

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie 1

Wintersemester 19/20

Universität Heidelberg
AOR DR. DENIS VOGEL
BENJAMIN KUPFERER

Blatt 01
Abgabetermin: 25.10.19

Aufgabe 1. (2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)

Sei K ein Körper mit fest gewähltem algebraischen Abschluss $\overline{K}$, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, \dots, x_n \in K$. Definiere

$$M(x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige

$$\det(M(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

(b) Sei für den Rest der Aufgabe $L|K$ eine endliche separable Erweiterung mit $L \subseteq \overline{K}$ und $x \in L$ sowie $\text{Hom}_K(L, \overline{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Sei weiterhin

$$\mu_x: L \rightarrow L, \quad a \mapsto ax$$

die Multiplikation mit x , wobei L als K -Vektorraum betrachtet wird. Die **Spur** $\text{Tr}_{L|K}(x)$ von x ist dann definiert als

$$\text{Tr}_{L|K}(x) := \text{Tr}(\mu_x).$$

Zeige

$$\text{Tr}_{L|K}(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x).$$

(c) Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine K -Basis von L . Zeige

$$\det((\text{Tr}_{L|K}(\alpha_i \alpha_j))_{i,j}) = \det((\sigma_i \alpha_j)_{i,j})^2$$

(d) Zeige, dass die Bilinearform

$$L \times L \rightarrow K, \quad (x, y) \mapsto \text{Tr}_{L|K}(xy)$$

nicht ausgeartet ist.

Aufgabe 2.**(2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 8 Punkte)**

- (a) Sind $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ Abbildungen, dann definiere

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

$*$ ist auf $\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ assoziativ und kommutativ und $\delta := [n \mapsto \delta_{1n}]$ ist neutrales Element bezüglich $*$.

- (b) $(\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{C}), *)$ ist keine Gruppe.

- (c) Definiere

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{falls } n \text{ ein Produkt von } k \text{ paarweise verschiedenen Primzahlen ist,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ durch eine Quadratzahl } > 1 \text{ teilbar ist} \end{cases}$$

und zeige

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

- (d) Sei $u \in \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ die konstante 1 Abbildung. Dann gilt $\mu * u = \delta$.

- (e) Seien nun $f, F \in \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ mit $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $F = f * u$ und

$$f(n) = \sum_{d|n} F(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3.**(2 + 2 = 4 Punkte)**

- (a) 4 ist für keine Primzahl p eine Primitivwurzel modulo p .

- (b) Sei $p \geq 3$ prim und $n \in \mathbb{N}$. Zeige

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^n \equiv \begin{cases} -1 \pmod{p}, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{p-1} \\ 0 \pmod{p}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4.**(1 + 1 + 2 = 4 Punkte)**

Gegenstand dieser Aufgabe ist der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

- (a) Die Abbildung $N: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{N}_0$, $a + b\sqrt{-5} \mapsto a^2 + 5b^2$ ist multiplikativ.

- (b) Die Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind ± 1 .

- (c) Zeige, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist. Zerlege hierzu 6 in verschiedene Produkte nicht assoziierter irreduzibler Elemente.