) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot (\sigma_{k-1}(p^{v_p(m)+1}) + p^{k-1}\sigma_{k-1}(p^{v_p(m)-1})) \cdot \sigma_{k-1}(\frac{m}{p^{v_p(m)}}) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \sigma_{k-1}(p) \cdot \left(-\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m)\right) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot \left(\sum_{i=0}^{v_p(m)+1} p^{i(k-1)} + \sum_{i=1}^{v_p(m)} p^{i(k-1)}\right) \cdot \sigma_{k-1}\left(\frac{m}{p^{v_p(m)}}\right) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) \cdot 1 & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma_{k-1}(p) \cdot \left(-\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m)\right) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(p) \cdot \sigma_{k-1}(p^{v_p(m)}) \cdot \sigma_{k-1}\left(\frac{m}{p^{v_p(m)}}\right) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) \cdot 1 & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases} \\
&\stackrel{(3.2)}{=} \sigma_{k-1}(p) \cdot a_m(E_k).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$E_k|_k T_p = \sigma_{k-1}(p) \cdot E_k$$

und haben somit die Behauptung im Fall $n = p$ prim bewiesen. Mit Korollar 4.19 sieht man nun schnell ein, dass E_k dann auch für alle $n \in \mathbb{N}$ Eigenform des n -ten Hecke-Operators und nach Korollar 4.21 also Hecke-Eigenform ist. Der jeweilige n -te Hecke-Eigenwert ergibt sich aus der Formel für $a_0(E_k|_k T_n)$ in Satz 4.23. #

Umgekehrt gilt sogar: Jede (simultane) Hecke-Eigenform $f \in M_k$ mit $a_0(f) = 1$ ist bereits identisch mit der Eisenstein-Reihe E_k ,

denn: Wegen $a_0(f) = 1 \neq 0$ impliziert der Spezialfall $n = 0$ von (4.11) unmittelbar

$$\lambda_m(f) a_1(f) \stackrel{4.26}{=} a_m(f) = \sigma_{k-1}(m) a_1(f) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Nach Satz 4.27 gilt $a_1(f) \neq 0$ und somit

$$\lambda_m(f) = \sigma_{k-1}(m) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Die Behauptung folgt nun mit der Multiplizität-Eins-Eigenschaft 4.26 und der Normierung $a_0(f) = 1$. #

Beispiel 4.29. Die Diskriminante $\Delta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) q^m \in S_{12}$ ist eine Hecke-Eigenform mit Hecke-Eigenwerten $\lambda_n(\Delta) = \tau(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ihre Fourier-Koeffizienten genügen den Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\tau(m)\tau(n) &= \tau(mn) & \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(m, n) = 1, \\
\tau(p^r)\tau(p) &= \tau(p^{r+1}) + p^{11}\tau(p^{r-1}) & \text{für } p \text{ prim und } r \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

denn: Nach Satz 4.23 gilt $\Delta|_{12} T_n \in S_{12}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und nach der Dimensionsformel 3.11 und Teil (b) von Proposition 3.10 gilt $\dim_{\mathbb{C}} S_{12} = 1$. Folglich besitzt Δ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Hecke-Eigenwert $\lambda_n(\Delta) \in \mathbb{C}$ und ist daher eine Hecke-Eigenform. Nach Proposition 3.9 gilt zudem $\tau(1) = 1$ und nach Lemma 4.26 also $\lambda_n(\Delta) = \tau(n)$. Die Rechenregeln ergeben sich unmittelbar aus Satz 4.27. #

Nach Satz 4.27 gilt für eine nichtkonstante Hecke-Eigenform $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) q^m \in M_k$ stets $a_1(f) \neq 0$, so dass wir statt f auch $a_1(f)^{-1} \cdot f$ betrachten können. Für diese Funktion gelten analog zur Diskriminante in Beispiel 4.29 noch etwas schönere Rechenregeln für die Fourier-Koeffizienten. Wir führen daher die folgende Sprechweise ein:

Definition 4.30. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine Hecke-Eigenform $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$ mit $a_1(f) = 1$ heißt eine **normierte Hecke-Eigenform**.⁵²

Aus der in Satz 4.24 gezeigten Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren bezüglich des Petersson-Skalarprodukts lassen sich starke Eigenschaften cuspidaler normierter Hecke-Eigenformen herleiten:

Proposition 4.31. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Für jede Hecke-Eigenform $f \in S_k$ und jeden Hecke-Operator $T_{\mathfrak{D}}$ mit $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ ist der Hecke-Eigenwert $\lambda_{\mathfrak{D}}(f)$ eine reelle Zahl.
- (b) Jede normierte Hecke-Eigenform $f \in S_k$ hat reelle Fourier-Koeffizienten und liegt somit im \mathbb{R} -Vektorraum der **reellen Spitzenformen**

$$S_k^{\mathbb{R}} := \{f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f)q^m \in S_k \mid a_m(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } m \geq 1\}.$$

- (c) Für je zwei normierte Hecke-Eigenformen $f, g \in S_k$ gilt

$$f \neq g \iff \langle f \mid g \rangle = 0.$$

Beweis. Sei $f \in S_k$ eine Hecke-Eigenform und sei $T_{\mathfrak{D}}$ mit $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$. Da das Petersson-Skalarprodukt auf S_k eine hermitesche Bilinearform ist, gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathfrak{D}}(f) \cdot \langle f \mid f \rangle &= \langle \lambda_{\mathfrak{D}}(f) \cdot f \mid f \rangle = \langle f|_k T_{\mathfrak{D}} \mid f \rangle \\ &\stackrel{4.24}{=} \langle f \mid f|_k T_{\mathfrak{D}} \rangle = \langle f \mid \lambda_{\mathfrak{D}}(f) \cdot f \rangle = \overline{\lambda_{\mathfrak{D}}(f)} \cdot \langle f \mid f \rangle. \end{aligned}$$

Mit der positiven Definitheit des Petersson-Skalarprodukts und $f \neq 0$ folgt nun Behauptung (a).

Dies impliziert sofort Behauptung (b), denn nach Definition 4.30 und (4.12) gilt für jede normierte Hecke-Eigenform $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f)q^m \in S_k$ die Identität

$$\lambda_n(f) = a_n(f) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Es verbleibt Behauptung (c) zu zeigen. Seien also $f, g \in S_k$ normierte Hecke-Eigenformen. Nach (4.13) gilt dann

$$f|_k T_n = a_n(f) \cdot f \quad \text{und} \quad g|_k T_n = a_n(g) \cdot g \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit

$$a_n(f) \cdot \langle f \mid g \rangle = \langle f|_k T_n \mid g \rangle \stackrel{4.24}{=} \langle f \mid g|_k T_n \rangle = \overline{a_n(g)} \cdot \langle f \mid g \rangle \stackrel{(b)}{=} a_n(g) \cdot \langle f \mid g \rangle.$$

Aus $\langle f \mid g \rangle \neq 0$ folgt somit $a_n(f) = a_n(g)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und also $f = g$. Behauptung (c) folgt, da umgekehrt $f = g$ wegen der positiven Definitheit des Petersson-Skalarprodukts unmittelbar $\langle f \mid g \rangle = \langle f \mid f \rangle > 0$ bedingt. \square

⁵²**Vorsicht:** Wegen $a_1(E_k) = -\frac{2k}{B_k} \neq 1$ sind die (normierten) Eisenstein-Reihen E_k keine normierten Hecke-Eigenformen, die jeweiligen Normierungsbegriffe unterscheiden sich also!

Die Orthogonalitätsaussage aus Teil (c) von Proposition 4.31 lässt sich zu folgendem Satz verschärfen:

Satz 4.32. *Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann besitzt S_k eine Orthogonalbasis aus Hecke-Eigenformen. Diese ist bis auf Permutation und Multiplikation mit Skalaren aus \mathbb{C}^\times eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Eindeutigkeitsaussage ist gerade Teil (c) von Proposition 4.31. Die Existenz einer Orthogonalbasis aus gemeinsamen Eigenformen folgt unmittelbar aus dem folgenden, allgemeinen Lemma 4.33 über selbstadjungierte Operatoren mit $V = S_k$ und $\{T(j)\}_{j \in I} = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Lemma 4.33. *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ und sei $\{T(i)\}_{i \in I}$ eine Familie miteinander kommutierender selbstadjungierter Operatoren auf V . Dann besitzt V eine Orthogonalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren aller $T(i)$ mit $i \in I$.*

Beweis. Wegen $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ gilt auch $\dim_{\mathbb{R}} \text{End}_{\mathbb{C}}(V) < \infty$. Die Operatoren $T(i)$ mit $i \in I$ erzeugen daher einen endlichdimensionalen \mathbb{R} -Untervektorraum von $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$, so dass es ohne Einschränkung genügt, das Lemma für eine endliche Menge $\{T(1), \dots, T(r)\}$ von Operatoren zu zeigen.

In V gibt es einen gemeinsamen (nichttrivialen) Eigenvektor der $T(i)$ mit $i \in \{1, \dots, r\}$,

denn: Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach r . Da selbstadjungierte Operatoren normal sind, folgt die Behauptung für $r = 1$ aus dem **Spektralsatz für normale Endomorphismen** aus der Linearen Algebra. Das ist der Induktionsanfang. Sei also nun $r \geq 2$ und gelte die Behauptung für $r - 1$. Sei weiter λ ein Eigenwert von $T(1)$ mit zugehörigem Eigenraum

$$V_\lambda := \{v \in V \mid T(1)v = \lambda \cdot v\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $T(i)T(1) = T(1)T(i)$ für alle $i \in \{2, \dots, r\}$ und insbesondere

$$T(i)V_\lambda \subseteq V_\lambda \quad \text{für alle } i \in \{2, \dots, r\}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt nun V_λ einen gemeinsamen (nichttrivialen) Eigenvektor der $T(i)$ mit $i \in \{2, \dots, r\}$. Die Behauptung folgt, da dieser nach Definition von V_λ auch ein Eigenvektor von $T(1)$ ist. $\#$

Wir zeigen nun das Lemma per Induktion nach $\dim_{\mathbb{C}} V$. Für $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ ist die Aussage klar; sei also $\dim_{\mathbb{C}} V \geq 2$. Wir schreiben

$$V = \mathbb{C}v \oplus (\mathbb{C}v)^\perp \quad \text{für einen gemeinsamen Eigenvektor } v \text{ von } T(i) \text{ mit } i \in \{1, \dots, r\}.$$

Da die $T(i)$ selbstadjungiert sind und $\mathbb{C}v$ fixieren, lassen sie auch $(\mathbb{C}v)^\perp$ invariant. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $(\mathbb{C}v)^\perp$ bereits eine Orthogonalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren aller $T(i)$ mit $i \in \{1, \dots, r\}$. Hieraus folgt die Behauptung. \square

Korollar 4.34. *Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann besitzen sowohl S_k als auch $S_k^{\mathbb{R}}$ eine Zerlegung in eindimensionale Untervektorräume, die unter allen Hecke-Operatoren T_n mit $n \in \mathbb{N}$ invariant sind.*



Beweis. Nach Satz 4.32 besitzt S_k eine Basis (f_0, \dots, f_r) aus normierten Hecke-Eigenformen. Da für diese die Hecke-Eigenwerte nach (4.13) durch die jeweiligen Fourier-Koeffizienten gegeben sind, haben keine zwei Formen aus dieser Basis dieselben Hecke-Eigenwerte. Die Zerlegung von S_k in seine Hecke-Eigenräume liefert also eine Zerlegung von S_k in eindimensionale Untervektorräume, die unter allen Hecke-Operatoren T_n mit $n \in \mathbb{N}$ invariant sind.

Dass wir so auch eine Hecke-invariante Zerlegung von $S_k^{\mathbb{R}}$ erhalten, folgt, wenn wir zeigen können, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der n -te Hecke-Operator T_n den Vektorraum $S_k^{\mathbb{R}}$ auf sich selbst abbildet. Dass zumindest für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $f \in S_k^{\mathbb{R}}$ auch $f|_k T_n$ in $S_k^{\mathbb{R}}$ enthalten ist, folgt sofort mit der Formel aus Satz 4.23. Wir zeigen nun, dass das Bild jedes Hecke-Operators der komplette Raum ist: Sei

$$f := \sum_{j=0}^r \lambda_j f_j \in S_k^{\mathbb{R}}$$

beliebig. Da nach Teil (a) von Proposition 4.31 für alle $j \in \{0, \dots, r\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Hecke-Eigenwerte $\lambda_n(f_j)$ reell sind, gilt dann auch

$$g := \sum_{j=0}^r \frac{\lambda_j}{\lambda_n(f_j)} f_j \in S_k^{\mathbb{R}}$$

und

$$g|_k T_n = \sum_{j=0}^r \frac{\lambda_j}{\lambda_n(f_j)} (f_j|_k T_n) = \sum_{j=0}^r \lambda_j f_j = f.$$

Das zeigt die Surjektivität von T_n und insgesamt also das Korollar. \square

4.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. Zeigen Sie, dass $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ kein Hecke-Paar ist.

Aufgabe 4.2. In der Herleitung von Satz 4.11 haben wir Hecke-Paare (R, S) studiert, in denen für alle $s \in S$ die Anzahl der R -Rechts- und R -Linksnebenklassen in RsR übereinstimmt. Zeigen Sie, dass diese Voraussetzung für

$$(R, S) = (\langle T \rangle, \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_{\infty}) = \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid ad \neq 0 \right\} \right)$$

nicht erfüllt ist.

Aufgabe 4.3. (a) Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten der Spitzenform

$$(E_6 \cdot \Delta)(z) = q - 528q^2 - 4284q^3 + O(q^4) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_{18}$$

die (schwache) Multiplikativitätseigenschaft

$$a_n a_m = a_{nm} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } \mathrm{ggT}(n, m) = 1$$

erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass durch die Spitzenformen

$$\begin{aligned} f(z) &:= (E_6^2 \cdot \Delta)(z) = q - 1032q^2 + 245196q^3 - 22072640q^4 + O(q^5) \\ \tilde{f}(z) &:= \Delta^2(z) = q^2 - 48q^3 + 1080q^4 + O(q^5) \end{aligned}$$

eine Basis des \mathbb{C} -Vektorraums S_{24} gegeben ist. Bestimmen Sie bezüglich dieser Basis die Darstellungsmatrix des Hecke-Operators T_2 auf S_{24} .

Aufgabe 4.4. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\begin{aligned} \{NM \mid N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad = n, d > 0, b \bmod (d) \text{ und} \\ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mit } (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2, \text{ so dass } (\gamma > 0, \text{ggT}(\gamma, \delta) = 1) \text{ oder } (\gamma = 0, \delta = 1) \text{ gilt,} \\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \text{ fix mit } \alpha\delta - \beta\gamma = 1\} \end{aligned}$$

ein Vertretersystem von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ in \mathbb{M}^n ist.

Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis von Lemma 4.3.

Aufgabe 4.5. Sei $0 \neq f \in S_k$ eine Hecke-Eigenform. Zeigen Sie, dass dann in Präzisierung der Hecke-Abschätzung 2.38 für die Hecke-Eigenwerte die Abschätzung

$$|\lambda_n(f)| \leq n^{\frac{k}{2}} \sigma_{-1}(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, wobei $\sigma_{-1}(n) = \sum_{0 < d|n} \frac{1}{d}$ die (-1) -te Teilersummenfunktion bezeichnet.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $g(z) := \text{Im}(z)^{\frac{k}{2}} |f(z)|$ nach dem Beweis von Proposition 2.31 auf \mathbb{H} sein Maximum annimmt.

Aufgabe 4.6. Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann für alle Hecke-Eigenformen $f \in S_k$ der n -te Hecke-Eigenwert $\lambda_n(f)$ in einem (von f unabhängigen) Körper K_n mit

$$\mathbb{Q} \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad [K_n : \mathbb{Q}] \leq \dim S_k$$

liegt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Darstellungsmatrix des auf S_k eingeschränkten Hecke-Operators T_n bezüglich einer Miller-Basis von S_k rationale Koeffizienten hat.

Aufgabe 4.7. Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k$ eine normierte Hecke-Eigenform. Wir geben in dieser Aufgabe eine geometrische Beschreibung für die Folge von (reellen) Fourier-Koeffizienten $(a_{p^r}(f))_{r \in \mathbb{N}}$ mit p prim an und leiten daraus her, dass diese Folge sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Glieder enthält. Eine ausführlichere Version dieses Resultats wurde 2014 von KOHNEN⁵³ und MARTIN⁵⁴ veröffentlicht.

Zeigen Sie also für eine fest gegebene Primzahl p die folgenden Aussagen:

⁵³Winfried Kohnen *1953

⁵⁴Yves Leopoldo Martin Gonzalez * ?

(a) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $\theta_p \in [0, \pi]$ mit

$$a_p(f) = 2p^{\frac{k-1}{2}} \cos \theta_p \quad \text{und} \quad a_p(f) \neq 2p^{\frac{k-1}{2}} \quad \text{für alle } \theta_p \notin \{0, \pi\}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die (nichttriviale) Abschätzung

$$|a_p(f)|^2 \leq 4p^{k-1}$$

benutzen, die DELIGNE⁵⁵ 1974 als Nebenprodukt seines Beweises des WEIL-Vermutungen⁵⁶ herleitete.

(b) Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{p^r}(f) \\ a_{p^{r-1}}(f) \end{pmatrix} = A^{r-1} \cdot \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } A := \begin{pmatrix} a_p(f) & -p^{k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Für $\theta_p \notin \{0, \pi\}$ gilt

$$\begin{pmatrix} a_{p^r}(f) \\ a_{p^{r-1}}(f) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{r+1} - \lambda_2^{r+1} \\ \lambda_1^r - \lambda_2^r \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_{1/2} := \frac{a_p(f) \pm \sqrt{a_p(f)^2 - 4p^{k-1}}}{2}.$$

Hinweis: Bringen Sie die Matrix A aus Teil (b) in Diagonalgestalt, um A^{r-1} besser berechnen zu können.

(d) Für $\theta_p \notin \{0, \pi\}$ gilt

$$a_{p^r}(f) = p^{r \cdot \frac{k-1}{2}} \frac{\sin((r+1) \cdot \theta_p)}{\sin \theta_p} \quad \text{für alle } r \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Drücken Sie $\lambda_{1/2}$ in Termen von θ_p aus.

(e) Für $\theta_p \notin 2\pi \cdot \mathbb{Q}$ enthält die Folge $(a_{p^r}(f))_{r \in \mathbb{N}}$ sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Glieder.

⁵⁵Pierre Deligne *1944

⁵⁶André Weil (1906-1998)

Der Eichler-Shimura-Isomorphismus

Im Jahr 1957 führte EICHLER⁵⁷ mit der nach ihm benannten *Eichler-Kohomologie* eine Kohomologietheorie Kongruenzuntergruppen der vollen Modulgruppe ein. Diese ist eine Variante der Gruppenkohomologie, die dem Bild der Kohomologie mit kompaktem Träger in der gewöhnlichen Kohomologiegruppe entspricht. Der *Eichler-Shimura-Isomorphismus*, den Eichler für komplexe und Shimura zwei Jahre später für reelle Kohomologiegruppen herleiteten, ist ein Isomorphismus zwischen einer Eichler-Kohomologiegruppe und einem Raum von Spitzenformen. Wir gehen in der Herleitung des Eichler-Shimura-Isomorphismus möglichst elementar vor und thematisieren das Thema der Kohomologie erst ganz am Ende des Kapitels. Den Ansatz für die Herleitung des Eichler-Shimura-Isomorphismus liefert die *Periodenabbildung*, die jeder Spitzenform $f \in S_k$ mit einem geraden $k \geq 2$ einen Vektor von Integralwerten längs f zugeordneter Differentialformen zuweist. Nach technischen Vorüberlegungen in den Abschnitten 5.1, 5.2 und 5.3 führen wir die Periodenabbildung in Abschnitt 5.4 ein und modellieren aus ihr einen Isomorphismus zwischen S_k und einem explizit beschriebenen Quotienten V/U mit Untervektorräumen $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$. Diesen Isomorphismus nennen wir bereits den Eichler-Shimura-Isomorphismus und bringen ihn in Abschnitt 5.5 mit der Eichler-Kohomologie in Verbindung.

5.1 Die Polynomdarstellung

Sei in diesem Kapitel stets $\mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}[X, Y]$ der \mathbb{R} -Untervektorraum der homogenen Polynome von Grad $w \in \mathbb{N}$. Eine Basis von $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ ist offensichtlich durch die Monome

$$\{Y^w, XY^{w-1}, \dots, X^{w-1}Y, X^w\}$$

gegeben; insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) = w + 1$.

⁵⁷Martin Maximilian Emil Eichler (1912-1992)

Für ein beliebiges $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ definieren wir

$$(X, Y) \cdot M := (X, Y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (aX + cY, bX + dY)$$

und damit eine Abbildung

$$\mathbb{P}(M): \begin{cases} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{P}_w(\mathbb{R}), \\ P(X, Y) & \mapsto P((X, Y) \cdot M). \end{cases}$$

Lemma 5.1. *Durch die Zuordnung*

$$\mathbb{P}: \begin{cases} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R})), \\ M & \mapsto \mathbb{P}(M) \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus gegeben, die **Polynomdarstellung** von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis. Zunächst gilt $\mathbb{P}(M) \in \mathrm{End}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R}))$ für alle $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$,

denn: Offensichtlich ist $\mathbb{P}(M)$ wohldefiniert. Da zudem für alle $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X, Y) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)((X, Y) \cdot M) \\ &= \lambda_1 P_1((X, Y) \cdot M) + \lambda_2 P_2((X, Y) \cdot M) \\ &= \lambda_1 \mathbb{P}(M)(P_1(X, Y)) + \lambda_2 \mathbb{P}(M)(P_2(X, Y)) \end{aligned}$$

gilt, ist $\mathbb{P}(M)$ auch linear. #

Weiter gilt für alle $M, \tilde{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und alle $P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(\tilde{M}))(P)(X, Y) &= \mathbb{P}(M)(\mathbb{P}(\tilde{M})(P))(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(\tilde{M})(P))((X, Y) \cdot M) \\ &= P((X, Y) \cdot M\tilde{M}) \\ &= \mathbb{P}(M\tilde{M})(P)(X, Y). \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\mathbb{P}(M) \in \mathrm{GL}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R}))$ für alle $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und die Homomorphie, so dass das Lemma folgt. □

Für ein beliebiges $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ definieren wir nun die Matrix $\pi(M) \in \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$ durch

$$\pi(M) \cdot \begin{pmatrix} X^w Y^0 \\ X^{w-1} Y^1 \\ \vdots \\ X^0 Y^w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}({}^t M) (X^w Y^0) \\ \mathbb{P}({}^t M) (X^{w-1} Y^1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}({}^t M) (X^0 Y^w) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Lemma 5.2. *Durch die Zuordnung*

$$\pi: \begin{cases} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R}), \\ M & \mapsto \pi(M) \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus gegeben, die **Matrixdarstellung** von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit von π gilt nach Konstruktion, so dass es zum Beweis des Lemmas ausreicht zu zeigen, dass π ein Gruppenhomomorphismus ist. Seien dafür

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \pi(M\tilde{M}) \cdot \begin{pmatrix} X^w Y^0 \\ X^{w-1} Y^1 \\ \vdots \\ X^0 Y^w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{P}({}^t(M\tilde{M})) (X^w Y^0) \\ \mathbb{P}({}^t(M\tilde{M})) (X^{w-1} Y^1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}({}^t(M\tilde{M})) (X^0 Y^w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((a\tilde{a} + b\tilde{c})X + (a\tilde{b} + b\tilde{d})Y)^w & ((c\tilde{a} + d\tilde{c})X + (c\tilde{b} + d\tilde{d})Y)^0 \\ ((a\tilde{a} + b\tilde{c})X + (a\tilde{b} + b\tilde{d})Y)^{w-1} & ((c\tilde{a} + d\tilde{c})X + (c\tilde{b} + d\tilde{d})Y)^1 \\ \vdots & \vdots \\ ((a\tilde{a} + b\tilde{c})X + (a\tilde{b} + b\tilde{d})Y)^0 & ((c\tilde{a} + d\tilde{c})X + (c\tilde{b} + d\tilde{d})Y)^w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + b(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^w & (c(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + d(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^0 \\ (a(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + b(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^{w-1} & (c(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + d(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^1 \\ \vdots & \vdots \\ (a(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + b(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^0 & (c(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + d(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^w \end{pmatrix} \\ &= \pi(M) \cdot \begin{pmatrix} (\tilde{a}X + \tilde{b}Y)^w & (\tilde{c}X + \tilde{d}Y)^0 \\ (\tilde{a}X + \tilde{b}Y)^{w-1} & (\tilde{c}X + \tilde{d}Y)^1 \\ \vdots & \vdots \\ (\tilde{a}X + \tilde{b}Y)^0 & (\tilde{c}X + \tilde{d}Y)^w \end{pmatrix} \\ &= \pi(M)\pi(\tilde{M}) \cdot \begin{pmatrix} X^w Y^0 \\ X^{w-1} Y^1 \\ \vdots \\ X^0 Y^w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Lemma folgt. □

Beispiel 5.3. Sei $w = 2$. Wegen

$$\mathbb{P}({}^t S)(P(X, Y)) = P((X, Y) \cdot {}^t S) = P(-Y, X)$$

gilt dann

$$\pi(S) \cdot \begin{pmatrix} X^2 Y^0 \\ X^1 Y^1 \\ X^0 Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}({}^t S)(X^2 Y^0) \\ \mathbb{P}({}^t S)(X^1 Y^1) \\ \mathbb{P}({}^t S)(X^0 Y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-Y)^2 X^0 \\ (-Y)^1 X^1 \\ (-Y)^0 X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^0 Y^2 \\ -X^1 Y^1 \\ X^2 Y^0 \end{pmatrix}$$

und also

$$\pi(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist die Koordinatenabbildung

$$C: \begin{cases} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j & \mapsto C(P) := {}^t(a_w, \dots, a_0) \end{cases}$$

ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen. Im Spezialfall

$$P_{(s_1, s_2)}(X, Y) := \sum_{j=0}^w s_1^{w-j} s_2^j X^{w-j} Y^j \quad \text{für } s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

gilt

$$C(s_1, s_2) := C(P_{(s_1, s_2)}(X, Y)) = {}^t(s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w). \quad (5.2)$$

Lemma 5.4. Der \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ hat eine Basis aus Polynomen der Form $P_{(s_1, s_2)}$ mit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Beweis. Da C ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen ist, können wir zum Beweis des Lemmas äquivalent auch zeigen, dass es in \mathbb{R}^{w+1} eine Basis aus Vektoren der Form $C(s_1, s_2)$ mit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ gibt. Das ist aber der Fall, denn für paarweise verschiedene Werte $s_2^{(0)}, \dots, s_2^{(w)}$ ist

$$\left(C(1, s_2^{(0)}), \dots, C(1, s_2^{(w)}) \right)$$

eine Vandermonde-Matrix und hat nach **Aufgabe 1** von Übungsblatt 1 aus der Algebraischen Zahlentheorie vollen Rang. \square

Proposition 5.5. Es gilt

$$C(\mathbb{P}(M)P) = \pi(M) \cdot C(P) \quad \text{für alle } M \in \text{GL}_2(\mathbb{R}), P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R}).$$



Beweis. Wegen Lemma 5.4 und der Linearität der Abbildungen C , $\pi(M)$ und $\mathbb{P}(M)$ für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ reicht es aus, den Beweis für $P = P_{(s_1, s_2)}$ mit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ zu führen.

Wir definieren nun durch

$$L(X^{w-j}Y^j) := \binom{w}{j}^{-1} X^{w-j}Y^j \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\}$$

eine lineare Abbildung $L: \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_{(s_1, s_2)}(X, Y) &= L((s_1X + s_2Y)^w) \\ &= L\left(\left((s_1, s_2)^t(X, Y)\right)^w\right) \quad \text{für } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

denn: Nach dem binomischen Lehrsatz und der Definition von L gilt

$$\begin{aligned} L((s_1X + s_2Y)^w) &= L\left(\sum_{j=0}^w \binom{w}{j} (s_1X)^{w-j} (s_2Y)^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} s_1^{w-j} s_2^j L(X^{w-j}Y^j) \\ &= \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} s_1^{w-j} s_2^j \binom{w}{j}^{-1} X^{w-j}Y^j \\ &= P_{(s_1, s_2)}(X, Y) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. #

Für eine beliebige Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ gilt nun

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M)(P_{(s_1, s_2)})(X, Y) &= P_{(s_1, s_2)}(aX + cY, bX + dY) \\ &\stackrel{(5.3)}{=} L\left(\left(s_1(aX + cY) + s_2(bX + dY)\right)^w\right) \\ &= L\left(\left((s_1a + s_2b)X + (s_1c + s_2d)Y\right)^w\right) \\ &= L\left(\left((s_1, s_2)^t M^t (X, Y)\right)^w\right) \\ &\stackrel{(5.3)}{=} P_{(s_1, s_2)^t M}(X, Y). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &C(\mathbb{P}(M)(P_{(s_1, s_2)})(X, Y)) \\ &\stackrel{(5.4)}{=} C(P_{(s_1, s_2)^t M}(X, Y)) \\ &= C(P_{(as_1 + bs_2, cs_1 + ds_2)}(X, Y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(5.2)}{=} {}^t((as_1 + bs_2)^w(cs_1 + ds_2)^0, \dots, (as_1 + bs_2)^0(cs_1 + ds_2)^w) \\
&= {}^t(\mathbb{P}({}^tM)(s_1^w s_2^0), \dots, \mathbb{P}({}^tM)(s_1^0 s_2^w)) \\
&= \pi(M) \cdot {}^t(s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w) \\
&= \pi(M) \cdot C(P_{(s_1, s_2)}(X, Y))
\end{aligned}$$

und somit die Proposition. \square

Satz 5.6. Für jedes gerade w existiert eine eindeutig bestimmte symmetrische Bilinearform $[\cdot | \cdot]$ auf $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ mit

$$[P_{(s_1, s_2)} | P_{(t_1, t_2)}] = (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w \quad \text{für alle } s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Für eine beliebige Matrix $D = (d_{ij})_{i,j=0}^w \in \mathbb{R}^{(w+1) \times (w+1)}$ gilt

$$(s^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1) = \sum_{i,j=0}^w d_{ij} s^{w-i} t^{w-j} \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Es gibt daher genau eine solche Matrix mit

$$(s^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1) = (s - t)^w \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

und deren Einträge d_{ij} sind sämtlich ganzzahlig. Wir setzen nun

$$[P | Q] := {}^t C(P) \cdot D \cdot C(Q) \quad \text{für alle } P, Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$$

und nennen D die **Darstellungsmatrix** von $[\cdot | \cdot]$. Aufgrund der Linearität von C ist $[\cdot | \cdot]$ eine Bilinearform auf $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$. Die Symmetrie von D und somit auch die von $[\cdot | \cdot]$ folgt mit

$$\begin{aligned}
(s^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1) &\stackrel{(5.5)}{=} (s - t)^w \\
&\stackrel{w \text{ gerade}}{=} (t - s)^w \\
&\stackrel{(5.5)}{=} (t^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(s^w, \dots, 1) \\
&= (s^w, \dots, 1) \cdot {}^t D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1),
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt gültig ist, weil wir hier nur ein Skalar transponieren. Es verbleibt nachzuweisen, dass $[\cdot | \cdot]$ die im Satz verlangte Eigenschaft erfüllt und mit dieser eindeutig bestimmt ist. Dafür ersetzen wir in (5.5) die Variablen s, t durch $\frac{s_1}{s_2}, \frac{t_1}{t_2}$ mit $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ und multiplizieren die Gleichung anschließend mit $(s_2 t_2)^w$.⁵⁸ Für alle $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ erhalten wir so

$$(s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w) \cdot D \cdot {}^t(t_1^w t_2^0, \dots, t_1^0 t_2^w) = (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w \quad (5.6)$$

⁵⁸Dieses Vorgehen ist natürlich strenggenommen nur für $s_2 \neq 0 \neq t_2$ erlaubt, lässt sich aber problemlos stetig in die Ausnahmefälle fortsetzen.

und daher auch

$$\begin{aligned} \left[P_{(s_1, s_2)} \mid P_{(t_1, t_2)} \right] &= {}^t C(P_{(s_1, s_2)}) \cdot D \cdot C(P_{(t_1, t_2)}) \\ &= (s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w) \cdot D \cdot (t_1^w t_2^0, \dots, t_1^0 t_2^w) \\ &\stackrel{(5.6)}{=} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w; \end{aligned}$$

die Eindeutigkeit folgt schließlich mit der Eindeutigkeit von D . \square

Korollar 5.7. Sei w gerade. Dann erfüllt die eindeutig bestimmte Bilinearform $[\cdot \mid \cdot]$ aus Satz 5.6 die Invarianzeigenschaft

$$[\mathbb{P}(M)(P) \mid \mathbb{P}(M)(Q)] = [P \mid Q] \quad \text{für alle } P, Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \text{ und } M \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Beweis. Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Proposition 5.5 reicht es aus, den Beweis für $P = P_{(s_1, s_2)}$ und $Q = P_{(t_1, t_2)}$ mit $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ zu führen.

Für eine beliebige Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ schreiben wir

$$\begin{aligned} (s'_1, s'_2) &:= (s_1, s_2) \cdot {}^t M = (as_1 + bs_2, cs_1 + ds_2), \\ (t'_1, t'_2) &:= (t_1, t_2) \cdot {}^t M = (at_1 + bt_2, ct_1 + dt_2). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &\left[\mathbb{P}(M)(P_{(s_1, s_2)}) \mid \mathbb{P}(M)(P_{(t_1, t_2)}) \right] \\ &\stackrel{(5.4)}{=} \left[P_{(s'_1, s'_2)} \mid P_{(t'_1, t'_2)} \right] \\ &\stackrel{5.6}{=} (s'_1 t'_2 - s'_2 t'_1)^w \\ &= ((as_1 + bs_2)(ct_1 + dt_2) - (cs_1 + ds_2)(at_1 + bt_2))^w \\ &= ((ad - bc)(s_1 t_2 - s_2 t_1))^w \\ &\stackrel{M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})}{=} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w \\ &\stackrel{5.6}{=} \left[P_{(s_1, s_2)} \mid P_{(t_1, t_2)} \right] \end{aligned}$$

und somit das Korollar. \square

Korollar 5.8. Sei w gerade. Die Darstellungsmatrix D der eindeutig bestimmten Bilinearform $[\cdot \mid \cdot]$ aus Satz 5.6 erfüllt

$${}^t \pi(M) \cdot D \cdot \pi(M) = D \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Beweis. Für alle $P, Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ und alle $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ gilt

$${}^t C(P) \cdot D \cdot C(Q) = [P \mid Q]$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{5.7}{=} [\mathbb{P}(M)(P) \mid \mathbb{P}(M)(Q)] \\
&= {}^t C(\mathbb{P}(M)(P)) \cdot D \cdot C(\mathbb{P}(M)(Q)) \\
&\stackrel{5.5}{=} {}^t (\pi(M) \cdot C(P)) \cdot D \cdot (\pi(M) \cdot C(Q)) \\
&= {}^t C(P) \cdot ({}^t \pi(M) \cdot D \cdot \pi(M)) \cdot C(Q)
\end{aligned}$$

und also das Korollar. □

5.2 Das Shimura-Produkt

In diesem Abschnitt führen wir mit dem Shimura-Produkt ein Werkzeug zur Untersuchung von Differentialformen auf der oberen Halbebene \mathbb{H} ein. An die dafür benötigten Grundlagen zu Differentialformen erinnern wir nur kurz und auf die Erfordernisse des uns interessierenden Spezialfalls reduziert.

Wir nennen im Weiteren

$$\Omega^1(\mathbb{H}) := \{f(z) dz \mid f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$$

die Menge der *holomorphen Differentialformen (erster Ordnung)* auf \mathbb{H} .

Definition 5.9. Für ein $f(z) dz \in \Omega^1(\mathbb{H})$ und eine holomorphe Funktion $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ heißt die holomorphe Differentialform auf \mathbb{H}

$$F^*(f(z) dz) := f(F(z)) dF(z) = f(F(z))F'(z) dz$$

der *Rücktransport* von $f(z) dz$ unter F .

Sei $w \in \mathbb{N}$ gegeben und $k := w + 2$. Für $f \in S_k$ und $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist dann $f(z)z^j dz$ eine holomorphe Differentialform auf \mathbb{H} . Für ihren Rücktransport unter der Möbius-Transformation φ_M mit einem beliebigen $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\varphi_M^*(f(z)z^j dz) &= f(\varphi_M(z))\varphi_M(z)^j \varphi_M'(z) dz \\
&= f(M\langle z \rangle) \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^j \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} dz \\
&= f(z)(cz+d)^k \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^j (cz+d)^{-2} dz \\
&= f(z)(az+b)^j (cz+d)^{w-j} dz.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

An dieser Stelle sehen wir auch, warum wir $k = w + 2$ gewählt haben: Wir erhalten so in der Formel für den Rücktransport Monome in den Variablen $(az + b)$ und $(cz + d)$, die wir mit den in Abschnitt 5.1 studierten Methoden behandeln können:

Proposition 5.10. Sei $w \in \mathbb{N}$ gegeben, $k = w + 2$ und $f \in S_k$. Für eine beliebige Matrix $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt dann

$$\varphi_M^*(f(z)z^{(w)} dz) = \pi(M) \cdot (f(z)z^{(w)} dz),$$

wobei wir

$$f(z)z^{(w)} dz := \begin{pmatrix} f(z)z^w dz \\ \vdots \\ f(z)z^0 dz \end{pmatrix}.$$

schreiben und der Rücktransport zeilenweise zu verstehen ist.

Beweis. Die Übersetzung in die Sprache der Darstellungen aus Abschnitt 5.1 gelingt, wenn wir dort $X = z$ und $Y = 1$ einsetzen. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_M^*(f(z)z^{(w)} dz) &\stackrel{(5.7)}{=} \begin{pmatrix} f(z)(az+b)^w(cz+d)^0 dz \\ \vdots \\ f(z)(az+b)^0(cz+d)^w dz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(z)\mathbb{P}({}^t M)(z^w 1^0) dz \\ \vdots \\ f(z)\mathbb{P}({}^t M)(z^0 1^w) dz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{P}({}^t M)f(z)(z^w 1^0) dz \\ \vdots \\ \mathbb{P}({}^t M)f(z)(z^0 1^w) dz \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \pi(M) \cdot \begin{pmatrix} f(z)(z^w 1^0) dz \\ \vdots \\ f(z)(z^0 1^w) dz \end{pmatrix} = \pi(M) \cdot (f(z)z^{(w)} dz). \end{aligned}$$

□

Wir werden im Folgenden den Realteil von $f(z)z^{(w)} dz$ untersuchen und dabei insbesondere Proposition 5.10 auf diesen anwenden. Um dies tun zu können, müssen wir zunächst weitere Differentialformen einführen und den Rücktransport auf diesen definieren. Wir nennen also

$$\mathcal{E}^1(\mathbb{H}) := \{g(x, y) dx + h(x, y) dy \mid g, h: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt}\}$$

die Menge der C^∞ -Differentialformen erster Ordnung auf \mathbb{H} und für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{E}^n(\mathbb{H}) := \{\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \mid \omega_1, \dots, \omega_n \in \mathcal{E}^1(\mathbb{H})\}$$

die C^∞ -Differentialformen von Ordnung n auf \mathbb{H} . Mit den Rechenregeln für das äußere Produkt gilt dabei unmittelbar $\mathcal{E}^n(\mathbb{H}) = \{0\}$ für alle $n > 2$. Die C^∞ -Differentialformen von Ordnung 0 auf \mathbb{H} sind gerade die glatten Funktionen.

Definition 5.11. Für ein $g(x, y) dx + h(x, y) dy \in \mathcal{E}^1(\mathbb{H})$ und eine glatte Funktion

$$F: \begin{cases} \mathbb{H} & \rightarrow \mathbb{H}, \\ x + iy & \mapsto u(x, y) + iv(x, y) \end{cases} \quad \text{mit reellwertigen Funktionen } u, v$$

heißt die C^∞ -Differentialform erster Ordnung auf \mathbb{H}

$$F^*(g(x, y) dx + h(x, y) dy) := g(F(x, y)) du(x, y) + h(F(x, y)) dv(x, y)$$

der Rücktransport von $g(x, y) dx + h(x, y) dy$ unter F . Der Rücktransport eines $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathcal{E}^2(\mathbb{H})$ erklärt sich durch

$$F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) := F^*(\omega_1) \wedge F^*(\omega_2),$$

der Rücktransport eines $f(x, y) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{H})$ durch

$$F^*(f(x, y)) := f(F(x, y)).$$

Wir erhalten nun das folgende Korollar:

Korollar 5.12. *Unter den Voraussetzungen von Proposition 5.10 gilt*

$$\begin{aligned} \varphi_M^*(\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz)) &= \pi(M) \cdot (\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz)), \\ \varphi_M^*(\operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) &= \pi(M) \cdot (\operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)). \end{aligned}$$

Beweis. Wegen $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ und (5.1) sind die Einträge von $\pi(M)$ ganzzahlig und insbesondere reell. Es folgt

$$\begin{aligned} &\varphi_M^*(\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz)) + i \varphi_M^*(\operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) \\ &= \varphi_M^*(\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + i \operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) \\ &\stackrel{5.10}{=} \pi(M) \cdot (\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + i \operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) \\ &= \pi(M) \cdot \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + i \pi(M) \cdot \operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz) \end{aligned}$$

und nach Vergleich von Real- und Imaginärteilen rechts und links somit das Korollar. \square

Definition 5.13. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gegeben und sei D die Darstellungsmatrix der Bilinearform aus Satz 5.6. Weiter sei*

$$\omega := {}^t(\omega_w, \dots, \omega_0) \quad \text{bzw.} \quad \eta := {}^t(\eta_w, \dots, \eta_0)$$

ein Spaltenvektor mit C^∞ -Differentialformen von Ordnung $\operatorname{ord}(\omega) \in \{0, 1, 2\}$ bzw. $\operatorname{ord}(\eta) \in \{0, 1, 2\}$ auf \mathbb{H} als Einträgen. Dann ist das **Shimura-Produkt** von ω und η definiert als

$$[\omega \mid \eta] := {}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta}) = ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta}, \quad (5.8)$$

wobei das äußere Produkt zwischen Vektoren von Differentialformen komponentenweise genommen und dann aufaddiert wird.

Bemerkung 5.14. Unmittelbar aus Definition 5.13 folgt, dass das Shimura-Produkt eine Sesquilinearform über \mathbb{R} ist. Es ist zudem insofern wohldefiniert als das zweite Gleichheitszeichen in (5.8) tatsächlich gilt,

denn: Schreiben wir $D = (d_{ij})_{i,j=w}^0$, so gilt

$$\begin{aligned} {}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta}) &= {}^t\omega \wedge \begin{pmatrix} \sum_{j=w}^0 d_{wj} \bar{\eta}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=w}^0 d_{0j} \bar{\eta}_j \end{pmatrix} = \sum_{i=w}^0 \omega_i \wedge \left(\sum_{j=w}^0 d_{ij} \bar{\eta}_j \right) \\ &\parallel \\ &\sum_{i,j=w}^0 d_{ij} (\omega_i \wedge \bar{\eta}_j) \\ &\parallel \\ ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta} &= \left(\sum_{i=w}^0 \omega_i d_{i0}, \dots, \sum_{i=w}^0 \omega_i d_{i0} \right) \wedge \bar{\eta} = \sum_{j=w}^0 \left(\sum_{i=w}^0 \omega_i d_{ij} \right) \wedge \bar{\eta}_j. \end{aligned}$$

#

Satz 5.15. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei

$$\omega := {}^t(\omega_w, \dots, \omega_0) \quad \text{bzw.} \quad \eta := {}^t(\eta_w, \dots, \eta_0)$$

ein Spaltenvektor mit C^∞ -Differentialformen auf \mathbb{H} von Ordnung $\text{ord}(\omega) \in \{0, 1, 2\}$ beziehungsweise $\text{ord}(\eta) \in \{0, 1, 2\}$ als Einträgen. Dann erfüllt das Shimura-Produkt von ω und η die folgenden Eigenschaften:

- (SP₁) $\varphi_M^*([\omega \mid \eta]) = [\varphi_M^*(\omega) \mid \varphi_M^*(\eta)]$ für alle $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$.
- (SP₂) $([\pi(M) \cdot \omega \mid \pi(M) \cdot \eta]) = [\omega \mid \eta]$ für alle $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$.
- (SP₃) $d[\omega \mid \eta] = [d\omega \mid \eta] + (-1)^{\text{ord}(\omega)} [\omega \mid d\eta]$.
- (SP₄) $[\omega \mid \eta] = (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} \overline{[\eta \mid \omega]}$.

Seien nun weiter $k := w + 2$ und $f, g \in S_k$. Schreiben wir

$$\Omega(f, g)(z) := f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z)$$

für den Integranden des Petersson-Skalarprodukts auf S_k , so erfüllt das Shimura-Produkt zudem:

- (SP₅) $\left[f(z) z^{(w)} dz \mid g(z) z^{(w)} dz \right] = -(2i)^{w+1} \Omega(f, g)(z)$.
- (SP₆) $4 \left[\text{Re}(f(z) z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z) z^{(w)} dz) \right]$
 $= -(2i)^{w+1} \cdot (\Omega(f, if)(z) - \Omega(if, f)(z))$
 $= (2i)^{w+2} \cdot \Omega(f, f)(z)$.

Beweis. Sei $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ beliebig. Da definitionsgemäß für zwei C^∞ -Differentialformen der Rücktransport unter φ_M und das äußere Produkt kommutieren, gilt

$$\varphi_M^*([\omega \mid \eta]) = \varphi_M^*({}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta})) = \varphi_M^*({}^t\omega) \wedge \varphi_M^*(D \cdot \bar{\eta}).$$

Die Linearität des Rücktransports bedingt $\varphi_M^*(D \cdot \bar{\eta}) = D \cdot \varphi_M^*(\bar{\eta})$. Ferner gilt $\varphi_M^*({}^t\omega) = {}^t\varphi_M^*(\omega)$, da der Rücktransport eintragsweise auf den Spalten- bzw. Zeilenvektor wirkt, und $\varphi_M^*(\bar{\eta}) = \overline{\varphi_M^*(\eta)}$, da die Aktion des Rücktransports durch die Möbius-Transformation $z \mapsto M\langle z \rangle$ gegeben ist. Insgesamt erhalten wir damit

$$\varphi_M^*([\omega \mid \eta]) = {}^t\varphi_M^*(\omega) \wedge D \cdot \overline{\varphi_M^*(\eta)} = [\varphi_M^*(\omega) \mid \varphi_M^*(\eta)],$$

so dass wir insgesamt Eigenschaft (SP_1) nachgewiesen haben.

Zum Beweis von Eigenschaft (SP_2) betrachten wir für eine beliebige Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ das Shimura-Produkt

$$\begin{aligned} [\pi(M) \cdot \omega \mid \pi(M) \cdot \eta] &= {}^t(\pi(M) \cdot \omega) \wedge D \cdot \overline{(\pi(M) \cdot \eta)} \\ &= ({}^t\omega \cdot {}^t\pi(M)) \wedge (D \cdot \pi(M) \cdot \bar{\eta}). \end{aligned}$$

Im Beweis der Wohldefiniertheit in Bemerkung 5.14 haben wir keine besondere Eigenschaft der Matrix D benutzt. Wir können daher dieselbe Argumentation auf die Matrix $D \cdot \pi(M)$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} [\pi(M) \cdot \omega \mid \pi(M) \cdot \eta] &= ({}^t\omega \cdot {}^t\pi(M) \cdot D \cdot \pi(M)) \wedge \bar{\eta} \\ &\stackrel{5.8}{=} ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta} = [\omega \mid \eta] \end{aligned}$$

und somit Eigenschaft (SP_2) .

Wir zeigen nun Eigenschaft (SP_3) . Mit den allgemeinen Rechenregeln der äußeren Ableitung d gilt

$$d[\omega \mid \eta] = d({}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta})) = d({}^t\omega) \wedge (D \cdot \bar{\eta}) + (-1)^{\mathrm{ord}\omega} \cdot {}^t\omega \wedge d(D \cdot \bar{\eta}).$$

Da die Einträge von D ganze Zahlen sind, kann die Matrix D aus $d(D \cdot \bar{\eta})$ herausgezogen werden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} d[\omega \mid \eta] &= {}^t(d\omega) \wedge (D \cdot \bar{\eta}) + (-1)^{\mathrm{ord}\omega} \cdot {}^t\omega \wedge (D \cdot d\bar{\eta}) \\ &= [d\omega \mid \eta] + (-1)^{\mathrm{ord}(\omega)} \cdot [\omega \mid d\eta], \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Umformung $d\bar{\eta} = \overline{d\eta}$ verwendet haben. Dies gilt wegen

$$d\bar{\eta} = d(\overline{\mathrm{Re}(\eta) + i\mathrm{Im}(\eta)}) = \overline{d\mathrm{Re}(\eta) - i \cdot d\mathrm{Im}(\eta)} = \overline{d\eta}.$$

Insgesamt haben wir nun Eigenschaft (SP_3) nachgewiesen.

Im Beweis von Eigenschaft (SP_4) nutzen wir aus, dass D reelle Einträge hat, so dass

$$\overline{[\eta \mid \omega]} = \overline{{}^t\eta \wedge (D \cdot \bar{\omega})} = {}^t\bar{\eta} \wedge (D \cdot \omega)$$

gilt. Mit den allgemeinen Rechenregeln des äußeren Produkts folgt

$$\overline{[\eta \mid \omega]} = (-1)^{\mathrm{ord}(\omega) \mathrm{ord}(\eta)} \cdot {}^t(D \cdot \omega) \wedge \bar{\eta}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} \cdot ({}^t\omega \cdot {}^tD) \wedge \bar{\eta} \\
&= (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} \cdot ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta} \\
&= (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} \cdot [\omega \mid \eta],
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Umformung die Symmetrie von D ausgenutzt haben.

Eigenschaft (SP_5) lässt sich einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\left[f(z)z^{(w)} dz \mid g(z)z^{(w)} dz \right] &= {}^t(f(z)z^{(w)} dz) \wedge D(\overline{g(z)\bar{z}^{(w)}}\bar{dz}) \\
&= f(z) {}^t z^{(w)} (dx + i dy) \wedge D\overline{g(z)\bar{z}^{(w)}}(dx - i dy) \\
&= -2if(z)\overline{g(z)} {}^t z^{(w)} D\bar{z}^{(w)} \cdot dx \wedge dy \\
&\stackrel{(5.5)}{=} -2if(z)\overline{g(z)}(z - \bar{z})^w \cdot dx \wedge dy \\
&= -(2i)^{w+1} f(z)\overline{g(z)} y^w \cdot dx \wedge dy \\
&= -(2i)^{w+1} \Omega(f, g)(z).
\end{aligned}$$

Zum Beweis von Eigenschaft (SP_6) nutzen wir zunächst die Beziehung $\text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ aus. Es gilt also

$$\begin{aligned}
&4 \left[\text{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] \\
&= \left[f(z)z^{(w)} dz + \overline{f(z)z^{(w)} dz} \mid if(z)z^{(w)} dz + \overline{if(z)z^{(w)} dz} \right].
\end{aligned}$$

Da das Shimura-Produkt sesquilinear ist, können wir ausmultiplizieren, wobei zwei der Terme wegen $dz \wedge dz = 0 = \bar{dz} \wedge \bar{dz}$ verschwinden. Wir erhalten so

$$\begin{aligned}
&4 \left[\text{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] \\
&= \left[f(z)z^{(w)} dz \mid if(z)z^{(w)} dz \right] + \left[\overline{f(z)z^{(w)} dz} \mid \overline{if(z)z^{(w)} dz} \right].
\end{aligned}$$

Aus der Definition des Shimura-Produkts und der Ganzzahligkeit der Einträge von D können wir ablesen, dass für zwei Spaltenvektoren ω, η mit C^∞ -Differentialformen die Rechenregel

$$\overline{[\omega \mid \eta]} = \overline{{}^t\omega \wedge D\bar{\eta}} = {}^t\bar{\omega} \wedge D\eta = [\bar{\omega} \mid \bar{\eta}]$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
&4 \left[\text{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] \\
&= \left[f(z)z^{(w)} dz \mid if(z)z^{(w)} dz \right] + \overline{\left[f(z)z^{(w)} dz \mid if(z)z^{(w)} dz \right]} \\
&\stackrel{(SP_5)}{=} -(2i)^{w+1} \Omega(f, if)(z) + \overline{-(2i)^{w+1} \Omega(f, if)(z)} \\
&= -(2i)^{w+1} \cdot (\Omega(f, if)(z) - \Omega(if, f)(z)),
\end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass w gerade ist. Wir haben nun die erste der behaupteten Gleichheiten nachgewiesen. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & - (2i)^{w+1} \cdot (\Omega(f, if)(z) - \Omega(if, f)(z)), \\ & = - (2i)^{w+1} \cdot (f(z)\overline{if(z)}y^w dx \wedge dy - if(z)\overline{f(z)}y^w dx \wedge dy), \\ & = - (2i)^{w+1} \cdot (-2if(z)\overline{f(z)}y^w dx \wedge dy), \\ & = (2i)^{w+2} \cdot \Omega(f, f)(z) \end{aligned}$$

und somit auch die zweite behauptete Gleichheit von Eigenschaft (SP_6) . \square

5.3 Integration in der erweiterten oberen Halbebene

In diesem Abschnitt lernen wir, geeignete holomorphe Differentialformen auf \mathbb{H} längs Kurven in der oberen Halbebene \mathbb{H} zwischen Spitzen in $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ zu integrieren, um in Abschnitt 5.4 die Periodenabbildung über solche Integralwerte definieren zu können.

Um zwischen Spitzen integrieren zu können, setzen wir zunächst die auf \mathbb{H} definierte Standardtopologie auf die erweiterte obere Halbebene $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ fort. Passend zum in Definition 2.14 eingeführten Konzept der Holomorphie bzw. Meromorphie in $i\infty$ wählen wir dafür im Punkt $i\infty$ die Menge der Vereinigungen

$$U'_\varepsilon(i\infty) := \mathbb{H}_\varepsilon \cup \{i\infty\} \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

der einpunktigen Menge $\{i\infty\}$ mit je einem wie in (2.3) definierten Horizontalstreifen als Umgebungsbasis. In einem beliebigen Punkt $s \in \mathbb{Q}$ wählen wir die Menge der Bilder

$$M\langle U'_\varepsilon(i\infty) \rangle \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ und alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ mit } M\langle i\infty \rangle = s$$

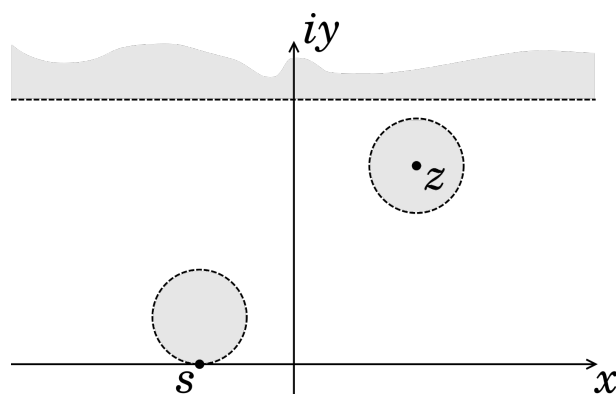
als Umgebungsbasis.⁵⁹ Im folgenden Lemma lernen wir diese Topologie noch etwas besser kennen und zeigen, dass sich je zwei Punkte in \mathbb{H}^* durch offene Umgebungen trennen lassen:

Lemma 5.16. *Die erweiterte obere Halbebene \mathbb{H}^* zusammen mit der oben eingeführten Topologie ist ein HAUSDORFF-Raum.⁶⁰*

Beweis. Offensichtlich folgt das Lemma, wenn wir zeigen können, dass die Elemente der oben eingeführten Umgebungsbasen der Punkte $s \in \mathbb{Q}$ gerade durch die Vereinigungen von $\{s\}$ mit denjenigen offenen Kreisscheiben in \mathbb{H} gegeben sind, die die reelle Achse im jeweils gegebenen Punkt s berühren.

⁵⁹So wird die Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H}^* stetig und ermöglicht es, den Quotienten $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$ mit der Struktur einer Riemann'schen Fläche zu versehen, vergleiche auch Bemerkung 3.25.

⁶⁰Felix Hausdorff (1868-1942)



Nach Übungsaufgabe 1.3 bilden Möbius-Transformationen verallgemeinerte Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$ auf verallgemeinerte Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$ ab. Da weiter für jedes $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Möbius-Transformation φ_M nach Proposition 1.17 auf \mathbb{H} operiert, enthält für alle M mit $M(i\infty) = s \in \mathbb{Q}$ und alle $\epsilon > 0$ das φ_M -Bild von

$$g_\epsilon \cup \{i\infty\} \quad \text{mit } g_\epsilon := \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{\epsilon} \right\} \quad (5.9)$$

den Punkt $i\infty$ nicht und ist somit ein Kreis $K_{\epsilon, s}$ durch s . Für jedes solche M ist φ_M eine bijektive holomorphe Funktionen auf \mathbb{H} und nach dem Biholomorphiekriterium somit in $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Da die Menge $U'_\epsilon(i\infty) \setminus \{i\infty\}$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{H} \setminus g_\epsilon$ ist, ist ihr φ_M -Bild daher eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{H} \setminus K_{\epsilon, s}$, also entweder das Innere oder das Äußere des Kreises $K_{\epsilon, s}$ in \mathbb{H} . Tatsächlich ist

$$M\langle U'_\epsilon(i\infty) \setminus \{i\infty\} \rangle = \text{Inneres von } K_{\epsilon, s},$$

denn: Schreiben wir $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \neq 0$ wegen $M \notin \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$, so erhalten wir für alle $z \in U'_\epsilon(i\infty) \setminus \{i\infty\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(M(z)) &= \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{(c\mathrm{Re}(z) + d)^2 + c^2\mathrm{Im}(z)^2} \\ &\leq \frac{\mathrm{Im}(z)}{c^2\mathrm{Im}(z)^2} \leq \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} < \epsilon. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Menge $M\langle U'_\epsilon(i\infty) \setminus \{i\infty\} \rangle$ ist also in ihren Imaginärteilen beschränkt und kann somit nicht das Äußere des Kreises $K_{\epsilon, s}$ in \mathbb{H} sein. #

Die Elemente der gewählten Umgebungsbasis von $s \in \mathbb{Q}$ sind also offene Kreisscheiben in \mathbb{H} , welche die reelle Achse im Punkt s berühren. Das Lemma folgt, da wir für $\epsilon \rightarrow 0$ offenbar beliebig kleine Kreisscheiben erhalten. \square

Als nächstes definieren wir einen geeigneten Begriff einer Kurve zwischen Punkten in \mathbb{H}^* , wobei wir wieder auf Verträglichkeit mit dem Konzept der Holomorphie bzw. Meromorphie in $i\infty$ achten. Zum Parametrisieren solcher Kurven erweitern wir zunächst die reellen Zahlen geeignet:

Definition 5.17. Für zwei Symbole „ $-\infty$ “ und „ ∞ “ heißt

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

die Menge der **erweiterten reellen Zahlen**. Durch

$$-\infty < a < \infty \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

lässt sich die natürliche Anordnung der reellen Zahlen auf $\overline{\mathbb{R}}$ fortsetzen und durch Angabe der Mengen von Intervallen

$$\begin{aligned} [-\infty, b) &:= \{-\infty\} \cup (-\infty, b) && \text{für alle } b \in \mathbb{R}, \\ \text{bzw. } (a, \infty] &:= (a, \infty) \cup \{\infty\} && \text{für alle } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

als Umgebungsbasen von $-\infty$ bzw. ∞ lässt sich die Standardtopologie der reellen Zahlen zu einer Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ ausdehnen. Im Weiteren werden wir für die erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$ stets von dieser Anordnung und dieser Topologie ausgehen.

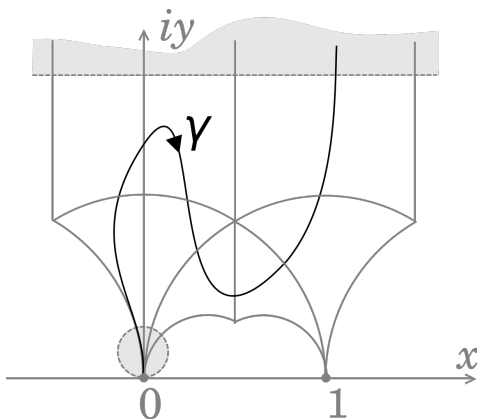
Definition 5.18. Eine (**stückweise glatte**) **Kurve** in \mathbb{H}^* mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1 ist eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^*$ mit geeigneten $-\infty \leq a < b \leq \infty \in \overline{\mathbb{R}}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Eingeschränkt auf jedes abgeschlossene Teilintervall von $[a, b] \cap \mathbb{R}$ ist γ eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{H} .
- Es gilt $\gamma([a, b] \cap \{\pm\infty\}) \subseteq \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Liegt z_0 bzw. z_1 in $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$, so verläuft für alle Matrizen $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M \langle i\infty \rangle = z_0$ bzw. $M \langle i\infty \rangle = z_1$ die Einschränkung von $M^{-1} \langle \gamma \rangle$ auf

$$\begin{aligned} [c, \infty) & \quad \text{für ein hinreichend großes } c \in \mathbb{R}, \\ \text{bzw. } (-\infty, d] & \quad \text{für ein hinreichend kleines } d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

in einem Vertikalstreifen endlicher Breite und wird unter $e: z \mapsto e^{2\pi iz}$ auf eine glatte Kurve in $U_1(0)$ mit Endpunkt 0 bzw. Anfangspunkt 0 abgebildet.

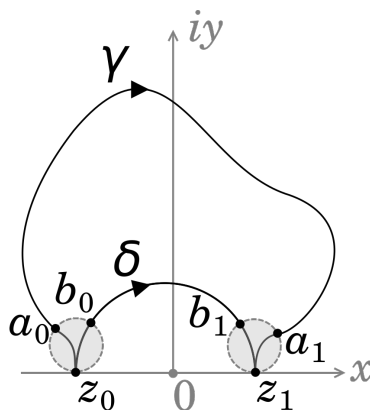
Bemerkung 5.19. Die in Definition 5.18 geforderte Analytizitätsbedingung in Anfangs- und Endpunkten in $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ bedingt, dass eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{H}^* in einer kleinen Umgebung eines solchen Punktes nur durch endlich viele Kopien des Standardfundamentalbereichs \mathcal{F} verläuft und sich dort anschaulich also im Wesentlichen senkrecht auf diesen zubewegt.



Das Bild unter der Abbildung e bzw. $e \circ \varphi_{M^{-1}}$ umläuft so den Nullpunkt in $U_1(0)$ nur endlich oft. Wäre dies nicht der Fall, so erhielten wir in Definition 5.18 auch in ihren Anfangs- bzw. Endpunkten nicht rektifizierbare Kurven, über die wir nicht integrieren könnten.

Lemma 5.20. Je zwei stückweise glatte Kurven in \mathbb{H}^* , deren Anfangspunkte und Endpunkte übereinstimmen, sind homotop.

Beweis. Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{H}^*$ und seien γ, δ zwei stückweise glatte Kurven in \mathbb{H}^* von z_0 nach z_1 . Wie in der Abbildung dargestellt zerlegen wir jede der Kurven in drei Teile: jeweils einen Teil in einer ε -Umgebung von z_0 bzw. z_1 und den von z_0 und z_1 weg beschränkten Rest. Dann sind die Teile von z_0 nach a_0 und von z_0 nach b_0 sowie die Teile von z_1 nach a_1 und von z_1 nach b_1 in den jeweiligen Kreisscheiben homotop und die Restkurven von a_0 nach a_1 und von b_0 nach b_1 in der oberen Halbebene \mathbb{H} . Das Lemma folgt unmittelbar.



□

Wir sind nun bereit, das komplexe Kurvenintegral auf der erweiterten oberen Halbebene einzuführen:

Definition 5.21. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^*$ für $-\infty \leq a < b \leq \infty$ geeignet eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{H}^* und sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

wobei das Integral zur Rechten wie üblich als uneigentliches Integral interpretiert wird.

Von Lemma 5.20 inspiriert leiten wir nun für geeignete holomorphe Differentialformen aus $\Omega^1(\mathbb{H})$ eine Version des Cauchy'schen Integralsatzes auf der erweiterten oberen Halbebene \mathbb{H}^* her:

Satz 5.22. Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in allen Spitzen $s \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ exponentiell abklingt,⁶¹ und sei γ eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{H}^* . Dann konvergiert das (uneigentliche) Integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ und hängt im Wert nur vom Anfangspunkt und vom Endpunkt von γ ab.

Beweis. Seien z_0 der Anfangspunkt und z_1 der Endpunkt der Kurve γ . Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1: $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$. In diesem Fall folgt der Satz unmittelbar aus dem Cauchy'schen Integralsatz in $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$.

Fall 2: $z_0, z_1 \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Indem wir das Integral additiv auseinanderziehen, folgt der Satz in diesem Fall, wenn wir den dritten Fall gezeigt haben.

Fall 3: $z_0 \in \mathbb{H}$ und $z_1 \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit $M\langle i\infty \rangle = z_1$. Da wir den ersten Fall bereits gezeigt haben, können wir ohne Einschränkung annehmen, es gelte zusätzlich $M\langle i \rangle = z_0$. In der Sprache von Abschnitt 5.2 erhalten wir so

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\varphi_M^{-1} \circ \gamma} \varphi_M^*(f(z) dz) \\ &\stackrel{(5.7)}{=} \int_{\varphi_M^{-1} \circ \gamma} (f \circ \varphi_M)(z) j(M, z)^{-2} dz. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Der Integrand dieses Integrals ist wieder eine auf \mathbb{H} holomorphe Funktion, die in allen Spitzen $s \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ exponentiell abklingt, und $\varphi_M^{-1} \circ \gamma$ eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{H}^* , so dass wir für den Rest des Beweises ohne Einschränkung $z_0 = i$ und $z_1 = i\infty$ annehmen können. Sei weiter ohne Einschränkung γ auf $[1, \infty]$ definiert. Dann liegt für ein hinreichend großes $c \in \mathbb{R}_{>1}$ die Einschränkung von γ auf $[c, \infty]$ in einem Vertikalstreifen \mathcal{S} endlicher Breite. Da nach Voraussetzung die Funktion f für $z \rightarrow i\infty$ exponentiell abklingt, gibt es schließlich Konstanten $R, C > 0$ mit

$$|f(z)| < R e^{-C \mathrm{Im}(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}_1 \quad (5.12)$$

Für ein beliebiges $T > c$ folgt daher unter Ausnutzung des Cauchy'schen Integralsatzes auf $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$ und der Standardabschätzung für Kurvenintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma|_{[1, T]}} f(z) dz &= \int_i^{\gamma(T)} f(z) dz \\ &= \int_i^{i \mathrm{Im}(\gamma(T))} f(z) dz + \int_{i \mathrm{Im}(\gamma(T))}^{\gamma(T)} f(z) dz \\ &\stackrel{(5.12)}{=} \int_1^{\mathrm{Im}(\gamma(T))} f(it) i dt + O_{\mathcal{S}}(e^{-C \mathrm{Im}(\gamma(T))}), \end{aligned}$$

⁶¹Hierunter verstehen wir, dass für jedes $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\langle i\infty \rangle = s$ die Funktion $f \circ \varphi_M$ für $\mathrm{Im}(z) \rightarrow \infty$ exponentiell abklingt.

wobei wir im letzten Schritt die endliche Breite des Vertikalstreifens \mathcal{S} ausgenutzt haben. Wegen $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Im}(\gamma(T)) = \infty$ verschwindet im Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ der zweite Summand rechts und der erste Summand geht gegen $\int_1^\infty f(it)i dt$. Letzteres ist unabhängig von der genauen Wahl von γ und konvergiert aufgrund von

$$\left| \int_1^\infty f(it)i dt \right| \leq \int_1^\infty |f(it)| dt \stackrel{(5.12)}{\leq} \int_1^\infty Re^{-Ct} dt = \frac{R}{C} e^{-C} < \infty.$$

Es folgt der Satz in diesem und somit allen Fällen. \square

Bemerkung 5.23. Analog zum Vorgehen bei Kurvenintegralen in der komplexen Ebene verzichten wir bei Kurvenintegralen wie in Satz 5.22 künftig oft auf die explizite Angabe einer Integrationskurve und sagen nur noch, von welchem Punkt zu welchem Punkt wir in \mathbb{H}^* integrieren.

Beispiel 5.24. Hat in der Situation von Satz 5.22 die Funktion f eine Fourier-Entwicklung der Art

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^{\frac{n}{\lambda}} \quad \text{für ein } \lambda > 0,$$

so können wir für ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{H}$ konkret berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{i\infty} f(z) dz &= \int_{z_0}^{i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^{\frac{n}{\lambda}} dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \int_{z_0}^{i\infty} q^{\frac{n}{\lambda}} dz \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f) \lambda}{2\pi i n} e^{\frac{2\pi i z_0}{\lambda}}, \end{aligned}$$

wobei wir wegen gleichmäßig absoluten Konvergenz der Fourier-Reihe gliedweise integrieren dürfen.

5.4 Der Eichler-Shimura-Isomorphismus

Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade, $k := w + 2$ und $f \in S_k$. Nach Satz 5.22 konvergiert dann für ein beliebiges $j \in \{0, \dots, w\}$ das *Periodenintegral*

$$r_j(f) := \int_0^{i\infty} f(z) z^j dz \tag{5.13}$$

und wir können nun wohldefiniert den Begriff der Periodenabbildung einführen:

Definition 5.25. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und $k := w + 2$. Dann heißt die \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$r: \begin{cases} S_k & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ f & \mapsto \int_0^{i\infty} \text{Re}(f(z) z^w) dz \end{cases}$$

die *Periodenabbildung*.

Lemma 5.26. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und $k := w + 2$. Dann liegt für alle $f \in S_k$ das Bild $r(f)$ unter der Periodenabbildung im Untervektorraum

$$V := \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(S)) \cap \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \subseteq \mathbb{R}^{w+1}.$$

Beweis. Für $z_0, z_1 \in \mathbb{H}^*$ und $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ beliebig gilt

$$\begin{aligned} \pi(M) \cdot \int_{z_0}^{z_1} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz &= \int_{z_0}^{z_1} (\pi(M) \cdot \text{Re}(f(z)z^{(w)})) dz \\ &\stackrel{5.12}{=} \int_{z_0}^{z_1} \varphi_M^*(\text{Re}(f(z)z^{(w)})) dz \\ &= \int_{M(z_0)}^{M(z_1)} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz. \end{aligned} \quad (5.14)$$

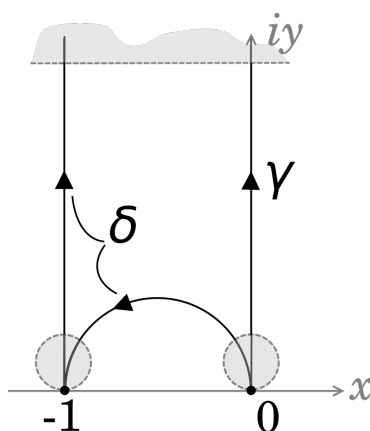
Das Bild von f unter r liegt genau dann in V , wenn $r(f)$ jeweils im Kern der durch $I_{w+1} + \pi(S)$ bzw. $I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)$ gegebenen linearen Abbildung liegt. Dies können wir mithilfe von (5.14) leicht überprüfen: Es gelten

$$\begin{aligned} &(I_{w+1} + \pi(S)) \cdot r(f) \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int_0^{i\infty} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz + \int_{S(0)}^{S(i\infty)} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &= \int_0^{i\infty} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz + \int_{i\infty}^0 \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot r(f) \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int_0^{i\infty} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz + \int_{ST(0)}^{ST(i\infty)} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &\quad + \int_{(ST)^2(0)}^{(ST)^2(i\infty)} \text{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &= \text{Re} \left(\int_0^{i\infty} f(z)z^{(w)} dz + \int_{-1}^0 f(z)z^{(w)} dz + \int_{i\infty}^{-1} f(z)z^{(w)} dz \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei man das letzte Gleichheitszeichen erhält, indem man im Beweis von Satz 5.22 erlaubt, dass die Integrationskurven γ, δ endlich viele Spitzen durchlaufen und diese Stellen genauso behandelt wie z_0 und z_1 .



□

Lemma 5.27. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Dann ist der Untervektorraum

$$U := (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot \text{Kern}(I_{w+1} - \pi(T)) \subseteq \mathbb{R}^{w+1}$$

in V enthalten, so dass der Faktorraum V/U wohldefiniert ist.

Beweis. Jedes $u \in U$ erfüllt

$$u = (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \quad \text{mit einem } t \in \mathbb{R}^{w+1} \text{ mit } (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t = 0. \quad (5.15)$$

Es gilt daher einerseits $u \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(S))$,

denn:

$$\begin{aligned} (I_{w+1} + \pi(S)) \cdot u &\stackrel{(5.15)}{=} (I_{w+1} + \pi(S)) \cdot (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \\ &= (I_{w+1} - \pi(S) + \pi(S) - \pi(S)\pi(S)) \cdot t \\ &\stackrel{5.2}{=} (I_{w+1} - \pi(S^2)) \cdot t \\ &= (I_{w+1} - \pi(-I_2)) \cdot t \\ &\stackrel{(5.1)}{=} 0, \\ &\quad \text{w gerade} \end{aligned}$$

#

und andererseits $u \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2))$,

denn:

$$\begin{aligned} &(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot u \\ &\stackrel{(5.15)}{=} (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \\ &= (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST) - \pi(S) - \pi(ST)\pi(S) - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S)) \cdot t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5.1)}{\underset{w \text{ gerade}}{=}} (\pi(-I_2) + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST) - \pi(S) - \pi(ST)\pi(S) - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S)) \cdot t \\
& \stackrel{5.2}{=} (\pi(ST)\pi(ST)\pi(ST) + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST) - \pi(S) - \pi(ST)\pi(S) \\
& \quad - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S)) \cdot t \\
& = ((\pi(ST) - \pi(S)) + (\pi(ST)\pi(ST) - \pi(ST)\pi(S)) + (\pi(ST)\pi(ST)\pi(ST) \\
& \quad - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S))) \cdot t \\
& = (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST)) \cdot (\pi(ST) - \pi(S)) \cdot t \\
& \stackrel{5.2}{=} (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST)) \cdot \pi(S) \cdot (\pi(T) - I_{w+1}) \cdot t \\
& \stackrel{(5.15)}{=} 0.
\end{aligned}$$

#

Insgesamt haben wir das Lemma gezeigt. □

Unmittelbar folgt:

Korollar 5.28. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann induziert die Periodenabbildung r eine \mathbb{R} -lineare Abbildung von S_k nach V/U .*

Wir wollen im Folgenden nachweisen, dass die induzierte lineare Abbildung aus Korollar 5.28 injektiv ist. Hierfür müssen wir ein wenig ausholen:

Definition 5.29. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Ein **Kozykel** bezüglich der Darstellung $\pi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$ ist eine Abbildung $\phi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}$ mit der **Kozykelbedingung***

$$\phi(M\tilde{M}) = \phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M}) \quad \text{für alle } M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Nach Korollar 1.28 wird die volle Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von den Matrizen S und T erzeugt. Mit der Kozykelbedingung folgt daher, dass je zwei Kozykel gleich sind, wenn ihre Werte auf S und T übereinstimmen.

Lemma 5.30. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Sei weiter $f \in S_k$ mit $r(f) \in U$, so dass es einen Vektor $t \in \mathbb{R}^{w+1}$ gibt mit*

$$r(f) = (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \quad \text{und} \quad (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t = 0. \quad (5.16)$$

Für ein beliebiges $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt dann

$$\int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f)).$$

Beweis. Nach der oben beschriebenen Eigenschaft von Kozykeln genügt es zu zeigen, dass die Abbildungen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nach \mathbb{R}^{w+1} , die durch

$$\phi(M) := \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \quad \text{und} \quad \tilde{\phi}(M) := (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f))$$

gegeben sind, Kozykel sind und ihre Werte für die Matrizen S und T übereinstimmen. Tatsächlich erfüllen sie die Kozykelbedingung,

denn: Für alle $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt einerseits analog zur Argumentation im Beweis von Lemma 5.26

$$\begin{aligned} \phi(M\tilde{M}) &= \int_0^{(M\tilde{M})\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= \int_0^{M\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz + \int_{M\langle 0 \rangle}^{(M\tilde{M})\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int_0^{M\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz + \pi(M) \cdot \int_0^{\tilde{M}\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= \phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M}) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(M\tilde{M}) &= (I_{w+1} - \pi(M\tilde{M})) \cdot (-t + r(f)) \\ &= I_{w+1} \cdot (-t + r(f)) - \pi(M)\pi(\tilde{M}) \cdot (-t + r(f)) \\ &= I_{w+1} \cdot (-t + r(f)) - \pi(M) \cdot (-t + r(f)) + \pi(M) \cdot (-t + r(f)) \\ &\quad - \pi(M)\pi(\tilde{M}) \cdot (-t + r(f)) \\ &= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f)) + \pi(M)(I_{w+1} - \pi(\tilde{M})) \cdot (-t + r(f)) \\ &= \tilde{\phi}(M) + \pi(M)\tilde{\phi}(\tilde{M}). \end{aligned}$$

#

Weiter gelten

$$\begin{aligned} \phi(S) &= \int_0^{S\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= - \int_{S\langle 0 \rangle}^{S\langle i\infty \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &\stackrel{(5.14)}{=} -\pi(S) \cdot \int_0^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &\stackrel{(5.16)}{=} r(f) - (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t - \pi(S) \cdot r(f) \\ &= (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot (-t + r(f)) \\ &= \tilde{\phi}(S) \end{aligned}$$

und analog zur Argumentation im Beweis von Lemma 5.26

$$\begin{aligned} \phi(T) &= \int_0^{T\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= \int_0^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz + \int_{i\infty}^{T\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= \int_0^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz - \int_{T\langle 0 \rangle}^{T\langle i\infty \rangle} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(5.14)}{=} (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot r(f) \\
&\stackrel{(5.16)}{=} -(I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t + (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot r(f) \\
&= (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot (-t + r(f)) \\
&= \tilde{\phi}(T)
\end{aligned}$$

und insgesamt also das Lemma. \square

Lemma 5.31. Seien $w \in \mathbb{N}$ gerade und $k := w + 2$. Seien weiter $f \in S_k$ mit $r(f) \in U$, $t \in \mathbb{R}^{w+1}$ wie in Lemma 5.30 und

$$s := -t + r(f) = -\pi(S) \cdot t. \quad (5.17)$$

Für die beiden C^∞ -Funktionen

$$\begin{aligned}
F(z) &:= -s + \int_0^z \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta) && \text{mit } dF(z) = \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz), \\
G(z) &:= \int_0^z \operatorname{Re}(if(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta) && \text{mit } dG(z) = \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz)
\end{aligned}$$

und ein beliebiges $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt dann

$$\pi(M) \cdot F(z) = \varphi_M^*(F)(z) \quad \text{und} \quad \pi(M) \cdot dG(z) = \varphi_M^*(dG(z)).$$

Beweis. Sei $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt analog zur Argumentation im Beweis von Lemma 5.26

$$\begin{aligned}
\pi(M) \cdot F(z) &= \pi(M) \cdot \left(-s + \int_0^z \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta)\right) \\
&\stackrel{(5.14)}{=} -\pi(M) \cdot s + \int_{M(0)}^{M(z)} \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta) \\
&= -\pi(M) \cdot s - \int_0^{M(0)} \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta) + \int_0^{M(z)} \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta)
\end{aligned}$$

Mit Lemma 5.30 und der Definition von F folgt

$$\begin{aligned}
\pi(M) \cdot F(z) &= -\pi(M) \cdot s - (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f)) + F(M\langle z \rangle) + s \\
&\stackrel{(5.17)}{=} -\pi(M) \cdot s - (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot s + F(M\langle z \rangle) + s \\
&= \varphi_M^*(F)(z)
\end{aligned}$$

und somit die erste behauptete Gleichung. Die zweite Behauptung des Lemmas folgt unmittelbar aus Korollar 5.12 mit if statt f . \square

Wir können nun das angestrebte Injektivitätsresultat beweisen:

Proposition 5.32. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann gilt

$$r(f) \in U \implies f \equiv 0 \quad \text{für alle } f \in S_k.$$

Beweis. Es reicht zum Beweis der Proposition aus,

$$\int_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] = 0 \quad (5.18)$$

zu zeigen,

denn: Nach (SP_6) gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] &= \frac{(2i)^{w+2}}{4} \int_{\mathcal{F}} \Omega(f, f)(z) \\ &= \frac{(2i)^{w+2}}{4} \langle f \mid f \rangle \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] = 0 &\iff \langle f \mid f \rangle = 0 \\ &\iff f \equiv 0. \end{aligned}$$

#

Um das Verschwinden des Integrals in (5.18) zu zeigen, formen wir geeignet um:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] &\stackrel{5.31}{=} \int_{\mathcal{F}} [dF \mid dG] \\ &\stackrel{(SP_3)}{=} \int_{\mathcal{F}} d[F \mid dG], \end{aligned}$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen die allgemeine Rechenregel $d \circ d = 0$ der äußeren Ableitung ausgenutzt haben. Wenden wir nun noch den Satz von Stokes an, so erhalten wir

$$\int_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] = \int_{\partial\mathcal{F}} [F \mid dG].$$

Nach Lemma 5.31 folgt die Proposition daher aus Übungsaufgabe 5.2. \square

Wir wollen nun noch zeigen, dass die von der Periodenabbildung induzierte lineare Abbildung auch surjektiv ist. Dazu weisen wir nach, dass die reelle Dimension des Bildes von r und die Dimension des \mathbb{R} -Vektorraums V/U übereinstimmen. Aufgrund der in Proposition 5.32 gezeigten Injektivität ist dies äquivalent zu

Proposition 5.33. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann gilt*

$$\dim_{\mathbb{R}} S_k = \dim_{\mathbb{R}} V/U = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U.$$

Für den Beweis von Proposition 5.33 benötigen wir eine genauere Untersuchung des \mathbb{C} -Vektorraums $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ der homogenen Polynome von Grad w in $\mathbb{C}[X, Y]$:

Lemma 5.34. Für $w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ beliebig sind die Polynome

$$(X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \quad \text{mit } j \in \{0, \dots, w\}$$

Eigenvektoren zum Operator $\mathbb{P}(ST)$ mit den (nicht notwendigerweise verschiedenen) Eigenwerten $(-1)^w \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j$ und es gilt

$$\mathbb{P}_w(\mathbb{C}) = \bigoplus_{j=0}^w \langle (X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Beweis. Es gilt

$$ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(ST)(X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \\ &= (Y + \varrho(Y - X))^{w-j}(Y + \bar{\varrho}(Y - X))^j \\ &= ((-\varrho)X + (1 + \varrho)Y)^{w-j}((-\bar{\varrho})X + (1 + \bar{\varrho})Y)^j \\ &= (-1)^w \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j \cdot \left(X + \frac{-1 - \varrho}{\varrho} Y\right)^{w-j} \left(X + \frac{-1 - \bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} Y\right)^j \\ &= (-1)^w \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j \cdot (X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass die primitiven dritten Einheitswurzeln ϱ und $\bar{\varrho}$ Nullstellen des Polynoms

$$\frac{X^3 - 1}{X - 1} = X^2 + X + 1$$

sind. Die Polynome

$$(X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \quad \text{mit } j \in \{0, \dots, w\}$$

sind also Eigenvektoren zum Operator $\mathbb{P}(ST)$, womit wir die erste Behauptung des Lemmas nachgewiesen haben. Zum Beweis der zweiten Behauptung genügt es nun offenbar zu zeigen, dass die $w + 1$ Eigenvektoren ganz $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$ aufspannen. Dies zeigen wir per Induktion nach w . Für $w = 0$ ist nichts zu zeigen und für $w = 1$ sind die Eigenvektoren linear unabhängig, weil sich ihre Eigenwerte $-\varrho$ und $-\bar{\varrho}$ voneinander unterscheiden. Nehmen wir nun für ein $w \geq 2$ an, die Behauptung gelte für alle $\ell \in \{0, \dots, w - 1\}$. Für ein beliebiges Polynom

$$P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C})$$

gilt dann

$$P(X, Y) = a_0 Y^w + \sum_{j=0}^{w-1} a_{w-j} X^{w-j} Y^j$$

$$= Y \cdot (a_0 Y^{w-1}) + X \cdot \left(\sum_{j=0}^{w-1} a_{w-j} X^{w-1-j} Y^j \right).$$

Die beiden Polynome X, Y liegen in $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, die beiden an X bzw. Y heranmultiplizierten Polynome in $\mathbb{P}_{w-1}(\mathbb{C})$. Nach Induktionsannahme gibt es daher Koeffizienten $a_0(X), a_1(X), a_0(Y), a_1(Y) \in \mathbb{C}$ und $a'_j(X), a'_j(Y) \in \mathbb{C}$ mit $j \in \{0, \dots, w-1\}$, so dass

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= (a_0(Y)(X + \varrho Y) + a_1(Y)(X + \bar{\varrho} Y)) \cdot \sum_{j=0}^{w-1} a'_j(Y)(X + \varrho Y)^{w-1-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \\ &\quad + (a_0(X)(X + \varrho Y) + a_1(X)(X + \bar{\varrho} Y)) \cdot \sum_{j=0}^{w-1} a'_j(X)(X + \varrho Y)^{w-1-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \end{aligned}$$

gilt. Die Behauptung ergibt sich durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen gleicher Terme. \square

Beweis von Proposition 5.33. Für die im Beweis vorkommenden Rechnungen ist es von Vorteil, statt der Räume $U, V \subseteq \mathbb{R}^{w+1}$ ihre Urbilder $C^{-1}(U), C^{-1}(V) \subseteq \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ unter der Koordinatenabbildung C zu betrachten. Nach Proposition 5.5 gilt dabei

$$\begin{aligned} C^{-1}(V) &= \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S)) \cap \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(ST) + \mathbb{P}((ST)^2)), \\ C^{-1}(U) &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T)). \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun nach und nach die in diesen beiden Formeln vorkommenden Ausdrücke. Zunächst gilt

$$\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T)) = \langle X^w \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (5.19)$$

denn: Für $P \in \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$ gilt

$$(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))(P)(X, Y) = P(X, Y) - P(X, X + Y) = 0$$

und nach Mehrfachenwendung dieses Zusammenhangs

$$P(X, Y) = P(X, Y + nX) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt, dass das Polynom P die Variable Y nicht enthalten kann und also in $\langle X^w \rangle_{\mathbb{R}}$ liegt. $\#$

Hieraus ergibt sich

$$C^{-1}(U) = \langle X^w - Y^w \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{und also} \quad U = \langle {}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (5.20)$$

denn: Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} C^{-1}(U) &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) \cdot \langle X^w \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle X^w - \mathbb{P}(S)(X^w Y^0) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle X^w - Y^w \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

#

Als nächstes berechnen wir die Dimension des \mathbb{R} -Vektorraums $C^{-1}(V)$. Dieser ist als der Durchschnitt der zwei Untervektorräume

$$\begin{aligned} E &:= \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S)), \\ F &:= \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(ST) + \mathbb{P}((ST)^2)) \end{aligned}$$

definiert. Nach der Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} C^{-1}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(E \cap F) = \dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - \dim_{\mathbb{R}}(E + F). \quad (5.21)$$

Um diese Dimensionen besser berechnen zu können, reformulieren wir zunächst E und F . Für diese gilt

$$\begin{aligned} E &= \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)), \\ F &= \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST)), \end{aligned} \quad (5.22)$$

denn: Wir zeigen nur die Behauptung über E ; die Behauptung über F beweist man komplett analog und gilt nach Übungsaufgabe 5.3. Wegen

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S)) \cdot (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) &= \mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)\mathbb{P}(S) \\ &\stackrel{5.1}{=} \mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S^2) \\ &= \mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(-I_2) \\ &\stackrel{w \text{ gerade}}{=} 0 \end{aligned}$$

liegt $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))$ in E . Umgekehrt gilt für ein beliebiges $P \in E$ definitionsgemäß

$$P(X, Y) + P(Y, -X) = (\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S))(P)(X, Y) = 0.$$

Folglich liegt

$$P(X, Y) = \frac{1}{2} \cdot (P(X, Y) - P(Y, -X)) = (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))\left(\frac{1}{2} \cdot P\right)(X, Y)$$

in $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))$. #

Es folgt

$$E + F = \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \quad \text{und also} \quad \dim_{\mathbb{R}}(E + F) = w + 1, \quad (5.23)$$

denn: Wegen $\mathbb{P}(S) \in \text{GL}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R}))$ ist $E + F$ als \mathbb{R} -Vektorraum isomorph zu seinem Bild $\mathbb{P}(S)(E + F)$. Mit (5.22) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S)(E + F) &= \mathbb{P}(S)(\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) + \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))) \\ &= \text{Bild}(\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2)) + \text{Bild}(\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T)), \end{aligned} \quad (5.24)$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen wieder $\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S^2) = \mathbb{P}(-I_2) = \mathbb{P}(I_2)$ ausgenutzt haben.

Betrachten wir nun ein beliebiges $P \in \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$. Für dieses gibt es ein $Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))(Q)(X, Y) + (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2))(-Q)(X, Y) + (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y). \end{aligned}$$

Mit (5.24) folgt also

$$\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T)) \subseteq \mathbb{P}(S)(E + F). \quad (5.25)$$

Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(E + F) &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(S)(E + F) \\ &\geq \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))) \\ &\stackrel{(5.19)}{=} (w + 1) - 1 = w. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass die Inklusion (5.25) keine Gleichheit ist, dass es also in $\mathbb{P}(S)(E + F)$ ein Element gibt, das nicht in $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$ liegt. Tatsächlich gilt wegen der Geradheit von w

$$\begin{aligned} X^w - Y^w &= (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2)) \cdot Y^w \in \text{Bild}(\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2)) \\ &\stackrel{(5.24)}{\subseteq} \mathbb{P}(S)(E + F). \end{aligned}$$

Läge $X^w - Y^w$ auch in $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$, so gäbe es ein

$$P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$$

mit

$$\begin{aligned} X^w - Y^w &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))(P)(X, Y) \\ &= P(X, Y) - P(X, X + Y) \\ &= \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j - \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} (X + Y)^j \\ &= \sum_{j=1}^w a_{w-j} X^{w-j} (Y^j - (X + Y)^j). \end{aligned}$$

Da das Monom X^w auf der rechten Seite dieser Gleichung nicht vorkommt, ist das nicht möglich und wir haben mit $X^w - Y^w$ ein Element in $\mathbb{P}(S)(E + F) \setminus \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$ gefunden. Es ist daher $\dim_{\mathbb{R}}(E + F) = w + 1$ und die Behauptung gezeigt. #

Weiter gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} E = \begin{cases} \frac{w}{2} + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \text{ ungerade,} \\ \frac{w}{2} & \text{für } \frac{w}{2} \text{ gerade} \end{cases} = 2 \cdot \lfloor \frac{w+2}{4} \rfloor, \quad (5.26)$$

denn: Ein Polynom

$$P(X, Y) := \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$$

liegt genau dann im Untervektorraum $E = \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S))$, wenn

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j + \sum_{j=0}^w a_{w-j} (-1)^j Y^{w-j} X^j \\ &= \sum_{j=0}^w (a_{w-j} + (-1)^{w-j} a_j) X^{w-j} Y^j = 0 \end{aligned}$$

gilt und somit auch die Relationen

$$a_{w-j} + (-1)^{w-j} a_j = 0 \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\}. \quad (5.27)$$

Offensichtlich sind nach (5.27) die Koeffizienten $a_{\frac{w}{2}+1}, \dots, a_w$ bereits eindeutig durch die Koeffizienten $a_0, \dots, a_{\frac{w}{2}-1}$ bestimmt. Zusätzlich gilt

$$a_{\frac{w}{2}} + (-1)^{\frac{w}{2}} a_{\frac{w}{2}} = 0,$$

was für gerades $\frac{w}{2}$ den Koeffizienten $a_{\frac{w}{2}}$ auf den Wert 0 festlegt und für ungerades $\frac{w}{2}$ keine Einschränkung darstellt. Das erste Gleichheitszeichen in der Behauptung folgt nun sofort durch Abzählen. Die zweite Gleichheit erhalten wir mit

$$2 \cdot \lfloor \frac{w+2}{4} \rfloor = 2 \cdot \lfloor \frac{\frac{w}{2}+1}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{w}{2} + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \text{ ungerade,} \\ \frac{w}{2} & \text{für } \frac{w}{2} \text{ gerade.} \end{cases}$$

#

Schließlich gilt noch

$$\dim_{\mathbb{R}} F = w + 1 - \begin{cases} \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 & \text{für } w \equiv 0, 2 \pmod{3}, \\ \lfloor \frac{w}{3} \rfloor & \text{für } w \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} = w - 2 \cdot \lfloor \frac{w}{6} \rfloor, \quad (5.28)$$

denn: Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} F &= \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))) \\ &= w + 1 - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Offensichtlich wird $\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))$ von den Eigenvektoren zum Eigenwert 1 aufgespannt. Nach Lemma 5.34 ist die Dimension des Kerns daher durch die Anzahl

$$\begin{aligned}
& \left| \{j \in \{0, \dots, w\} \mid \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j = 1\} \right| \\
& \stackrel{\varrho \bar{\varrho} = 1}{=} \left| \{j \in \{0, \dots, w\} \mid \varrho^{w-2j} = 1\} \right| \\
& \stackrel{\text{ord}(\varrho)=3}{=} \left| \{j \in \{0, \dots, w\} \mid w \equiv 2j \pmod{3}\} \right| \\
& = \left| \{j \in \{0, \dots, w\} \mid j \equiv 2w \pmod{3}\} \right| \\
& = \begin{cases} |\{0, 3, \dots, w\}| & \text{für } w \equiv 0 \pmod{3}, \\ |\{1, 4, \dots, w-1\}| & \text{für } w \equiv 2 \pmod{3}, \\ |\{2, 5, \dots, w-2\}| & \text{für } w \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

gegeben. Das erste Gleichheitszeichen der Behauptung folgt nun sofort durch Abzählen und Einsetzen in (5.29). Die zweite Gleichheit erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
2 \cdot \lfloor \frac{w}{6} \rfloor + 1 &= 2 \cdot \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 \\
&= \begin{cases} 2 \cdot \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 0 \pmod{3}, \\ 2 \cdot \lfloor \frac{\frac{w}{2}-1}{3} + \frac{1}{3} \rfloor + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2 \cdot \lfloor \frac{\frac{w}{2}-2}{3} + \frac{2}{3} \rfloor + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{w+3}{3} & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{w+1}{3} & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{w-1}{3} & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 & \text{für } w \equiv 0 \pmod{3}, \\ \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 & \text{für } w \equiv 2 \pmod{3}, \\ \lfloor \frac{w}{3} \rfloor & \text{für } w \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases}
\end{aligned}$$

#

Wir zeigen nun die Proposition und führen dazu die bisher gezeigten Resultate zusammen:

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U &\stackrel{(5.20), (5.21)}{=} (\dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - \dim_{\mathbb{R}}(E + F)) - 1 \\
&\stackrel{(5.23)}{=} \dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - w - 2 \\
&\stackrel{(5.26), (5.28)}{=} 2 \cdot \lfloor \frac{w+2}{4} \rfloor - 2 \cdot \lfloor \frac{w}{6} \rfloor - 2
\end{aligned}$$

Berechnen wir diesen Ausdruck und führen eine Fallunterscheidung bezüglich w modulo 12 durch, so erhalten wir

$$\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U = 2 \cdot \begin{cases} \lfloor \frac{w+2}{12} \rfloor - 1 & \text{für } w \equiv 0 \pmod{12}, \\ \lfloor \frac{w+2}{12} \rfloor & \text{für } w \not\equiv 0 \pmod{12} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{3.11}{=} 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} S_k \\ &= \dim_{\mathbb{R}} S_k. \end{aligned}$$

□

Insgesamt haben wir in diesem Abschnitt den folgenden Satz gezeigt:

Satz 5.35. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann induziert die Periodenabbildung r einen \mathbb{R} -Isomorphismus $\tilde{r} : S_k \rightarrow V/U$, den **Eichler-Shimura-Isomorphismus**.

5.5 Eichler-Kohomologie

Definition 5.36. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Ein Kozykel $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}$ bezüglich der Darstellung $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$ heißt **cuspidal**, wenn es für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ ein $t_M \in \mathbb{R}^{w+1}$ gibt mit

$$\phi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t_M.$$

Die Menge der cuspidalen Kozykel bezeichnen wir mit $Z^1(\pi)$.

Lemma 5.37. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Die Menge $Z^1(\pi)$ der cuspidalen Kozykel bezüglich der Darstellung $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$ bildet mit der elementweisen Addition als Verknüpfung eine (kommutative) Gruppe.

Beweis. Wir zeigen, dass $Z^1(\pi)$ eine Untergruppe der Gruppe der Abbildungen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nach \mathbb{R}^{w+1} mit der elementweisen Addition ist.

Die konstante Abbildung $\phi \equiv 0$ ist ein cuspidaler Kozykel und die Menge $Z^1(\pi)$ somit nicht leer,

denn: Es gilt

$$\begin{aligned} \phi(M\tilde{M}) &= 0 = \phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M}) && \text{für alle } M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ \phi(M) &= 0 = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot 0 && \text{für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}. \end{aligned}$$

#

Für je zwei cuspidale Kozykel $\phi, \tilde{\phi} \in Z^1(\pi)$ gilt $\phi + \tilde{\phi} \in Z^1(\pi)$,

denn: Wegen der Kozykelbedingung für ϕ und $\tilde{\phi}$ gilt für alle $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} (\phi + \tilde{\phi})(M\tilde{M}) &= \phi(M\tilde{M}) + \tilde{\phi}(M\tilde{M}) \\ &= (\phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M})) + (\tilde{\phi}(M) + \pi(M)\tilde{\phi}(\tilde{M})) \\ &= (\phi + \tilde{\phi})(M) + \pi(M)(\phi + \tilde{\phi})(\tilde{M}), \end{aligned}$$

so dass auch $\phi + \tilde{\phi}$ die Kozykelbedingung erfüllt. Wegen der Cuspidalität von ϕ und $\tilde{\phi}$ gibt es zudem für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ Vektoren $t_M, \tilde{t}_M \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$(\phi + \tilde{\phi})(M) = \phi(M) + \tilde{\phi}(M)$$

$$\begin{aligned}
&= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t_M + (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot \tilde{t}_M \\
&= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (t_M + \tilde{t}_M),
\end{aligned}$$

so dass auch $\phi + \tilde{\phi}$ cuspidal ist. #

Für einen beliebigen cuspidalen Kozykel $\phi \in Z^1(\pi)$ gilt $-\phi \in Z^1(\pi)$,

denn: Wegen der Kozykelbedingung gilt für alle $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$(-\phi)(M\tilde{M}) = -(\phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M})) = (-\phi)(M) + \pi(M)(-\phi)(\tilde{M})$$

und wegen der Cuspidalität von ϕ gibt es für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ ein $t_M \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$(-\phi)(M) = -((I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t_M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t_M).$$

#

□

Definition 5.38. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Ein **Korand** bezüglich der Darstellung $\pi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$ ist eine Abbildung $\psi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}$, für die ein $t \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$\psi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t \quad \text{für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

existiert. Die Menge der Koränder bezeichnen wir mit $B^1(\pi)$.

Lemma 5.39. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Die Menge $B^1(\pi)$ zusammen mit der elementweisen Addition ist eine Untergruppe von $Z^1(\pi)$.

Beweis. Es gilt $\emptyset \neq B^1(\pi) \subseteq Z^1(\pi)$,

denn: Offensichtlich liegt die konstante Abbildung $\psi \equiv 0$ in $B^1(\pi)$, so dass letzteres nicht leer ist. Zudem gibt es für jedes $\psi \in B^1(\pi)$ ein $t \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$\psi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t \quad \text{für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Für alle $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt daher

$$\begin{aligned}
\psi(M\tilde{M}) &= (I_{w+1} - \pi(M\tilde{M})) \cdot t \\
&= (I_{w+1} - \pi(M) + \pi(M) - \pi(M\tilde{M})) \cdot t \\
&= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t + \pi(M) \cdot (I_{w+1} - \pi(\tilde{M})) \cdot t \\
&= \psi(M) + \pi(M)\psi(\tilde{M}),
\end{aligned}$$

so dass ψ ein Kozykel ist. Zudem gilt für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$

$$\psi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t$$

und somit sofort die Cuspidalität. #

Für je zwei Koränder $\psi, \tilde{\psi} \in B^1(\pi)$ gilt $\psi - \tilde{\psi} \in B^1(\pi)$,

denn: Nach Voraussetzung gibt es $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}^{w+1}$, so dass für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} (\psi - \tilde{\psi})(M) &= \psi(M) - \tilde{\psi}(M) \\ &= (I_{w+1} - \pi(M))(t) - (I_{w+1} - \pi(M))(\tilde{t}) \\ &= (I_{w+1} - \pi(M))(t - \tilde{t}) \end{aligned}$$

gilt.

#

□

Definition 5.40. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Die Faktorgruppe

$$H^1(\pi) := Z^1(\pi) / B^1(\pi)$$

heißt die *cuspidale Kohomologiegruppe* oder auch die *Eichler-Kohomologiegruppe*. Die Restklasse eines beliebigen cuspidalen Kozykels $\phi \in Z^1(\pi)$ in $H^1(\pi)$ bezeichnen wir mit $[\phi]$.

Es stellt sich heraus, dass es zum Studium der Eichler-Kohomologie ausreicht cuspidale Kozykel zu betrachten, die den Stabilisator $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ von $i\infty$ annullieren:

Für den Erzeuger $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ schreiben wir

$$\begin{aligned} Z^1(\pi, T) &:= \{\phi \in Z^1(\pi) : \phi(T) = 0\}, \\ B^1(\pi, T) &:= \{\psi \in B^1(\pi) : \psi(T) = 0\}, \\ H^1(\pi, T) &:= Z^1(\pi, T) / B^1(\pi, T) \end{aligned}$$

Die Restklasse eines beliebigen cuspidalen Kozykels $\phi \in Z^1(\pi, T)$ in $H^1(\pi, T)$ bezeichnen wir mit $[\phi]_T$. Dann ist die durch

$$n: \begin{cases} H^1(\pi, T) & \rightarrow H^1(\pi), \\ [\phi]_T & \mapsto [\phi] \end{cases} \quad (5.30)$$

gegebene natürliche Abbildung wohldefiniert,

denn: Für $\phi, \tilde{\phi} \in Z^1(\pi, T)$ mit $[\phi]_T = [\tilde{\phi}]_T$ gilt

$$\phi - \tilde{\phi} \in B^1(\pi, T) \subseteq B^1(\pi)$$

und somit $[\phi] = [\tilde{\phi}]$.

#

Zusammen mit der offensichtlichen Inklusion $i: Z^1(\pi, T) \rightarrow Z^1(\pi)$ und den kanonischen Projektionen der jeweiligen Kozykel auf die Kohomologie erhalten wir so das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\pi, T) & \xhookrightarrow{i} & Z^1(\pi) \\ \downarrow & \cong & \downarrow \\ H^1(\pi, T) & \xrightarrow{n} & H^1(\pi) \end{array}$$

Proposition 5.41. *Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Die natürliche Abbildung $n: H^1(\pi, T) \rightarrow H^1(\pi)$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Injektivität von n zeigen wir wie folgt: Ein beliebiges Element von $H^1(\pi, T)$ ist von der Form $[\phi]_T$ mit $\phi \in Z^1(\pi, T)$ und wegen der Kommutativität des Diagramms gilt

$$\begin{aligned} [\phi]_T \in \text{Kern}(n) &\iff [i(\phi)] = 0 \\ &\iff i(\phi) \in B^1(\pi) \\ &\iff \phi \in B^1(\pi, T) \\ &\iff [\phi]_T = 0. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Surjektivität von n betrachten wir einen beliebigen Vertreter $\phi \in Z^1(\pi)$ eines gegebenen Elements $[\phi]$ von $H^1(\pi)$. Wir können zu ϕ ein beliebiges Element aus $B^1(\pi)$ addieren, ohne seine Restklasse zu verändern. Definieren wir

$$\psi(M) := (I_{w+1} - \pi(M))t_T \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

mit dem Vektor $t_T \in \mathbb{R}^{w+1}$ aus der Definition der Cuspidalität von ϕ , so liegt ψ nach Definition in $B^1(\pi)$. Der Kozykel

$$\begin{aligned} (\phi - \psi)(M) &:= \phi(M) - \psi(M) \\ &= \phi(M) - (I_{w+1} - \pi(M))t_T \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

erfüllt also

$$[\phi - \psi] = [\phi].$$

Andererseits gilt definitionsgemäß

$$\begin{aligned} (\phi - \psi)(T) &= \phi(T) - (I_{w+1} - \pi(T))t_T \\ &\stackrel{5.36}{=} (I_{w+1} - \pi(T))t_T - (I_{w+1} - \pi(T))t_T \\ &= 0 \end{aligned}$$

und also

$$\phi - \psi \in Z^1(\pi, T).$$

Mit der Kommutativität des Diagramms folgt

$$n([\phi - \psi]_T) = [i(\phi - \psi)] = [\phi - \psi] = [\phi],$$

so dass wir ein Urbild von $[\phi]$ in $H^1(\pi, T)$ gefunden haben. □

Wir stellen nun einen Zusammenhang zwischen der Eichler-Kohomologie und den in Abschnitt 5.4 betrachteten Vektorräumen $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^{w+1}$ her:

Lemma 5.42. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gelten für die Abbildung

$$h: \begin{cases} Z^1(\pi, T) & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ \phi & \mapsto \phi(S) \end{cases}$$

die Inklusionen

$$h(Z^1(\pi, T)) \subseteq V \quad \text{und} \quad h(B^1(\pi, T)) \subseteq U.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $h(Z^1(\pi, T)) \subseteq V$ und betrachten dafür ein beliebiges $\phi \in Z^1(\pi, T)$. Dann gilt

$$h(\phi) = \phi(S) \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(S)),$$

denn: Mit der Kozykelbedingung gilt

$$(I_{w+1} + \pi(S)) \cdot \phi(S) = \phi(S) + \pi(S)\phi(S) = \phi(S^2) = \phi(-I_2).$$

Wegen $-I_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ und der Cuspidalität von ϕ folgt daraus die Existenz eines $t_{-I_2} \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$(I_{w+1} + \pi(S)) \cdot \phi(S) = (I_{w+1} - \pi(-I_2))t_{-I_2} \stackrel{w \text{ gerade}}{=} 0.$$

#

Zudem gilt

$$h(\phi) = \phi(S) \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)),$$

denn: Mit der Kozykelbedingung gilt

$$\phi(ST) = \phi(S) + \pi(S)\phi(T) = \phi(S), \tag{5.31}$$

$$\phi((ST)^n) = \phi((ST)^{n-1}) + \pi((ST)^{n-1})\phi(ST) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{5.32}$$

Hieraus folgt sofort

$$\begin{aligned} (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot \phi(S) &= \phi(S) + \pi(ST)\phi(S) + \pi((ST)^2)\phi(S) \\ &\stackrel{(5.31)}{=} \phi(ST) + \pi(ST)\phi(ST) + \pi((ST)^2)\phi(ST) \\ &\stackrel{(5.32)}{=} \phi((ST)^2) + \pi((ST)^2)\phi(ST) \\ &\stackrel{(5.32)}{=} \phi((ST)^3) = \phi(-I_2) \stackrel{s.o.}{=} 0. \end{aligned}$$

#

Wir zeigen nun $h(B^1(\pi, T)) \subseteq U$ und betrachten dafür ein beliebiges $\psi \in B^1(\pi, T)$. Dann gilt $\psi(T) = 0$ und es gibt ein $t \in \mathbb{R}^{w+1}$ mit

$$\psi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

und insbesondere

$$\begin{aligned}\psi(S) &= (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t, \\ 0 = \psi(T) &= (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t.\end{aligned}$$

Es folgt

$$h(\psi) = \psi(S) \in (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot \text{Kern}(I_{w+1} - \pi(T)) = U.$$

□

Lemma 5.43. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Bezeichnet h die Abbildung aus Lemma 5.42, so ist

$$\begin{aligned}h: Z^1(\pi, T) &\rightarrow V && \text{injektiv,} \\ h: B^1(\pi, T) &\rightarrow U && \text{bijektiv.}\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir auf natürliche Weise eine Injektion $\tilde{h}: H^1(\pi, T) \rightarrow V/U$.

Beweis. Die Injektivität von $h: Z^1(\pi, T) \rightarrow V$ ergibt sich, da ein $\phi \in Z^1(\pi, T)$ mit $\phi(S) = 0$ sowohl in S als auch in T verschwindet und daher gemäß der Feststellung nach Definition 5.29 konstant Null ist.

Hieraus folgt sofort die Injektivität der Einschränkung $h: B^1(\pi, T) \rightarrow U$. Zum Nachweis der Surjektivität betrachten wir ein beliebiges $u \in U$. Für dieses gilt nach Definition

$$u = (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \quad \text{mit} \quad (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t = 0.$$

Die Abbildung

$$\psi_u: \begin{cases} \text{SL}_2(\mathbb{Z}) & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ M & \mapsto (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot t \end{cases}$$

ist ein Korand und erfüllt $\psi_u(T) = 0$. Somit gibt es für alle $u \in U$ ein $\psi_u \in B^1(\pi, T)$ mit $h(\psi_u) = \psi_u(S) = u$ und die Abbildung $h: B^1(\pi, T) \rightarrow U$ ist surjektiv.

Wir beweisen nun die Wohldefiniertheit von \tilde{h} und betrachten dafür zwei Vertreter $\phi, \tilde{\phi} \in Z^1(\pi, T)$ derselben Restklasse in $H^1(\pi, T)$. Für diese existiert ein $\psi \in B^1(\pi, T)$ mit $\phi - \tilde{\phi} = \psi$ und nach Lemma 5.42 gilt

$$\phi(S), \tilde{\phi}(S) \in V \quad \text{und} \quad \phi(S) - \tilde{\phi}(S) = \psi(S) \in U.$$

Es folgt, dass $h(\phi) = \phi(S)$ und $h(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}(S)$ in derselben Restklasse von V/U liegen und somit die Wohldefiniertheit von \tilde{h} .

Abschließend zeigen wir die Injektivität von \tilde{h} . Dafür betrachten wir zwei Elemente $[\phi]_T, [\tilde{\phi}]_T \in H^1(\pi, T)$ mit Vertretern $\phi, \tilde{\phi} \in Z^1(\pi, T)$, die

$$h(\phi) - h(\tilde{\phi}) = h(\phi - \tilde{\phi}) =: u \in U$$

erfüllen. Wegen der Injektivität von $h: Z^1(\pi, T) \rightarrow V$ und der Bijektivität von $h: B^1(\pi, T) \rightarrow U$ folgt

$$\phi - \tilde{\phi} \in B^1(\pi, T)$$

und also $[\phi]_T = [\tilde{\phi}]_T$. □

Fassen wir die Aussagen von Satz 5.35, Proposition 5.41 und Lemma 5.43 zusammen, haben wir jetzt einen Zusammenhang zwischen dem Raum S_k der Spitzenformen von Gewicht $k := w + 2$ und der cuspidalen Kohomologiegruppe $H^1(\pi) \cong H^1(\pi, T)$ hergeleitet. Abschließend für diesen Abschnitt wollen wir diesen noch präzisieren:

Wir definieren eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$g: \begin{cases} S_k & \rightarrow H^1(\pi), \\ f & \mapsto [\phi_f] \end{cases} \quad \text{mit} \quad \phi_f: \begin{cases} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ M & \mapsto \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz). \end{cases}$$

Diese ist wohldefiniert,

denn: Für beliebige $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$\begin{aligned} \phi_f(M\tilde{M}) &= \int_0^{(M\tilde{M})(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + \int_{M(0)}^{(M\tilde{M})(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + \pi(M) \cdot \int_0^{\tilde{M}(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= \phi_f(M) + \pi(M)\phi_f(\tilde{M}) \end{aligned}$$

und somit die Kozykelbedingung für ϕ_f . Weiter gilt für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$

$$\begin{aligned} \phi_f(M) &= \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= \int_0^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) - \int_{M(0)}^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot r(f), \end{aligned} \tag{5.33}$$

so dass ϕ_f auch cuspidal ist und also in $Z^1(\pi)$ liegt. #

Satz 5.44. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und sei $k := w + 2$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S_k & \xrightarrow{g} & H^1(\pi) & \xrightarrow{n^{-1}} & H^1(\pi, T) \\ & \searrow \tilde{r} & & \swarrow \tilde{h} & \\ & & V/U & & \end{array}$$

antikommutativ, das heißt, es gilt

$$\tilde{h} \circ n^{-1} \circ g = -\tilde{r},$$

und alle vorkommenden Abbildungen sind Isomorphismen; insbesondere gilt

$$S_k \cong H^1(\pi) \cong H^1(\pi, T).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Antikommutativität und betrachten dafür ein $f \in S_k$. Da die durch

$$\psi(M) = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot r(f)$$

definierte Abbildung ψ in $B^1(\pi)$ liegt, gilt

$$g(f) = [\phi_f] = [\phi_f - \psi].$$

Wegen (5.33) mit $M = T$ gilt $\phi_f - \psi \in Z^1(\pi, T)$ und also

$$(n^{-1} \circ g)(f) = [\phi_f - \psi]_T.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & (\tilde{h} \circ n^{-1} \circ g)(f) \\ &= \phi_f(S) - \psi(S) \bmod U \\ &= \int_0^{S\langle 0 \rangle} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) - (I_{w+1} - \pi(S)) \int_0^{i\infty} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \bmod U \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int_{S\langle 0 \rangle}^{S\langle i\infty \rangle} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \bmod U \\ &= \int_{i\infty}^0 \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \bmod U \\ &= -\tilde{r}(f) \end{aligned}$$

und somit die Antikommutativität.

Es verbleibt zu zeigen, dass alle vorkommenden Abbildungen Isomorphismen sind. Für den Eichler-Shimura-Isomorphismus \tilde{r} ist dies gerade Satz 5.35. Die Bijektivität von n^{-1} haben wir in Proposition 5.41 gezeigt. Die Injektivität von \tilde{h} haben wir in Lemma 5.43 hergeleitet und die Injektivität von g folgt nun mit der Antikommutativität des Diagramms. Mit der Antikommutativität des Diagramms, der Bijektivität von \tilde{r} , n^{-1} und der Injektivität von \tilde{h} , g folgt

$$\dim_{\mathbb{R}} V/U = \dim_{\mathbb{R}} S_k \leq \dim_{\mathbb{R}} H^1(\pi) = \dim_{\mathbb{R}} H^1(\pi, T) \leq \dim_{\mathbb{R}} V/U.$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$\dim_{\mathbb{R}} S_k = \dim_{\mathbb{R}} H^1(\pi) \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{R}} H^1(\pi, T) = \dim_{\mathbb{R}} V/U$$

und somit die Surjektivität von g und \tilde{h} . □

5.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. In dieser Aufgabe wollen wir die Polynomdarstellung von $GL_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ in einen allgemeineren Kontext stellen. Hierfür betreiben wir zunächst ein wenig multilineare Algebra:

Ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und V ein Vektorraum über einem Körper K mit Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$, so ist

- $T^w(V) := \langle b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_w} \mid i_1, \dots, i_w \in \{1, \dots, n\} \rangle_{\mathbb{R}}$ für $w \in \mathbb{N}$
das w -fache Tensorprodukt von V .

- $T(V) := \bigoplus_{w=1}^{\infty} T^w(V)$ mit der durch

$$\begin{cases} T^w(V) \times T^v(V) & \rightarrow T^{w+v}(V), \\ (b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_w}, b_{j_1} \otimes \dots \otimes b_{j_v}) & \mapsto b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_w} \otimes b_{j_1} \otimes \dots \otimes b_{j_v} \end{cases} \quad \text{für alle } w, v \in \mathbb{N}$$

definierten Multiplikation die **Tensoralgebra** von V .

- $\text{Sym}(V) := T(V)/I(V)$ mit dem homogenen Ideal $I(V) := \langle v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V \rangle_K$
die **symmetrische Algebra** von V ; für das Produkt von zwei Elementen $v, w \in \text{Sym}(V)$ schreiben wir $v \cdot w$.
- $\text{Sym}^w(V)$, das Bild von $T^w(V)$ unter der Projektion auf $\text{Sym}(V)$,
die w -te **symmetrische Potenz** von V ; es gilt $\text{Sym}(V) = \bigoplus_{w=1}^{\infty} \text{Sym}^w(V)$.

Zeigen Sie nun für $n, w \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen:

- (a) $GL_n(\mathbb{R})$ operiert auf $\text{Sym}^w(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) &\rightarrow GL(\text{Sym}^w(\mathbb{R}^n)), \\ M &\mapsto (v_1 \cdot \dots \cdot v_w \mapsto (Mv_1) \cdot \dots \cdot (Mv_w)). \end{aligned}$$

- (b) Der Vektorraum $\text{Sym}^w(\mathbb{R}^n)$ ist isomorph zum Untervektorraum $\mathbb{P}_w^{(n)}(\mathbb{R})$ der homogenen Polynome vom Grad w in $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Aufgabe 5.2. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade und seien $F, G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}$ zwei C^∞ -Funktionen mit

$$\varphi_M^*(F(x, y)) = \pi(M) \cdot F(x, y), \quad \varphi_M^*(dG(x, y)) = \pi(M) \cdot dG(x, y) \quad \text{für alle } M \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\partial \mathcal{F}} [F \mid dG] = 0$$

gilt, wobei einfach und im positiven Sinne längs des Randes des Standardfundamentaltbereichs \mathcal{F} der Aktion von $SL_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} integriert werde.

Hinweis: Unterteilen Sie die Integrationskurve geschickt in Teilstücke und integrieren Sie einzeln längs derselben.

Aufgabe 5.3. Sei $w \in \mathbb{N}$ gerade. Zeigen Sie, dass dann

$$\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST)) = \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(ST) + \mathbb{P}((ST)^2))$$

gilt.

Aufgabe 5.4. Mit dieser Aufgabe wollen wir die Gültigkeit des Eichler-Shimura-Isomorphismus 5.35 explizit im Fall $k = 12$ überprüfen.

- (a) Berechnen Sie die Matrizen $\pi(S)$, $\pi(ST)$ und $\pi((ST)^2)$.
 (b) Ermitteln Sie aus den Berechnungen in Teil (a) eine konkrete Basis für den \mathbb{R} -Untervektorraum

$$V = \text{Kern}(I_{11} + \pi(S)) \cap \text{Kern}(I_{11} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \in \mathbb{R}^{11}.$$

- (c) Folgern Sie mithilfe ihrer Basisvektoren eine Beschreibung des Faktorraums V/U .

Aufgabe 5.5. Sei $k \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$ gerade und sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k$ eine Spitzenform. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Die DIRICHLET-Reihe⁶²

$$L(f; s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)n^{-s}$$

konvergiert gleichmäßig absolut auf Kompakta in der durch $\text{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$ gegebenen Halbebene und stellt dort eine holomorphe Funktion dar, die **Hecke-L-Funktion** von f .

Hinweis: Benutzen Sie die Hecke-Abschätzung 2.38.

- (b) Es gilt

$$\int_0^{i\infty} f(z)z^s dz = i^{s+1}(2\pi)^{-s-1}\Gamma(s+1) \cdot L(f; s+1) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \text{Re}(s) > \frac{k}{2},$$

wobei Γ die in Übungsaufgabe 3.2 eingeführte Funktion bezeichne.

Da das Integral links auf ganz \mathbb{C} konvergiert, haben wir eine holomorphe Fortsetzung von $L(f; s)$ auf ganz \mathbb{C} gefunden.

⁶²Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)