

# Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2023

Vorlesungsskript

Dr. Hendrik Kasten und Dr. Denis Vogel

2. Juni 2023



---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1 Analytische Geometrie</b>	<b>3</b>
1.1 Affine Räume	3
1.2 Affine Abbildungen	15
1.3 Affine Koordinaten	20
1.4 Euklidische Räume	32
1.5 Polytope	42
1.6 Projektive Räume	52
1.7 Projektive Abbildungen	59
1.8 Projektive Koordinaten	68
1.9 Computergraphik	78
1.10 Übungsaufgaben	82
<b>2 Inzidenzgeometrie</b>	<b>88</b>
2.1 Inzidenzebenen	88
2.2 Affine Ebenen	91
2.3 Übungsaufgaben	94
<b>3 Hilbertebenen</b>	<b>96</b>
3.1 Die Anordnungsaxiome	96
3.2 Die Kongruenzaxiome für Strecken	102
3.3 Die Kongruenzaxiome für Winkel	104
3.4 Ergänzungswinkel, Gegenwinkel und rechte Winkel	111
3.5 Orthogonalität und Parallelität	114
3.6 Der Kongruenzsatz für Dreiecke	119
3.7 Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende	122
3.8 Innen- und Außenwinkel im Dreieck	125
3.9 In- und Umkreis	129
3.10 Übungsaufgaben	133
<b>4 Euklidische Geometrie</b>	<b>137</b>
4.1 Das Vollständigkeitsaxiom	137
4.2 Euklidische Ebenen	140
4.3 Kreise	143

---

4.4	Die Inversion am Kreis . . . . .	153
4.5	Übungsaufgaben . . . . .	162
<b>5</b>	<b>Nichteuklidische Geometrie</b>	<b>163</b>
5.1	Das Poincaré'sche Kreismodell . . . . .	163
5.2	Hyperbolische Geometrie . . . . .	170
5.3	Übungsaufgaben . . . . .	177

## Analytische Geometrie

---

Nach heutigem Sprachgebrauch versteht man unter der *Analytischen Geometrie* den Teil der Geometrie, der mit Hilfsmitteln der Linearen Algebra betrieben wird. Verwendung von höherer Algebra führt zur *Algebraischen Geometrie*; in der *Differentialgeometrie* werden geometrische Objekte mit den Methoden der Analysis untersucht.

In den Abschnitten 1.1 und 1.2 führen wir zunächst affine Räume und Abbildungen zwischen ihnen ein und untersuchen diese Objekte. In Abschnitt 1.3 zeigen wir mithilfe affiner Koordinaten und insbesondere des Teilverhältnisses einige klassische Resultate der affinen Geometrie, wie etwa den Strahlensatz. In Abschnitt 1.4 befassen wir uns mit euklidischen Räumen und entwickeln für diese die Anfänge einer Dreiecksgeometrie. Schließlich vertiefen wir in Abschnitt 1.5 mit den Polytopen exemplarisch ein Thema der dreidimensionalen reellen euklidischen Geometrie.

In den Abschnitten 1.6 und 1.7 untersuchen wir projektive Räume und den Zusammenhang zwischen diesen und den zuvor eingeführten affinen Räumen. In Abschnitt 1.8 zeigen wir mithilfe projektiver Koordinaten und insbesondere des Doppelverhältnis einige klassische Resultate der projektiven Geometrie, wie etwa den Satz von Pappos und den Satz von Desargues. Abschließend für dieses Kapitel behandeln wir in Abschnitt 1.9 als ein konkretes Anwendungsbeispiel für die in Abschnitt 1.6 eingeführte Theorie Fragestellungen aus der *Darstellenden Geometrie*, also aus dem Teilbereich der Geometrie, der sich mit der Konstruktion von Projektionen dreidimensionaler Objekte auf eine zweidimensionale Darstellungsebene befasst.

### 1.1 Affine Räume

Geometrie im Kontext von Anfängervorlesungen zur Linearen Algebra wird typischerweise innerhalb von Vektorräumen studiert. Da jeder Vektorraum mit einem ausgezeichneten Element, dem Nullelement, ausgestattet ist, ist ein Ursprung damit von vorneherein festgelegt. Im geometrischen Kontext ist es jedoch häufig erforderlich, Räume ohne festen Ursprung zu

betrachten, in denen also alle Punkte gleichberechtigt sind. Man stelle sich etwa eine Schreib-  
tischoberfläche vor – idealerweise ist das eine Ebene – die sich bis ins Unendliche erstreckt.  
Hier gibt es keinen ausgezeichneten Punkt; Ursprunge und Koordinatensysteme sollten, wenn  
sie überhaupt notwendig sind, der geometrischen Fragestellung angepasst werden. In der affi-  
nen Geometrie begegnet man dieser Anforderung mit dem Konzept des affinen Raumes. Hier  
ordnet man je zwei Punkten einen Verbindungsvektor zu, für den man über Axiome sinnvolle  
Eigenschaften einfordert. Genauer definieren wir wie folgt:

**Definition 1.1.** Ein **affiner Raum** über einem Körper  $K$  ist ein Tripel  $(X, T(X), \tau)$  aus

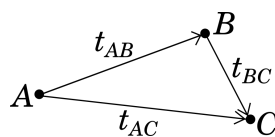
- einer nichtleeren Menge  $X$ , deren Elemente wir **Punkte** nennen,
- einem  $K$ -Vektorraum  $T(X)$  (dem **Translationsvektorraum**), dessen Elemente wir **Vektoren** nennen,
- einer Abbildung  $\tau: X \times X \rightarrow T(X)$ , die je zwei Punkten  $A, B \in X$  einen **Verbindungsvektor**  $t_{AB} := \tau(A, B) \in T(X)$  zuordnet, so dass wie im Folgenden definiert das **Abtragbarkeitsaxiom** (A) und das **Dreiecksaxiom** (D) gelten:

(A) Für jeden Punkt  $A \in X$  und jeden Vektor  $t \in T(X)$  existiert genau ein Punkt  $B \in X$  mit  $t = t_{AB}$ .

(D) Für alle Punkte  $A, B, C \in X$  ist  $t_{AB} + t_{BC} = t_{AC}$ .

Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen soll auch die leere Menge – ohne Angabe von  $T(X)$  und  $\tau$  – ein affiner Raum sein. Für „Sei  $(X, T(X), \tau)$  ein affiner Raum über einem Körper  $K$ .“ schreiben wir künftig auch kurz „(aff. Raum)“.

Stellen wir uns Verbindungsvektoren als Pfeile vor, können wir das Dreiecksaxiom schön visualisieren:



Wir verwenden bewusst die Bezeichnung  $t_{AB}$  anstelle der häufig anzutreffenden Bezeichnung  $\overrightarrow{AB}$  für Verbindungsvektoren: Wir wollen ausschließlich mit den obigen Axiomen und den im weiteren Verlauf daraus abgeleiteten Resultaten arbeiten und der Gefahr vorbeugen, dass wir unbewusst Eigenschaften verwenden, die uns möglicherweise aus anderem Kontext bekannt sind und die für affine Räume im Allgemeinen eventuell gar nicht erfüllt sind. So gibt es etwa in allgemeinen affinen Räumen keinen Längen- oder Winkelbegriff.

Direkt aus der Definition ergeben sich die folgenden Eigenschaften eines affinen Raumes  $(X, T(X), \tau)$ :

- Für  $A \in X$  gilt stets  $t_{AA} = 0$ , denn aufgrund des Dreiecksaxioms (D) gilt  $t_{AA} + t_{AA} = t_{AA}$ , was die Behauptung unmittelbar impliziert.

- Für  $A, B \in X$  gilt  $t_{BA} = -t_{AB}$ , denn wegen des Dreiecksaxioms (D) ist  $t_{AB} + t_{BA} = t_{AA} = 0$ .
- Für jeden Punkt  $B \in X$  und jeden Vektor  $t \in T(X)$  existiert genau ein Punkt  $A \in X$  mit  $t = t_{AB}$ . Aus dem Abtragungsaxiom (A) folgt nämlich für jeden Punkt  $B \in X$  und jeden Vektor  $t \in T(X)$  die Existenz eines eindeutig bestimmten Punktes  $A \in X$  mit  $-t = t_{BA}$ , also mit  $t = t_{AB}$ .
- Für jeden Punkt  $A \in X$  erhalten wir eine Abbildung

$$\eta_A: X \rightarrow T(X), \quad P \mapsto t_{AP},$$

die nach dem Abtragbarkeitsaxiom (A) bijektiv ist. Diese bildet den Punkt  $A$  auf das Nullelement im Vektorraum  $T(X)$  ab. Wählen wir einen festen Punkt  $O \in X$  aus – einen sogenannten **Ursprung** – so heißt für einen Punkt  $P \in X$  der Vektor  $\eta_O(P) = t_{OP} \in T(X)$  der **Ortsvektor** von  $P$  (bezüglich  $O$ ). Dieser hängt von der Wahl von  $O$  ab. Man beachte, dass alle Punkte von  $X$  gleichberechtigt sind: Jeder Punkt kann als Ursprung gewählt werden.

**Definition 1.2 (aff. Raum).** Die **Dimension** von  $(X, T(X), \tau)$  ist durch  $\dim_K T(X)$  gegeben und wird  $\dim_K X$  bzw.  $\dim X$  bezeichnet. Die leere Menge erhält die Dimension  $-1$ . Speziell heißt ein affiner Raum  $X$

- eine **affine Ebene**, wenn  $\dim X = 2$  gilt,
- eine **affine Gerade**, wenn  $\dim X = 1$  gilt.

**Beispiel 1.3.** Ist  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$  und setzen wir

$$\tau_V: V \times V \rightarrow V, \quad (A, B) \mapsto t_{AB} := B - A,$$

so ist  $(V, V, \tau_V)$  ein affiner Raum,

denn: Das Abtragbarkeitsaxiom ist erfüllt, denn für  $A \in V$  und  $t \in V$  ist  $B = t + A$  offenbar das eindeutig bestimmte  $B \in V$  mit  $t = t_{AB} = B - A$  und das Dreiecksaxiom (D) gilt wegen  $t_{AB} + t_{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = t_{AC}$  für alle  $A, B, C \in V$ . #

Wir nennen  $(V, V, \tau_V)$  den zum Vektorraum  $V$  **assozierten affinen Raum**. In diesem Beispiel können Elemente aus  $V$  sowohl als Punkte als auch als Vektoren aufgefasst werden. Bei Wahl des Nullelements von  $V$  als Ursprung stimmt der Ortsvektor jedes Punktes  $P$  aus  $V$  mit  $P$  selbst überein.

Der zum Standardvektorraum  $K^n$  assoziierte affine Raum heißt der **affine Standardraum**  $\mathbb{A}^n(K)$  von Dimension  $n \in \mathbb{N}_0$ <sup>1</sup>.

Wir werden später sehen, dass jeder nichtleere affine Raum  $(X, T(X), \tau)$  nach Wahl eines Punktes kanonisch isomorph zu einem affinen Raum der Form  $(V, V, \tau_V)$  ist, nämlich zu  $(T(X), T(X), \tau_{T(X)})$ .

<sup>1</sup>In diesem Skript ist null keine natürliche Zahl und wir schreiben stets  $\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$  und  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Beispiel 1.4.** Setzen wir

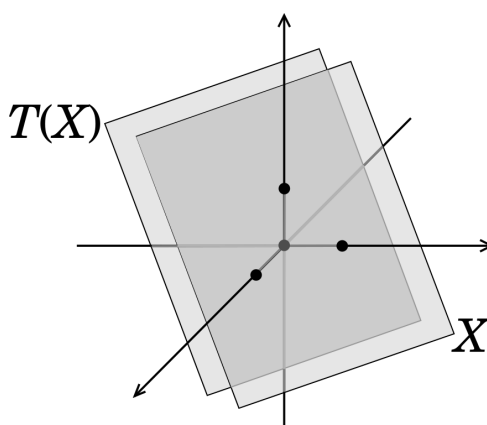
$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\},$$

$$T(X) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

so ist die Abbildung

$$\tau: \begin{cases} X \times X & \rightarrow T(X), \\ (A, B) & \mapsto B - A \end{cases}$$

wohldefiniert und  $(X, T(X), \tau)$  ist ein affiner Raum. Die Gültigkeit der Axiome ergibt sich analog zu Beispiel 1.3. Wegen  $\dim T(X) = 2$  handelt es sich bei  $(X, T(X), \tau)$  um eine affine Ebene, was mit unserer Anschauung übereinstimmt:



Wählen wir  $O = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  als Ursprung, so erhalten wir weiter

$$\eta_O: X \rightarrow T(X), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ist  $(X, T(X), \tau)$  ein affiner Raum, so erhalten wir für jedes  $t \in T(X)$  eine Abbildung

$$\tau_t: X \rightarrow X, \quad A \mapsto \eta_A^{-1}(t),$$

die sogenannte **Translation** um  $t$ , die einen Punkt  $A$  auf den eindeutig bestimmten Punkt  $B$  mit  $t_{AB} = t$  abbildet. Diese hat die folgenden Eigenschaften:



- $\tau_t$  ist bijektiv, denn für jeden Punkt  $B \in X$  existiert genau ein Punkt  $A \in X$  mit  $t = t_{AB}$ .
- Es ist  $\tau_0 = \text{id}$ , denn wegen  $t_{AA} = 0$  ist  $\tau_0(A) = A$  für alle  $A \in X$ .
- Für  $s, t \in T(X)$  ist  $\tau_{s+t} = \tau_s \circ \tau_t$ ,

denn: Für  $A \in X$  ergibt sich  $\tau_s(\tau_t(A))$  als der eindeutig bestimmte Punkt  $C \in X$  mit  $s = t_{BC}$ , wobei  $B$  der eindeutig bestimmte Punkt aus  $X$  mit  $t = t_{AB}$  ist. Es folgt  $s + t = t_{BC} + t_{AB} = t_{AC}$ , also  $C = \tau_{s+t}(A)$  und somit  $\tau_s(\tau_t(A)) = \tau_{s+t}(A)$ . #

In algebraischer Sprechweise kann man dies auch so ausdrücken, dass durch die Abbildung

$$T(X) \times X \rightarrow X, \quad (t, A) \mapsto \tau_t(A)$$

eine Operation der additiven Gruppe von  $T(X)$  auf  $X$  gegeben ist. Da offensichtlich für je zwei Punkte  $A, B \in X$  genau ein  $t \in T(X)$  mit  $\tau_t(A) = B$  und also mit  $t_{AB} = t$  existiert, ist diese Operation einfach transitiv. Umgekehrt kann man zeigen, dass man zu jeder einfach transitiven Operation der additiven Gruppe eines Vektorraums  $T(X)$  auf einer Menge  $X$  auf natürliche Weise einen affinen Raum erhält, für den die obige Operation mit der gegebenen übereinstimmt. Dies liefert eine alternative Charakterisierung affiner Räume, die in der Literatur recht verbreitet ist.

Von nun an vereinfachen wir die Bezeichnungen ein wenig und schreiben anstelle des Tripels  $(X, T(X), \tau)$  oft einfach nur  $X$ .

**Definition 1.5 (aff. Raum).** Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt ein **affiner Unterraum** von  $X$ , wenn entweder  $Y$  leer ist oder es ein  $P \in Y$  gibt, für das

$$T_P(Y) := \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y\}$$

ein Untervektorraum von  $T(X)$  ist.

**Proposition 1.6 (aff. Raum).** Sei  $Y \subseteq X$  ein nichtleerer affiner Unterraum. Dann ist für jedes  $P \in Y$  die Menge  $T_P(Y)$  ein Untervektorraum von  $T(X)$  und es gilt  $T_P(Y) = T_Q(Y)$  für je zwei  $P, Q \in Y$ . Wir schreiben daher

$$T(Y) := T_P(Y) \quad \text{für ein beliebiges } P \in Y.$$

Der affine Unterraum  $Y$  ist auf natürliche Weise selbst ein affiner Raum mit Translationsvektorraum  $T(Y)$ .

*Beweis.* Nach Definition 1.5 gibt es ein  $P \in Y$ , so dass  $T(Y) = T_P(Y)$  ein Untervektorraum von  $T(X)$  ist. Es ist daher offenbar genug, zu zeigen, dass für alle  $Q \in Y$  die Gleichheit  $T_Q(Y) = T_P(Y)$  gilt. Für ein beliebiges  $Q \in Y$  gilt nach dem Dreiecksaxiom (D)

$$t_{QA} = t_{QP} + t_{PA} \quad \text{für alle } A \in Y$$

und somit wegen  $t_{QP} = -t_{PQ} \in T_P(Y)$  tatsächlich

$$T_Q(Y) = t_{QP} + T_P(Y) = T_P(Y).$$

Um zu sehen, dass  $Y$  ein affiner Raum ist, bemerken wir, dass für  $A, B \in Y$  stets  $t_{AB} \in T_A(Y) = T(Y)$  ist, so dass sich  $\tau: X \times X \rightarrow T(X)$  zu einer Abbildung  $Y \times Y \rightarrow T(Y)$  einschränkt. Das Dreiecksaxiom (D) ist offensichtlich weiterhin erfüllt. Ist  $A \in Y$  und  $t \in T(Y)$ , dann existiert wegen des Abtragbarkeitsaxioms (A) für  $X$  ein eindeutig bestimmtes  $B \in X$  mit  $t = t_{AB}$ . Wegen  $t \in T(Y) = T_A(Y)$  gilt  $t = t_{AC}$  für ein  $C \in Y$  und deshalb  $B = C \in Y$ . Das Abtragbarkeitsaxiom (A) gilt also auch für  $Y$ .  $\square$

**Beispiel 1.7.** Seien  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  und  $X$  der zu  $V$  assoziierte affine Raum. Ist  $Y$  ein affiner Unterraum von  $X$ , dann ist  $Y$  entweder leer oder es existiert ein  $P \in Y$ , so dass

$$T_P(Y) = \{t_{PA} \mid A \in Y\} = \{A - P \mid A \in Y\}$$

ein Untervektorraum von  $V$  ist. Damit sind die nichtleeren affinen Unterräume von  $X$  genau durch die Mengen der Form

$$P + U \quad \text{mit } P \in V, U \subseteq V \text{ Untervektorraum}$$

gegeben. Dies sind genau die affinen Unterräume von  $V$ , wie sie typischerweise auch in Vorlesungen zu Linearer Algebra definiert werden. Im Fall der affinen Standardräume  $\mathbb{A}^n(K)$  (also für  $V = K^n$ ) sind diese gerade die Lösungsräume linearer Gleichungssysteme: Ist  $Y$  ein affiner Unterraum des  $\mathbb{A}^n(K)$ , dann existieren ein  $m \in \mathbb{N}$ , eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  mit Einträgen in  $K$  und ein  $b \in K^m$  mit

$$Y = \text{Lös}(A, b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$$

In der verlinkten [Folgerung 15.9](#) findet sich ein Beweis für Letzteres. Der zu nichtleerem  $Y$  gehörige Translationsvektorraum  $T(Y)$  ist hierbei als Lösungsmenge des zum entsprechenden linearen Gleichungssystems gehörigen homogenen linearen Gleichungssystems, d.h. durch  $T(Y) = \text{Lös}(A, 0)$  gegeben. Zur Wiederholung sei [dieses Quiz](#) empfohlen.

**Definition 1.8 (aff. Raum).** Die **Dimension** eines nichtleeren affinen Unterraums  $Y \subseteq X$  ist durch  $\dim_K T(Y)$  gegeben und wird  $\dim_K Y$  bzw.  $\dim Y$  bezeichnet. Sie ist wohldefiniert nach Proposition 1.6. Der leere affine Unterraum erhält wieder die Dimension  $-1$ . Speziell heißt ein affiner Unterraum  $Y \subseteq X$

- eine (**affine**) **Hyperebene** in  $X$ , wenn  $\dim Y = \dim X - 1$  gilt,
- eine (**affine**) **Ebene** in  $X$ , wenn  $\dim Y = 2$  gilt,
- eine (**affine**) **Gerade** in  $X$ , wenn  $\dim Y = 1$  gilt.

Geraden in affinen Räumen werden wir meist mit kleinen Buchstaben bezeichnen.

**Beispiel 1.9.** Wir betrachten den affinen Raum  $X$  aus Beispiel 1.4. Nach Beispiel 1.7 ist  $X$  selbst ein affiner Unterraum des  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ , und zwar als affine Ebene eine Hyperebene. In  $X$  ist beispielsweise durch

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_2 + x_3 = 1 \right\} = \text{Lös} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$



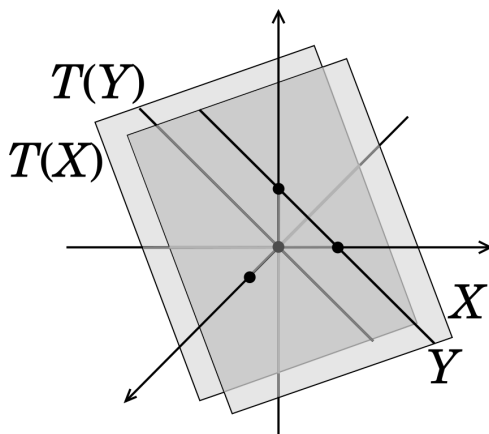
ein affiner Unterraum gegeben. Wir wollen uns davon direkt mit der Definition affiner Unterräume überzeugen: Es gilt etwa

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Y$$

und also

$$\begin{aligned} T_P(Y) &= \{t_{PA} \mid A \in Y\} = \{A - P \mid A \in Y\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_2 + x_3 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_2 + x_3 = 0 \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \end{aligned}$$

was offenbar ein Untervektorraum von  $T(X)$  ist. Dieses Resultat für  $T(Y) = T_P(Y)$  ist im Hinblick auf die Ausführungen in Beispiel 1.7 natürlich wenig überraschend.



Der affine Unterraum  $Y$  ist eine affine Gerade und als solche eine Hyperebene in  $X$ , jedoch natürlich nicht in  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ .

**Proposition 1.10 (aff. Raum).** Sei  $(Y_i)_{i \in I}$  eine Familie affiner Unterräume von  $X$ . Dann gilt:

- $Y := \bigcap_{i \in I} Y_i$  ist wieder ein affiner Unterraum von  $X$ .
- Der Durchschnitt aller affinen Unterräume  $Y \subseteq X$  mit  $\bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq Y$  heißt der **Verbindungsraum**  $\bigvee_{i \in I} Y_i$  und ist wieder ein affiner Unterraum von  $X$ . Im Fall  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  schreiben wir auch  $\bigvee_{i \in I} Y_i = Y_1 \vee Y_2 \vee \dots \vee Y_n$ .

*Beweis.* Im Beweis von Behauptung (a) dürfen wir ohne Einschränkung  $Y \neq \emptyset$  annehmen, da sonst nichts zu zeigen ist. Dann ist für einen beliebigen Punkt  $P \in Y$

$$T_P(Y) = \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in \bigcap_{i \in I} Y_i\} = \bigcap_{i \in I} \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y_i\} = \bigcap_{i \in I} T(Y_i) \quad (1.1)$$

als Durchschnitt von Untervektorräumen von  $T(X)$  selbst wieder ein Untervektorraum von  $T(X)$ . Damit ist Behauptung (a) gezeigt. Aussage (b) ergibt sich sofort aus Aussage (a).  $\square$

Der Verbindungsraum  $\bigvee_{i \in I} Y_i$  ist offenbar der kleinste affine Unterraum von  $X$ , der sämtliche  $Y_i$  enthält.

**Definition 1.11 (aff. Raum).** Für Punkte  $A, B \in X$  mit  $A \neq B$  setzen wir

$$\overleftrightarrow{AB} := \{A\} \vee \{B\}$$

und nennen dies die **Verbindungsgerade** von  $A$  und  $B$ .

**Proposition 1.12 (aff. Raum).** Seien  $A, B \in X$  mit  $A \neq B$ . Dann ist

$$\overleftrightarrow{AB} = \{\tau_t(A) \mid t \in \langle t_{AB} \rangle\}$$

und

$$T(\overleftrightarrow{AB}) = \langle t_{AB} \rangle.$$

Insbesondere ist  $\overleftrightarrow{AB}$  tatsächlich eine Gerade.

*Beweis.* Das ist eine Übungsaufgabe.  $\square$

Ist  $X$  der zu einem Vektorraum  $V$  assoziierte affine Raum, so ist  $\tau_t(A) = A + t$  und deshalb  $\overleftrightarrow{AB} = A + \langle B - A \rangle$ .

**Proposition 1.13 (aff. Raum).** Seien  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  nichtleere affine Unterräume von  $X$ . Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = \begin{cases} T(Y_1) + T(Y_2) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ (T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(\overleftrightarrow{P_1 P_2}) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, \end{cases}$$

wobei  $P_1, P_2$  beliebige Punkte aus  $Y_1$  bzw.  $Y_2$  sind.

*Beweis.* Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

**Fall 1:**  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2), \quad (1.2)$$

denn: Für einen beliebigen fest gewählten Punkt  $P \in Y_1 \cap Y_2$  gilt nach Proposition 1.6

$$\begin{aligned} T(Y_1) \cup T(Y_2) &= \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y_1\} \cup \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y_2\} \\ &= \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y_1 \cup Y_2\} \\ &\subseteq \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y_1 \vee Y_2\} \\ &= T(Y_1 \vee Y_2). \end{aligned}$$

Da mit einer beliebigen Teilmenge eines gegebenen Vektorraums auch deren lineare Hülle in diesem Vektorraum enthalten ist, folgt

$$T(Y_1) + T(Y_2) \subseteq T(Y_1 \vee Y_2).$$

Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir

$$Y := \{\tau_t(P) \mid t \in T(Y_1) + T(Y_2)\} \subseteq X.$$

Dies ist ein affiner Unterraum von  $X$  mit  $T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2)$ . Es ist nämlich  $P = \tau_0(P) \in Y$  und

$$T_P(Y) = \{t_{PA} \mid A \in Y\} = \{t_{P\tau_t(P)} \mid t \in T(Y_1) + T(Y_2)\} = T(Y_1) + T(Y_2),$$

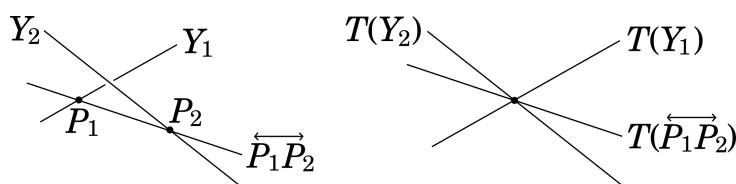
wobei wir  $t_{P\tau_t(P)} = t$  verwendet haben. Wegen  $Y_1, Y_2 \subseteq Y$  ist auch  $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$  und es ergibt sich

$$T(Y_1 \vee Y_2) \subseteq T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

#

**Fall 2:**  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ . Seien  $P_1 \in Y_1$  und  $P_2 \in Y_2$ . Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = (T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(\overrightarrow{P_1P_2}), \quad (1.3)$$



denn: Aus  $\overrightarrow{P_1P_2} \subseteq Y_1 \vee Y_2$  folgt

$$\begin{aligned} T(Y_1 \vee Y_2) &= T(Y_1 \vee \overrightarrow{P_1P_2} \vee Y_2) \stackrel{(1.2)}{=} T(Y_1) + T(\overrightarrow{P_1P_2} \vee Y_2) \stackrel{(1.2)}{=} T(Y_1) + T(\overrightarrow{P_1P_2}) + T(Y_2) \\ &= (T(Y_1) + T(Y_2)) + T(\overrightarrow{P_1P_2}). \end{aligned}$$

Es verbleibt die Direktheit der Summe ganz rechts zu zeigen. Hierfür genügt es einzusehen, dass der Erzeuger  $t_{P_1P_2}$  von  $T(\overrightarrow{P_1P_2})$  nicht in  $T(Y_1) + T(Y_2)$  liegt. Wäre dies aber der Fall, so gäbe es nach Proposition 1.6 je einen Punkt  $Q_1 \in Y_1$  und  $Q_2 \in Y_2$  mit

$$t_{P_1P_2} = t_{P_1Q_1} - t_{P_2Q_2}.$$

Aus

$$t_{Q_1 Q_2} = t_{Q_1 P_1} + t_{P_1 P_2} + t_{P_2 Q_2} = t_{Q_1 P_1} + (t_{P_1 Q_1} - t_{P_2 Q_2}) + t_{P_2 Q_2} = 0$$

folgte dann  $Q_1 = Q_2$  und also  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$  im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. #

□

**Satz 1.14 (aff. Raum).** Es gelte  $\text{char}(K) \neq 2$ . Für je zwei affine Unterräume

$$Y_1, Y_2 \subseteq X \quad \text{mit} \quad Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \nexists P \in X \text{ mit } Y_1 = Y_2 = \{P\}$$

gilt dann

$$Y_1 \vee Y_2 = \bigcup_{\substack{P_1 \neq P_2 \\ P_1 \in Y_1, P_2 \in Y_2}} \overleftrightarrow{P_1 P_2};$$

der Verbindungsraum von  $Y_1$  und  $Y_2$  ist also die Vereinigung der Verbindungsgeraden zwischen Punkten in  $Y_1$  und Punkten in  $Y_2$ .

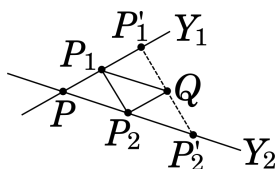
*Beweis.* Da für beliebige voneinander verschiedene  $P_1 \in Y_1$  und  $P_2 \in Y_2$  die Verbindungsgerade  $\overleftrightarrow{P_1 P_2} = \{P_1\} \vee \{P_2\}$  im affinen Unterraum  $Y_1 \vee Y_2$  enthalten ist, ist die rechte Seite der Behauptung in der linken Seite enthalten.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion wählen wir einen beliebigen Punkt  $P \in Y_1 \cap Y_2$ . Ist  $Q \in Y_1 \vee Y_2$ , so gilt  $t_{PQ} \in T(Y_1 \vee Y_2)$  und es gibt nach Proposition 1.13 je einen Punkt  $P_1 \in Y_1$  und  $P_2 \in Y_2$  mit

$$t_{PQ} = t_{PP_1} + t_{PP_2}.$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Punkte  $P, P_1, P_2$  paarweise verschieden sind,

denn: Ist  $P = P_1 \neq P_2$ , so ist  $Q \in \overleftrightarrow{P_1 P_2}$ , ebenso für  $P = P_2 \neq P_1$ . Im Fall  $P_1 = P_2 \neq P$  ist  $t_{PQ} = 2t_{PP_2}$  und deshalb  $Q \in \overleftrightarrow{PP_2}$ . Im Fall  $P = P_1 = P_2$  ist  $t_{PQ} = 0$ , also  $P = Q$ . Nach Voraussetzung enthält jedoch einer der beiden Räume  $Y_1, Y_2$  einen von  $P$  verschiedenen Punkt  $R$ , es ist also  $Q \in \overleftrightarrow{PR}$  und somit in der rechten Seite enthalten. #



Wir setzen

$$P'_1 := (2t_{PP_1})(P) \in Y_1, \quad P'_2 := (2t_{PP_2})(P) \in Y_2.$$

Wäre  $P'_1 = P'_2$ , dann folgte  $2t_{PP_1} = 2t_{PP_2}$  und wegen  $\text{char}(K) \neq 2$  schließlich  $P_1 = P_2$ , was einen Widerspruch darstellt. Es gilt also  $P'_1 \neq P'_2$  und

$$t_{P'_1P'_2} = t_{PP'_2} - t_{PP'_1} = 2t_{PP_2} - 2t_{PP_1} = 2t_{P_1P_2}$$

sowie

$$\begin{aligned} t_{P'_1Q} &= t_{P'_1P} + t_{PQ} = -t_{PP'_1} + t_{PQ} = -2t_{PP_1} + t_{PQ} \\ &= -2t_{PP_1} + (t_{PP_1} + t_{PP_2}) = t_{P_1P} + t_{PP_2} = t_{P_1P_2}. \end{aligned}$$

Es folgt  $t_{P'_1Q} = \frac{1}{2}t_{P'_1P'_2}$  und also  $Q \in \overleftrightarrow{P'_1P'_2}$  wegen Proposition 1.12. □

In Analogie zur **Dimensionsformel für Untervektorräume** geben wir nun auch im Kontext affiner Unterräume eine derartige Formel an:

**Satz 1.15** (Dimensionsformel für affine Unterräume, **aff. Raum**). *Seien  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  zwei nichtleere affine Unterräume. Dann gilt*

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \begin{cases} \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(Y_1 \cap Y_2) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset. \end{cases}$$

*Beweis.* Mit der Dimensionsformel für Untervektorräume gilt

$$\begin{aligned} \dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\ &\stackrel{(1.2),(1.3)}{=} \begin{cases} \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim((T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(\overleftrightarrow{P_1P_2})) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, P_1 \in Y_1, P_2 \in Y_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \begin{cases} \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(Y_1 \cap Y_2) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

□

**Definition 1.16** (**aff. Raum**). *Zwei nichtleere affine Unterräume  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  heißen*

- *parallel*, in Zeichen  $Y_1 \parallel Y_2$ , wenn  $T(Y_1) \subseteq T(Y_2)$  oder  $T(Y_2) \subseteq T(Y_1)$  gilt.
- *windschief*, wenn sie nicht parallel sind und leeren Durchschnitt haben.

**Bemerkung 1.17 (aff. Raum).** Ist von zwei nichtleeren affinen Unterräumen  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  einer eine Hyperebene, so sind  $Y_1, Y_2$  nicht windschief,

denn: Ohne Einschränkung sei  $Y_1$  eine Hyperebene und  $Y_2 \neq X$ . Wären  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  windschief, so gälte nach der Dimensionsformel 1.15

$$\begin{aligned} \dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 \\ &> (\dim X - 1) + \dim Y_2 - \dim Y_2 + 1 \\ &= \dim X. \end{aligned}$$

Das kann nicht sein, da  $Y_1 \vee Y_2$  ein affiner Unterraum von  $X$  ist. #

Insbesondere gibt es in der affinen Standardebene  $\mathbb{A}^2(K)$  keine zwei windschiefen Geraden; je zwei Geraden  $g, h \subseteq \mathbb{A}^2(K)$  sind also parallel oder haben nichtleeren Durchschnitt.

**Bemerkung 1.18 (aff. Raum).** Die Aussage von Satz 1.14 wird falsch, wenn wir die Voraussetzung  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$  weglassen,

denn: Betrachten wir die beiden windschiefen Geraden

$$Y_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Nach der Dimensionsformel 1.15 gilt einerseits

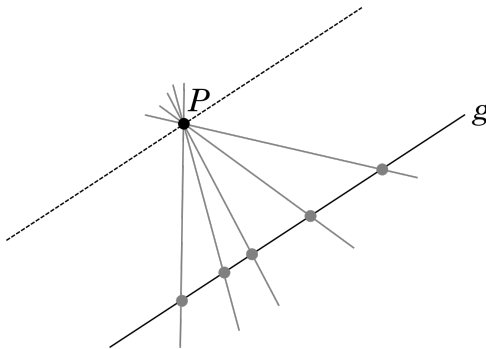
$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - 0 + 1 = 3$$

und somit  $Y_1 \vee Y_2 = \mathbb{R}^3$ . Andererseits kann man durch Aufstellen einer allgemeinen Geradengleichung leicht überprüfen, dass etwa der Punkt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

auf keiner Verbindungsgerade  $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$  mit  $P_1 \in Y_1$  und  $P_2 \in Y_2$  liegt. #

Es lässt sich bereits im  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  ein Gegenbeispiel finden: In der Abbildung ist der Verbindungsraum des Punktes  $P$  und der Geraden  $g$  der ganze  $\mathbb{R}^2$ , die gestrichelte Gerade liegt mit Ausnahme des Punktes  $P$  jedoch nicht in der Vereinigung der Verbindungsgeraden.





## 1.2 Affine Abbildungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Abbildungen zwischen affinen Räumen. Wir gehen dabei stillschweigend davon aus, dass die beteiligten Räume nichtleer sind.

**Definition 1.19 (aff. Raum).** Sei  $(Y, T(Y), \sigma)$  ein affiner Raum über dem Körper  $K$ . Eine Abbildung  $\varphi: X \rightarrow Y$  heißt **affine Abbildung**, wenn es eine lineare Abbildung  $T(\varphi): T(X) \rightarrow T(Y)$  mit

$$t_{\varphi(A)\varphi(B)} = T(\varphi)(t_{AB}) \quad \text{für alle } A, B \in X, \quad (1.4)$$

und also mit  $\sigma(\varphi(A), \varphi(B)) = T(\varphi)(\tau(A, B))$ , gibt.<sup>2</sup> Eine bijektive affine Abbildung heißt auch eine **Affinität** oder ein **Isomorphismus affiner Räume**.

**Beispiel 1.20 (aff. Raum).** Offensichtlich sind die Abbildungen

$$\text{id}: \begin{cases} X & \rightarrow X, \\ A & \mapsto A \end{cases} \quad \text{und} \quad *: \begin{cases} X & \rightarrow \{*\}, \\ A & \mapsto * \end{cases}$$

affine Abbildungen mit  $T(\text{id})(t) = t$  und  $T(*) (t) = 0_{T(\{*\})}$  für alle  $t \in T(X)$ . Für jedes  $t \in T(X)$  ist die Translation  $\tau_t: X \rightarrow X$  eine Affinität mit  $T(\tau_t) = \text{id}$ .

Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen affinen Abbildungen und linearen Abbildungen zwischen den zugehörigen Translationsvektorräumen, den wir in den folgenden beiden Propositionen untersuchen werden:

**Proposition 1.21 (aff. Raum).** Seien  $(Y, T(Y), \sigma)$  ein affiner Raum über dem Körper  $K$  und  $\varphi: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Für  $O \in X$  setzen wir

$$\Phi_O: \begin{cases} T(X) & \rightarrow T(Y), \\ t_{OA} & \mapsto t_{\varphi(O)\varphi(A)}. \end{cases}$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $\varphi$  ist affin.
- (ii) Für jeden Punkt  $O \in X$  ist  $\Phi_O$  linear.
- (iii) Es gibt einen Punkt  $O$  in  $X$ , so dass  $\Phi_O$  linear ist.

In diesem Fall ist  $\Phi_O = T(\varphi)$ , insbesondere ist  $\Phi_O$  unabhängig von der Wahl von  $O$ .

*Beweis.* Die Implikation (i) $\implies$ (ii) ergibt sich direkt aus Definition 1.19, und die Implikation (ii) $\implies$ (iii) ist trivial. Es verbleibt der Nachweis von (iii) $\implies$ (i). Für beliebige Punkte  $A, B \in X$  gilt

$$\Phi_O(t_{AB}) = \Phi_O(t_{OB} - t_{OA}) = \Phi_O(t_{OB}) - \Phi_O(t_{OA}) = t_{\varphi(O)\varphi(B)} - t_{\varphi(O)\varphi(A)} = t_{\varphi(A)\varphi(B)}.$$

Die Proposition folgt dann direkt aus Definition 1.19. □

<sup>2</sup>Die Notation  $T(\varphi)$  ist dadurch gerechtfertigt, dass  $T(\varphi)$  nach (1.4) bereits eindeutig durch  $\varphi$  festgelegt ist.

**Satz 1.22 (aff. Raum).** Sei  $(Y, T(Y), \sigma)$  ein affiner Raum über dem Körper  $K$ . Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung  $\Phi: T(X) \rightarrow T(Y)$  und jedem Paar  $(O, O')$  mit  $O \in X$  und  $O' \in Y$  genau eine affine Abbildung

$$\varphi: X \rightarrow Y \quad \text{mit } \varphi(O) = O' \text{ und } T(\varphi) = \Phi.$$

*Beweis.* Zum Nachweis der Existenz definieren wir  $\varphi$  über die Beziehung  $t_{O'\varphi(P)} = \Phi(t_{OP})$  für  $P \in X$ . Es ist dann

$$t_{O'\varphi(O)} = \Phi(t_{OO}) = \Phi(0) = 0$$

und somit  $\varphi(O) = O'$ . Darüber hinaus ist

$$\Phi_O(t_{OP}) = t_{\varphi(O)\varphi(P)} = t_{O'\varphi(P)} = \Phi(t_{OP})$$

und also  $\Phi_O = \Phi$  linear. Aufgrund von Proposition 1.21 ist  $\varphi$  affin. Für den Nachweis der Eindeutigkeit von  $\varphi$  bemerken wir, dass aus  $T(\varphi) = \Phi$  und  $\varphi(O) = O'$  sofort

$$t_{O'\varphi(P)} = t_{\varphi(O)\varphi(P)} = T(\varphi)(t_{OP}) = \Phi(t_{OP}) \quad \text{für alle } P \in X$$

folgt, was  $\varphi$  eindeutig festlegt. □

**Korollar 1.23 (aff. Raum).** Sei  $O \in X$  fest gewählt. Dann existiert in den zu  $T(X)$  assoziierten affinen Raum  $(T(X), T(X), \tau_{T(X)})$  eine eindeutig bestimmte Affinität  $\varphi: X \rightarrow T(X)$  mit  $\varphi(O) = 0$  und  $T(\varphi) = \text{id}$ , nämlich  $\varphi = \eta_O$ . Das heißt, dass  $X$  nach Wahl eines Ursprungs kanonisch isomorph zu dem zu  $T(X)$  assoziierten affinen Raum ist.

**Korollar 1.24 (aff. Raum).** Seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $(V, V, \tau_V)$  bzw.  $(W, W, \tau_W)$  die jeweiligen assoziierten affinen Räume. Weiter seien  $O \in V, O' \in W$  und  $\Phi: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann existiert genau eine affine Abbildung  $\varphi: V \rightarrow W$  mit  $\varphi(O) = O'$  und  $T(\varphi) = \Phi$ . Diese ist gegeben durch

$$\varphi(A) = \Phi(A) + O' - \Phi(O) \quad \text{für alle } A \in V.$$

Jede affine Abbildung  $\varphi$  von  $V$  nach  $W$  mit  $\varphi(O) = O'$  ist von dieser Form (mit  $\Phi = T(\varphi)$ ).

*Beweis.* Existenz und Eindeutigkeit von  $\varphi$  folgen direkt aus Satz 1.22. Für  $A \in V$  ist

$$\varphi(A) - O' = t_{O'\varphi(A)} = \Phi(t_{OA}) = \Phi(A - O) = \Phi(A) - \Phi(O).$$

□

**Beispiel 1.25.** Als Spezialfall von Korollar 1.24 erhalten wir, dass es zu jedem  $M \in K^{n \times n}$  und zu jedem  $P \in K^n$  genau eine affine Abbildung

$$\varphi_{M,P}: K^n \rightarrow K^n \quad \text{mit } \varphi_{M,P}(0) = P \text{ und } T(\varphi_{M,P})(A) = MA \text{ für alle } A \in K^n$$

gibt. Offensichtlich sind hierdurch alle affinen Abbildungen  $\varphi$  von  $K^n$  auf sich selbst mit  $\varphi(0) = P$  beschrieben und es gilt

$$\varphi_{M,P}(A) = MA + P \quad \text{für alle } A \in K^n.$$

Im Fall  $M \in \text{GL}_n(K)$  ist  $\varphi_{M,P}$  eine Affinität und die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\varphi_{M,P}^{-1}(A) = M^{-1}A - M^{-1}P \quad \text{für alle } A \in K^n.$$

Wir werden in Proposition 1.26 mit den Parallelprojektionen eine weitere Klasse affiner Abbildungen einführen, müssen vorher aber noch ein wenig ausholen. Sei also  $Y \subseteq X$  ein affiner Unterraum eines gegebenen affinen Raumes  $X$  und sei  $W \subseteq T(X)$  ein Untervektorraum mit

$$T(X) = W \oplus T(Y). \quad (1.5)$$

Setzen wir

$$W(P) := \{A \in X \mid t_{PA} \in W\}$$

für einen beliebigen vorgegebenen Punkt  $P \in X$ , dann ist  $W(P)$  ein affiner Unterraum von  $X$  mit  $P \in W(P)$  und  $T(W(P)) = W$ , denn  $T_P(W(P)) = \{t_{PA} \mid A \in W(P)\} = W$ . Insbesondere gilt  $W(P) \parallel W(Q)$  für beliebige  $P, Q \in X$ . Für ein beliebiges  $P \in X$  gilt nun

$$\dim(W(P) \cap Y) = 0,$$

denn: Gälte  $W(P) \cap Y = \emptyset$ , so folgte nach der Dimensionsformel 1.15

$$\begin{aligned} \dim(W(P) \vee Y) &= \dim W(P) + \dim Y - \dim(T(W(P)) \cap T(Y)) + 1 \\ &= \dim W + \dim T(Y) - \dim(W \cap T(Y)) + 1 \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \dim X + 1. \end{aligned}$$

Das kann nicht sein, da  $W(P) \vee Y$  ein affiner Unterraum von  $X$  ist. Es gilt daher  $W(P) \cap Y \neq \emptyset$  und es gilt

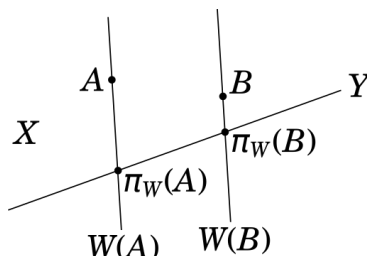
$$\begin{aligned} \dim(W(P) \cap Y) &= \dim(T(W(P) \cap Y)) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \dim(T(W(P)) \cap T(Y)) \\ &= \dim(W \cap T(Y)) \\ &\stackrel{(1.5)}{=} 0. \end{aligned}$$

#

**Proposition 1.26 (aff. Raum).** Sei  $Y \subseteq X$  ein affiner Unterraum und sei  $W \subseteq T(X)$  ein Untervektorraum mit  $T(X) = W \oplus T(Y)$ . Dann ist die Abbildung

$$\pi_W^{X,Y} := \pi_W: \begin{cases} X & \rightarrow Y, \\ P & \mapsto \pi_W(P) \end{cases} \quad \text{mit } \{\pi_W(P)\} := W(P) \cap Y \text{ und } W(P) := \{A \in X \mid t_{PA} \in W\}$$

affin und es ist  $\pi_W^{X,Y}|_Y = \text{id}_Y$ , insbesondere ist  $\pi_W^{X,Y}$  surjektiv. Wir nennen  $\pi_W$  die **Parallelprojektion** längs  $W$ .



*Beweis.* Nach unseren Vorüberlegungen ist  $\pi_W$  wohldefiniert.

Um nachzuweisen, dass  $\pi_W$  eine affine Abbildung ist, betrachten wir zwei Punkte  $A, B \in X$ . Dann gilt

$$t_{AB} = t_{A\pi_W(A)} + t_{\pi_W(A)\pi_W(B)} + t_{\pi_W(B)B} = (t_{A\pi_W(A)} - t_{B\pi_W(B)}) + t_{\pi_W(A)\pi_W(B)}.$$

Offensichtlich liegt der erste Summand rechts in  $W$  und der zweite in  $T(Y)$ . Wegen der Direktheit der Summation in (1.5) ist diese Zerlegung eindeutig. Über die Zuordnung

$$t_{AB} \mapsto t_{\pi_W(A)\pi_W(B)}$$

ist daher eine Abbildung  $T(\pi_W): T(X) \rightarrow T(Y)$  definiert. Nach Konstruktion ist diese gerade die kanonische Projektion von  $T(X)$  auf  $T(Y)$  und insbesondere eine lineare Abbildung. Das zeigt, dass  $\pi_W$  eine affine Abbildung ist.

Schließlich gilt für ein beliebiges  $P \in Y$

$$\{\pi_W(P)\} = W(P) \cap Y = \{A \in Y \mid t_{PA} \in W\} = \{P\},$$

was unmittelbar  $\pi_W^{X,Y}|_Y = \text{id}_Y$  zeigt. □

Wir haben jetzt einige Beispiele affiner Abbildungen kennengelernt. In Proposition 1.30 werden wir zeigen, dass nicht jede Abbildung zwischen zwei affinen Räumen affin ist, indem wir eine geometrische Eigenschaft affiner Abbildungen herleiten, die offenkundig nicht allgemeingültig ist. Vorher müssen wir noch einige Begriffe einführen:

**Definition 1.27 (aff. Raum).** Eine Teilmenge  $M \subseteq X$  heißt **kollinear**, falls es eine Gerade  $g \subseteq X$  mit  $M \subseteq g$  gibt.

**Definition 1.28 (aff. Raum).** Sei  $n \geq 3$  eine natürliche Zahl und seien  $A_1, \dots, A_n$  nicht kollineare und paarweise verschiedene Punkte, die in einer gemeinsamen Ebene  $E \subseteq X$  liegen. Dann heißt das (geordnete)  $n$ -Tupel

$$\Pi A_1 \dots A_n := (A_1, \dots, A_n)$$

das  $n$ -Eck mit den Eckpunkten  $A_1, \dots, A_n$ . Im wichtigen Spezialfall eines Dreiecks schreiben wir für  $\Pi A_1 A_2 A_3$  auch  $\triangle A_1 A_2 A_3$ .

Drei Eckpunkte  $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$  von  $\Pi A_1 \dots A_n$  heißen **aufeinanderfolgend**, falls

$$i_1 \equiv i_2 - 1 \equiv i_3 - 2 \pmod{n}$$

gilt.  $\Pi A_1 \dots A_n$  heißt **entartet**, falls es drei aufeinanderfolgende Eckpunkte gibt, die kollinear sind, und ansonsten **nicht entartet**.

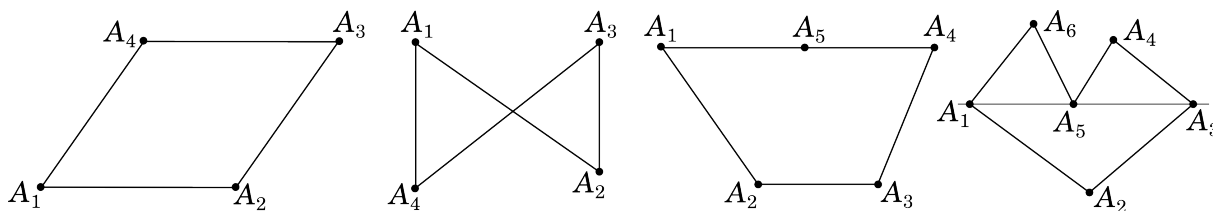


Abbildung 1.1: Nur das dritte  $n$ -Eck ist entartet.

**Definition 1.29 (aff. Raum).** Ein nicht entartetes Viereck  $\Pi ABCD$  heißt ein **Parallelogramm**, falls  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  und  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$  gilt.

In der folgenden Proposition 1.30 zeigen wir nun, dass affine Abbildungen – cum grano salis – Parallelogramme auf Parallelogramme abbilden:

**Proposition 1.30 (aff. Raum).** Sei  $(Y, T(Y), \sigma)$  ein affiner Raum über dem Körper  $K$ , sei  $\varphi: X \rightarrow Y$  eine affine Abbildung und sei  $\Pi ABCD$  ein Parallelogramm in  $X$ . Sind die Bildpunkte  $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)$  paarweise verschieden und nicht kollinear, so ist

$$\varphi(\Pi ABCD) = \Pi \varphi(A) \varphi(B) \varphi(C) \varphi(D)$$

wieder ein Parallelogramm.

*Beweis.* Nach Definition 1.19 gibt es eine lineare Abbildung  $T(\varphi): T(X) \rightarrow T(Y)$  mit (1.4). Für je vier Punkte  $A, B, C, D \in X$  gilt daher

$$t_{AB} = t_{CD} \implies t_{\varphi(A)\varphi(B)} = t_{\varphi(C)\varphi(D)}.$$

Gelten  $A \neq B, C \neq D, \varphi(A) \neq \varphi(B)$  und  $\varphi(C) \neq \varphi(D)$ , so folgt hieraus

$$T(\overleftrightarrow{AB}) = T(\overleftrightarrow{CD}) \implies T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) = T(\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}). \quad (1.6)$$

Für ein beliebiges Parallelogramm  $\Pi ABCD$  gilt nach den Definitionen 1.16 und 1.29

$$T(\overleftrightarrow{AB}) = T(\overleftrightarrow{CD}) \quad \text{und} \quad T(\overleftrightarrow{AD}) = T(\overleftrightarrow{BC}).$$

Unter der Voraussetzung, dass  $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)$  paarweise verschieden sind, erhalten wir daraus mit (1.6)

$$T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) = T(\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \quad \text{und} \quad T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(D)}) = T(\overleftrightarrow{\varphi(B)\varphi(C)}) \quad (1.7)$$

und also

$$\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \parallel \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} \quad \text{und} \quad \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(D)} \parallel \overleftrightarrow{\varphi(B)\varphi(C)}. \quad (1.8)$$

Sind  $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)$  zusätzlich nicht kollinear, so gilt

$$\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \cap \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} = \emptyset, \quad (1.9)$$

denn: Wäre dem nicht so, gälte einerseits nach der Dimensionsformel 1.15

$$\begin{aligned} & \dim(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \\ &= \dim \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} + \dim \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} - \dim(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \cap \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

und andererseits wegen der Parallelität der Geraden

$$\begin{aligned} & \dim(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \\ &= \dim T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \dim(T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) + T(\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)})) \\ &\stackrel{(1.7)}{=} 1. \end{aligned}$$

Das kann nicht sein. #

Wenden wir nun die Dimensionsformel 1.15 an, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \dim(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \\ &= \dim \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} + \dim \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} - \dim(T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) \cap T(\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)})) + 1 \\ &\stackrel{(1.7)}{=} 1 + 1 - 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Die Geraden  $\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$  und  $\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}$  und insbesondere die vier Punkte  $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)$  liegen also einer gemeinsamen Ebene. Es folgt, dass unter diesen Voraussetzungen  $\Pi\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)$  ein Viereck, nach (1.9) nicht ausgeartet und nach (1.8) sogar ein Parallelogramm ist. □

### 1.3 Affine Koordinaten

Wir werden uns in diesem Abschnitt auf nichtleere endlichdimensionale affine Räume beschränken.

**Definition 1.31 (aff. Raum).** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ein  $(n+1)$ -Tupel  $(A_0, \dots, A_n)$  von Punkten in  $X$  heißt **affin unabhängig** bzw. eine **affine Basis** von  $X$ , wenn das  $n$ -Tupel  $(t_{A_0A_1}, \dots, t_{A_0A_n})$  in  $T(X)$  linear unabhängig bzw. eine Basis ist.

**Beispiel 1.32 (aff. Raum).** Ist  $O \in X$  und  $(t_1, \dots, t_n)$  eine Basis von  $T(X)$ , so ist offensichtlich durch

$$(O, \tau_{t_1}(O), \dots, \tau_{t_n}(O))$$

eine affine Basis von  $X$  gegeben. Ist insbesondere  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  und  $O \in V$ , dann ist

$$(O, O + v_1, \dots, O + v_n)$$

eine affine Basis von  $(V, V, \tau_V)$ . Im Fall  $V = K^n$  mit der Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  und  $O = 0$  ist

$$(0, E_1, \dots, E_n) \quad \text{mit } E_i := e_i(0) = e_i - 0 = e_i \text{ f\u00fcr alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

eine affine Basis von  $\mathbb{A}^n(K)$ , die affine Standardbasis.

Die \u00dcberlegungen aus Beispiel 1.32 zeigen insbesondere, dass jeder (nichtleere endlichdimensionale) affine Raum  $X$  eine affine Basis hat. Jede affine Basis von  $X$  besteht aus  $\dim(X) + 1$  Elementen.

**Beispiel 1.33 (aff. Raum).** Wir betrachten den affinen Unterraum  $X$  des  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  aus Beispiel 1.4, also

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\}, \quad T(X) = \langle t_1, t_2 \rangle \quad \text{mit } t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

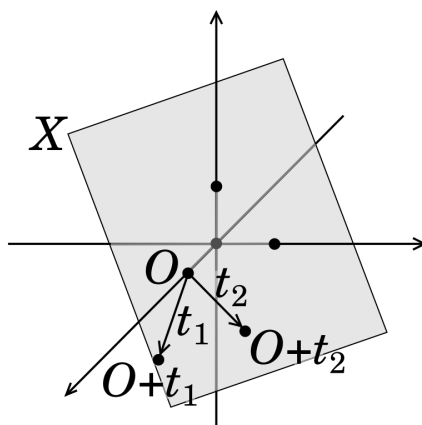
und w\u00e4hlen

$$O = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$(O, \tau_{t_1}(O), \tau_{t_2}(O)) = (O, O + t_1, O + t_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine affine Basis von  $X$ .



**Bemerkung 1.34 (aff. Raum).** Die Definition der affinen Unabhängigkeit hängt nicht von der Reihenfolge der Punkte ab; genauer gilt

$$(A_0, \dots, A_n) \text{ affin unabhängig} \iff (A_{\sigma(0)}, \dots, A_{\sigma(n)}) \text{ affin unabhängig für alle } \sigma \in \hat{S}_n,$$

wobei  $\hat{S}_n$  die Menge der bijektiven Selbstabbildungen der Menge  $\{0, \dots, n\}$  bezeichnet,

denn: Da die linke Seite sofort aus der rechten folgt und die lineare Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren nicht von deren Reihenfolge abhängt, langt es zu zeigen, dass unter Annahme der linken Seite für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Menge

$$\{t_{A_i A_j} \mid j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}\}$$

linear unabhängig ist. Dem ist so, denn für alle  $\lambda_j \in K$  mit  $j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}$  gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \lambda_j t_{A_i A_j} \\ \implies 0 &= -\lambda_0 t_{A_0 A_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j (t_{A_i A_0} + t_{A_0 A_j}) \\ \implies 0 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j t_{A_0 A_j} - \left( \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \right) t_{A_0 A_i} \\ \stackrel{\text{linke Seite}}{\implies} \lambda_j &= 0 \text{ für alle } j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

#

**Satz 1.35 (aff. Raum).** Seien  $(A_0, \dots, A_n)$  eine affine Basis von  $X$ ,  $Y$  ein affiner Raum über  $K$  und  $B_0, \dots, B_n$  beliebige Punkte in  $Y$ . Dann gibt es genau eine affine Abbildung

$$\varphi: X \rightarrow Y \quad \text{mit } \varphi(A_i) = B_i \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Weiter gilt:

- (a)  $\varphi(X) = \bigvee_{i=0}^n \{B_i\}$ .
- (b)  $\varphi$  injektiv  $\iff (B_0, \dots, B_n)$  ist affin unabhängig.
- (c)  $\varphi$  bijektiv  $\iff (B_0, \dots, B_n)$  ist affine Basis von  $Y$ .

*Beweis.* Nach Satz 15.1 aus der Linearen Algebra gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\Phi: T(X) \rightarrow T(Y) \quad \text{mit } \Phi(t_{A_0 A_i}) = t_{B_0 B_i} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Nach Satz 1.22 gibt es dann genau eine affine Abbildung

$$\varphi: X \rightarrow Y \quad \text{mit } \varphi(A_0) = B_0 \text{ und } T(\varphi) = \Phi.$$

Es ist daher  $t_{B_0 \varphi(A_i)} = \Phi(t_{A_0 A_i}) = t_{B_0 B_i}$  und deshalb  $\varphi(A_i) = B_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Die Behauptungen (a), (b) und (c) folgen nun recht einfach mit Übungsaufgabe 1.5.  $\square$





**Definition 1.36 (aff. Raum).** Sei  $\mathcal{B} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$  eine affine Basis von  $X$ . Nach Satz 1.35 gibt es genau eine Affinität  $\eta_{\mathcal{B}}: X \rightarrow K^n$  mit

$$\eta_{\mathcal{B}}(A_0) = 0, \eta_{\mathcal{B}}(A_1) = E_1, \dots, \eta_{\mathcal{B}}(A_n) = E_n,$$

wobei  $(0, E_1, \dots, E_n)$  die in Beispiel 1.32 eingeführte affine Standardbasis von  $\mathbb{A}^n(K)$  bezeichne. Diese heißt das **affine Koordinatensystem** von  $X$  zur affinen Basis  $\mathcal{B}$ . Für jeden Punkt  $P \in X$  nennen wir

$$\eta_{\mathcal{B}}(P) =: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

den **Koordinatenvektor** von  $P$  bezüglich der affinen Basis  $(A_0, \dots, A_n)$ . Die Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  heißen die **Koordinaten** von  $P$  bezüglich  $(A_0, \dots, A_n)$ .

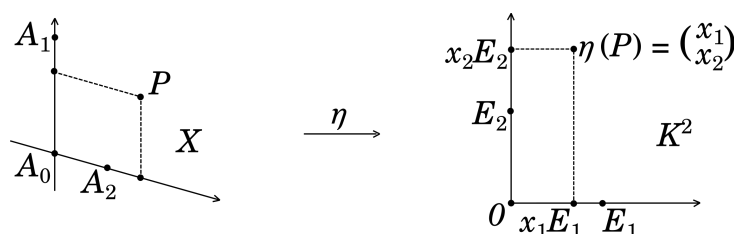


Abbildung 1.2: Affine Koordinatensysteme lassen sich über beliebigen Körpern definieren. Diese Abbildung dient zur Veranschaulichung der Situation in angeordneten Körpern wie  $\mathbb{R}$ . Über nicht angeordneten Körpern, etwa über  $\mathbb{C}$ , ist eine Visualisierung schwieriger. Dieser Hinweis gilt gleichermaßen für die folgenden Abbildungen.

Durch Wahl einer affinen Basis von  $X$  erhalten wir über das zugehörige affine Koordinatensystem einen Isomorphismus affiner Räume zwischen  $X$  und  $\mathbb{A}^n(K)$  mit  $n = \dim X$ . Ist  $\eta: X \rightarrow K^n$  irgendeine Affinität, so ist  $\eta = \eta_{\mathcal{B}}$  für  $\mathcal{B} = (\eta^{-1}(0), \eta^{-1}(E_1), \dots, \eta^{-1}(E_n))$ .

**Proposition 1.37 (aff. Raum).** Ist  $\mathcal{B} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$  eine affine Basis von  $X$  und  $P \in X$ , so stimmt

$$\eta_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit dem Koordinatenvektor (im Sinne von Vektorräumen) von  $t_{A_0P}$  bezüglich der Basis  $(t_{A_0A_1}, \dots, t_{A_0A_n})$  von  $T(X)$  überein, es gilt also

$$t_{A_0P} = x_1 t_{A_0A_1} + \dots + x_n t_{A_0A_n}.$$

*Beweis.* Es existieren eindeutig bestimmte  $y_1, \dots, y_n \in K$  mit  $t_{A_0P} = y_1 t_{A_0A_1} + \dots + y_n t_{A_0A_n}$ . Für diese gilt

$$\eta_{\mathcal{B}}(P) = t_{0\eta_{\mathcal{B}}(P)} = t_{\eta_{\mathcal{B}}(A_0)\eta_{\mathcal{B}}(P)} = T(\eta_{\mathcal{B}})(t_{A_0P}) = y_1 T(\eta_{\mathcal{B}})(t_{A_0A_1}) + \dots + y_n T(\eta_{\mathcal{B}})(t_{A_0A_n})$$

$$= y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

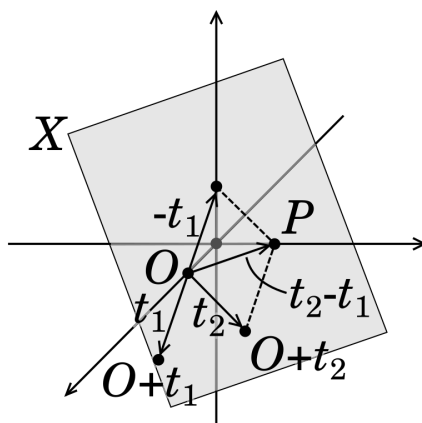
□

**Beispiel 1.38.** Wir setzen Beispiel 1.33 fort. Dort haben wir  $\mathcal{B} := (O, O + t_1, O + t_2)$  als affine Basis von  $X$  erkannt. Für den Punkt

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt  $\eta_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , denn es ist

$$P - O = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)t_1 + t_2.$$



**Proposition 1.39 (aff. Raum).** Sei  $\mathcal{B} = (A_0, \dots, A_n)$  eine affine Basis von  $X$  mit zugehörigem affinem Koordinatensystem  $\eta_{\mathcal{B}}: X \rightarrow K^n$ . Weiter seien  $P_0, \dots, P_m \in X$  und  $Y = \{P_0\} \vee \dots \vee \{P_m\}$ . Dann ist

$$\eta_{\mathcal{B}}(Y) = \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \eta_{\mathcal{B}}(P_i) \mid \lambda_i \in K, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

Insbesondere gilt für  $X = \mathbb{A}^n(K)$

$$\{P_0\} \vee \dots \vee \{P_m\} = \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i P_i \mid \lambda_i \in K, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\},$$

der Verbindungsraum der Punkte  $P_0, \dots, P_m$  stimmt also mit der Menge der sogenannten **Affinkombinationen** von  $P_0, \dots, P_m$  überein.

*Beweis.* Es ist  $T(Y) = \langle t_{P_0P_1}, \dots, t_{P_0P_m} \rangle$ . Für einen beliebigen Punkt  $Q \in X$  gilt dann

$$\begin{aligned} Q \in Y &\iff t_{P_0Q} \in T(Y) \\ &\iff \text{es gibt } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \text{ mit } t_{P_0Q} = \sum_{i=1}^m \lambda_i t_{P_0P_i} \\ &\iff \text{es gibt } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \text{ mit } T(\eta_B)(t_{P_0Q}) = T(\eta_B) \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i t_{P_0P_i} \right) \\ &\iff \text{es gibt } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \text{ mit } \eta_B(Q) - \eta_B(P_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (\eta_B(P_i) - \eta_B(P_0)) \\ &\iff \text{es gibt } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \text{ mit } \eta_B(Q) = \underbrace{\left(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i\right)}_{=: \lambda_0} \eta_B(P_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_B(P_i). \end{aligned}$$

□

Insbesondere gilt in  $\mathbb{A}^n(K)$  für die Verbindungsgerade zweier Punkte  $P, Q$ :

$$\overrightarrow{PQ} = \{P\} \vee \{Q\} = \{\lambda P + (1 - \lambda)Q \mid \lambda \in K\}.$$

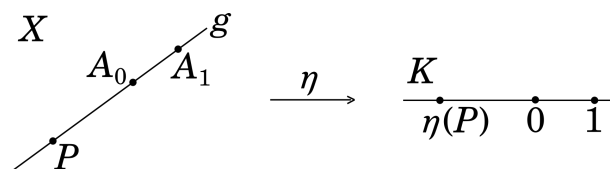
Ein wichtiger Grundbegriff der affinen Geometrie ist das Teilverhältnis:

**Definition 1.40 (aff. Raum).** Seien  $g \subseteq X$  eine Gerade und  $A_0, A_1, P \in g$  Punkte mit  $A_0 \neq A_1$ . Dann ist  $\mathcal{B} = (A_0, A_1)$  eine affine Basis von  $g$ . Die Koordinate  $\eta_B(P) \in K$  von  $P$  bezüglich  $(A_0, A_1)$  heißt das **Teilverhältnis**  $\text{TV}(A_0, A_1, P)$  von  $A_0, A_1, P$ . Offensichtlich gilt

$$t_{A_0P} = \text{TV}(A_0, A_1, P) t_{A_0A_1}. \quad (1.10)$$

Insbesondere ist

$$\text{TV}(A_0, A_1, A_0) = 0 \quad \text{und} \quad \text{TV}(A_0, A_1, A_1) = 1.$$



**Bemerkung 1.41.** Sei  $K$  ein beliebiger Körper und seien

$$A_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$$

drei kollineare Punkte mit  $A_0 \neq A_1$ , so dass es insbesondere ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $x_i^{(0)} \neq x_i^{(1)}$  gibt. Dann gilt

$$\text{TV}(A_0, A_1, P) = \frac{y_i - x_i^{(0)}}{x_i^{(1)} - x_i^{(0)}},$$

denn: Nach (1.10) gilt in der vorliegenden Situation

$$\begin{pmatrix} y_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n - x_n^{(0)} \end{pmatrix} = P - A_0 = \text{TV}(A_0, A_1, P)(A_1 - A_0) = \text{TV}(A_0, A_1, P) \begin{pmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} - x_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung erhalten wir durch Auslesen der  $i$ -ten Zeile. #

**Proposition 1.42 (aff. Raum).** Das Teilverhältnis ist eine affine Invariante. Genauer gilt für einen affinen Raum  $Y$  über  $K$ , eine affine Abbildung  $\varphi: X \rightarrow Y$  und kollineare Punkte  $A_0, A_1, P \in X$  mit  $\varphi(A_0) \neq \varphi(A_1)$ <sup>3</sup>

$$\text{TV}(\varphi(A_0), \varphi(A_1), \varphi(P)) = \text{TV}(A_0, A_1, P).$$

*Beweis.* Es gilt

$$t_{\varphi(A_0)\varphi(P)} = \text{TV}(\varphi(A_0), \varphi(A_1), \varphi(P))t_{\varphi(A_0)\varphi(A_1)} = \text{TV}(\varphi(A_0), \varphi(A_1), \varphi(P))T(\varphi)(t_{A_0A_1}).$$

Andererseits ist

$$t_{\varphi(A_0)\varphi(P)} = T(\varphi)(t_{A_0P}) = T(\varphi)(\text{TV}(A_0, A_1, P)t_{A_0A_1}) = \text{TV}(A_0, A_1, P)T(\varphi)(t_{A_0A_1}).$$

Wegen  $\varphi(A_0) \neq \varphi(A_1)$  ist  $T(\varphi)(t_{A_0A_1}) \neq 0$ , damit folgt die Behauptung. □

Wir zeigen nun exemplarisch einige klassische Sätze der affinen Geometrie:

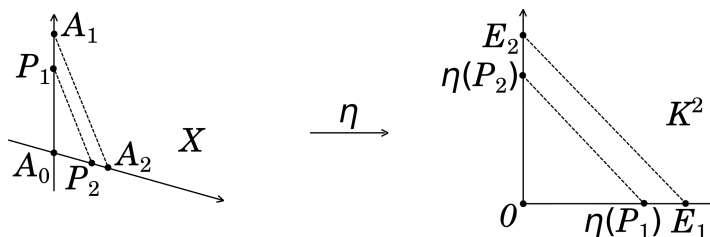
**Satz 1.43 (Strahlensatz, aff. Raum).** Seien  $A_0, A_1, A_2 \in X$  affin unabhängig und seien  $P_1 \in \overleftrightarrow{A_0A_1}$  und  $P_2 \in \overleftrightarrow{A_0A_2}$  von  $A_0$  verschieden. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $\overleftrightarrow{P_1P_2} \parallel \overleftrightarrow{A_1A_2}$ ,
- (ii)  $\text{TV}(A_0, A_1, P_1) = \text{TV}(A_0, A_2, P_2)$ ,
- (iii)  $t_{P_1P_2} = \text{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{A_1A_2}$ .

<sup>3</sup>Ist speziell  $\varphi$  eine Affinität, so gilt für  $A_0 \neq A_1$  stets auch  $\varphi(A_0) \neq \varphi(A_1)$ . Eine Affinität lässt also alle möglichen Teilverhältnisse fest.

*Beweis.* Sei  $Y \subseteq X$  die eindeutig bestimmte Ebene mit affiner Basis  $\mathcal{B} = (A_0, A_1, A_2)$ . Für das zugehörige affine Koordinatensystem  $\eta_{\mathcal{B}}: Y \rightarrow K^2$  gilt dann

$$\eta_{\mathcal{B}}(A_0) = 0, \quad \eta_{\mathcal{B}}(A_1) = E_1, \quad \eta_{\mathcal{B}}(A_2) = E_2.$$



Weiter gilt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_2} \parallel \overrightarrow{A_1 A_2} &\implies T(\overrightarrow{P_1 P_2}) = T(\overrightarrow{A_1 A_2}) \\ &\stackrel{(1.6)}{\implies} T(\overrightarrow{\eta_{\mathcal{B}}(P_1) \eta_{\mathcal{B}}(P_2)}) = T(\overrightarrow{E_1 E_2}) \\ &\stackrel{(1.10)}{\implies} \langle \text{TV}(0, E_2, \eta_{\mathcal{B}}(P_2)) E_2 - \text{TV}(0, E_1, \eta_{\mathcal{B}}(P_1)) E_1 \rangle_K = \langle E_2 - E_1 \rangle_K \\ &\implies \text{TV}(0, E_1, \eta_{\mathcal{B}}(P_1)) = \text{TV}(0, E_2, \eta_{\mathcal{B}}(P_2)) \\ &\stackrel{1.42}{\implies} \text{TV}(A_0, A_1, P_1) = \text{TV}(A_0, A_2, P_2) \\ &\implies t_{P_1 P_2} = t_{P_1 A_0} + t_{A_0 P_2} \\ &\quad = \text{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{A_1 A_0} + \text{TV}(A_0, A_2, P_2) \cdot t_{A_0 A_2} \\ &\quad = \text{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{A_1 A_2} \\ &\implies \overrightarrow{P_1 P_2} \parallel \overrightarrow{A_1 A_2}. \end{aligned}$$

und somit der Satz. □

**Bemerkung 1.44 (aff. Raum).** Der Gedanke hinter der vorletzten Folgerung im Beweis des Strahlensatzes 1.43 lässt sich noch verschärfen: Ist  $E \subseteq X$  die eindeutig bestimmte Ebene mit  $A_0, A_1, A_2 \in E$  und  $\varphi: E \rightarrow E$  die nach Satz 1.35 eindeutig bestimmte Affinität mit

$$\varphi(A_0) = A_0, \quad \varphi(A_1) = P_1, \quad \varphi(A_2) = P_2,$$

so gilt unter Annahme einer der äquivalenten Aussagen (i), (ii), (iii) des Strahlensatzes

$$t_{\varphi(A)\varphi(B)} = \text{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{AB} \quad \text{für alle } A, B \in E.$$

Die lineare Abbildung  $T(\varphi)$  ist dann also gerade die Multiplikation mit der Zahl  $\text{TV}(A_0, A_1, P_1) \in K$  und somit eine zentrische Streckung.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Ist allgemein  $(A_0, \dots, A_n)$  eine affine Basis von  $X$  und  $\lambda \in K$  gegeben, so heißt die nach Proposition 1.22 eindeutig bestimmte affine Abbildung  $\psi: X \rightarrow Y$  mit

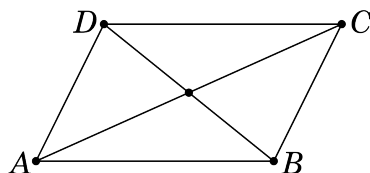
$$\psi(A_0) = A_0 \quad \text{und} \quad T(\psi)(t) = \lambda \cdot t \quad \text{für alle } t \in T(X).$$

die *zentrische Streckung* mit Zentrum  $A_0$  und Streckungsfaktor  $\lambda$ .

**Definition 1.45 (aff. Raum).** Sei  $\text{char}(K) \neq 2$  und seien  $A, B \in X$  fest gegeben. Dann heißt der eindeutig bestimmte Punkt  $M_{AB}$  auf  $\overleftrightarrow{AB}$  mit  $\text{TV}(A, B, M_{AB}) = \frac{1}{2}$  der **Mittelpunkt** von  $A$  und  $B$ . Ist speziell  $X = K^n$ , so gilt offensichtlich  $M_{AB} = \frac{1}{2}(A + B)$ .

**Satz 1.46 (Diagonalensatz, aff. Raum).** Sei  $\text{char}(K) \neq 2$ . Dann sind für ein nicht entartetes Viereck  $\Pi ABCD$  in  $X$  die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $\Pi ABCD$  ist ein Parallelogramm.
- (ii) Es gelten die (äquivalenten) Vektoridentitäten  $t_{CD} = -t_{AB}$  und  $t_{BC} = t_{AD}$ .
- (iii) Die Mittelpunkte  $M_{AC}$  und  $M_{BD}$  stimmen überein.



*Beweis.* Nach Definition 1.29 ist  $\Pi ABCD$  genau dann ein Parallelogramm, wenn

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \quad \text{und} \quad \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$$

und somit

$$\langle t_{AB} \rangle_K = T(\overleftrightarrow{AB}) = T(\overleftrightarrow{CD}) = \langle t_{CD} \rangle_K \quad \text{und} \quad \langle t_{AD} \rangle_K = T(\overleftrightarrow{AD}) = T(\overleftrightarrow{BC}) = \langle t_{BC} \rangle_K$$

gelten. Das ist äquivalent dazu, dass es  $\lambda, \mu \in K \setminus \{0\}$  mit

$$t_{CD} = \lambda t_{AB} \quad \text{und} \quad t_{BC} = \mu t_{AD}$$

gibt. An dieser Stelle ist klar, dass Aussage (i) aus Aussage (ii) folgt. Nehmen wir andererseits (i) an, so folgt aus den bisherigen Überlegungen

$$t_{AB} + t_{CD} = (\lambda + 1)t_{AB} \quad \text{und} \quad t_{DA} + t_{BC} = (\mu - 1)t_{AD}.$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir mit dem Dreiecksaxiom (D)

$$0 = t_{AB} + t_{BC} + t_{CD} + t_{DA} = (\lambda + 1)t_{AB} + (\mu - 1)t_{AD}.$$

Da  $\Pi ABCD$  nicht entartet ist, sind insbesondere die drei Punkte  $A, B, D$  nicht kollinear, also  $(A, B, D)$  affin unabhängig und schließlich  $(t_{AB}, t_{AD})$  linear unabhängig. Mit der obigen Gleichung folgt daher  $\lambda = -1$  und  $\mu = 1$ , also (ii).

Es verbleibt die Äquivalenz der Aussagen (ii) und (iii) zu zeigen. Nach (1.10) ist  $M_{AC}$  bzw.  $M_{BD}$  der eindeutig bestimmte Punkt auf  $\overleftrightarrow{AC}$  bzw.  $\overleftrightarrow{BD}$  mit

$$t_{AM_{AC}} = \frac{1}{2}t_{AC} \quad \text{und} \quad t_{BM_{BD}} = \frac{1}{2}t_{BD}.$$

Es gilt also

$$t_{AM_{BD}} = t_{AB} + t_{BM_{BD}} = t_{AB} + \frac{1}{2}t_{BD} = t_{AB} + \frac{1}{2}(t_{AD} - t_{AB}) = \frac{1}{2}(t_{AB} + t_{AD})$$

und somit

$$M_{BD} = M_{AC} \iff \frac{1}{2}(t_{AB} + t_{AD}) = \frac{1}{2}t_{AC} \iff t_{AD} = t_{BC}.$$

□

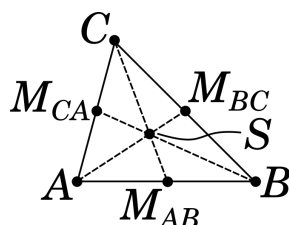
**Satz 1.47** (Schwerpunktsatz, **aff. Raum**). Sei  $\text{char}(K) \neq 2, 3$ . Dann schneiden sich in einem beliebigen Dreieck  $\triangle ABC$  in  $X$  die **Seitenhalbierenden**

$$\overrightarrow{AM_{BC}}, \quad \overrightarrow{BM_{CA}}, \quad \overrightarrow{CM_{AB}}$$

von  $\triangle ABC$  in einem eindeutig bestimmten gemeinsamen Punkt  $S$ , dem **Schwerpunkt** von  $\triangle ABC$ . Hierbei gilt

$$\text{TV}(A, M_{BC}, S) = \text{TV}(B, M_{CA}, S) = \text{TV}(C, M_{AB}, S) = \frac{2}{3}.$$

Ist speziell  $X = K^n$  für ein  $n \geq 2$ , so gilt  $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$ .



*Beweis.* Sei  $n$  die Dimension von  $X$ . Nach Wahl einer affinen Basis  $\mathcal{B}$  von  $X$  erhalten wir das zugehörige affine Koordinatensystem  $\eta_{\mathcal{B}}: X \rightarrow K^n$ , so dass wir nach Proposition 1.42 für den Beweis ohne Einschränkung  $X = K^n$  annehmen können. Wegen

$$S := \frac{1}{3}(A + B + C) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}M_{BC}$$

liegt der Punkt  $S$  auf der Seitenhalbierenden  $\overrightarrow{AM_{BC}}$  und es gilt

$$S - A = \frac{2}{3}(M_{BC} - A),$$

nach (1.10) also  $\text{TV}(A, M_{BC}, S) = \frac{2}{3}$ . Dass die entsprechenden Aussagen bei den anderen beiden Seitenhalbierenden zutreffen, zeigt man analog.

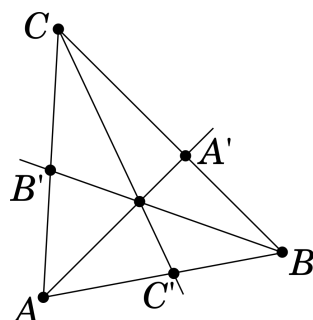
Es verbleibt zu zeigen, dass der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eindeutig ist. Aber wäre er es nicht, so stimmten alle drei Seitenhalbierenden überein. Insbesondere wären die Punkte  $A, B, C$  kollinear, was nicht sein kann, da  $\triangle ABC$  ein Dreieck ist. □

**Satz 1.48** (Satz von Ceva, **aff. Raum**). Seien  $\triangle ABC$  ein Dreieck in  $X$  und

$$A' \in \overleftrightarrow{BC}, \quad B' \in \overleftrightarrow{AC}, \quad C' \in \overleftrightarrow{AB} \quad \text{mit } \{A', B', C'\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$$

drei Punkte. Schneiden sich dann die Geraden  $A \vee A'$ ,  $B \vee B'$ ,  $C \vee C'$  in einem gemeinsamen Punkt, so gilt

$$\text{TV}(A', B, C) \cdot \text{TV}(B', C, A) \cdot \text{TV}(C', A, B) = -1.$$



*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung  $X = A \vee B \vee C$  annehmen, so dass  $\mathcal{B} = (A, B, C)$  eine affine Basis von  $X$  ist. Da  $\eta_{\mathcal{B}}: X \rightarrow \mathbb{A}^2(K)$  nach Proposition 1.42 Teilverhältnisse erhält, gilt ohne Einschränkung stärker sogar

$$X = A \vee B \vee C = \mathbb{A}^2(K) \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist nun  $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden  $A \vee A'$ ,  $B \vee B'$ ,  $C \vee C'$ , so gelten

$$\overleftrightarrow{AS} = \{\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \lambda \in K\} \quad \text{und} \quad \overleftrightarrow{BC} = \{\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \mu) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \mu \in K\}.$$

Es folgt nun

$$A' = \overleftrightarrow{AS} \cap \overleftrightarrow{BC} = \frac{1}{x+y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

denn: Es gilt das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Nach der **Cramer'schen Regel** erhalten wir dabei

$$\lambda = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{x+y}$$





und somit die Behauptung. #

Hieraus folgt

$$\text{TV}(A', B, C) = -\frac{x}{y},$$

denn: Es gelten

$$t_{A'B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{x+y} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x+y} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix},$$

$$t_{A'C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{x+y} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x+y} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix}$$

und also

$$t_{A'C} = -\frac{x}{y} \cdot t_{A'B}.$$

#

Analog erhalten wir

$$\text{TV}(B', C, A) = \frac{y}{x+y-1},$$

$$\text{TV}(C', A, B) = \frac{x+y-1}{x}$$

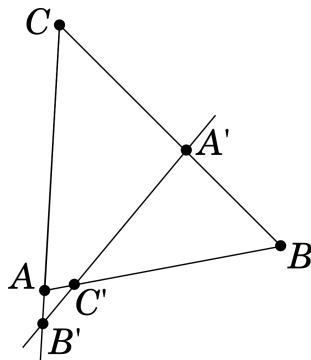
und insgesamt den Satz. □

**Satz 1.49** (Satz von Menelaos, **aff. Raum**). Seien  $\triangle ABC$  ein Dreieck in  $X$  und

$$A' \in \overleftrightarrow{BC}, \quad B' \in \overleftrightarrow{AC}, \quad C' \in \overleftrightarrow{AB} \quad \text{mit } \{A', B', C'\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$$

drei Punkte. Dann gilt

$$A', B', C' \text{ sind kollinear} \iff \text{TV}(A', B, C) \cdot \text{TV}(B', C, A) \cdot \text{TV}(C', A, B) = 1.$$



*Beweis.* Dies ist eine Übungsaufgabe. □

## 1.4 Euklidische Räume

**Definition 1.50.** Ein *euklidischer Raum* ist ein Quadrupel  $(X, T(X), \langle \cdot | \cdot \rangle, \tau)$ , so dass  $(X, T(X), \tau)$  ein affiner Raum über  $\mathbb{R}$  und  $(T(X), \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum ist, also ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Für „Sei  $(X, T(X), \langle \cdot | \cdot \rangle, \tau)$  ein euklidischer Raum.“ schreiben wir künftig auch kurz „**eukl. Raum**“.

Anstelle des Quadrupels  $(X, T(X), \langle \cdot | \cdot \rangle, \tau)$  werden wir häufig nur kurz  $X$  schreiben.

**Beispiel 1.51.** Ein Beispiel für einen euklidischen Raum ist durch den *euklidischen Standardraum*  $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle, \tau_{\mathbb{R}^n})$  der Dimension  $n$  gegeben, wobei

$$\langle \cdot | \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichne.

Durch das Vorhandensein des Skalarproduktes sind euklidische Räume mit wesentlich mehr Struktur ausgestattet als affine Räume.

**Bemerkung 1.52 (eukl. Raum).** Auf  $T(X)$  ist durch

$$\|\cdot\|: T(X) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \|t\| = \sqrt{\langle t | t \rangle}$$

eine *Norm* gegeben. Auf  $X$  ist durch

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d(A, B) = \|t_{AB}\|$$

eine *Metrik* erklärt. Diese ist translationsinvariant, für  $t \in T(X)$  gilt also  $d(\tau_t(A), \tau_t(B)) = d(A, B)$ . Wir nennen  $d(A, B)$  auch den **Abstand** zwischen  $A$  und  $B$ . Für  $t, t' \in T(X) \setminus \{0\}$  definieren wir  $\angle(t, t')$  als die eindeutig bestimmte reelle Zahl im Intervall  $[0, \pi]$  mit

$$\cos \angle(t, t') = \frac{\langle t | t' \rangle}{\|t\| \cdot \|t'\|}. \quad (1.11)$$

Wir nennen  $\angle(t, t')$  die **Winkelgröße** zwischen  $t$  und  $t'$ .

Im euklidischen Standardraum gelten

$$\|t\| = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2} \quad \text{für } t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

<sup>5</sup>Dies ist wohldefiniert wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung  $|\langle t | t' \rangle| \leq \|t\| \cdot \|t'\|$ , wobei Gleichheit hier genau dann besteht, wenn  $t$  und  $t'$  linear abhängig sind.

$$d(A, B) = \|B - A\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2} \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Wir werden es im Folgenden mit zwei euklidischen Räumen  $X$  und  $Y$  zu tun haben. Im Hinblick auf bessere Lesbarkeit werden wir die zugehörigen Normen, Metriken, Skalarprodukte und Winkelgrößen nicht mit Indizes  $X$  und  $Y$  versehen. Es sollte stets aus dem Kontext klar sein, in welchem Raum diese jeweils zu betrachten sind.

**Definition 1.53 (eukl. Raum).** Sei  $(Y, T(Y), \langle \cdot | \cdot \rangle, \sigma)$  ein euklidischer Raum. Eine Abbildung  $\varphi: X \rightarrow Y$  heißt ein **Homomorphismus euklidischer Räume**, wenn  $\varphi$  eine affine Abbildung und  $T(\varphi)$  eine orthogonale Abbildung ist, wenn also

$$\langle T(\varphi)(t_1) | T(\varphi)(t_2) \rangle = \langle t_1 | t_2 \rangle \quad \text{für alle } t_1, t_2 \in T(X)$$

gilt. Ist  $\varphi$  zusätzlich bijektiv, so nennen wir es einen **Isomorphismus euklidischer Räume**. Im Fall  $X = Y$  heißt ein solcher Isomorphismus auch ein **Automorphismus** von  $X$ .

Homomorphismen euklidischer Räume erhalten Norm, Abstand und Winkelgröße:

**Proposition 1.54 (eukl. Raum).** Sei  $(Y, T(Y), \langle \cdot | \cdot \rangle, \sigma)$  ein euklidischer Raum und  $\varphi: X \rightarrow Y$  ein Homomorphismus euklidischer Räume. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a)  $\varphi$  ist injektiv.
- (b)  $\|T(\varphi)(t)\| = \|t\|$  für alle  $t \in T(X)$ .
- (c)  $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$  für alle  $A, B \in X$ .
- (d)  $\angle(T(\varphi)(t), T(\varphi)(t')) = \angle(t, t')$  für alle  $t, t' \in T(X) \setminus \{0\}$ .

Insbesondere ist jeder Homomorphismus euklidischer Räume  $\varphi: X \rightarrow X$  ein Automorphismus von  $X$ .

*Beweis.* Da  $T(\varphi)$  orthogonal ist, ist es nach **Bemerkung 23.2** aus der Linearen Algebra injektiv. Behauptung (a) ergibt sich dann unmittelbar aus Übungsaufgabe 1.5. Behauptung (b) folgt ebenfalls aus dem soeben zitierten Resultat aus der Linearen Algebra. Zum Nachweis von Behauptung (c) berechnen wir

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = \|t_{\varphi(A)\varphi(B)}\| = \|T(\varphi)(t_{AB})\| = \|t_{AB}\| = d(A, B).$$

Für Behauptung (d) bemerken wir

$$\cos \angle(T(\varphi)(t), T(\varphi)(t')) = \frac{\langle T(\varphi)(t) | T(\varphi)(t') \rangle}{\|T(\varphi)(t)\| \|T(\varphi)(t')\|} = \frac{\langle t | t' \rangle}{\|t\| \|t'\|} = \cos \angle(t, t').$$

□



Es stellt sich die Frage, ob es neben den Homomorphismen euklidischer Räume weitere (nicht notwendig affine) Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  gibt, die Abstände erhalten. Wir werden zeigen, dass dem nicht so ist:

**Definition 1.55 (eukl. Raum).** Sei  $(Y, T(Y), \langle \cdot | \cdot \rangle, \sigma)$  ein euklidischer Raum. Eine Abbildung  $\varphi: X \rightarrow Y$  heißt eine **Isometrie**, wenn  $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$  für alle  $A, B \in X$  gilt. Im Fall  $X = Y$  sprechen wir auch von einer **Bewegung**.

**Proposition 1.56 (eukl. Raum).** Sei  $(Y, T(Y), \langle \cdot | \cdot \rangle, \sigma)$  ein euklidischer Raum und sei  $\varphi: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i)  $\varphi$  ist ein Homomorphismus euklidischer Räume.
- (ii)  $\varphi$  ist eine Isometrie.

Insbesondere sind die Automorphismen von  $X$  genau durch die Bewegungen von  $X$  gegeben. Mit anderen Worten: Die Bewegungen von  $X$  sind genau diejenigen Affinitäten  $\varphi: X \rightarrow X$ , für die  $T(\varphi)$  orthogonal ist.

*Beweis.* Dass Homomorphismen euklidischer Räume Isometrien sind, haben wir bereits in Proposition 1.54 gezeigt.

Sei also  $\varphi: X \rightarrow Y$  eine Isometrie. Um zu zeigen, dass  $\varphi$  ein Homomorphismus euklidischer Räume ist, genügt es nach Proposition 1.21 zu zeigen, dass für einen beliebigen, aber festen Punkt  $O \in X$  die durch

$$\Phi: T(X) \rightarrow T(Y), \quad t_{OP} \mapsto t_{\varphi(O)\varphi(P)}$$

gegebene Abbildung linear und orthogonal ist. Tatsächlich gilt

$$\|\Phi(t)\| = \|t\| \quad \text{für alle } t \in T(X), \quad (1.12)$$

denn: Für jedes  $t \in T(X)$  gibt es ein  $P \in X$  mit  $t = t_{OP}$ . In dieser Schreibweise gilt nun

$$\|\Phi(t)\| = \|t_{\varphi(O)\varphi(P)}\| = d(\varphi(O), \varphi(P)) \stackrel{(ii)}{=} d(O, P) = \|t_{OP}\| = \|t\|.$$

#

Hieraus erhalten wir

$$\langle \Phi(t_1) | \Phi(t_2) \rangle = \langle t_1 | t_2 \rangle \quad \text{für alle } t_1, t_2 \in T(X), \quad (1.13)$$

denn: Für alle  $t_1, t_2 \in T(X)$  gibt es ein  $P_1, P_2 \in X$  mit  $t_1 = t_{OP_1}$  und  $t_2 = t_{OP_2}$ . In dieser Schreibweise gilt nun zunächst

$$\|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)\| = \|t_{\varphi(O)\varphi(P_1)} - t_{\varphi(O)\varphi(P_2)}\| \stackrel{(D)}{=} \|t_{\varphi(P_2)\varphi(P_1)}\|$$

$$= d(\varphi(P_2), \varphi(P_1)) \stackrel{(ii)}{=} d(P_2, P_1) = \|t_{P_2 P_1}\| = \|t_1 - t_2\|.$$

Definitionsgemäß gelten andererseits

$$\begin{aligned} \|t_1 - t_2\|^2 &= \langle t_1 - t_2 \mid t_1 - t_2 \rangle = \|t_1\|^2 - 2\langle t_1 \mid t_2 \rangle + \|t_2\|^2, \\ \|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)\|^2 &= \langle \Phi(t_1) - \Phi(t_2) \mid \Phi(t_1) - \Phi(t_2) \rangle \\ &= \|\Phi(t_1)\|^2 - 2\langle \Phi(t_1) \mid \Phi(t_2) \rangle + \|\Phi(t_2)\|^2. \end{aligned}$$

Aus alledem und (1.12) folgt die Behauptung. #

Schließlich gilt auch

$\Phi$  ist linear,

denn: Einerseits gilt für alle  $t_1, t_2 \in T(X)$

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(t_1 + t_2) - \Phi(t_1) - \Phi(t_2) \mid \Phi(t_1 + t_2) - \Phi(t_1) - \Phi(t_2) \rangle \\ &= \langle \Phi(t_1 + t_2) \mid \Phi(t_1 + t_2) \rangle + \langle \Phi(t_1) \mid \Phi(t_1) \rangle + \langle \Phi(t_2) \mid \Phi(t_2) \rangle \\ &\quad - 2\langle \Phi(t_1 + t_2) \mid \Phi(t_1) \rangle - 2\langle \Phi(t_1 + t_2) \mid \Phi(t_2) \rangle + 2\langle \Phi(t_1) \mid \Phi(t_2) \rangle \\ &\stackrel{(1.13)}{=} \langle t_1 + t_2 \mid t_1 + t_2 \rangle + \langle t_1 \mid t_1 \rangle + \langle t_2 \mid t_2 \rangle - 2\langle t_1 + t_2 \mid t_1 \rangle - 2\langle t_1 + t_2 \mid t_2 \rangle + 2\langle t_1 \mid t_2 \rangle \\ &= \langle t_1 + t_2 - t_1 - t_2 \mid t_1 + t_2 - t_1 - t_2 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

und wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts somit

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1) + \Phi(t_2).$$

Andererseits gilt für alle  $t \in T(X)$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(\lambda t) - \lambda\Phi(t) \mid \Phi(\lambda t) - \lambda\Phi(t) \rangle \\ &= \langle \Phi(\lambda t) \mid \Phi(\lambda t) \rangle - 2\lambda\langle \Phi(\lambda t) \mid \Phi(t) \rangle + \lambda^2\langle \Phi(t) \mid \Phi(t) \rangle \\ &\stackrel{(1.13)}{=} \langle \lambda t \mid \lambda t \rangle - 2\lambda\langle \lambda t \mid t \rangle + \lambda^2\langle t \mid t \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

und wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts somit

$$\Phi(\lambda t) = \lambda\Phi(t).$$

#

□

**Definition 1.57 (eukl. Raum).** Eine Abbildung  $\varphi: X \rightarrow X$  heißt eine **Ähnlichkeit**, wenn es eine reelle Zahl  $\rho > 0$  mit

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = \rho \cdot d(A, B) \quad \text{für alle } A, B \in X$$

gibt. Die Zahl  $\rho$  heißt dabei der **Ähnlichkeitsfaktor** von  $\varphi$ .

Offenbar ist jede Bewegung eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor 1. Dies lässt sich wie folgt verallgemeinern:

**Proposition 1.58 (eukl. Raum).** *Es sei  $\varphi: X \rightarrow X$  eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

- (i)  $\varphi$  ist eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor  $\rho$ .
- (ii)  $\varphi$  ist eine Affinität, für die  $\frac{1}{\rho}T(\varphi)$  orthogonal ist.

*Beweis.* Gelte zunächst Aussage (ii), sei  $\varphi$  also eine Affinität, für die  $\frac{1}{\rho}T(\varphi)$  orthogonal ist. Dann gilt für alle  $A, B \in X$  die Gleichheit

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = \|t_{\varphi(A)\varphi(B)}\| = \|T(\varphi)(t_{AB})\| = \rho \cdot \left\| \frac{1}{\rho}T(\varphi)(t_{AB}) \right\| \stackrel{(ii)}{=} \rho \cdot \|t_{AB}\| = \rho \cdot d(A, B)$$

und also Aussage (i).

Nun gelte umgekehrt Aussage (i), sei  $\varphi$  also eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor  $\rho$ . Wir wählen ein  $O \in X$  und setzen

$$\Phi: T(X) \rightarrow T(X), \quad t_{OP} \mapsto t_{\varphi(O)\varphi(P)}.$$

Für jedes  $t \in T(X)$  gibt es dann ein  $P \in X$  mit  $t = t_{OP}$  und es gilt in dieser Schreibweise

$$\left\| \frac{1}{\rho}\Phi(t) \right\| = \frac{1}{\rho} \|t_{\varphi(O)\varphi(P)}\| = \frac{1}{\rho} d(\varphi(O), \varphi(P)) \stackrel{(i)}{=} d(O, P) = \|t_{OP}\|.$$

Ausgehend hiervon können wir wie im Beweis von Proposition 1.56 zeigen, dass  $\frac{1}{\rho}\Phi$  linear und orthogonal ist. Hieraus folgt dann die Linearität von  $\Phi$  und mit Proposition 1.21, dass  $\varphi$  eine affine Abbildung ist. Es verbleibt zu zeigen, dass  $\varphi$  auch bijektiv und somit eine Affinität ist. Seien hierfür  $A \neq B \in X$  gegeben. Für diese gilt

$$0 \neq d(A, B) \stackrel{(i)}{=} \frac{1}{\rho} \cdot d(\varphi(A), \varphi(B))$$

und insbesondere  $\varphi(A) \neq \varphi(B)$  und also die Injektivität von  $\varphi$ . Aus dieser folgt die Injektivität und somit die Bijektivität von  $T(\varphi)$ , die wiederum die Bijektivität von  $\varphi$  impliziert.  $\square$

Insbesondere ist jede zentrische Streckung  $\varphi: X \rightarrow X$  eine Ähnlichkeit; hier ist  $T(\varphi) = \rho \text{id}$  für eine reelle Zahl  $\rho > 0$ .

**Definition 1.59 (eukl. Raum).** *Es seien  $A, B, C \in X$  paarweise verschieden und nicht kollinear.*

- (a) Die Menge  $\overline{AB} := \{\tau_t(A) \mid t = \lambda t_{AB} \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 \leq \lambda \leq 1\}$  heißt die **Strecke** zwischen  $A$  und  $B$ .
- (b) Die Menge  $\overrightarrow{AB} := \{\tau_t(A) \mid t = \lambda t_{AB} \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 \leq \lambda\}$  heißt der **Strahl** aus  $A$  durch  $B$ .
- (c) Die Vereinigung  $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$  heißt der **Winkel**  $\angle BAC$ .

(d) Die reelle Zahl  $\angle BAC := \angle(t_{AB}, t_{AC}) \in [0, \pi]$  heißt die **Winkelgröße** des Winkels  $\angle BAC$ .

(e) Der Winkel  $\angle BAC$  heißt ein **rechter Winkel**, wenn  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$  ist.

Im euklidischen Standardraum  $\mathbb{E}^n$  ist offenbar:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \{(1 - \lambda)A + \lambda B \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}, \\ \overrightarrow{AB} &= \{(1 - \lambda)A + \lambda B \mid 0 \leq \lambda\}\end{aligned}$$

sowie

$$\angle BAC = \arccos \frac{\langle B - A \mid C - A \rangle}{\|B - A\| \|C - A\|}. \quad (1.14)$$

**Bemerkung 1.60 (eukl. Raum).** Jede Ähnlichkeit  $\varphi: X \rightarrow X$  erhält Winkelgrößen,

denn: Ist  $\rho$  der Ähnlichkeitsfaktor von  $\varphi$  und sind  $A, B, C \in X$  paarweise verschieden und nicht kollinear, so ist

$$\begin{aligned}\cos \angle \varphi(B)\varphi(A)\varphi(C) &= \cos \angle(T(\varphi)(t_{AB}), T(\varphi)(t_{AC})) \\ &= \cos \angle\left(\frac{1}{\rho}T(\varphi)(t_{AB}), \frac{1}{\rho}T(\varphi)(t_{AC})\right) \\ &= \cos \angle(t_{AB}, t_{AC}) \\ &= \cos \angle BAC.\end{aligned}$$

#

**Definition 1.61 (eukl. Raum).** Ein  $(n + 1)$ -Tupel  $(A_0, \dots, A_n)$  von Punkten in  $X$  heißt eine **Orthonormalbasis** von  $X$ , wenn das  $n$ -Tupel  $(t_{A_0A_1}, \dots, t_{A_0A_n})$  eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums  $(T(X), \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$  ist.

Die affine Standardbasis  $(E_0, E_1, \dots, E_n)$  von  $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$  mit  $E_0 := 0$  ist offenbar eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{E}^n$ .

**Bemerkung 1.62 (eukl. Raum).** Jeder euklidische Raum hat eine Orthonormalbasis,

denn: Wir wählen einen Punkt  $O \in X$ . Es existiert eine Orthonormalbasis  $(t_1, \dots, t_n)$  von  $(T(X), \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$  – eine solche lässt sich etwa durch das Gram-Schmidt-Verfahren konstruieren. Das  $(n + 1)$ -Tupel  $(O, \tau_{t_1}(O), \dots, \tau_{t_n}(O))$  ist dann offenbar eine Orthonormalbasis von  $X$ . #

**Satz 1.63 (eukl. Raum).** Sei  $(A_0, \dots, A_n)$  eine Orthonormalbasis von  $X$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus euklidischer Räume

$$\varphi: X \rightarrow \mathbb{E}^n \quad \text{mit } \varphi(A_i) = E_i \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n\}.$$

*Beweis.* Nach Satz 1.35 existiert eine eindeutig bestimmte Affinität  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{E}^n$  mit  $\varphi(A_i) = E_i$  für  $i = 0, \dots, n$ . Da  $(A_0, \dots, A_n)$  eine Orthonormalbasis von  $X$  ist, erhalten wir

$$\langle T(\varphi)(t_{A_0 A_i}) \mid T(\varphi)(t_{A_0 A_j}) \rangle = \langle \varphi(A_i) - \varphi(A_0) \mid \varphi(A_j) - \varphi(A_0) \rangle = \langle E_i \mid E_j \rangle = \delta_{ij} = \langle t_{A_0 A_i} \mid t_{A_0 A_j} \rangle.$$

Aus der Bilinearität des Skalarproduktes und der Tatsache, dass  $(t_{A_0 A_1}, \dots, t_{A_0 A_n})$  eine Basis von  $T(X)$  ist, ergibt sich  $\langle T(\varphi)(t_1) \mid T(\varphi)(t_2) \rangle = \langle t_1 \mid t_2 \rangle$  für alle  $t_1, t_2 \in T(X)$  und damit die Orthogonalität von  $T(\varphi)$ .  $\square$

Aufgrund von Satz 1.63 können wir uns im Rest des Abschnitts auf den euklidischen Standardraum  $\mathbb{E}^n$  beschränken.

**Bemerkung 1.64.** Nach 1.25 und 1.54 ist jede Bewegung von  $\mathbb{E}^n$  von der Form

$$\varphi = \varphi_{M,P}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, A \mapsto M \cdot A + P \quad \text{mit } M \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \text{ und } P = \varphi(0).$$

Eine solche Bewegung heißt **eigentlich**, wenn  $M$  bereits in  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$  liegt, und **uneigentlich** sonst. Für  $n = 2$  gilt nach **Bemerkung 23.11** aus der Linearen Algebra:

- Jedes  $M \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$  lässt sich eindeutig schreiben als die **Drehung**

$$M = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

um  $\alpha \in [0, 2\pi)$  mit Zentrum  $0 \in \mathbb{R}^2$ .

- Jedes  $M \in \text{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_2(\mathbb{R})$  lässt sich eindeutig schreiben als die **Spiegelung**

$$M = S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

an der Geraden  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$  für ein  $\alpha \in [0, 2\pi)$ .

Bewegungen in Ebenen werden uns in Abschnitt 3.3 dabei helfen nachzuweisen, dass  $\mathbb{E}^2$  den Axiomen einer sogenannten Hilbertebene genügt.

Nach 1.58 ist jede Ähnlichkeit von  $\mathbb{E}^n$  von der Form

$$\varphi = \varphi_{\rho M, P}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, A \mapsto \rho M \cdot A + P \quad \text{mit } M \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \text{ und } P = \varphi(0).$$

Hierbei ist  $\rho$  der Ähnlichkeitsfaktor von  $\varphi$ .

**Definition 1.65.** Sei  $n \geq 2$  und sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck im affinen Standardraum  $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ . Dann heißen

- $(\|B - C\|, \|C - A\|, \|A - B\|)$  seine **Seitenlängen**,
- $(\angle CAB, \angle CBA, \angle ACB)$  seine **Innenwinkelgrößen**.

Wir können nun leicht weitere klassische Sätze der affinen Geometrie herleiten:



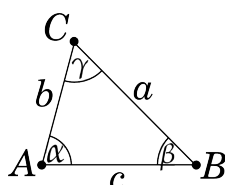


**Satz 1.66 (Kosinussatz).** Sei  $n \geq 2$  und sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck im euklidischen Standardraum  $\mathbb{E}^n$  mit Innenwinkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ . Dann gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



*Beweis.* Es genügt offensichtlich, eine der Gleichungen zu zeigen. Das ist leicht, denn beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} a^2 &= \|B - C\|^2 \stackrel{(D)}{=} \|(B - A) - (C - A)\|^2 \\ &= \langle (B - A) - (C - A) \mid (B - A) - (C - A) \rangle \\ &= \langle B - A \mid B - A \rangle - 2\langle B - A \mid C - A \rangle + \langle C - A \mid C - A \rangle \\ &\stackrel{(1.11)}{=} \|B - A\|^2 - 2\|B - A\|\|C - A\| \cos(\angle(B - A, C - A)) + \|C - A\|^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

und somit die erste der behaupteten Gleichungen.  $\square$

Eine einfache aber wichtige Folgerung des Kosinussatzes 1.66 betrifft den Fall rechtwinkliger Dreiecke:

**Korollar 1.67 (Satz des Pythagoras).** Sei  $n \geq 2$  und sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck im euklidischen Standardraum  $\mathbb{E}^n$  mit Innenwinkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ . Genau dann ist  $\angle BCA$  ein rechter Winkel, wenn  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt.

**Satz 1.68 (Winkelsumme im Dreieck).** Sei  $n \geq 2$  und sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck im euklidischen Standardraum  $\mathbb{E}^n$  mit Innenwinkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Dann gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung können wir annehmen, die drei Punkte liegen in der euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}^2$  und es gilt  $A = 0$ . Dann gilt direkt nach (1.11)

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle B \mid C \rangle}{\|B\| \cdot \|C\|}, \\ \cos \beta &= \frac{\langle -B \mid C - B \rangle}{\|B\| \cdot \|C - B\|} = \frac{\|B\|^2 - \langle B \mid C \rangle}{\|B\| \cdot \|B - C\|}, \\ \cos \gamma &= \frac{\langle -C \mid B - C \rangle}{\|C\| \cdot \|B - C\|} = \frac{\|C\|^2 - \langle B \mid C \rangle}{\|C\| \cdot \|B - C\|}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Für den weiteren Beweis hätten wir gerne ebensolche Gleichungen für die respektiven Sinuswerte. Setzen wir für beliebige  $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, t' = \begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$[t, t'] = \det(t \ t') = t_1 t'_2 - t_2 t'_1,$$

so gilt in Entsprechung zu (1.11)

$$\sin \angle(t, t') = \frac{|[t, t']|}{\|t\| \cdot \|t'\|}, \quad (1.16)$$

denn: Zunächst einmal gilt

$$\begin{aligned} [t, t']^2 + \langle t | t' \rangle^2 &= (t_1 t'_2 - t_2 t'_1)^2 + (t_1 t'_1 + t_2 t'_2)^2 \\ &= (t_1^2 + t_2^2) \cdot ((t'_1)^2 + (t'_2)^2) \\ &= \|t\|^2 \cdot \|t'\|^2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Hieraus folgt<sup>6</sup>

$$\sin^2 \angle(t, t') = 1 - \cos^2 \angle(t, t') \stackrel{(1.11)}{=} 1 - \frac{\langle t | t' \rangle^2}{\|t\|^2 \cdot \|t'\|^2} \stackrel{(1.17)}{=} \frac{[t, t']^2}{\|t\|^2 \cdot \|t'\|^2} \quad (1.18)$$

und die Behauptung ergibt sich durch Wurzelziehen. #

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{|[B, C]|}{\|B\| \cdot \|C\|}, \\ \sin \beta &= \frac{|[-B, C - B]|}{\|B\| \cdot \|C - B\|} = \frac{|[B, C]|}{\|B\| \cdot \|B - C\|}, \\ \sin \gamma &= \frac{|[-C, B - C]|}{\|B\| \cdot \|B - C\|} = \frac{|[B, C]|}{\|C\| \cdot \|B - C\|}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Aus den Additionstheoremen von Sinus und Kosinus erhalten wir

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

---

<sup>6</sup>Die hier verwendete Rechenregel

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

wird oft als Satz von Pythagoras bezeichnet. Andererseits wird der Zusammenhang zu dem von uns bereits bewiesenen Satz dieses Namens (vgl. Korollar 1.67) erst mit Korollar 1.70 klar, welches auf diesem Beweis aufbaut. Es ist von daher wichtig, uns daran zu erinnern, dass sich obige Rechenregel direkt mit analytischen Methoden aus den Reihendarstellungen von Sinus und Kosinus herleiten lässt. Tatsächlich gilt mit dem Additionstheorem des Kosinus

$$1 = \cos 0 = \cos(x - x) = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(1.15),(1.19)}{=} \frac{|[B, C]| \cdot (\|B\|^2 - \langle B | C \rangle) + \langle B | C \rangle \cdot |[B, C]|}{\|B\|^2 \cdot \|C\| \cdot \|B - C\|} \\
& = \frac{|[B, C]|}{\|C\| \cdot \|B - C\|} \\
& \stackrel{(1.19)}{=} \sin \gamma = \sin(\pi - \gamma)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\
& \stackrel{(1.15),(1.19)}{=} \frac{\langle B | C \rangle \cdot \|B\|^2 - \langle B | C \rangle^2 - [B, C]^2}{\|B\|^2 \cdot \|C\| \cdot \|B - C\|} \\
& \stackrel{(1.17)}{=} \frac{\langle B | C \rangle - \|C\|^2}{\|C\| \cdot \|B - C\|} \\
& \stackrel{(1.15)}{=} -\cos \gamma = \cos(\pi - \gamma).
\end{aligned}$$

Mit  $0 < \alpha + \beta, \pi - \gamma < 2\pi$  folgt daraus  $\alpha + \beta = \pi - \gamma$  und somit der Satz.  $\square$

**Satz 1.69 (Sinussatz).** Sei  $n \geq 2$  und sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck im euklidischen Standardraum  $\mathbb{E}^n$  mit Innenwinkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ . Dann gilt

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

*Beweis.* Durch Quadrieren von zwei der Gleichungen aus dem Kosinussatz 1.66 erhalten wir

$$4b^2c^2 \cos^2 \alpha = (b^2 + c^2 - a^2)^2 \quad \text{und} \quad 4a^2c^2 \cos^2 \beta = (a^2 + c^2 - b^2)^2.$$

Dies verwenden wir, um folgende Umformungen zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} &= \frac{4a^2b^2c^2(1 - \cos^2 \alpha)}{4a^2b^2c^2(1 - \cos^2 \beta)} = \frac{4a^2b^2c^2 - a^2 \cdot (4b^2c^2 \cos^2 \alpha)}{4a^2b^2c^2 - b^2 \cdot (4a^2c^2 \cos^2 \beta)} \\
&= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} = \frac{a^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

Da  $a, b, \sin \alpha, \sin \beta$  allesamt positive reelle Zahlen sind, folgt  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$  und also die erste behauptete Gleichheit. Die zweite Gleichheit zeigt man analog.  $\square$

**Korollar 1.70.** Sei  $n \geq 2$ . In einem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  im euklidischen Standardraum  $\mathbb{E}^n$  mit rechtem Winkel  $\angle BCA$  heißen  $\overline{BC}, \overline{CA}$  die **Katheten** und  $\overline{AB}$  die **Hypotenuse** von  $\triangle ABC$ . Sind  $(\alpha, \beta, \frac{\pi}{2})$  die Winkelgrößen und  $(a, b, c)$  die Seitenlängen von  $\triangle ABC$ , dann gilt

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{c}.$$

*Beweis.* Mit dem Sinussatz 1.69 und dem Satz über die Winkelsumme des Dreiecks 1.68 gilt

$$\begin{aligned}\frac{a}{c} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin \alpha = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta, \\ \frac{b}{c} &= \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin \beta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.\end{aligned}$$

□

## 1.5 Polytope

Wir schließen die analytische euklidische Geometrie ab, indem wir mit den Polytopen exemplarisch ein tieferes Thema der dreidimensionalen reellen euklidischen Geometrie untersuchen. Um diesen Einblick anschaulich zu halten, argumentieren wir in diesem Abschnitt vollständig im euklidischen Standardraum  $\mathbb{E}^3$  und gelegentlich ein wenig skizzenhaft.

Wir betrachten zunächst eine beliebige Ebene  $E \subseteq \mathbb{R}^3$ . Deren Komplement in  $\mathbb{R}^3$  zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten  $S_+, S_-$ ,

denn: Nach dem **Basisergänzungssatz für Vektorräume** aus der Linearen Algebra lässt sich eine beliebige affine Basis  $(A_0, A_1, A_2)$  von  $E$  durch Hinzunahme eines Punktes  $A_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus E$  zu einer affinen Basis  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  von  $\mathbb{R}^3$  ergänzen. Ist  $\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  das affine Koordinatensystem bezüglich dieser affinen Basis, so gilt

$$E = \left\{ A \in \mathbb{R}^3 \mid \eta(A) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x_3 = 0 \right\}.$$

Offensichtlich zerfällt das Komplement von  $E$  in die beiden durch das Vorzeichen der dritten affinen Koordinate beschriebenen Zusammenhangskomponenten. #

Die Mengen  $S_+$  und  $S_-$  nennen wir **offene Halbräume**, die Mengen  $S_+ \cup E$  und  $S_- \cup E$  **abgeschlossene Halbräume**.

**Definition 1.71.** Ein nichtleerer Durchschnitt  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  endlich vieler abgeschlossener Halbräume heißt ein **konvexes Polyeder**. Der Durchschnitt der zugehörigen offenen Halbräume wird als das **Innere** des Polyeders  $P$  bezeichnet. Ein beschränktes konvexes Polyeder  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  mit nichtleerem Inneren heißt ein **Polytop**.

**Beispiel 1.72.** Inspiriert durch unsere Vorüberlegungen betrachten wir für  $i = 1, 2, 3$  jeweils die Ebene

$$E^i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Hier sind wieder die jeweils zugehörigen offenen Halbräume  $S_+^i$  und  $S_-^i$  durch das Vorzeichen der  $i$ -ten Koordinate definiert. Ein beliebiger Durchschnitt der so erhaltenen zugehörigen sechs abgeschlossenen Halbräume liefert jeweils ein Beispiel für ein konvexes Polyeder, das kein Polytop ist.



**Bemerkung 1.73.** (a) Da abgeschlossene Halbräume konvex sind, sind konvexe Polyeder tatsächlich konvex und insbesondere zusammenhängend.

(b) Sei  $P$  ein Polytop, und seien  $H^i = E^i \cup S^i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  abgeschlossene Halbräume mit

$$P = \bigcap_{i=1}^n H^i = \bigcap_{i=1}^n (E^i \cup S^i).$$

Der Rand  $\partial P$  von  $P$  ist gegeben durch die nicht notwendig disjunkte endliche Vereinigung

$$\partial P = \bigcup_{i=1}^n (P \cap \partial H^i) = \bigcup_{i=1}^n (P \cap E^i) = \bigcup_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (P \cap \bigcap_{i \in I} E^i)$$

von Ecken, Kanten und Flächen. Eine nichtleere Menge der Form  $P \cap \bigcap_{i \in I} E^i$  heißt hierbei eine **Ecke**, wenn sie ein Punkt ist, eine **Kante**, wenn sie kein Punkt ist, aber in einer Gerade enthalten ist, und eine **Fläche** sonst.

**Definition 1.74.** Für ein gegebenes Polytop  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  nennen wir

$e(P)$  die Anzahl der Ecken in  $\partial P$ ,

$k(P)$  die Anzahl der Kanten in  $\partial P$ ,

$f(P)$  die Anzahl der Flächen in  $\partial P$

und sprechen dabei auch von den Ecken bzw. Kanten bzw. Flächen von  $P$ .

**Beispiel 1.75.** Für  $i = 1, 2, 3$  seien

$$H_+^i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \geq 0 \right\},$$

$$\tilde{H}_-^i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \leq 1 \right\}.$$

Dann ist der Durchschnitt

$$P := \bigcap_{i=1}^3 H_+^i \cap \bigcap_{i=1}^3 \tilde{H}_-^i$$

ein Würfel mit Kantenlänge 1 und erfüllt  $e(P) = 8$ ,  $k(P) = 12$  und  $f(P) = 6$ . Insbesondere gilt

$$e(P) - k(P) + f(P) = 2.$$

Dieser Zusammenhang gilt auch allgemein:

**Satz 1.76** (Euler'sche Polyederformel). Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Polytop. Dann gilt

$$e(P) - k(P) + f(P) = 2.$$

*Beweisskizze.* Sei  $P$  für den Beweis des Satzes fest gewählt. Offenbar lassen Translationen und zentrische Streckungen die untersuchten Anzahlen  $e(P), k(P), f(P)$  fest. Da  $P$  als Polytop ein nichtleeres Inneres hat, gibt es ein  $A_0 \in \mathbb{R}^3$  im Inneren von  $P$ . Nach möglicher Anwendung der Translation  $A \mapsto A - A_0$  können wir hierbei  $A_0 = 0$  annehmen. Da  $P$  als Polytop beschränkt ist, gibt es zudem ein  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $A \in P$  die euklidische Norm die Abschätzung  $\|A\| < \lambda$  erfüllt. Nach möglicher Anwendung der zentrischen Streckung  $A \mapsto \frac{1}{\lambda} \cdot A$  können wir daher weiter annehmen,  $P$  liege in der offenen Einheitskugel:  $P \in \{A \in \mathbb{R}^3 \mid \|A\| < 1\}$ .

**Schritt 1.** Wir „blasen“ das Polytop  $P$  auf, bis alle Randpunkte zu Punkten auf der Einheits-sphäre

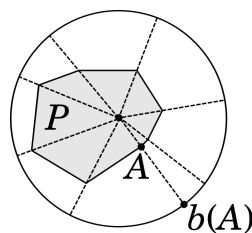
$$S^2 = \{A \in \mathbb{R}^3 \mid \|A\| = 1\}.$$

werden. Formal betrachten wir die Zuordnung

$$b: \begin{cases} \partial P & \rightarrow S^2, \\ A & \mapsto b(A) := \overrightarrow{0A} \cap S^2. \end{cases}$$

Diese ist wohldefiniert und liefert einen Homöomorphismus zwischen den jeweils mit der Teilraumtopologie bzgl.  $\mathbb{R}^3$  ausgestatteten topologischen Räumen  $\partial P$  und  $S^2$ ,

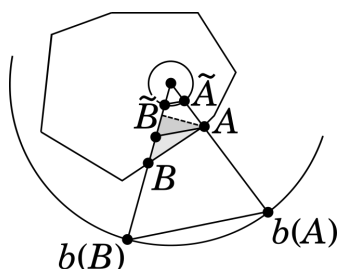
denn: Die Wohldefiniertheit ergibt sich aus  $\overrightarrow{0A} \cap S^2 = \frac{A}{\|A\|}$ .



Die Bijektivität von  $b$  lässt sich leicht daraus folgern, dass  $P$  konvex ist und der Punkt 0 im Inneren von  $P$  liegt.

Wir zeigen nun die Stetigkeit von  $b$  in einem beliebigen Punkt  $B \in \partial P$ . Da 0 ein innerer Punkt von  $P$  ist, gibt es ein  $r \in (0, 1)$  mit  $\|A\| > r$  für alle  $A \in \partial P$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben, und sei  $A \in \partial P$  ein Punkt mit  $\|B - A\| < r\varepsilon$ . Bezeichnet  $\tilde{B}$  bzw.  $\tilde{A}$  den eindeutigen Punkt auf dem Strahl  $\overrightarrow{0B}$  bzw.  $\overrightarrow{0A}$  mit  $\|\tilde{B}\| = \|\tilde{A}\| = r$ , so gilt nach dem Strahlensatz 1.43

$$\|b(B) - b(A)\| = \frac{1}{r} \cdot \|\tilde{B} - \tilde{A}\| = \frac{1}{r} \cdot \frac{\|\tilde{A}\|}{\|A\|} \cdot \left\| \frac{\|A\|}{\|\tilde{A}\|} \tilde{B} - A \right\|.$$



Nehmen wir ohne Einschränkung an, es gelte  $\|A\| < \|B\|$ , so folgt mit Übungsaufgabe 1.15 die Abschätzung

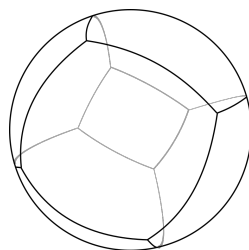
$$\|b(B) - b(A)\| < \frac{1}{r} \cdot \frac{\|\tilde{A}\|}{\|A\|} \cdot \|B - A\| < \frac{1}{r} \cdot \|B - A\| < \varepsilon$$

und somit die behauptete Stetigkeit von  $b$ . Die Stetigkeit von  $b^{-1}$  zeigt man genauso. #

Der Homöomorphismus  $b$  bildet

- die Ecken von  $P$  auf paarweise verschiedene Punkte in  $S^2$  ab. Diese nennen wir die **sphärischen Ecken** von  $b(\partial P)$ .
- die Kanten von  $P$  auf selbstschnittfreie Kurven in  $S^2$  ab, die je zwei sphärische Ecken verbinden, und die sich gegenseitig nur in ihren Anfangs- und Endpunkten schneiden. Diese nennen wir die **sphärischen Kanten** von  $b(\partial P)$ .
- die Flächen von  $P$  auf abgeschlossene Teilmengen von  $S^2$  ab, deren jeweiliger Rand aus sphärischen Kanten besteht. Diese nennen wir die **sphärischen Flächen** von  $b(\partial P)$ .

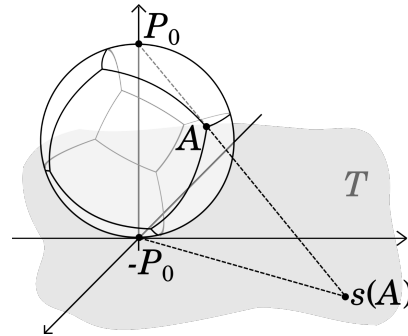
Auf diese Weise definiert  $b$  auf  $S^2$  die Struktur eines **sphärischen Polytops**. Aufgrund der Bijektivität von  $b$  ist hierbei die Anzahl der sphärischen Ecken  $e(P)$ , die Anzahl der sphärischen Kanten  $k(P)$  und die Anzahl der sphärischen Flächen  $f(P)$ . Die folgende Abbildung zeigt einen sphärischen Würfel als ein Beispiel eines sphärischen Polytops.



**Schritt 2.** Wir fixieren einen Punkt  $P_0$  im Inneren einer der Flächen des sphärischen Polytops und definieren eine **stereographische Projektion**  $s$ , indem wir jedem Punkt  $A \in S^2 \setminus \{P_0\}$  den eindeutigen Schnittpunkt der Tangentialebene

$$T := \{-P_0 + t \mid \langle t \mid -P_0 \rangle = 0\}$$

an  $S^2$  in  $-P_0$  mit der Geraden  $\overleftrightarrow{P_0 A}$  zuordnen.



Auf diese Weise erhalten wir einen Homöomorphismus  $s: S^2 \setminus \{P_0\} \rightarrow T$ ,

denn: Gilt  $s(A) = s(B)$  für zwei Punkte  $A, B \in S^2 \setminus \{P_0\}$ , so sind nach Konstruktion  $P_0, A, B$  drei kollineare Punkte auf  $S^2$ . Da nach Übungsaufgabe 1.16 keine Gerade mehr als zwei Schnittpunkte mit  $S^2$  hat und sich  $A$  und  $B$  beide von  $P_0$  unterscheiden, folgt  $A = B$  und somit die Injektivität von  $s$ . Hätte weiter für ein beliebiges  $S \in T$  die Gerade  $\overleftrightarrow{P_0 S}$  außer  $P_0$  keinen Schnittpunkt mit  $S^2$ , so wäre sie bereits ganz in der Tangentialebene an  $S^2$  in  $P_0$  enthalten, und  $S$  wäre ein Schnittpunkt von  $T$  mit dieser Tangentialebene. Da aber die Tangentialebenen an  $S^2$  in  $P_0$  und in  $-P_0$  voneinander verschieden und zueinander parallel sind, kann das nicht sein, so dass es ein  $A \in S^2 \setminus \{P_0\}$  mit  $s(A) = S$  gibt. Das zeigt die Surjektivität von  $s$ .

Die Topologie beider beteiligten Räume ist die Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}^3$ . Die Stetigkeit von  $s$  bzw.  $s^{-1}$  in einem gegebenen Punkt  $A \in S^2 \setminus \{P_0\}$  bzw.  $S \in T$  lässt sich daher leicht zeigen, wenn man als offene Umgebungen von  $A$  und  $s(A)$  bzw. von  $S$  und  $s^{-1}(S)$  die jeweiligen Durchschnitte von offenen Kugeln mit dem jeweiligen Teilraum betrachtet und ähnlich wie für die Stetigkeit von  $b$  argumentiert. #

Der Homöomorphismus  $s \circ b$  definiert auf  $T$  die Struktur eines sogenannten *Netzes*  $N$  von  $P$ . Genauer bildet  $s \circ b$

- die Ecken von  $P$  auf paarweise verschiedene Punkte in  $T$  ab. Diese nennen wir die **Ecken** von  $N$ .
- die Kanten von  $P$  auf selbstschnittfreie Kurven in  $T$  ab, die je zwei Ecken von  $N$  verbinden, und die sich gegenseitig nur in ihren Anfangs- und Endpunkten schneiden. Diese nennen wir die **Kanten** von  $N$ .
- die Flächen von  $P$  mit Ausnahme derer, in deren Innerem  $b^{-1}(n)$  liegt, auf abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von  $T$  ab, deren jeweiliger Rand aus Kanten von  $N$  besteht. Diese nennen wir die **Flächen** von  $N$ . Die verbleibende Fläche von  $P$  wird auf die Umgebung des Netzes  $N$  abgebildet und im Weiteren ignoriert.

Aufgrund der Bijektivität von  $s \circ b$  gilt in Missbrauch unserer Notation insgesamt

$$e(N) = e(P), \quad k(N) = k(P), \quad f(N) = f(P) - 1$$



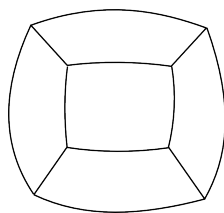
und insbesondere

$$e(N) - k(N) + f(N) = e(P) - k(P) + f(P) - 1.$$

Um die Euler'sche Polyederformel zu beweisen, genügt es also

$$e(N) - k(N) + f(N) = 1$$

zu zeigen. Die folgende Abbildung zeigt beispielhaft ein Netz eines Würfels.



**Schritt 3.** Wir werden nun unser Netz  $N$  sukzessive vereinfachen und mitprotokollieren, wie sich das auf die Anzahlen von Ecken, Kanten und Flächen auswirkt. Zunächst wählen wir eine Fläche von  $N =: N_0$  aus und ziehen diese unter Verwendung einer geeigneten Homotopie zu einem einzigen Punkt zusammen. Auf diese Weise erhalten wir ein neues Netz  $N_1$ . Hatte die kollabierte Fläche  $n$  Eckpunkte, so gilt in  $N_1$

$$e(N_1) = e(N_0) - (n - 1), \quad k(N_1) = k(N_0) - n, \quad f(N_1) = f(N_0) - 1$$

und somit

$$e(N_1) - k(N_1) + f(N_1) = e(N_0) - k(N_0) + f(N_0).$$

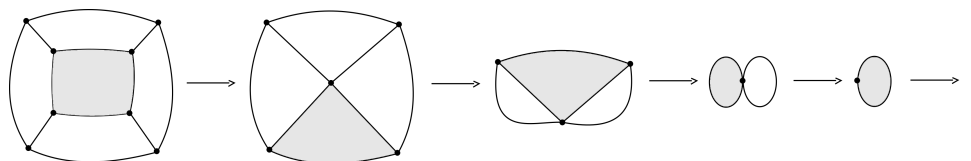
Wir iterieren unser Vorgehen indem wir eine Fläche unseres Netzes nach der anderen zusammenziehen und erhalten jeweils aus dem Netz  $N_{k-1}$  ein Netz  $N_k$  mit

$$e(N_k) - k(N_k) + f(N_k) = e(N_{k-1}) - k(N_{k-1}) + f(N_{k-1}) = e(N_0) - k(N_0) + f(N_0).$$

Da  $f(N)$  endlich ist, erreichen wir so nach endlich vielen Schritten ein Netz  $N_{f(N)}$  ohne Flächen, ohne Kanten, aber mit einem Punkt. Für dieses Netz gilt offensichtlich wie behauptet

$$e(N_{f(N)}) - k(N_{f(N)}) + f(N_{f(N)}) = 1 - 0 + 0 = 1,$$

so dass insgesamt die Euler'sche Polyederformel folgt. Die folgende Abbildung zeigt im Beispiel des Würfels eine Folge  $N_0, N_1, \dots, N_5$  von Netzen wie im Beweis.



□

Es liegt nahe, dieses Ergebnis zur Klassifikation von Polytopen zu verwenden. In voller Allgemeinheit ist das allerdings sehr schwer, weshalb wir jetzt eine besonders einfache Unterklasse der Polytope einführen wollen:

**Definition 1.77.** (a) Sei  $n \geq 3$  eine natürliche Zahl. Ein nicht entartetes  $n$ -Eck  $\Pi A_1 \dots A_n$  wie in Definition 1.28 heißt **regelmäßig**, wenn die folgenden Bedingungen gelten.

- $\Pi A_1 \dots A_n$  ist konvex.
- $\|A_i - A_j\| = \|A_1 - A_2\|$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$  mit  $i \equiv j - 1 \pmod{n}$ ,
- $\angle A_i A_j A_k = \angle A_1 A_2 A_3$  für alle  $1 \leq i, j, k \leq n$  mit  $i \equiv j - 1 \equiv k - 2 \pmod{n}$ .

Wir nennen dann  $\|A_1 - A_2\|$  die **Kantenlänge** und  $\angle A_1 A_2 A_3$  die **Innenwinkelgröße** des regelmäßigen  $n$ -Ecks  $\Pi A_1 \dots A_n$ .

(b) Ein Polytop  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **regulär** oder auch ein **Platonischer Körper**, wenn es ein natürliches  $n \geq 3$  gibt, so dass jeder Durchschnitt einer seiner Randflächen mit seiner Eckenmenge die Struktur eines regelmäßigen  $n$ -Ecks trägt, und in jeder Ecke die gleiche Anzahl  $g(P)$  von Kanten anliegt. Die Anzahl  $n(P) := n$  heißt dann der **Grad** von  $P$ .

**Beispiel 1.78.** Das Einheitsquadrat ist ein regelmäßiges Viereck mit Kantenlänge 1 und Innenwinkelgröße  $\frac{\pi}{2}$ . Der Einheitswürfel ist ein Platonischer Körper mit  $n(P) = 4$  und  $g(P) = 3$ .

**Proposition 1.79.** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  ein reguläres Polytop vom Grad  $n(P)$ , bei dem in jeder Ecke  $g(P)$  Kanten anliegen. Dann gilt

$$k(P) = \frac{1}{2}n(P)f(P) = \frac{1}{2}g(P)e(P),$$

$$f(P) = \frac{4g(P)}{2n(P) - g(P)n(P) + 2g(P)}.$$

Insbesondere sind die Anzahlen  $e(P), k(P), f(P)$  durch  $n(P), g(P)$  bereits eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Von jeder der  $e(P)$  Ecken gehen genau  $g(P)$  Kanten aus. Da an jede Kante genau zwei Ecken angrenzen, folgt

$$2k(P) = g(P)e(P).$$

Analog wird jede Seitenfläche von genau  $n(P)$  Kanten begrenzt. Da jede Kante an genau zwei Flächen angrenzt, folgt

$$2k(P) = n(P)f(P).$$

Mit der Euler'schen Polyederformel 1.76 erhalten wir

$$2 = e(P) - k(P) + f(P) = \frac{2k(P)}{g(P)} - k(P) + f(P).$$

Nach Multiplikation mit  $2g(P)$  ergibt sich

$$4g(P) = 4k(P) - 2g(P)k(P) + 2f(P)g(P) = 2n(P)f(P) - n(P)f(P)g(P) + 2f(P)g(P).$$

Lösen wir dies nach  $f(P)$  auf, erhalten wir die letzte zu zeigende Aussage.  $\square$

**Korollar 1.80.** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  ein reguläres Polytop vom Grad  $n(P)$ , bei dem in jeder Ecke  $g(P)$  Kanten anliegen. Dann gilt

$$(n(P), g(P)) \in \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)\}.$$

*Beweis.* Nach Proposition 1.79 gilt

$$\frac{1}{g(P)} = \frac{e(P)}{2k(P)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n(P)} = \frac{f(P)}{2k(P)}$$

und somit

$$\frac{1}{g(P)} + \frac{1}{n(P)} = \frac{e(P) + f(P)}{2k(P)} \stackrel{1.76}{=} \frac{2 + k(P)}{2k(P)} = \frac{1}{k(P)} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}.$$

Nun gilt  $n(P) \geq 3$  nach Definition und  $g(P) \geq 3$ , da sonst einer jeden Ecke nur je eine Fläche anliegen dürfte und  $P$  kein nichtleeres Inneres hätte. Die einzigen ganzzahligen Lösungen der obigen Ungleichung sind daher

$$(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3).$$

$\square$

Nach Korollar 1.80 gibt es höchstens fünf  $(n, g)$ -Klassen Platonischer Körper, nämlich

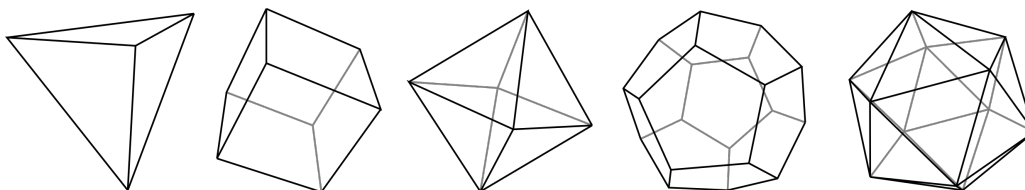
	$n(P)$	$g(P)$	$e(P)$	$k(P)$	$f(P)$
<b>Tetraeder</b>	3	3	4	6	4
<b>Hexaeder</b>	4	3	8	12	6
<b>Oktaeder</b>	3	4	6	12	8
<b>Dodekaeder</b>	5	3	20	30	12
<b>Ikosaeder</b>	3	5	12	30	20

Die Anzahlen  $e(P)$ ,  $k(P)$  und  $f(P)$  in der Tabelle ergeben sich mit den Formeln aus Proposition 1.79. Es stellt sich heraus, dass es eine anschauliche Interpretation der  $(n, g)$ -Klassen Platonischer Körper gibt.

**Definition 1.81.** Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Zwei Teilmengen  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  heißen **ähnlich**, wenn es eine Ähnlichkeit  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(M_1) = M_2$  gibt. Man kann leicht zeigen, dass Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation auf der Potenzmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist.

Unser Ziel ist nun das folgende klassische Resultat:

**Satz 1.82.** Es gibt genau 5 Ähnlichkeitsklassen von Platonischen Körpern: die Tetraeder, die Hexaeder, die Oktaeder, die Dodekaeder und die Ikosaeder.

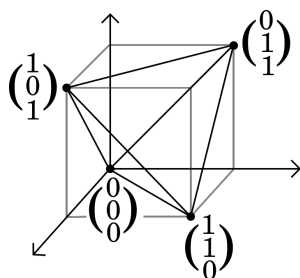


*Beweis.* Die Beweisstrategie ist zu zeigen, dass jede  $(n, g)$ -Klasse aus der Tabelle genau eine Ähnlichkeitsklasse von Polytopen enthält. Wir zeigen dies nur für die Tetraeder; die entsprechenden Aussagen für Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder zeigt man ähnlich.

Es lässt sich leicht überprüfen, dass die konvexe Hülle der Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ein Tetraeder ist.



Es verbleibt zu zeigen, dass sich ein beliebiges Tetraeder  $\tilde{T}$  mit Ecken  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in \mathbb{R}^3$  durch Ähnlichkeitsabbildungen in ein beliebiges anderes Tetraeder  $T$  mit Ecken  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$  überführen lässt. Wir verfahren wie folgt.

- Nach Anwendung der zentrischen Streckung mit Zentrum  $\tilde{A}$  und Streckfaktor

$$\left\| \frac{B - A}{\tilde{B} - \tilde{A}} \right\|$$

dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, die Kantenlängen von  $\tilde{T}$  und  $T$  stimmen überein.

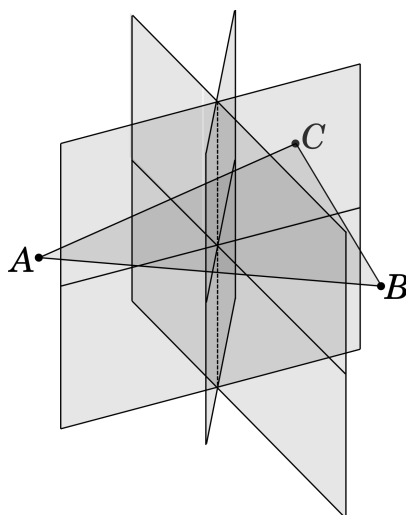
- Nach Anwendung der Translation um den Vektor  $A - \tilde{A}$  dürfen wir ohne Einschränkung  $\tilde{A} = A$  annehmen.
- Nach Anwendung einer geeigneten Drehung um  $A$  gilt ohne Einschränkung

$$\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}} = \overrightarrow{AB} \quad \text{und insbesondere} \quad \tilde{B} = B.$$

- Nach Anwendung einer geeigneten Drehung um die Gerade  $\overleftrightarrow{AB}$  dürfen wir ohne Einschränkung annehmen,  $\tilde{C}$  liege in derselben Ebene wie  $A, B, C$ , und zwar auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{AB}$  wie  $C$ . Es folgt  $\tilde{C} = C$ ,

*denn:* Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck 1.68 beträgt die Innenwinkelgröße in jedem regelmäßigen Dreieck  $\frac{\pi}{3}$ . Das trifft insbesondere auf die Dreiecke  $\triangle ABC\tilde{C}$  und  $\triangle ABC$  zu. Die Behauptung folgt über eine kurze Rechnung, da die Kantenlängen  $\|\tilde{C} - A\|$  und  $\|C - A\|$  übereinstimmen und  $\tilde{C}, C$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{AB}$  liegen. #

- Nachdem wir gegebenenfalls an der Ebene durch  $A, B, C$  gespiegelt haben, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen,  $\tilde{D}$  liege auf derselben Seite dieser Ebene wie  $D$ . Wegen  $\|\tilde{D} - A\| = \|\tilde{D} - B\|$  und  $\|D - A\| = \|D - B\|$  liegen sowohl  $\tilde{D}$  als auch  $D$  in der zu  $\overleftrightarrow{AB}$  orthogonalen Ebene durch den Mittelpunkt  $M_{AB}$ .<sup>7</sup> Analog zeigt man, dass  $\tilde{D}$  und  $D$  beide in der zu  $\overleftrightarrow{BC}$  orthogonalen Ebene durch  $M_{BC}$  und in der zu  $\overleftrightarrow{CA}$  orthogonalen Ebene durch  $M_{CA}$  liegen. Nach dem Umkreissatz (diesen werden wir als Satz 3.71 in einem Setting zeigen, das insbesondere die affine Standardebene umfasst) ist der Durchschnitt dieser drei Ebenen die zur Ebene durch  $A, B, C$  orthogonale Gerade durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $\triangle ABC$ .



Aus Symmetriegründen liegt auf jeder Seite der Ebene durch  $A, B, C$  genau ein Punkt dieser Geraden, der zu den Punkten  $A, B, C$  jeweils die Kantenlänge von  $T$  als Abstand hat. Es folgt  $\tilde{D} = D$  und damit die Behauptung.

<sup>7</sup>Um dies einzusehen, ergänzt man  $t_{AB} = B - A$  zu einer Orthogonalbasis von  $\mathbb{R}^3$  und stellt das Problem in dieser Basis dar.

□

## 1.6 Projektive Räume

Wir möchten in diesem Abschnitt Räume konstruieren – sogenannte projektive Räume – in denen sich je zwei voneinander verschiedene Geraden, die in einer gemeinsamen Ebene liegen, in genau einem Punkt schneiden. Unsere Motivation dafür ergibt sich daraus, dass wir in der affinen Geometrie häufig Fallunterscheidungen bezüglich der Existenz oder Nichtexistenz von Schnittpunkten vornehmen müssen, siehe etwa die Dimensionsformel 1.15 für den Verbindungsraum affiner Unterräume. Diese würden wir gerne vermeiden, und in projektiven Räumen gelingt dies. Historisch motiviert ist die Konstruktion projektiver Räume durch die darstellende Geometrie. Hier begegnet man Situationen, in denen sich eigentlich parallele Geraden in einem „Fluchtpunkt“ schneiden:



Bevor wir eine allgemeine, formale Definition projektiver Räume vornehmen, wollen wir im Folgenden exemplarisch schauen, wie wir den  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  geeignet modifizieren können, um die oben genannte Schnitteigenschaft zu erreichen.

Wir identifizieren für unsere Betrachtungen  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  mit der Ebene

$$E_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1 \right\}.$$
<sup>8</sup>

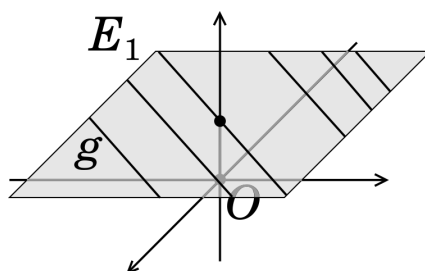
Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden in  $E_1$ . Zu jeder Gerade  $g$  in

<sup>8</sup>Für die erste Konstruktion einer projektiven Ebene, die wir gleich durchführen werden, wäre dies nicht notwendig. Wir werden im Anschluss jedoch eine zweite Konstruktion kennenlernen, die dies erfordert, und die wir mit der ersten Konstruktion vergleichen wollen.

$E_1$  ist die Äquivalenzklasse durch das *Parallelenbüschel*

$$[g] := \{h \subseteq E_1 \text{ Gerade} \mid h \parallel g\}.$$

gegeben.



Wir setzen

$$\overline{E}_1 := E_1 \cup \{[g] \mid g \text{ Gerade in } E_1\}$$

und betrachten dies als die Menge der Punkte der zu  $E_1$  gehörigen projektiven Ebene. Für jede Gerade  $g$  in  $E_1$  setzen wir

$$\overline{g} := g \cup \{[g]\}$$

und sehen dies als Gerade in  $\overline{E}_1$  an. Den Punkt  $[g]$  nennen wir den *unendlich fernen Punkt* von  $\overline{g}$ . Die unendlich fernen Punkte lassen wir per Definition selbst eine Gerade in  $\overline{E}_1$  bilden, die *unendlich ferne Gerade*

$$g_\infty = \{[g] \mid g \text{ Gerade in } E_1\}.$$

In dieser Konstruktion besteht für zwei verschiedene Geraden  $\overline{g} = g \cup \{[g]\}, \overline{h} = h \cup \{[h]\}$  in  $\overline{E}_1$  der Schnitt  $\overline{g} \cap \overline{h}$  stets aus genau einem Punkt:

- Ist  $g \cap h \neq \emptyset$ , so ist  $g \not\parallel h$ , also  $[g] \neq [h]$  und  $\overline{g} \cap \overline{h}$  besteht genau aus dem Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ .
- Ist  $g \cap h = \emptyset$ , so ist  $g \parallel h$ , also  $[g] = [h]$  und  $\overline{g} \cap \overline{h} = \{[g]\}$ , so dass sich  $\overline{g}$  und  $\overline{h}$  in ihrem unendlich fernen Punkt schneiden.

Auch der Schnitt von Geraden vom Typ  $\overline{g}$  mit  $g_\infty$  besteht stets aus genau einem Punkt. Wir haben damit eine projektive Ebene konstruiert. In diesem Modell kann man jedoch nicht besonders gut rechnen. Wir suchen daher nach einer äquivalenten Beschreibung, die diesen Nachteil nicht hat. Dafür setzen wir

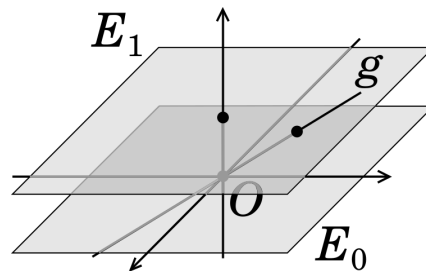
$$E_0 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \right\}.$$

und betrachten die Ursprungsgeraden in  $\mathbb{R}^3$ . Diese zerfallen in zwei Klassen:

**Fall 1: Ursprungsgeraden, die nicht in  $E_0$  liegen.** Über die Abbildung

$$\{\text{Ursprungsgeraden, die nicht in } E_0 \text{ liegen}\} \rightarrow E_1, \quad g \mapsto \text{Schnittpunkt von } g \text{ und } E_1$$

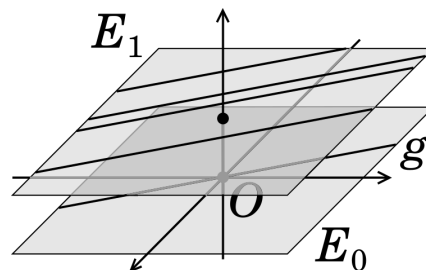
korrespondieren diese bijektiv zu den Punkten in  $E_1$ .



**Fall 2: Ursprungsgeraden, die in  $E_0$  liegen.** Über die Abbildung

$$\{\text{Ursprungsgeraden, die in } E_0 \text{ liegen}\} \rightarrow \bar{E}_1, \quad g = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \mapsto \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right]$$

korrespondieren diese bijektiv zu den Parallelenbüscheln in  $E_1$ .



In diesem Modell definieren wir projektive Punkte als Geraden durch 0, also als eindimensionale Untervektorräume des  $\mathbb{R}^3$ . Unsere obigen Überlegungen zeigen, dass die Menge der so definierten projektiven Punkte in Bijektion zu  $\bar{E}_1$  steht. Eine Menge von projektiven Punkten (also Geraden durch 0) nennen wir eine projektive Gerade, wenn die Vereinigung dieser Geraden eine Ebene durch 0 ist. Insbesondere ist die Menge aller Geraden durch 0, die in  $E_0$  liegen, eine projektive Gerade, denn deren Vereinigung ist die Ebene  $E_0$ . Unter der obigen Korrespondenz entspricht diese der Geraden  $g_\infty$ , also der unendlich fernen Geraden. Starten wir in diesem Modell mit einer Gerade in  $E_1$ , dann existiert eine eindeutig bestimmte Ebene durch 0, die  $g$  enthält. Diese schneidet  $E_0$  in einer Gerade, also einem projektiven Punkt; dieser korrespondiert zum unendlich fernen Punkt von  $g$ . Je zwei verschiedene projektive Geraden schneiden sich in einem eindeutig bestimmten projektiven Punkt: Die zugehörigen Ebenen durch 0 schneiden sich nämlich in einer eindeutig bestimmten Ursprungsgerade. In diesem Modell für eine projektive Ebene kann man besser rechnen und meist leichter argumentieren. Wir werden diese Konstruktion nun allgemein betrachten:



**Definition 1.83.** Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$ . Die Menge

$$\mathbb{P}(V) := \{U \subseteq V \text{ Untervektorraum} \mid \dim_K(U) = 1\}$$

der **Ursprungsgeraden** in  $V$  nennen wir den zu  $V$  gehörigen **projektiven Raum**. Die Elemente von  $\mathbb{P}(V)$  nennen wir die **Punkte** des projektiven Raums. Ist  $V$  endlichdimensional, so setzen wir

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim_K \mathbb{P}(V) := \dim_K(V) - 1$$

und nennen diese Zahl die **(projektive) Dimension** von  $\mathbb{P}(V)$ . Insbesondere gilt  $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset$  und  $\dim \emptyset = -1$ . Für „Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  und  $\mathbb{P}(V)$  der zu  $V$  gehörige projektive Raum.“ schreiben wir künftig auch kurz „**(proj. Raum)**“.

Wir interessieren uns im Kontext projektiver Räume nur für endlichdimensionale Vektorräume und werden dies stets stillschweigend voraussetzen.

**Beispiel 1.84.** Der **projektive Standardraum** der Dimension  $n$  über dem Körper  $K$  ist gegeben durch

$$\mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1}).$$

Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$ . Zwei Vektoren  $v, v' \in V \setminus \{0\}$  haben genau dann dasselbe Bild unter der kanonischen Abbildung

$$\kappa: \begin{cases} V \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{P}(V), \\ v & \mapsto \langle v \rangle_K, \end{cases}$$

wenn es ein  $\lambda \in K \setminus \{0\}$  mit  $v' = \lambda v$  gibt. Ist speziell

$$v = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1} \setminus \{0\},$$

so nennen wir das  $(n+1)$ -Tupel

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) := \kappa(v)$$

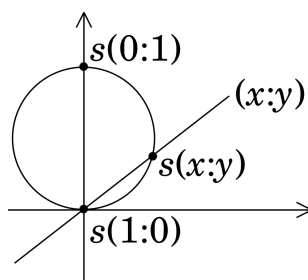
die **homogenen Koordinaten** des Punktes  $\langle v \rangle_K \in \mathbb{P}^n(K)$ . Wegen  $v \neq 0$  ist hierbei stets mindestens eines der  $x_i$  von Null verschieden und es gilt

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (x'_0 : x'_1 : \dots : x'_n) \\ \iff \text{es gibt ein } \lambda \in K \setminus \{0\} \text{ mit } x'_i = \lambda x_i \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Die homogenen Koordinaten sind also nur bis auf einen gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor festgelegt.

**Beispiel 1.85.** Wir wollen uns nun die projektiven Standardräume kleiner Dimension veranschaulichen.

- (a) Der projektive Standardraum  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$  lässt sich leicht über eine stereographische Projektion  $s: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  homöomorph auf eine Kreislinie in  $\mathbb{R}^2$  abbilden. Das beweisen wir hier nicht, sondern verweisen auf den Beweis der Euler'schen Polyederformel 1.76, in dessen Schritt 2 wir einen ganz ähnlichen Beweis durchgeführt haben.



- (b) Eine entsprechende Einbettung von  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  in  $\mathbb{R}^3$  ist eine deutlich schwierigere Aufgabe, wenn man Singularitäten vermeiden möchte. Sie wurde 1901 von Werner Boy durch eine topologische Beschreibung und 1986 von François Apéry durch Angabe der konkreten Parametrisierung

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2} \cos^2 v \cos(2u) + \cos u \sin(2v)}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)} \\ y = \frac{\sqrt{2} \cos^2 v \sin(2u) - \sin u \sin(2v)}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)} \\ z = \frac{3 \cos^2 v}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)} \end{cases} \quad \text{mit } u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ und } v \in [0, \pi]$$

gelöst. Vor dem Mathematischen Forschungszentrum in Oberwolfach, wurde 1991 nach den Formeln von Apéry ein mittlerweile berühmtes Modell der Boy'schen Fläche erstellt:



**Definition 1.86 (proj. Raum).** Für eine nichtleere Teilmenge  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  setzen wir

$$U(Z) := \bigcup_{P \in Z} P \subseteq V.$$

Außerdem setzen wir  $U(\emptyset) := \{0\}$ .  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  heißt ein **projektiver Unterraum**, wenn  $U(Z)$  ein Untervektorraum von  $V$  ist.

Insbesondere erhalten wir für  $Z = \{P\}$  mit einem Punkt  $P \in \mathbb{P}(V)$ , dass  $U(Z) = P$  ist. Um es noch einmal zu betonen – dies ist ein wichtiger Punkt:  $Z$  ist hier die aus dem Punkt  $P$  bestehende Einpunktmenge und  $U(Z)$  der eindimensionale Untervektorraum  $P$  von  $V$ .

**Proposition 1.87.** Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \{\text{Untervektorräume von } V\} &\leftrightarrow \{\text{projektive Unterräume von } \mathbb{P}(V)\} \\ W &\mapsto \mathbb{P}(W) \\ U(Z) &\leftrightarrow Z \end{aligned}$$

sind wohldefinierte, inklusionserhaltende Bijektionen, deren Verkettung in beiden Reihenfolgen die Identität ist. Insbesondere ist jeder projektive Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$  selbst ein projektiver Raum.

*Beweis.* Es ist

$$U(\mathbb{P}(\{0\})) = U(\emptyset) = \{0\} \subseteq V$$

ein Untervektorraum von  $V$  und also  $\emptyset = \mathbb{P}(\{0\})$  ein projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$ . Außerdem gilt

$$\mathbb{P}(U(\emptyset)) = \mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset.$$

Für den Rest des Beweises genügt es daher, nichttriviale Untervektorräume von  $\{0\} \neq W \subseteq V$  und nichtleere projektive Unterräume  $\emptyset \neq Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  zu betrachten. Für diese gilt einerseits

$$U(\mathbb{P}(W)) = \bigcup_{P \in \mathbb{P}(W)} P = \bigcup_{\substack{R \subseteq W \\ \text{1-dim. Untervektorraum}}} R = W,$$

so dass  $\mathbb{P}(W)$  ein projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$  ist. Gilt andererseits

$$\mathbb{P}(U(Z)) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{P \in Z} P\right) = \{\text{1-dim. Untervektorraum von } \bigcup_{P \in Z} P\} =: M,$$

so folgt  $M = Z$ ,

*denn:* Zum Einen ist für jedes  $R \in Z$  sofort  $R$  ein eindimensionaler Untervektorraum von  $\bigcup_{P \in Z} P$ . Ist zum Anderen  $R$  ein eindimensionaler Untervektorraum von  $\bigcup_{P \in Z} P$ , so ist  $R = \langle x \rangle$  für ein  $x \in V$ . Da dann ein  $P \in Z$  mit  $x \in P$  existiert, folgt  $\langle x \rangle = P$  und somit  $R = P \in Z$ . #

Es folgt, dass die Abbildungen  $U$  und  $\mathbb{P}$  bijektiv sind. Dass sie auch Inklusionen erhalten, ist klar. Insgesamt folgt so die Proposition.  $\square$

**Definition 1.88 (proj. Raum).** Für einen projektiven Unterraum  $Z$  von  $\mathbb{P}(V)$  heißt

$$\dim Z = \dim \mathbb{P}(U(Z)) = \dim U(Z) - 1$$

die **Dimension** von  $Z$ . Speziell heißt  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$

- eine (**projektive**) **Hyperebene** in  $\mathbb{P}(V)$ , wenn  $\dim Z = \dim \mathbb{P}(V) - 1$  gilt,
- eine (**projektive**) **Ebene** in  $\mathbb{P}(V)$ , wenn  $\dim Z = 2$  gilt,
- eine (**projektive**) **Gerade** in  $\mathbb{P}(V)$ , wenn  $\dim Z = 1$  gilt.

Unter der Bijektion aus 1.87 korrespondieren  $m$ -dimensionale projektive Unterräume von  $\mathbb{P}(V)$  zu  $(m + 1)$ -dimensionalen Untervektorräumen von  $V$ .

**Beispiel 1.89.** Eine Gerade  $g$  in  $\mathbb{P}^2(K)$  ist eine Menge von Punkten aus  $\mathbb{P}^2(K)$  – also von Ursprungsgeraden in  $K^3$  – deren Vereinigung ein zweidimensionaler Untervektorraum  $U(g)$  des  $K^3$  – also eine Ursprungsebene – ist.  $U(g)$  ist als solche als Lösungsraum eines homogenen Linearen Gleichungssystems gegeben: Es existieren  $a_1, a_2, a_3 \in K$  mit

$$U(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^3 \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \right\}.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} g &= \mathbb{P}(U(g)) = \{ \text{eindimensionale Untervektorräume von } U(g) \} \\ &= \{ (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \}. \end{aligned}$$

**Proposition 1.90 (proj. Raum).** Sei  $(Z_i)_{i \in I}$  eine Familie projektiver Unterräume von  $\mathbb{P}(V)$ . Dann gilt:

- (a)  $\bigcap_{i \in I} Z_i$  ist wieder ein projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$  mit  $U(\bigcap_{i \in I} Z_i) = \bigcap_{i \in I} U(Z_i)$ .
- (b) Der Durchschnitt aller projektiven Unterräume  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  mit  $\bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq Z$  heißt der **Verbindungsraum**  $\bigvee_{i \in I} Z_i$  und ist wieder ein projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$  mit

$$U\left(\bigvee_{i \in I} Z_i\right) = \sum_{i \in I} U(Z_i). \quad (1.20)$$

Im Fall  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  schreiben wir auch  $\bigvee_{i \in I} Z_i = Z_1 \vee Z_2 \vee \dots \vee Z_n$ ; im Fall  $I = \{1, 2\}$ ,  $Z_1 = \{P_1\}$  und  $Z_2 = \{P_2\}$  mit  $P_1 \neq P_2 \in \mathbb{P}(V)$  ist  $Z_1 \vee Z_2$  eine Gerade, die **Verbindungsgerade**  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  von  $P_1$  und  $P_2$ .

*Beweis.* Es ist

$$\bigcap_{i \in I} Z_i = \bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(U(Z_i)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} U(Z_i)\right),$$

somit folgt Behauptung (a) aus 1.87. Aufgrund von (a) ist  $\bigvee_{i \in I} Z_i$  ein projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$ . Es ist  $\bigvee_{i \in I} Z_i = \mathbb{P}\left(\sum_{i \in I} U(Z_i)\right) =: \tilde{Z}$ ,

denn:  $\tilde{Z}$  ist ein projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$ , der  $\mathbb{P}(U(Z_i)) = Z_i$  für alle  $i \in I$  umfasst, mithin ist  $\bigvee_{i \in I} Z_i \subseteq \tilde{Z}$ . Ist umgekehrt  $Z = \mathbb{P}(W)$  ein projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$  mit  $Z = \mathbb{P}(W) \supseteq Z_i = \mathbb{P}(U(Z_i))$ , dann folgt mit 1.87, dass  $W \supseteq U(Z_i)$  für alle  $i \in I$  gilt. Es ergibt sich  $W \supseteq \sum_{i \in I} U(Z_i)$  und deshalb  $Z = \mathbb{P}(W) \supseteq \mathbb{P}(\sum_{i \in I} U(Z_i)) = \tilde{Z}$ . Die Behauptung folgt dann aus der Definition des Verbindungsraums. #

Aussage (b) erhalten wir nun aus 1.87. Im Fall  $Z_1 = \{P_1\}$  und  $Z_2 = \{P_2\}$  mit  $P_1 \neq P_2 \in \mathbb{P}(V)$  ist  $U(Z_1 \vee Z_2) = U(Z_1) + U(Z_2)$  zweidimensional wegen  $U(Z_1) \cap U(Z_2) = P_1 \cap P_2 = \{0\}$ , d.h.  $Z_1 \vee Z_2$  ist eine Gerade. □

Wie im Affinen gibt es auch im Projektiven eine Dimensionsformel:

**Satz 1.91** (Dimensionsformel für projektive Unterräume, **proj. Raum**). Für je zwei projektive Unterräume  $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$  gilt

$$\dim(Z_1 \vee Z_2) = \dim Z_1 + \dim Z_2 - \dim(Z_1 \cap Z_2).$$

Insbesondere ist  $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ , falls  $\dim Z_1 + \dim Z_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$  gilt.<sup>9</sup>

*Beweis.* Nach Proposition 1.90 und der Dimensionsformel für Untervektorräume aus der Linearen Algebra gilt

$$\begin{aligned} \dim(Z_1 \vee Z_2) &= \dim \mathbb{P}(U(Z_1 \vee Z_2)) = \dim(\mathbb{P}(U(Z_1) + U(Z_2))) = \dim(U(Z_1) + U(Z_2)) - 1 \\ &= \dim U(Z_1) + \dim U(Z_2) - \dim(U(Z_1) \cap U(Z_2)) - 1 \\ &= \dim U(Z_1) + \dim U(Z_2) - \dim U(Z_1 \cap Z_2) - 1 \\ &= (\dim Z_1 + 1) + (\dim Z_2 + 1) - (\dim(Z_1 \cap Z_2) + 1) - 1 \\ &= \dim Z_1 + \dim Z_2 - \dim(Z_1 \cap Z_2) \end{aligned}$$

und somit der Satz. □

## 1.7 Projektive Abbildungen

**Definition 1.92 (proj. Raum).** Sei  $W$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$  und  $\mathbb{P}(W)$  der zu  $W$  gehörige projektive Raum. Eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  heißt **projektive Abbildung**, wenn es eine injektive lineare Abbildung  $\Phi: V \rightarrow W$  mit

$$\varphi(\langle v \rangle_K) = \langle \Phi(v) \rangle_K \quad \text{für alle } 0 \neq v \in V$$

gibt. Wir schreiben kurz  $\varphi =: \mathbb{P}(\Phi)$ . Eine bijektive projektive Abbildung heißt auch eine **Projektivität**.

In Definition 1.92 ist die Injektivität der linearen Abbildung  $\Phi$  notwendig für die Wohldefiniertheit von  $\varphi$ ,

<sup>9</sup>Ein Spezialfall hiervon ist, dass sich in einer projektiven Ebene je zwei verschiedene Geraden in einem Punkt schneiden.



denn: Wäre  $\Phi$  nicht injektiv, so gäbe es ein  $0 \neq v \in V$  mit  $\Phi(v) = 0$ . Es gälte dann

$$\varphi(\langle v \rangle_K) = \langle \Phi(v) \rangle_K = 0 \notin \mathbb{P}(W).$$

#

Hieraus folgt sofort  $\dim W \geq \dim V$  und somit auch

$$\dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1 \geq \dim V - 1 = \dim \mathbb{P}(V).$$

Dieses Phänomen ist gegenüber der Linearen Algebra und der affinen Theorie völlig neuartig und bedingt, dass sich beliebige Abbildungstypen wie etwa Projektionen des Raumes auf eine Ebene nicht ohne Weiteres ins Projektive übertragen lassen.

**Proposition 1.93 (proj. Raum).** Sei  $W$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$  und  $\mathbb{P}(W)$  der zu  $W$  gehörige projektive Raum. Für zwei injektive lineare Abbildungen  $\Phi, \Psi: V \rightarrow W$  gilt

$$\mathbb{P}(\Phi) = \mathbb{P}(\Psi) \iff \text{es gibt ein } \lambda \in K \setminus \{0\} \text{ mit } \Psi = \lambda \cdot \Phi.$$

*Beweis.* Dass für alle  $\lambda \in K \setminus \{0\}$  die Beziehung  $\mathbb{P}(\lambda \cdot \Phi) = \mathbb{P}(\Phi)$  gilt, ist klar.

Nehmen wir also umgekehrt an, es gelte  $\mathbb{P}(\Psi) = \mathbb{P}(\Phi)$ . Sei  $(v_0, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ . Dann gilt

$$\langle \Phi(v_i) \rangle_K = \langle \Psi(v_i) \rangle_K \quad \text{für } i = 0, \dots, n \quad \text{und} \quad \langle \Phi(\sum_{i=0}^n v_i) \rangle_K = \langle \Psi(\sum_{i=0}^n v_i) \rangle_K.$$

Somit existieren Skalare  $\lambda_0, \dots, \lambda_n, \lambda \in K$  mit

$$\Psi(v_i) = \lambda_i \Phi(v_i) \quad \text{für } i = 0, \dots, n \quad \text{und} \quad \Psi(\sum_{i=0}^n v_i) = \lambda \Phi(\sum_{i=0}^n v_i).$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \Phi(v_i) = \sum_{i=0}^n \lambda \Phi(v_i).$$

Da  $(v_0, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  ist und  $\Phi$  injektiv ist, ist  $(\Phi(v_0), \dots, \Phi(v_n))$  eine linear unabhängige Familie. Aus diesem Grund ist  $\lambda_i = \lambda$  für  $i = 0, \dots, n$  und deshalb  $\Psi(v) = \lambda \Phi(v)$  für alle  $v \in V$ .  $\square$

**Beispiel 1.94.** Sei  $K$  ein beliebiger Körper.

(a) Für  $m \geq n$  ist

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{l} K^{n+1} \\ \left( \begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \end{array} \right. \rightarrow K^{m+1}, \quad \mapsto \left( \begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right)$$

offensichtlich eine injektive lineare Abbildung. Die zugehörige projektive Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}^n(K) & \rightarrow \mathbb{P}^m(K), \\ (x_0 : \dots : x_n) & \mapsto (x_0 : \dots : x_n : 0 : \dots : 0) \end{cases}$$

heißt die **kanonische Einbettung** von  $\mathbb{P}^n(K)$  in  $\mathbb{P}^m(K)$ .

(b) Seien  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in K \setminus \{0\}$  nicht alle gleich<sup>10</sup> und sei  $\varphi$  die durch

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}^2(K) & \rightarrow \mathbb{P}^2(K), \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto (\lambda_0 x_0 : \lambda_1 x_1 : \lambda_2 x_2) \end{cases}$$

gegebene Projektivität. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(1 : 0 : 0) &= (\lambda_0 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0), \\ \varphi(0 : 1 : 0) &= (0 : \lambda_1 : 0) = (0 : 1 : 0), \\ \varphi(0 : 0 : 1) &= (0 : 0 : \lambda_2) = (0 : 0 : 1), \\ \varphi(1 : 1 : 1) &= (\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2) \neq (1 : 1 : 1). \end{aligned}$$

In der projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2(K)$  über einem beliebigen Körper  $K$  mit mindestens drei Elementen gibt es also eine von der Identität verschiedene Projektivität, die drei nicht kollineare Punkte festlässt. Das ist ein Unterschied zum Affinen, denn nach Satz 1.35 ist in der affinen Ebene  $\mathbb{A}^2(K)$  die Identität die einzige Affinität, die drei nicht kollineare Punkte festlässt.

Wir werden nun mit den Zentralprojektionen beispielhaft eine weitere Klasse projektiver Abbildungen einführen:

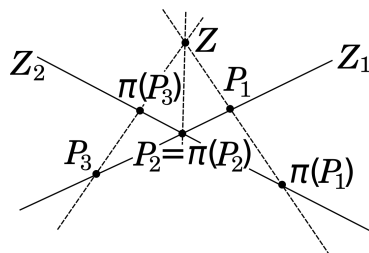
**Definition 1.95 (proj. Raum).** Seien  $Z, Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$  projektive Unterräume, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (i)  $\dim(Z_1) = \dim(Z_2)$ ,
- (ii)  $Z \vee Z_1 = Z \vee Z_2 = \mathbb{P}(V)$ ,
- (iii)  $Z \cap Z_1 = Z \cap Z_2 = \emptyset$ ,

Die Abbildung

$$\pi : Z_1 \rightarrow Z_2, \quad P \mapsto \text{Schnittpunkt von } Z \vee \{P\} \text{ und } Z_2$$

heißt die **Zentralprojektion mit Zentrum  $Z$**  von  $Z_1$  auf  $Z_2$ .



<sup>10</sup>Das ist natürlich nur in einem Körper mit mindestens 3 Elementen möglich.

**Bemerkung 1.96 (proj. Raum).** (a) Die Bedingungen (ii) und (iii) aus Definition 1.95 sind aufgrund von 1.90 äquivalent zu

$$V = U(Z) \oplus U(Z_1) = U(Z) \oplus U(Z_2).$$

Sind speziell  $Z_1$  und  $Z_2$  Hyperebenen, so bedeutet dies, dass  $Z$  ein Punkt außerhalb von  $Z_1 \cup Z_2$  ist.

(b) Die Zentralprojektion ist wohldefiniert,

denn: Zu zeigen ist, dass für einen beliebigen Punkt  $P \in Z_1$  die Menge  $(Z \vee \{P\}) \cap Z_2$  tatsächlich aus genau einem Punkt in  $Z_2$  besteht. Mit der Dimensionsformel 1.91 gilt zunächst

$$\dim(Z \vee \{P\}) = \dim Z + \dim\{P\} - \dim(Z \cap \{P\}) \stackrel{(iii)}{=} \dim Z + 1, \quad (1.21)$$

$$\dim(Z \vee Z_2) = \dim Z + \dim Z_2 - \dim(Z \cap Z_2) \stackrel{(iii)}{=} \dim Z + \dim Z_2 + 1. \quad (1.22)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{P}(V) &\stackrel{(ii)}{=} \dim(Z \vee Z_2) = \dim((Z \vee \{P\}) \vee Z_2) \\ &\stackrel{1.91}{=} \dim(Z \vee \{P\}) + \dim Z_2 - \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) \\ &\stackrel{(1.21)}{=} (\dim Z + 1) + \dim Z_2 - \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) \\ &= (\dim Z + \dim Z_2 + 1) - \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) \\ &\stackrel{(1.22)}{=} \dim(Z \vee Z_2) - \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \dim \mathbb{P}(V) - \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) \end{aligned}$$

und also  $\dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) = 0$ . #

**Proposition 1.97 (proj. Raum).** Jede Zentralprojektion ist eine Projektivität.

*Beweis.* Seien  $Z_1, Z_2$  projektive Unterräume von  $\mathbb{P}(V)$ , und sei  $\pi: Z_1 \rightarrow Z_2$  eine Zentralprojektion mit Zentrum  $Z$ . Nach Bemerkung 1.96 gilt dann  $V = U(Z) \oplus U(Z_2)$ , so dass wir ein beliebiges Element  $v \in V$  eindeutig in der Form  $v = w + w_2$  mit  $w \in U(Z)$  und  $w_2 \in U(Z_2)$  schreiben können. Es existiert dann eine Projektion

$$\Pi: \begin{cases} V = U(Z) \oplus U(Z_2) & \rightarrow U(Z_2), \\ w + w_2 & \mapsto w_2. \end{cases}$$

Die Einschränkung  $\Phi$  von  $\Pi$  auf  $U(Z_1)$  ist ein Isomorphismus,

denn: Zu  $w_2 \in U(Z_2)$  gibt es  $w \in U(Z)$  und  $w_1 \in U(Z_1)$  mit  $w_2 = w + w_1$ . Es ist dann  $\Phi(w_1) = \Pi(w_1) = \Pi(-w + w_2) = w_2$  und also  $\Phi$  surjektiv. Darüber hinaus ist  $\ker \Phi = \ker \Pi \cap U(Z_1) = U(Z) \cap U(Z_1) = 0$  und  $\Phi$  ist injektiv. #

Sei  $0 \neq w_1 \in U(Z_1)$ . Dann gilt

$$\langle \Phi(w_1) \rangle_K = (U(Z) \oplus \langle w_1 \rangle_K) \cap U(Z_2),$$



denn: Es existieren eindeutig bestimmte  $w \in U(Z)$ ,  $w_2 \in U(Z_2)$  mit  $w_1 = w + w_2$ , weshalb  $\Phi(w_1) = w_2 = -w + w_1 \in (U(Z) \oplus \langle w_1 \rangle_K) \cap U(Z_2)$  gilt. Ist umgekehrt  $v \in (U(Z) \oplus \langle w_1 \rangle_K) \cap U(Z_2)$ , dann existieren eindeutig bestimmte  $w \in U(Z)$ ,  $\lambda \in K$  mit  $v = w + \lambda w_1 \in U(Z_2)$ . Es ist dann  $\Phi(\lambda w_1) = \Pi(\lambda w_1) = \Pi(-w + (w + \lambda w_1)) = w + \lambda w_1 = v$ .  
#

Schließlich gilt  $\pi = \mathbb{P}(\Phi)$ ,

denn: Sei  $P = \langle w_1 \rangle_K \in Z_1$ . Das eindeutig bestimmte Element von  $(Z \vee \{P\}) \cap Z_2$  ist gegeben durch

$$U((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) = (U(Z) \oplus \langle w_1 \rangle_K) \cap U(Z_2) = \langle \Phi(w_1) \rangle_K = \mathbb{P}(\Phi)(\langle w_1 \rangle_K) = \mathbb{P}(\Phi)(P).$$

#

Insgesamt folgt die Proposition. □

Offensichtlich bleibt bei einer Zentralprojektion  $\pi: Z_1 \rightarrow Z_2$  der Durchschnitt  $Z_1 \cap Z_2$  punktweise fest. Insbesondere ist nicht jede Projektivität bereits eine Zentralprojektion. In Übungsaufgabe 1.22 zeigen wir, dass aber jede Projektivität  $\varphi: Z_1 \rightarrow Z_2$  mit  $\varphi|_{Z_1 \cap Z_2} = \text{id}_{Z_1 \cap Z_2}$  eine Zentralprojektion ist.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen projektiven Räumen und affinen Räumen verstehen und untersuchen diesen im folgenden Satz:

**Satz 1.98 (proj. Raum).** Sei  $H \subseteq \mathbb{P}(V)$  eine Hyperebene. Dann kann man das Komplement

$$X := \mathbb{P}(V) \setminus H$$

so zu einem affinen Raum  $(X, T(X), \tau)$  machen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Es gibt eine kanonische Bijektion

$$H \rightarrow X_\infty := \{[g] \mid g \subseteq X \text{ Gerade}\},$$

wobei  $[g] := \{h \subseteq X \text{ Gerade} \mid g \parallel h\}$  das zu  $g$  gehörige **Parallelenbüschel** bezeichne.<sup>11</sup> Man kann sich das Parallelenbüschel  $[g]$  als einen **unendlich fernen Punkt** (außerhalb von  $X$ ) vorstellen, in dem sich die (in  $X$  parallelen) Geraden  $h \in [g]$  schneiden. Die Menge  $X_\infty$  heißt dann die **unendlich ferne Hyperebene** von  $X$ .

(b) Für jeden projektiven Unterraum  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  mit  $Z \not\subseteq H$  ist  $Z \cap X$  ein affiner Unterraum von  $X$  mit

$$\dim(Z \cap X) = \dim Z \quad \text{und} \quad \dim(Z \cap H) = \dim Z - 1.$$

Die durch  $Z \mapsto Z \cap X$  gegebene Zuordnung von der Menge der nicht in  $H$  enthaltenen projektiven Unterräume von  $\mathbb{P}(V)$  in die Menge der nicht leeren affinen Unterräume von  $X$  ist bijektiv. Insbesondere gibt es zu jedem nichtleeren affinen Unterraum  $Y \subseteq X$  einen eindeutig bestimmten (**projektiven**) **Abschluss**, also einen nicht in  $H$  enthaltenen projektiven Unterraum  $\bar{Y} \subseteq \mathbb{P}(V)$  mit  $\bar{Y} \cap X = Y$ .

<sup>11</sup>Offensichtlich ist Parallelität von Geraden in  $X$  eine Äquivalenzrelation und die Parallelenbüschel sind die zugehörigen Äquivalenzklassen.

- (c) Für jede Projektivität  $\varphi: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  mit  $\varphi(H) = H$  ist  $\varphi|_X: X \rightarrow X$  eine Affinität und die durch  $\varphi \mapsto \varphi|_X$  gegebene Zuordnung ist eine Bijektion zwischen der Menge der Projektivitäten von  $\mathbb{P}(V)$ , die  $H$  in sich überführen, und der Menge der Affinitäten von  $X$ . Insbesondere gibt es zu jeder Affinität  $\psi$  von  $X$  eine eindeutig bestimmte Projektivität  $\bar{\psi}$  von  $\mathbb{P}(V)$  mit  $\bar{\psi}|_X = \psi$  und  $\bar{\psi}(H) = H$ , die (**projektive**) **Fortsetzung** von  $\psi$ .

**Beispiel 1.99.** Sei  $V = K^3$  und die Hyperebene  $H = \mathbb{P}(U(H)) \subseteq \mathbb{P}^2(K)$  durch den Untervektorraum

$$U(H) := \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^3 \mid x_0 = 0 \right\} \subseteq K^3$$

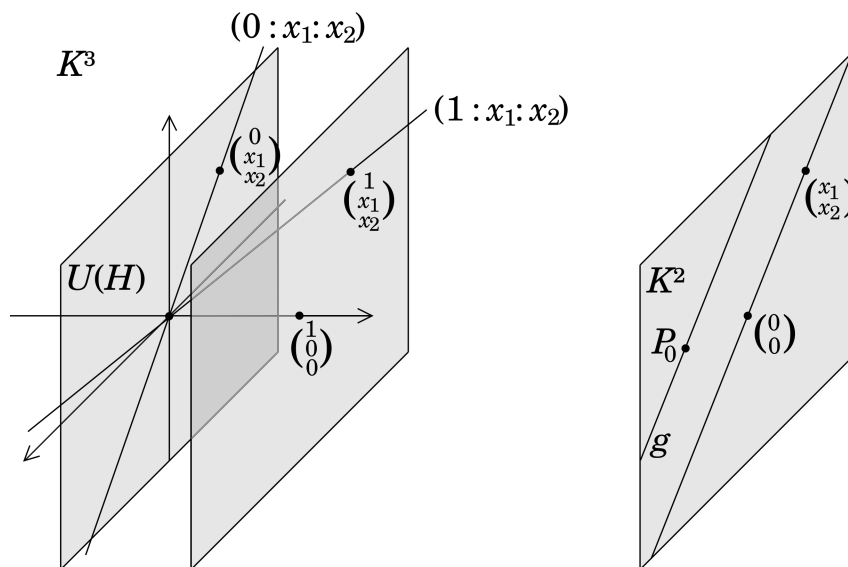
gegeben. Dann ist  $X = \mathbb{P}^2(K) \setminus H$  gerade das Bild der kanonischen Einbettung

$$\iota: \begin{cases} K^2 & \rightarrow \mathbb{P}^2(K), \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto (1 : x_1 : x_2), \end{cases}$$

denn: Offenbar gilt  $\iota(K^2) \cap H = \emptyset$  und also  $\iota(K^2) \subseteq X$ . Andererseits gilt auch  $X \subseteq \iota(K^2)$ , denn für ein beliebiges  $(y_0 : y_1 : y_2) \in X$  ist  $y_0 \neq 0$  und es gilt also

$$(y_0 : y_1 : y_2) = \left( 1 : \frac{y_1}{y_0} : \frac{y_2}{y_0} \right) = \iota \left( \begin{pmatrix} \frac{y_1}{y_0} \\ \frac{y_2}{y_0} \end{pmatrix} \right) \in \iota(K^2).$$

#



Die Menge  $X$  steht also in Bijektion zum affinen Raum  $K^2$ . Ist zudem  $g = P_0 + \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle_K \subseteq K^2$  eine Gerade, so ist offensichtlich durch die Zuordnung  $(0 : x_1 : x_2) \mapsto [g]$  eine Bijektion zwischen  $H$  und der unendlich fernen Hyperebene  $X_\infty$  gegeben.

*Beweis von Satz 1.98.* Wir wählen ein  $P_0 \in V \setminus U(H)$  und betrachten den affinen Unterraum

$$X' := P_0 + U(H) \subseteq V.$$

Für ein  $P \in X'$  gilt  $\langle P \rangle_K \not\subseteq U(H)$  und also  $\langle P \rangle_K \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U(H)) = X$ . Die so erhaltene Abbildung

$$\sigma: \begin{cases} X' & \rightarrow X, \\ P & \mapsto \langle P \rangle_K \end{cases}$$

ist bijektiv,

*denn:* Nach Bemerkung 1.17 schneidet jeder Untervektorraum  $U$  von  $V$ , der nicht in  $U(H)$  enthalten ist, die Hyperebene  $X' \subseteq V$ . Ist  $U$  eindimensional, so gilt nach der Dimensionsformel für affine Unterräume 1.15

$$\dim V = \dim(U \vee X') = \dim U + \dim X' - \dim(U \cap X') = 1 + (\dim V - 1) - \dim(U \cap X')$$

und somit

$$\dim(U \cap X') = 0.$$

Jeder eindimensionale Untervektorraum von  $V$ , der nicht in  $U(H)$  enthalten ist, schneidet  $X'$  daher in genau einem Punkt. #

Es ist  $T(X') = U(H)$ . Wir definieren

$$\tau: X \times X \rightarrow U(H), (A, B) \mapsto \sigma^{-1}(B) - \sigma^{-1}(A) = t_{\sigma^{-1}(A)\sigma^{-1}(B)}.$$

Setzen wir nun noch  $T(X) := U(H)$ , so wird  $(X, T(X), \tau)$  zu einem affinen Raum und  $\sigma$  zu einer Affinität mit  $T(\sigma) = \text{id}_{U(H)}$ .

Wir zeigen nun Behauptung (a). Jeder Punkt in  $H$  lässt sich wegen  $H = \mathbb{P}(U(H))$  eindeutig mit der von einem  $w \in U(H) \setminus \{0\}$  aufgespannten Geraden  $K \cdot w \subseteq U(H)$  schreiben. Andererseits gilt  $T(X) = U(H)$ , so dass die Menge dieser Geraden in Bijektion mit der Menge der Translationsvektorräume der Geraden in  $X$  steht. Letztere lässt sich offensichtlich mit der Menge der Parallelenbüschel von Geraden in  $X$  und also der unendlich fernen Hyperebene  $X_\infty$  identifizieren.

Zum Beweis von Behauptung (b) benutzen wir die Affinität  $\sigma$ : Ist  $Z$  ein projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$ , so ist  $U(Z) \cap X'$  als Durchschnitt zweier affiner Unterräume von  $V$  wieder ein solcher und wegen  $U(Z) \cap X' \subseteq X'$  sogar ein affiner Unterraum von  $X'$ . Folglich ist

$$\sigma(U(Z) \cap X') = \sigma(U(Z)) \cap \sigma(X') = Z \cap X \tag{1.23}$$

ein affiner Unterraum von  $X$ . Aus  $\mathbb{P}(U(Z)) = Z \not\subseteq H = \mathbb{P}(U(H))$  folgt  $U(Z) \not\subseteq U(H)$ . Nach der **Dimensionsformel für Untervektorräume** aus der Linearen Algebra gilt dann

$$\dim V = \dim(U(Z) \vee X')$$



$$\begin{aligned}
 &= \dim U(Z) + \dim X' - \dim(U(Z) \cap X') \\
 &= \dim U(Z) + (\dim V - 1) - \dim(U(Z) \cap X').
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \dim(Z \cap X) &= \dim \sigma(U(Z) \cap X') \\
 &= \dim(U(Z) \cap X') = \dim U(Z) - 1 = \dim Z
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

und somit die erste Teilbehauptung von (b). Aus  $U(Z) \not\subseteq U(H)$  ergibt sich  $U(H) + U(Z) = V$  und somit mit der Dimensionsformel für Untervektorräume

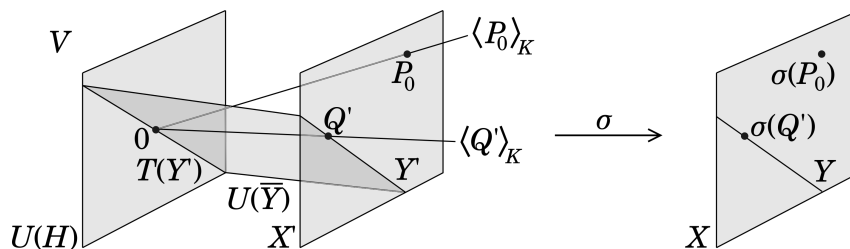
$$\begin{aligned}
 \dim(Z \cap H) + 1 &= \dim(\mathbb{P}(U(H) \cap U(Z))) + 1 \\
 &= \dim(U(H) \cap U(Z)) = \dim U(Z) - 1 = \dim Z
 \end{aligned}$$

und somit die zweite Teilbehauptung von (b). Um nun die Abbildung  $Z \mapsto Z \cap X$  umzukehren, müssen wir für jeden nichtleeren affinen Unterraum  $Y \subseteq X$  einen projektiven Abschluss  $\bar{Y} \subseteq \mathbb{P}(V)$  konstruieren. Dies geschieht wie folgt: Zum affinen Unterraum  $Y' := \sigma^{-1}(Y) \subseteq X'$  gehört ein Translationsvektorraum

$$T(Y') \subseteq T(X') = U(H) \quad \text{mit } Y' = Q' + T(Y') \text{ für ein } Q' \in Y'.$$

Wir setzen nun

$$\bar{Y} := \mathbb{P}(U(\bar{Y})) \quad \text{mit } U(\bar{Y}) := \langle Q' \rangle_K \oplus T(Y').$$



In der Definition von  $U(\bar{Y})$  ist die Summe tatsächlich direkt,

denn: Nach Voraussetzung gilt

$$Q' \in Y' \subseteq X' = P_0 + U(H) \quad \text{mit } P_0 \in V \setminus U(H)$$

und somit  $Q' \notin U(H) \supseteq T(Y')$ .

#

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
 \overline{Z \cap X} &= Z \quad \text{für alle projektiven Unterräume } Z \subseteq \mathbb{P}(V) \text{ mit } Z \not\subseteq H, \\
 \bar{Y} \cap X &= Y \quad \text{für alle affinen Unterräume } \emptyset \subsetneq Y \subseteq X,
 \end{aligned}$$

denn: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\overline{Z \cap X} &\stackrel{(1.23)}{=} \overline{\sigma(U(Z) \cap X')} \\ &= \mathbb{P}(\langle Q' \rangle_K \oplus T(U(Z) \cap X')) \quad \text{mit } U(Z) \cap X' = Q' + T(U(Z) + X').\end{aligned}$$

Der Vektorraum  $\langle Q' \rangle_K \oplus T(U(Z) \cap X')$  ist offensichtlich in  $U(Z)$  enthalten und hat nach (1.24) Dimension  $1 + (\dim U(Z) - 1) = \dim U(Z)$ .<sup>12</sup> Es folgt

$$\overline{Z \cap X} = \mathbb{P}(U(Z)) = Z$$

und somit die erste Teilbehauptung. Für die zweite Teilbehauptung berechnen wir

$$\begin{aligned}\overline{Y \cap X} &= \mathbb{P}(U(\overline{Y})) \cap (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U(H))) \\ &= \mathbb{P}(U(\overline{Y})) \setminus \mathbb{P}(U(H)) \\ &\stackrel{Q' \notin U(H)}{=} \mathbb{P}(\langle Q' \rangle_K \oplus T(Y')) \setminus \mathbb{P}(T(Y')) \\ &= \{ \langle P' \rangle_K \mid P' \in (Q' + T(Y')) \text{ oder } P' \in T(Y') \} \setminus \{ \langle P' \rangle_K \mid P' \in T(Y') \} \\ &= \sigma(Y') = Y.\end{aligned}$$

#

Damit ist gezeigt, dass die Zuordnung  $Y \mapsto \overline{Y}$  die Abbildung  $Z \mapsto Z \cap X$  umkehrt, und Behauptung (b) bewiesen.

Abschließend zeigen wir nun Behauptung (c). Um einzusehen, dass die Einschränkung  $\varphi|_X$  eine Affinität ist, betrachten wir anstelle von  $X$  zunächst wieder  $X'$ . Ist  $\varphi = \mathbb{P}(\Phi)$  für eine injektive lineare Abbildung  $\Phi$  auf  $V$ , so folgt aus  $\varphi(H) = H$  sofort  $\Phi(U(H)) = U(H)$ . Nach Proposition 1.93 ist  $\Phi$  nur bis auf einen Vorfaktor aus  $K$  bestimmt, so dass wir ohne Einschränkung  $\Phi(P_0) \in X'$  und insgesamt

$$\Phi(X') = X'$$

annehmen können. Die Einschränkung  $\Phi|_{X'}$  ist eine Affinität mit  $T(\Phi|_{X'}) := \Phi|_{U(H)}$ ,

denn: Nach Konstruktion ist  $\Phi|_{X'}$  bijektiv und es gilt

$$\langle T(\Phi|_{X'})(t_{AB}) \rangle_K = \langle \Phi|_{U(H)}(t_{AB}) \rangle_K = \langle t_{\Phi|_{X'}(A)\Phi|_{X'}(B)} \rangle_K \quad \text{für alle } A, B \in X',$$

so dass  $\Phi|_{X'}$  eine affine Abbildung ist.

#

Wegen  $\varphi|_X = \sigma \circ \Phi|_{X'} \circ \sigma^{-1}$  ist auch  $\varphi|_X$  eine Affinität mit  $T(\varphi|_X) = \Phi|_{U(H)}$ . Das zeigt die erste Teilbehauptung von (c). Um zu zeigen, dass die Zuordnung  $\varphi \mapsto \varphi|_X$  bijektiv ist, müssen wir jede Affinität  $\psi$  von  $X$  zu einer Projektivität  $\overline{\psi}$  von  $\mathbb{P}(V)$  fortsetzen. Dies können wir durch Angabe eines Automorphismus  $\Psi$  von  $V$  tun, indem wir

$$\overline{\psi} := \mathbb{P}(\Psi)$$

setzen. Wegen  $V = U(H) \oplus \langle P_0 \rangle_K$  ist ein solcher Automorphismus bereits eindeutig durch

$$\Psi|_{U(H)} := T(\psi) \quad \text{und} \quad \Psi(P_0) := (\sigma^{-1} \circ \psi \circ \sigma)(P_0)$$

<sup>12</sup>Hier geht übrigens die Voraussetzung  $Z \not\subseteq H$  ein.

festgelegt. Aus der Konstruktion folgen sofort

$$\bar{\psi}|_X = \psi \quad \text{und} \quad \bar{\psi}(H) = H$$

sowie  $\overline{\varphi|_X} = \varphi$  für jede unserer betrachteten Projektivitäten.  $\square$

## 1.8 Projektive Koordinaten

**Definition 1.100 (proj. Raum).** Sei  $\dim \mathbb{P}(V) = n$  und  $0 \leq r \leq n$ . Ein  $(r+1)$ -Tupel  $(P_0, \dots, P_r)$  von Punkten in  $\mathbb{P}(V)$  heißt **projektiv unabhängig**, wenn eine der folgenden äquivalenten<sup>13</sup> Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Es gibt linear unabhängige Vektoren  $v_0, \dots, v_r \in V$  mit  $P_i = \langle v_i \rangle_K$  für alle  $i \in \{0, \dots, r\}$ .
- (ii) Jedes  $(r+1)$ -Tupel  $(v_0, \dots, v_r)$  von Vektoren aus  $V$  mit  $P_i = \langle v_i \rangle_K$  für alle  $i \in \{0, \dots, r\}$  ist linear unabhängig.
- (iii)  $\dim \bigvee_{i=0}^r \{P_i\} = r$ .

Ein  $(n+2)$ -Tupel  $(P_0, \dots, P_{n+1})$  von Punkten aus  $\mathbb{P}(V)$  heißt eine **projektive Basis** von  $\mathbb{P}(V)$ , wenn je  $n+1$  Punkte davon projektiv unabhängig sind.

Ist  $(P_0, \dots, P_{n+1})$  eine projektive Basis von  $\mathbb{P}(V)$ , dann ist bereits  $\{P_0\} \vee \dots \vee \{P_n\} = \mathbb{P}(V)$ . Wir benötigen jedoch einen weiteren Punkt, um projektive Abbildungen eindeutig auf Basen festschreiben zu können, vgl. Satz 1.103.

**Beispiel 1.101.** Sei  $K$  ein Körper und sei  $n$  eine natürliche Zahl. Dann ist im projektiven Standardraum  $\mathbb{P}^n(K)$  die **kanonische projektive Basis** durch

$$\begin{aligned} P_0 &= (1 : 0 : 0 : \dots : 0), \\ P_1 &= (0 : 1 : 0 : \dots : 0), \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ P_n &= (0 : 0 : 0 : \dots : 1), \\ P_{n+1} &= (1 : 1 : 1 : \dots : 1). \end{aligned}$$

gegeben.

<sup>13</sup>Mit der Dimensionsformel für projektive Unterräume 1.91 lässt sich diese Äquivalenz schnell einsehen.

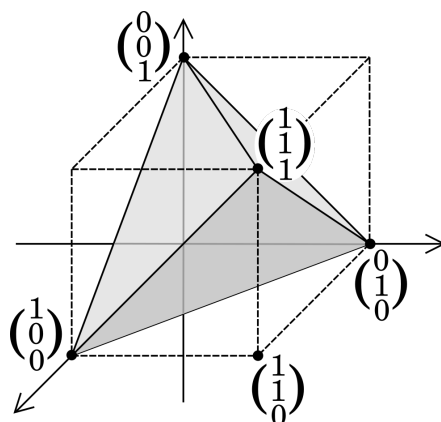


Abbildung 1.3: Man sieht hier auch sehr gut, dass der projektive Punkt  $(1 : 1 : 0)$  auf der projektiven Verbindungsgeraden von  $(1 : 0 : 0)$  und  $(0 : 1 : 0)$  liegt, vgl. hierzu auch (1.20).

Man beachte, dass der Punkt  $P_{n+1}$  nur bezüglich seiner Koordinatendarstellung eine Sonderrolle einnimmt. Vom projektiv-geometrischen Standpunkt unterscheidet er sich nicht von den anderen Basispunkten.

Die Konstruktion der Standardbasis aus Beispiel 1.101 lässt sich auf beliebige projektive Räume übertragen:

**Lemma 1.102 (proj. Raum).** Ist  $(P_0, \dots, P_{n+1})$  eine projektive Basis von  $\mathbb{P}(V)$ , so gibt es eine Basis  $(v_0, \dots, v_n)$  von  $V$  mit

$$P_i = \langle v_i \rangle_K \quad \text{für alle } i = \{0, \dots, n\} \quad \text{und} \quad P_{n+1} = \left\langle \sum_{i=0}^n v_i \right\rangle_K.$$

*Beweis.* Da  $(P_0, \dots, P_n)$  projektiv unabhängig sind, gibt es nach Teil (i) von Definition 1.100 eine Basis  $(v'_0, \dots, v'_n)$  mit

$$P_i = \langle v'_i \rangle_K \quad \text{für } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Wegen  $\langle v'_0, \dots, v'_n \rangle_K = V$  gibt es  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$P_{n+1} = \left\langle \sum_{i=0}^n \lambda_i v'_i \right\rangle_K.$$

Gälte  $\lambda_0 = 0$ , so wären  $v'_1, \dots, v'_n, \sum_{i=0}^n \lambda_i v'_i$  nicht linear unabhängig, was nach Teil (ii) von Definition 1.100 nicht sein kann. Es gilt also  $\lambda_0 \neq 0$  und analog  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Es folgt, dass  $(v_0, \dots, v_n)$  mit

$$v_i := \lambda_i v'_i \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, n\}$$

eine Basis vom gesuchten Typ ist. □

**Satz 1.103 (proj. Raum).** Sei  $W$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\mathbb{P}(W)$  der zu  $W$  gehörige projektive Raum. Gilt dann  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) =: n$  und ist  $(P_0, \dots, P_{n+1})$  bzw.  $(Q_0, \dots, Q_{n+1})$  eine projektive Basis von  $\mathbb{P}(V)$  bzw. von  $\mathbb{P}(W)$ , so gibt es genau eine Projektivität  $\varphi: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  mit

$$\varphi(P_i) = Q_i \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, n+1\}.$$

*Beweis.* Seien  $(v_0, \dots, v_n)$  bzw.  $(w_0, \dots, w_n)$  wie in Lemma 1.102 gewählte Basen von  $V$  bzw.  $W$  bzgl.  $(P_0, \dots, P_{n+1})$  bzw.  $(Q_0, \dots, Q_{n+1})$ . Es existiert dann ein eindeutig bestimmter Vektorraumisomorphismus  $\Phi: V \rightarrow W$  mit  $\Phi(v_i) = w_i$  für  $i = 0, \dots, n$ . Setzen wir  $\varphi = \mathbb{P}(\Phi)$ , dann ist  $\varphi$  eine Projektivität mit  $\varphi(P_i) = Q_i$  für  $i = 0, \dots, n+1$ . Es verbleibt der Nachweis der Eindeutigkeit. Sei also  $\psi: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  eine weitere Projektivität wie im Satz. Dann gibt es einen Vektorraumisomorphismus  $\Psi$  mit  $\psi = \mathbb{P}(\Psi)$ . Somit gilt

$$\begin{aligned} \langle \Psi(v_i) \rangle_K &= \psi(\langle v_i \rangle_K) = \psi(P_i) = Q_i = \langle w_i \rangle_K && \text{für alle } i \in \{0, \dots, n\}, \\ \langle \Psi(\sum_{i=0}^n v_i) \rangle_K &= \psi(\langle \sum_{i=0}^n v_i \rangle_K) = \psi(P_{n+1}) = Q_{n+1} = \langle \sum_{i=0}^n w_i \rangle_K, \end{aligned}$$

so dass es  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in K \setminus \{0\}$  gibt mit

$$\begin{aligned} \Psi(v_i) &= \lambda_i w_i && \text{für alle } i \in \{0, \dots, n\}, \\ \Psi(\sum_{i=0}^n v_i) &= \lambda_{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n w_i. \end{aligned}$$

Hieraus und aus der Linearität von  $\Psi$  folgt nach Koeffizientenvergleich sofort  $\lambda_{n+1} = \lambda_i$  für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$  und somit  $\Psi = \lambda_{n+1} \Phi$ . Mit Proposition 1.93 folgt

$$\varphi = \mathbb{P}(\Phi) = \mathbb{P}(\lambda_{n+1} \Phi) = \mathbb{P}(\Psi) = \psi.$$

□

Würden wir eine projektive Basis von  $\mathbb{P}(V)$  mit  $\dim \mathbb{P}(V) =: n$  als ein projektiv unabhängiges  $(n+1)$ -Tupel von Punkten aus  $\mathbb{P}(V)$  definieren, dann gälte die Existenzaussage in Satz 1.103 weiterhin, die Eindeutigkeitsaussage wäre jedoch nicht mehr gegeben, wie Beispiel 1.94(b) zeigt.

**Definition 1.104 (proj. Raum).** Sei  $n := \dim(\mathbb{P}(V))$ . Ist  $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_{n+1})$  eine projektive Basis von  $\mathbb{P}(V)$ , so gibt es nach Satz 1.103 genau eine Projektivität  $\eta_{\mathcal{B}}: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(K)$  mit

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{B}}(P_0) &= (1 : 0 : 0 : \dots : 0), \\ \eta_{\mathcal{B}}(P_1) &= (0 : 1 : 0 : \dots : 0), \\ &\vdots \\ \eta_{\mathcal{B}}(P_n) &= (0 : 0 : 0 : \dots : 1), \\ \eta_{\mathcal{B}}(P_{n+1}) &= (1 : 1 : 1 : \dots : 1). \end{aligned}$$



Wir nennen  $\eta_{\mathcal{B}}: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(K)$  das zu  $\mathcal{B}$  gehörige **projektive Koordinatensystem** von  $\mathbb{P}(V)$ . Für jeden Punkt  $P \in \mathbb{P}(V)$  heißt

$$\eta_{\mathcal{B}}(P) =: (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$$

der **homogene Koordinatenvektor** von  $P$  bezüglich der projektiven Basis  $\mathcal{B}$ . Man beachte, dass dieser nur bis auf einen Vorfaktor  $\lambda \in K \setminus \{0\}$  bestimmt ist.

Wie wir in Proposition 1.42 gesehen haben, erhalten Affinitäten Teilverhältnisse von jeweils drei Punkten. Schon bei Zentralprojektionen ist dies nicht mehr der Fall:

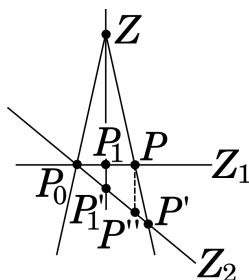


Abbildung 1.4: Einerseits gilt hier  $\text{TV}(P_0, P_1, P) = 2$ , andererseits sieht man mit dem Strahlensatz 1.43 leicht  $\text{TV}(P_0, P'_1, P') > \text{TV}(P_0, P''_1, P'') = 2$  ein.

In Proposition 1.106 werden wir einsehen, dass Projektivitäten das sogenannte Doppelverhältnis von vier Punkten fest lassen. Dieses führen wir nun zunächst ein:

**Definition 1.105 (proj. Raum).** Seien  $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}(V)$  paarweise verschiedene, kollineare Punkte. Dann ist  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$  eine projektive Basis der gemeinsamen Geraden  $g$ . Für einen beliebigen weiteren Punkt  $P \in g$  definieren wir nun das **Doppelverhältnis** von  $P_0, P_1, P_2, P$  durch

$$\text{DV}(P_0, P_1, P_2, P) := \eta_{\mathcal{B}}(P) \in \mathbb{P}^1(K).$$

Offenbar ist

$$\text{DV}(P_0, P_1, P_2, P_0) = (1 : 0), \quad \text{DV}(P_0, P_1, P_2, P_1) = (0 : 1), \quad \text{DV}(P_0, P_1, P_2, P_2) = (1 : 1).$$

**Proposition 1.106 (proj. Raum).** Das Doppelverhältnis ist eine projektive Invariante. Genauer gilt für einen Vektorraum  $W$  über  $K$ , den zugehörigen projektiven Raum  $\mathbb{P}(W)$ , eine projektive Abbildung  $\varphi: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  und paarweise verschiedene kollineare Punkte  $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}(V)$  und einen weiteren Punkt  $P \in \overrightarrow{P_0P_1}$

$$\text{DV}(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P)) = \text{DV}(P_0, P_1, P_2, P).$$

*Beweis.* Es ist  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$  eine projektive Basis von  $g := \overrightarrow{P_0P_1}$ . Wegen der Injektivität der zu  $\varphi$  gehörigen linearen Abbildung  $\Phi: V \rightarrow W$  ist  $\varphi(g)$  eine Gerade in  $\mathbb{P}(W)$  mit projektiver Basis  $\mathcal{B}' = (\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2))$  und

$$\psi := \varphi|_g^{\varphi(g)}: g \rightarrow \varphi(g)$$

eine Projektivität. Offenbar ist

$$\begin{aligned}\eta_{\mathcal{B}'}(\psi(P_0)) &= \eta_{\mathcal{B}'}(\varphi(P_0)) = (1 : 0) = \eta_{\mathcal{B}}(P_0) \\ \eta_{\mathcal{B}'}(\psi(P_1)) &= \eta_{\mathcal{B}'}(\varphi(P_1)) = (0 : 1) = \eta_{\mathcal{B}}(P_1), \\ \eta_{\mathcal{B}'}(\psi(P_2)) &= \eta_{\mathcal{B}'}(\varphi(P_2)) = (1 : 1) = \eta_{\mathcal{B}}(P_2).\end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 1.103 gilt  $\eta_{\mathcal{B}'} \circ \psi = \eta_{\mathcal{B}}$ . Für  $P \in g$  erhalten wir

$$\begin{aligned}DV(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P)) &= DV(\psi(P_0), \psi(P_1), \psi(P_2), \psi(P)) \\ &= \eta_{\mathcal{B}'}(\psi(P)) = \eta_{\mathcal{B}}(P) \\ &= DV(P_0, P_1, P_2, P)\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Ist ein projektives Koordinatensystem  $\eta: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(K)$  gegeben, so liegen für die Punkte  $P_0, P_1, P_2, P$  homogene Koordinaten vor und nach Proposition 1.106 lässt sich das Doppelverhältnis aus diesen homogenen Koordinaten berechnen. Um die Notation nicht unnötig zu belasten, nehmen wir für die weiteren Betrachtungen  $P_0, P_1, P_2, P \in \mathbb{P}^n(K)$  an:

**Proposition 1.107.** *Sei  $K$  ein Körper und seien*

$$P_k = (x_0^{(k)} : \dots : x_n^{(k)}) \quad \text{für } k \in \{0, 1, 2\}$$

*drei paarweise verschiedene, kollineare Punkte in  $\mathbb{P}^n(K)$  und  $P = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$  ein weiterer Punkt auf dieser Geraden. Dann gibt es zwei verschiedene Indizes  $i, j \in \{0, \dots, n\}$ , für die*

$$(x_i^{(0)} : x_j^{(0)}), (x_i^{(1)} : x_j^{(1)}), (x_i^{(2)} : x_j^{(2)}) \in \mathbb{P}^1(K)$$

*definiert und paarweise verschieden sind, und es gilt*

$$DV(P_0, P_1, P_2, P) = \left( \frac{\det \begin{pmatrix} x_i & x_i^{(1)} \\ x_j & x_j^{(1)} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} x_i & x_i^{(0)} \\ x_j & x_j^{(0)} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(0)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(0)} \end{pmatrix}} \right).$$

*Beweis.* Indizes  $i, j$  wie in der Proposition existieren tatsächlich,

denn: Da  $P_0, P_1, P_2$  paarweise verschieden und kollinear sind, gibt es  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in K \setminus \{0\}$  mit

$$\lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} x_0^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} x_0^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} x_0^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = 0.$$

Sind  $k_0, k_1, k_2 \in \{0, 1, 2\}$  und gilt  $x_i^{(k_0)} = 0$  für ein  $i \in \{0, \dots, n\}$ , so folgt daher

$$x_i^{(k_2)} = -\frac{\lambda_{k_1}}{\lambda_{k_2}} \cdot x_i^{(k_1)}.$$

Man sieht leicht ein, dass die Annahme, es gäbe keine Indizes  $i, j$  wie in der Proposition entgegen unserer Voraussetzung dazu führte, dass  $P_0, P_1, P_2$  nicht paarweise verschieden sind. #

Sind nun  $i, j$  wie in der Proposition gegeben, so ist

$$((x_i^{(0)} : x_j^{(0)}), (x_i^{(1)} : x_j^{(1)}), (x_i^{(2)} : x_j^{(2)}))$$

eine projektive Basis von  $\mathbb{P}^1(K)$  und somit die Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} \overrightarrow{P_0 P_1} & \rightarrow \mathbb{P}^1(K), \\ P = (x_0 : \dots : x_n) & \mapsto (x_i : x_j) \end{cases}$$

eine Projektivität. Nach Proposition 1.106 gilt dann

$$DV(P_0, P_1, P_2, P) = DV((x_i^{(0)} : x_j^{(0)}), (x_i^{(1)} : x_j^{(1)}), (x_i^{(2)} : x_j^{(2)}), (x_i : x_j)).$$

Nach Definition 1.92 gehört zum zur Berechnung des Doppelverhältnisses auf der rechten Seite benötigte Koordinatensystem  $\eta: \mathbb{P}^1(K) \rightarrow \mathbb{P}^1(K)$  die injektive lineare Abbildung  $H: K^2 \rightarrow K^2$  mit

$$\eta(\langle v \rangle_K) = \langle H(v) \rangle_K \quad \text{für alle } v \in K^2.$$

Letztere und somit auch  $\eta$  wird durch die Abbildungsmatrix  $M_H \in GL_2(K)$  von  $H$  beschrieben. Genauer lassen sich die homogenen Koordinaten von

$$DV((x_i^{(0)} : x_j^{(0)}), (x_i^{(1)} : x_j^{(1)}), (x_i^{(2)} : x_j^{(2)}), (x_i : x_j)) = \eta(x_i : x_j)$$

aus dem Vektor  $M_H \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}$  auslesen. Diesen bestimmen wir nun: Wegen

$$\eta(x_i^{(0)} : x_j^{(0)}) = (1 : 0) \quad \text{und} \quad \eta(x_i^{(1)} : x_j^{(1)}) = (0 : 1)$$

gilt

$$M_H^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda x_i^{(0)} & \mu x_i^{(1)} \\ \lambda x_j^{(0)} & \mu x_j^{(1)} \end{pmatrix}$$

mit zwei zunächst noch frei wählbaren Skalaren  $\lambda, \mu \in K \setminus \{0\}$ . Aus

$$\eta(x_i^{(2)} : x_j^{(2)}) = (1 : 1)$$

folgt zudem

$$\lambda x_i^{(0)} + \mu x_i^{(1)} = \nu x_i^{(2)},$$

$$\lambda x_j^{(0)} + \mu x_j^{(1)} = \nu x_j^{(2)}$$

mit einem weiteren Skalar  $\nu \in K \setminus \{0\}$ . Wählt man nun

$$\nu = \det \begin{pmatrix} x_i^{(0)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(0)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix},$$

so kann man  $\lambda$  und  $\mu$  mit der **Cramer'schen Regel** aus der Linearen Algebra berechnen und erhält

$$M_H^{-1} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix} x_i^{(0)} & \det \begin{pmatrix} x_i^{(0)} & x_i^{(2)} \\ x_j^{(0)} & x_j^{(2)} \end{pmatrix} x_i^{(1)} \\ \det \begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix} x_j^{(0)} & \det \begin{pmatrix} x_i^{(0)} & x_i^{(2)} \\ x_j^{(0)} & x_j^{(2)} \end{pmatrix} x_j^{(1)} \end{pmatrix}$$

Die Proposition folgt nun durch direktes Ausrechnen. □

**Bemerkung 1.108.** Wir betrachten die zu Beispiel 1.99 analoge Einbettung

$$\iota: \begin{cases} K^n & \rightarrow \mathbb{P}^n(K), \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n). \end{cases}$$

Liegen in der Situation von Proposition 1.107 die Punkte  $P_0, P_1, P_2, P$  im affinen Teil  $\iota(K^n)$  von  $\mathbb{P}^n(K)$ , dann ist  $i = 0$  eine mögliche Wahl und es existiert ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ , so dass

$$(1 : x_j^{(0)}), (1 : x_j^{(1)}), (1 : x_j^{(2)}) \in \mathbb{P}^1(K)$$

paarweise verschieden sind. Für das Doppelverhältnis gilt dann

$$DV(P_0, P_1, P_2, P) = \left( \frac{x_j^{(1)} - x_j}{x_j^{(1)} - x_j^{(2)}} : \frac{x_j^{(0)} - x_j}{x_j^{(0)} - x_j^{(2)}} \right) \stackrel{1.41}{=} (TV(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_j) : TV(x_j^{(0)}, x_j^{(2)}, x_j)).$$

Ist abweichend davon  $P_0$  der unendlich ferne Punkt der Geraden durch  $P_0, P_1, P_2, P$ , so erhalten wir

$$DV(P_0, P_1, P_2, P) = \left( \frac{x_j^{(1)} - x_j}{x_j^{(1)} - x_j^{(2)}} : 1 \right) \stackrel{1.41}{=} (TV(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_j) : 1).$$

Wir zeigen nun mit dem Satz von Desargues einen klassischen Satz der projektiven Geometrie:

**Satz 1.109** ((projektiver) Satz von Desargues, **proj. Raum**). Sei  $E \subseteq \mathbb{P}(V)$  eine Ebene und seien  $A, B, C, A', B', C' \in E$  paarweise verschiedene Punkte mit paarweise verschiedenen Verbindungsgeraden  $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ , die sich in einem gemeinsamen Punkt  $S$  schneiden. Dann sind die Schnittpunkte

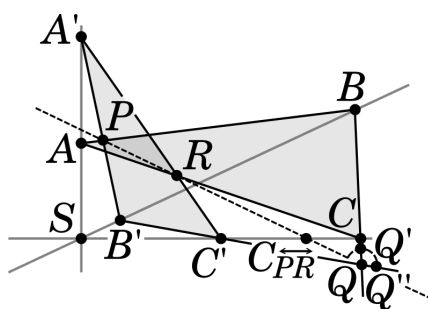
$$P \text{ von } \overleftrightarrow{AB} \text{ und } \overleftrightarrow{A'B'},$$



$$Q \text{ von } \overleftrightarrow{BC} \text{ und } \overleftrightarrow{B'C'},$$

$$R \text{ von } \overleftrightarrow{CA} \text{ und } \overleftrightarrow{C'A'}$$

entweder paarweise verschieden und kollinear oder alle gleich.



*Beweis.* Nach der Dimensionsformel für projektive Unterräume 1.91 haben je zwei verschiedene Geraden in  $E$  einen eindeutigen Schnittpunkt. Da mit  $\overleftrightarrow{AA'} \neq \overleftrightarrow{BB'}$  auch die Geraden  $\overleftrightarrow{AB}$  und  $\overleftrightarrow{A'B'}$  verschieden sind, folgt die Eindeutigkeit von  $P$  und analog auch die von  $Q$  und  $R$ . Die Behauptung des Satzes ergibt also formal Sinn. Um sie zu beweisen, unterscheiden wir drei Fälle:

**Fall 1:  $A, B, C$  sind kollinear.** Dann liegen nach Definition auch die Punkte  $P, Q, R$  auf  $\overleftrightarrow{AC}$  und sind insbesondere kollinear. Nach Voraussetzung darf in dieser Situation keiner der Punkte  $A', B', C'$  auf  $\overleftrightarrow{AC}$  liegen, da sonst auch  $S \in \overleftrightarrow{AC}$  gälte und  $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$  nicht mehr paarweise verschieden wären. Sind nun zwei der drei Punkte  $P, Q, R$  identisch, ohne Einschränkung  $P = Q$ , so erhalten wir  $P = Q \in \overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$ . Wären nun  $A', B', C'$  nicht kollinear, so folgte  $B' = P = Q \in \overleftrightarrow{AC}$ , was wir gerade ausgeschlossen haben. Es müssen daher die Punkte  $A', B', C'$  auf einer – von  $\overleftrightarrow{AC}$  verschiedenen – Geraden liegen. Deren Durchschnitt mit  $\overleftrightarrow{AC}$  umfasst einerseits nach Definition die Punkte  $P, Q, R$  und ist andererseits nach der Dimensionsformel 1.91 einelementig. Das zeigt den Satz in diesem Fall.

**Fall 2:  $A', B', C'$  sind kollinear.** Das ist nach Umbenennung identisch mit Fall 1.

**Fall 3: Weder  $A, B, C$  noch  $A', B', C'$  sind kollinear.** Dann sind die drei Punkte  $P, Q, R$  paarweise verschieden,

denn: Gälte etwa  $P = R$ , so folgte nach Definition

$$P = R \in (\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CA}) \cap (\overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{C'A'}) = \{A\} \cap \{A'\} = \emptyset,$$

was offensichtlich nicht sein kann. Ebenso lassen sich die Annahmen  $P = Q$  und  $Q = R$  ad absurdum führen. #

Der Satz in diesem Fall folgt also, wenn wir  $Q \in \overleftrightarrow{PR}$  zeigen können. Im Fall  $A' = S$  folgen sofort  $P = B$  und  $R = C$  und die Behauptung stimmt offenbar. Für den weiteren Beweis können wir also ohne Einschränkung  $A' \neq S$  und analog  $A \neq S$  annehmen. Die Schnittpunkte

$$Q' \text{ von } \overleftrightarrow{PR} \text{ und } \overleftrightarrow{BC},$$

$$Q'' \text{ von } \overleftrightarrow{PR} \text{ und } \overleftrightarrow{B'C'},$$

$$C_{\overleftrightarrow{PR}} \text{ von } \overleftrightarrow{PR} \text{ und } \overleftrightarrow{CC'}.$$

sind dann eindeutig bestimmt,

denn: Gälte  $\overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{BC}$ , so folgte nach Definition  $P \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC}$ . Da nach Voraussetzung  $A, B, C$  nicht kollinear sind, gilt  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{B\}$  und wir erhielten  $P = B$ . Nach Definition bedeutete dies  $B \in \overleftrightarrow{A'B'}$ , folglich  $A' \in \overleftrightarrow{BB'}$  und mit  $A' \neq S$  entgegen unserer Voraussetzung auch  $\overleftrightarrow{AA'} = \overleftrightarrow{BB'}$ . Die Geraden  $\overleftrightarrow{PR}$  und  $\overleftrightarrow{BC}$  müssen also voneinander verschieden sein und nach der Dimensionsformel 1.91 einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt  $Q'$  haben.

Die entsprechende Behauptung zu  $Q''$  zeigt man analog unter Verwendung von  $A \neq S$ .

Gälte  $\overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{CC'}$ , so folgte nach Definition  $R \in \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{CC'}$ . Da nach Voraussetzung die Geraden  $\overleftrightarrow{AA'}$  und  $\overleftrightarrow{CC'}$  voneinander verschieden sind, gilt  $A \notin \overleftrightarrow{CC'}$  und also  $\overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{CC'} = \{C\}$ . Somit gälte  $R = C$  und insbesondere  $C \in \overleftrightarrow{C'A'}$ , was unseren Voraussetzungen widerspricht. #

Höchstens zwei der drei Punkte  $P, Q, R$  liegen in der Vereinigung  $\overleftrightarrow{AA'} \cup \overleftrightarrow{BB'} \cup \overleftrightarrow{CC'}$ ,

denn: Wäre dies doch der Fall, so gälten

$$\begin{aligned} \{P\} &= \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{SC} = \overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{SC'}, \\ \{Q\} &= \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{SA} = \overleftrightarrow{B'C'} \cap \overleftrightarrow{SA'}, \\ \{R\} &= \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{C'A'} = \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{SB} = \overleftrightarrow{C'A'} \cap \overleftrightarrow{SB'}. \end{aligned}$$

Ausgehend von den vier paarweise verschiedenen Punkten  $P, Q, R, S$  gäbe es also mit  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  zwei Dreiecke, für die sich die Punkte  $P, Q, R$  als Durchschnitte der Dreiecksseiten  $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}$  bzw.  $\overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{B'C'}, \overleftrightarrow{C'A'}$  mit den Geraden  $\overleftrightarrow{SP}, \overleftrightarrow{SQ}, \overleftrightarrow{SR}$  darstellen ließen. Wir wollen nun einsehen, dass hieraus zwangsläufig  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$  folgte, und zeigen dafür, dass das Dreieck  $\triangle ABC$  in unserer Situation durch die Punkte  $P, Q, R$  bereits eindeutig bestimmt wäre. Zunächst stellen wir hierfür fest, dass sich die Punkte  $B$  und  $C$  sofort aus der Position des Punktes  $A$  auf der Geraden  $\overleftrightarrow{SQ}$  herleiten ließen, so dass das gesuchte Dreieck  $\triangle ABC$  eindeutig durch einen Parameter aus dem Körper  $K$  bestimmt wäre. Dieser Parameter ließe sich durch Kollinearitätsbedingungen und insbesondere durch ein lineares Gleichungssystem beschreiben, dessen Lösungsmenge ein affiner Raum von Dimension 1 oder 0 wäre. Da  $A$  auf der Geraden  $\overleftrightarrow{SQ}$  nicht beliebig gewählt werden könnte, wäre die Dimension 0 und  $\triangle ABC$  wäre das einzige Dreieck zu den Punkten  $P, Q, R$ . #

Da offensichtlich keiner der Punkte  $P, Q, R$  mit  $S$  übereinstimmt, können wir daher nach möglicher Umbenennung annehmen, dass sie auch außerhalb von  $\overleftrightarrow{CC'}$  liegen. Dann sind die drei Punkte  $P, R, C_{\overleftrightarrow{PR}}$  paarweise verschieden und die Doppelverhältnisse

$$DV(P, R, C_{\overleftrightarrow{PR}}, Q') \quad \text{und} \quad DV(P, R, C_{\overleftrightarrow{PR}}, Q'')$$

wohldefiniert. Der Satz in diesem Fall folgt nun, wenn wir ihre Gleichheit zeigen können, denn dann folgt  $Q' = Q''$ , also  $Q = Q' = Q''$  und somit  $Q \in \overleftrightarrow{PR}$ .

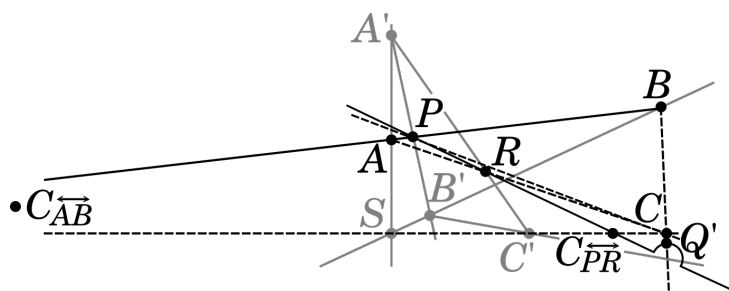
Seien

$$\begin{aligned} \pi_C: \overleftrightarrow{PR} &\rightarrow \overleftrightarrow{AB} \text{ die Zentralprojektion mit Zentrum } C, \\ \pi_S: \overleftrightarrow{AB} &\rightarrow \overleftrightarrow{A'B'} \text{ die Zentralprojektion mit Zentrum } S, \\ \pi_{C'}: \overleftrightarrow{A'B'} &\rightarrow \overleftrightarrow{PR} \text{ die Zentralprojektion mit Zentrum } C' \end{aligned}$$

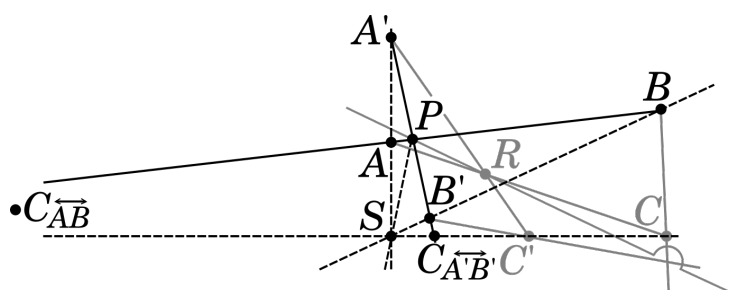
und

$$\begin{aligned} C_{\overleftrightarrow{AB}} &\text{ der offensichtlich eindeutig bestimmte Schnittpunkt von } \overleftrightarrow{AB} \text{ und } \overleftrightarrow{CC'}, \\ C_{\overleftrightarrow{A'B'}} &\text{ der offensichtlich eindeutig bestimmte Schnittpunkt von } \overleftrightarrow{A'B'} \text{ und } \overleftrightarrow{CC'}. \end{aligned}$$

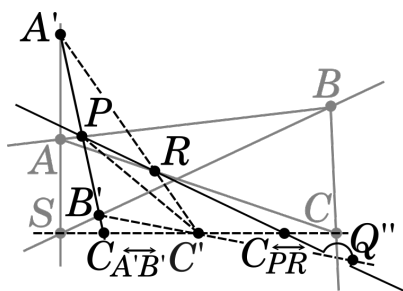
Nach Proposition 1.106 gilt dann



$$DV(P, R, C_{\overleftrightarrow{PR}}, Q') = DV(\pi_C(P), \pi_C(R), \pi_C(C_{\overleftrightarrow{PR}}), \pi_C(Q')) = DV(P, A, C_{\overleftrightarrow{AB}}, B)$$



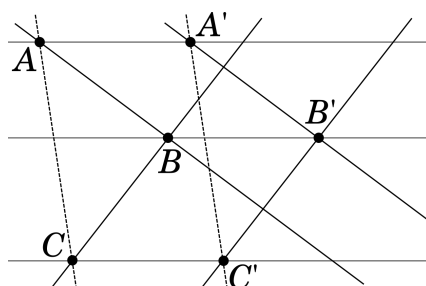
$$= DV(\pi_S(P), \pi_S(A), \pi_S(C_{\overleftrightarrow{AB}}), \pi_S(B)) = DV(P, A', C_{\overleftrightarrow{A'B'}}, B')$$



$$= DV(\pi_{C'}(P), \pi_{C'}(A'), \pi_{C'}(C_{\overrightarrow{A'B'}}), \pi_{C'}(B')) = DV(P, R, C_{\overrightarrow{PR}}, Q'')$$

und somit der Satz in diesem Fall.  $\square$

**Bemerkung 1.110.** Aus dem projektiven Satz von Desargues 1.109 folgt unmittelbar der **affine Satz von Desargues**. Dieser macht die entsprechende Aussage für affine Ebenen, nur dass man hier zusätzlich die Existenz der Schnittpunkte  $P, Q, R$  einfordern muss. Auch der sogenannte **Kleine Satz von Desargues** in affinen Ebenen ergibt sich als Folgerung. Dieser besagt, dass für paarweise verschiedene Punkte  $A, B, C, A', B', C'$ , für welche die Verbindungsgeraden  $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$  paarweise verschieden und parallel zueinander sind, aus  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$  und  $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$  stets  $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$  folgt:



Das liegt daran, dass die zu  $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$  gehörigen projektiven Geraden sich dann in ihrem gemeinsamen unendlich fernen Punkt schneiden, so dass die Voraussetzungen des projektiven Satzes von Desargues erfüllt sind. Die projektiven Schnittpunkte von  $\overleftrightarrow{AB}$  und  $\overleftrightarrow{A'B'}$  bzw. von  $\overleftrightarrow{BC}$  und  $\overleftrightarrow{B'C'}$  liegen auf der unendlich fernen Gerade, das muss aufgrund des projektiven Satzes von Desargues dann auch für den projektiven Schnittpunkt von  $\overleftrightarrow{AC}$  und  $\overleftrightarrow{A'C'}$  gelten. Dies heißt aber, dass im Affinen  $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$  gilt.

Bemerkung 1.110 zeigt die Stärke der projektiven Geometrie: Sätze, die im Affinen auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun zu haben scheinen, werden im Projektiven als Spezialfälle desselben Satzes erkannt und können gemeinsam bewiesen werden.

## 1.9 Computergraphik

Mit der Entwicklung der modernen Computer ist untrennbar die graphische Ausgabe am Bildschirm verbunden. Da das menschliche Begreifen so sehr auf seinen visuellen Sinn ausgerichtet



ist, wird Computergraphik in vielen Wissenschaften erfolgreich eingesetzt. Abstrakte Modellvorstellungen, die früher nur mühsam vermittelt werden konnten und in den Köpfen verbleiben mussten, können heute so mit vergleichsweise geringem Aufwand graphisch präsentiert werden.

Wir werden uns in diesem Abschnitt (sehr skizzenhaft und auf von der konkreten Umsetzung gelöste Weise) mit der *generativen Computergraphik* befassen, also dem Erzeugen und Manipulieren künstlicher Bildwelten am Rechner, da hier die Methoden der analytischen Geometrie zum Einsatz kommen.

## Ziel

Ein geeigneter Ausschnitt des  $\mathbb{R}^3$  soll mittels einer geeigneten Projektion in einem gegebenen Fenster auf dem Bildschirm dargestellt werden. In vielen Anwendungen ist es sehr nützlich, ein dargestelltes Objekt auf geeignete Weise transformieren (drehen, verschieben, skalieren, ...) zu können. Die Darstellung im Fenster soll sich dann schnell und optisch plausibel verändern.

## Transformationen

Wir betrachten Affinitäten  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Nach Definition 1.19 ist jedes solche  $\varphi$  bijektiv und geradentreu und nach Proposition 1.42 auch teilverhältnistreu. Hieraus ergeben sich sofort einige weitere wünschenswerte Eigenschaften:

- $\varphi$  bildet Dreiecke auf Dreiecke ab.
- $\varphi$  bildet Parallelen auf Parallelen ab.
- Nach Beispiel 1.25 gibt es ein  $M \in GL_3(\mathbb{R})$  und ein  $P \in \mathbb{R}^3$  mit  $\varphi = \varphi_{M,P}$ . Das Volumenverhältnis von Bild und Urbild ist dann durch  $|\det M|$  gegeben.<sup>14</sup>

Die Berechnung des Bildpunktes eines gegebenen Punktes unter einer Affinität lässt sich problemlos am Computer durchführen. Zudem ist dieser Vorgang offensichtlich *parallelisierbar*, das heißt, für jeden Urbildpunkt lässt sich der zugehörige Bildpunkt auf die immer gleiche Weise und unabhängig von den Rechnungen an sämtlichen anderen Punkten bestimmen. Besonders schnell ist dies möglich, wenn die jeweils benötigten Rechenschritte bereits fest in der eingesetzten Hardware verbaut sind.

Um dies zu vereinfachen greifen wir zu einem Trick, mithilfe dessen wir auch bei Translationen auf Vektoradditionen verzichten können und nur noch Matrizenmultiplikationen durchführen

<sup>14</sup>Wie im [verlinkten Zusatzmaterial](#) ausgeführt wird, ist die beste Wahl für einen Volumenbegriff in  $\mathbb{R}^3$  das Lebesgue-Maß, das wir so normieren, dass das Volumen des Einheitswürfels  $[0,1]^3$  Eins ist. Letzterer lässt sich als das von den Standardbasisvektoren  $e_1, e_2, e_3$  aufgespannte Parallelepipid ansehen und wird somit unter  $\varphi_{M,P}$  auf das von den Spalten von  $M$  aufgespannte Parallelepipid abgebildet, dessen Volumen sich – analog zur Flächenberechnung des Parallelogramms in der Ebene – zu  $|\det M|$  berechnet.



müssen: Wir betten  $\mathbb{R}^3$  analog zu Beispiel 1.99 über

$$l: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto (1 : x_1 : x_2 : x_3) \end{cases}$$

in seinen projektiven Abschluss  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  ein. Die projektive Fortsetzung  $\overline{\varphi_{M,P}}$  ist dann durch die zugehörige lineare Abbildung

$$\overline{\varphi_{M,P}}: \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^4, \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline P & & M & \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

gegeben,

denn: Offensichtlich gilt einerseits

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline P & & M & \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_{M,P} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

und andererseits

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline P & & M & \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

#

Insbesondere haben wir in (1.25) eingesehen, dass wir den Bildpunkt eines gegebenen Punktes unter einer Affinität von  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  stets durch die Multiplikation mit einer zur Affinität gehörigen Matrix aus  $GL_4(\mathbb{R})$  berechnen können.

## Projektionen

Wir wollen uns nun noch Gedanken darüber machen, wie man einen geeigneten Ausschnitt von  $\mathbb{R}^3$  auswählt und wie man ihn auf das gegebene Bildschirmfenster projiziert:

**Definition 1.111.** (a) Sei  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Ebene. Eine Gerade  $n \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt eine **Normale** von  $E$ , wenn sie orthogonal zu allen Geraden in  $E$  ist. Aus Dimensionsgründen sind je zwei Normalen parallel.

- (b) Zwei Ebenen in  $\mathbb{R}^3$  heißen zueinander **orthogonal**, wenn ihre Normalen orthogonal zueinander sind.
- (c) Ein Polytop, dessen Flächen ausschließlich in Ebenen liegen, die zueinander parallel oder orthogonal sind, heißt ein **Quader**.<sup>15</sup>

Die einfachste Idee ist nun, einen gegebenen Quader per Parallelprojektion (vgl. Proposition 1.26) längs der Normalen einer seiner Seitenflächen auf eben diese Seite zu projizieren, konkret: Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Quader,  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Ebene, die eine Seitenfläche von  $Q$  enthält, und  $n$  eine Normale von  $E$ . Dann bildet die Parallelprojektion

$$\pi_{T(n)}^{\mathbb{R}^3, E}: \mathbb{R}^3 \rightarrow E$$

den Quader  $Q$  auf seine in  $E$  gelegene Seitenfläche ab.

Ein Problem entsteht, wenn man ein Objekt in  $Q$  von  $E$  wegschiebt: Erreicht es die  $E$  gegenüberliegende Seitenfläche von  $Q$ , so wird es zunächst angeschnitten und verschwindet schließlich ganz.

**Definition 1.112.** Sei  $F$  die Seitenfläche eines gegebenen Quaders  $Q$  und sei  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  die Ebene, in der  $F$  enthalten ist. Dann bilden die in  $F$  enthaltenen Ecken von  $Q$  nach Konstruktion ein Viereck  $\Pi ABCD \subseteq E$ , dessen Kanten paarweise zueinander parallel oder orthogonal sind. Ein solches Viereck heißt ein **Rechteck**. Ist nun weiter  $n \subseteq \mathbb{R}^3$  die Normale von  $E$  durch den Diagonalschnittpunkt<sup>16</sup> von  $\Pi ABCD$  und  $P_0 \in n \setminus E$  ein beliebiger Punkt, so heißt die Menge

$$X(F, P_0) := \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P \in \overrightarrow{P_0 P_F} \text{ für ein } P_F \in F\}$$

der **Rechteckkegel** aus  $P_0$  durch  $F$ . Sind  $E', E'' \subseteq \mathbb{R}^3$  zwei zu  $E$  parallele Ebenen auf derselben Seite von  $P_0$  und  $H', H'' \subseteq \mathbb{R}^3$  zu  $E', E''$  gehörige abgeschlossene Halbräume, die einander nicht umfassen, so heißt

$$X_{E', E''}(F, P_0) := X(F, P_0) \cap H' \cap H''$$

der durch  $E'$  und  $E''$  begrenzte **Rechteckkegelstumpf**. Von den Flächen  $X(F, P_0) \cap E'$  und  $X(F, P_0) \cap E''$  heißt die weiter von  $P_0$  entfernte die **Rückseite** und die näher bei  $P_0$  befindliche die **Vorderseite** des Rechteckkegelstumpfs.

Ein gegebener Rechteckkegelstumpf lässt sich über eine Zentralprojektion (vgl. Definition 1.95) mit Zentrum in der Kegelspitze auf seine Vorderseite projizieren. Verschiebt man nun Objekte in Rechteckkegelstumpf von der Vorderseite weg, so werden sie nach und nach kleiner und verschwinden bei Erreichen der Rückseite.

<sup>15</sup>Jeder Quader geht aus dem Einheitswürfel durch Anwendung einer Streckung der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \text{diag}(a, b, c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und anschließender Anwendung einer Bewegung hervor.

<sup>16</sup>Da Rechtecke offensichtlich Parallelogramme sind, halbieren sich die Diagonalen nach dem Diagonalsatz 1.46.

### 1.10 Übungsaufgaben

**Aufgabe 1.1 (aff. Raum).** Sei  $Y$  ein affiner Unterraum von  $X$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für  $P \in Y$  gilt  $Y = \{A \in X \mid t_{PA} \in T(Y)\} = \{\tau_t(P) \mid t \in T(Y)\}$ ,  
 (b)  $T(Y) = \{t_{AB} \mid A, B \in Y\}$ ,  
 (c) Im Falle  $\dim(X), \dim(Y) < \infty$  gilt

$$\dim(X) = \dim(Y) \iff X = Y,$$

- (d) Für  $A, B, C, D \in X$  gilt

$$t_{AB} = t_{CD} \iff \text{es gibt ein } t \in T(X) \text{ mit } C = \tau_t(A), D = \tau_t(B).$$

**Aufgabe 1.2 (aff. Raum).** Beweisen Sie Proposition 1.12: Seien  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte in  $X$ . Zeigen Sie, dass der Verbindungsraum von  $A$  und  $B$  gegeben ist durch die Gerade, die durch  $A$  und  $B$  verläuft, also

$$\{A\} \vee \{B\} = \{\tau_t(A) \mid t \in \langle t_{AB} \rangle\} \quad \text{und} \quad T(\{A\} \vee \{B\}) = \langle t_{AB} \rangle.$$

**Aufgabe 1.3 (aff. Raum).** Sei  $\text{char}(K) \neq 2$ . Zeigen Sie, dass dann für eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

- (i)  $Y$  ist ein affiner Unterraum von  $X$ .  
 (ii) Zu je zwei verschiedenen Punkten  $A, B \in Y$  ist  $\overleftrightarrow{AB} := \{A\} \vee \{B\}$  in  $Y$  enthalten.

**Aufgabe 1.4.** Seien

$$Y_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte  $P \in \mathbb{R}^3$ , die auf keiner Verbindungsgeraden  $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$  mit  $P_1 \in Y_1$  und  $P_2 \in Y_2$  liegen.

**Aufgabe 1.5 (aff. Raum).** Seien  $X, Y, Z$  affine Räume und  $\varphi: X \rightarrow Y$  und  $\psi: Y \rightarrow Z$  affine Abbildungen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a)  $(\psi \circ \varphi): X \rightarrow Z$  ist wieder affin und es gilt  $T(\psi \circ \varphi) = T(\psi) \circ T(\varphi)$ .  
 (b)  $\varphi$  ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn  $T(\varphi)$  die entsprechende Eigenschaft hat.  
 (c) Ist  $\varphi$  bijektiv, so ist auch  $\varphi^{-1}: Y \rightarrow X$  affin mit  $T(\varphi^{-1}) = T(\varphi)^{-1}$ .

**Aufgabe 1.6 (aff. Raum).** Zeigen Sie in Verallgemeinerung von (1.6) die folgende Aussage: Sei  $(Y, T(Y), \sigma)$  ein affiner Raum über dem Körper  $K$ , sei  $\varphi: X \rightarrow Y$  eine affine Abbildung und seien  $X_1, X_2 \subseteq X$  zwei affine Unterräume. Gilt dann  $X_1 \parallel X_2$ , so auch  $\varphi(X_1) \parallel \varphi(X_2)$ .

**Aufgabe 1.7.** (a) Bestimmen Sie eine Affinität  $\varphi$  von  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ , welche  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  auf  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  abbildet. Geben Sie  $\varphi^{-1}$  an. Ist  $\varphi$  eindeutig bestimmt?

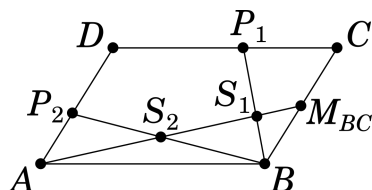
(b) Seien  $X$  ein affiner Raum,  $\varphi: X \rightarrow X$  eine Affinität und  $A \neq B \in X$  Fixpunkte von  $\varphi$ , also Punkte mit  $\varphi(A) = A$  und  $\varphi(B) = B$ . Zeigen Sie, dass dann  $\overleftrightarrow{AB}$  eine **Fixgerade** ist und also  $\varphi(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{AB}$  erfüllt. Ist  $\overleftrightarrow{AB}$  auch eine **Fixpunktgerade** und erfüllt also  $\varphi(P) = P$  für alle  $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ?

**Aufgabe 1.8 (aff. Raum).** Eine bijektive Abbildung  $\varphi: X \rightarrow X$  heißt eine **Kollineation**, wenn für alle Geraden  $g \subseteq X$  auch  $\varphi(g) \subseteq X$  eine Gerade ist. Zeigen Sie, dass jede Affinität eine Kollineation ist.

**Aufgabe 1.9.** Sei  $\Pi ABCD$  ein Parallelogramm in einem affinen Raum  $X$  über einem Körper  $K$  der Charakteristik  $\text{char}(K) \neq 2$ .

(a) Seien  $P_1$  der Punkt mit  $\text{TV}(C, D, P_1) = t_1 \in (0, 1)$  und  $S_1$  der Schnittpunkt der Geraden  $\overleftrightarrow{AM_{BC}}$  und  $\overleftrightarrow{BP_1}$ . Drücken Sie die Teilverhältnisse  $\text{TV}(A, M_{BC}, S_1)$  und  $\text{TV}(B, P_1, S_1)$  durch den Parameter  $t_1$  aus.

(b) Seien  $P_2$  der Punkt mit  $\text{TV}(A, D, P_2) = t_2 \in (0, 1)$  und  $S_2$  der Schnittpunkt der Geraden  $\overleftrightarrow{AM_{BC}}$  und  $\overleftrightarrow{BP_2}$ . Drücken Sie die Teilverhältnisse  $\text{TV}(A, M_{BC}, S_2)$  und  $\text{TV}(B, P_2, S_2)$  durch den Parameter  $t_2$  aus.



**Aufgabe 1.10.** Für  $A, t \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|t\| = 1$  definieren wir die Abbildung

$$\sigma_{t,A}: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ P & \mapsto P - 2 \cdot \langle P - A \mid t \rangle \cdot t. \end{cases}$$

Diese beschreibt eine Spiegelung an der Geraden  $g = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \langle P - A \mid t \rangle = 0\}$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Spiegelung  $\sigma_{t,A}$  ist eine Bewegung mit  $\sigma_{t,A}^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ .

(b) Für jedes  $B \in \mathbb{R}^2$  lässt sich die Translation

$$\tau_B: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ P & \mapsto P + B \end{cases}$$

um  $B$  als Verkettung zweier Spiegelungen  $\sigma_{t,A}$  und  $\sigma_{t',A'}$  mit  $A, A', t, t' \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|t\| = \|t'\| = 1$  und  $\langle t, t' \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$  schreiben.

- (c) Für  $A', t' \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|t'\| = 1$  und  $\langle t, t' \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$  ist die Verkettung  $\sigma_{t,A} \circ \sigma_{t',A'}$  eine Drehung. Um welchen Punkt? Um welchen Winkel?

Darüber hinaus kann man zeigen, dass eine Bewegung mit genau einem Fixpunkt eine Drehung ist und sich als Verkettung zweier Spiegelungen schreiben lässt. Eine Bewegung, deren Fixpunktmenge eine Gerade ist, ist eine Spiegelung. Folgern Sie:

- (d) Jede Bewegung des  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  lässt sich als Verkettung von höchstens drei Spiegelungen darstellen.

**Aufgabe 1.11 (Tangenssatz).** Sei  $n \geq 2$ . Zeigen Sie, dass in einem Dreieck  $\triangle ABC$  im affinen Standardraum  $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$  mit Innenwinkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$  die folgenden Gleichungen gelten.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(\frac{1}{2}(\alpha+\beta))}{\tan(\frac{1}{2}(\alpha-\beta))}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan(\frac{1}{2}(\beta+\gamma))}{\tan(\frac{1}{2}(\beta-\gamma))}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan(\frac{1}{2}(\gamma+\alpha))}{\tan(\frac{1}{2}(\gamma-\alpha))}.$$

Hierbei bezeichnet  $\tan$  den auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  definierten Tangens  $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ .

**Aufgabe 1.12.** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck in einem Euklid'schen Raum  $X$  mit Innenwinkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$  sowie  $D$  ein von  $A$  und  $B$  verschiedener Punkt auf der Strecke  $AB$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist  $\angle CAB$  ein rechter Winkel, so gilt  $d(C, D) < a$ .  
 (b) Genau dann gilt  $a = b$ , wenn auch  $\alpha = \beta$  gilt.  
 (c) Gilt  $c = 2 \cdot d(C, M_{AB})$ , so ist  $\angle ACB$  ein rechter Winkel.

**Aufgabe 1.13.** Sei  $n \geq 2$  und sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck im euklidischen Standardraum  $\mathbb{E}^n$  mit Innenwinkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ . Seien weiter  $U = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$  der halbe Umfang von  $\triangle ABC$  sowie  $\text{vol}(\triangle ABC) = \frac{ab}{2} \cdot \sin(\gamma)$  der **Flächeninhalt** von  $\triangle ABC$ , vergleiche auch das verlinkte **Zusatzmaterial**.

- (a) Zeigen Sie die **Heron'sche Formel**

$$\text{vol}(\triangle ABC)^2 = U \cdot (U - a) \cdot (U - b) \cdot (U - c).$$

- (b) Folgern Sie aus (a) die Abschätzung

$$\text{vol}(\triangle ABC) \leq \frac{(a + b + c)^2}{12\sqrt{3}}$$

und zeigen Sie, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn  $a = b = c$  gilt, das Dreieck  $\triangle ABC$  also **gleichseitig** ist.

**Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel verwenden.



**Aufgabe 1.14.** Sei  $n \geq 2$ . Zeigen Sie, dass es im euklidischen Standardraum  $\mathbb{E}^n$  kein gleichseitiges Dreieck  $\triangle ABC$  mit Eckpunkten  $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$  gibt.

**Hinweis:** Zeigen Sie induktiv, dass ansonsten die quadrierten Seitenlängen durch eine beliebig große Potenz von 4 teilbar sein müssten.

**Aufgabe 1.15.** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck in der euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}^2$ , so dass  $\angle BCA$  ein rechter Winkel ist. Sei weiter  $A' := C + \lambda(A - C)$  mit einem  $\lambda \in (0, 1)$ . Zeigen Sie, dass dann  $\|B - A'\| < \|B - A\|$  gilt.

**Aufgabe 1.16.** Seien  $A, B, C$  drei kollineare Punkte auf der Einheitskugel  $S^2 \subseteq \mathbb{E}^3$  mit  $A \neq C$ . Zeigen Sie, dass dann schon  $B \in \{A, C\}$  gilt.

**Aufgabe 1.17.** Eine Teilmenge einer Ebene  $E \subseteq \mathbb{R}^3$ , die als Fläche eines Polytops  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  vorkommt, heißt ein **konvexes Polygon**. Schneiden wir die abgeschlossenen Halbräume aus der Definition von  $P$  jeweils mit der Ebene  $E$ , so erhalten wir eine Darstellung des Polygons als endlichen Durchschnitt von abgeschlossenen Halbf lächen. Analog zu Definition 1.71 ist das **Innere** des konvexen Polygons durch den Durchschnitt der jeweiligen offenen Halbf lächen gegeben. Der Rand des konvexen Polygons zerfällt offensichtlich (nicht disjunkt) in Ecken und Kanten von  $P$ , die wir hier auch die **Ecken** und **Kanten** des konvexen Polygons nennen wollen.

In dieser Aufgabe leiten wir aus der Euler'schen Polyederformel mit dem **Satz von Pick** einen Satz über den Flächeninhalt konvexer Polygone in der Euklid'schen Standardebene  $\mathbb{E}^2$  her, wobei wir letztere über eine geeignete Einbettung als Ebene im obigen Sinne auffassen können. Die vorkommenden Flächeninhalte bestimmen wir über die aus der Schule bekannte Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks und eine überlappungsfreie Zerlegung des konvexen Polygons in Dreiecke, wie das verlinkte **Zusatzmaterial** motiviert.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für den Flächeninhalt eines Dreiecks  $\triangle$ , dessen Ecken  $A, B, C$  in  $\mathbb{Z}^2$  liegen und auf dessen sonstigen Rand und in dessen Inneren keine Punkte von  $\mathbb{Z}^2$  vorkommen, gilt stets

$$\text{vol}(\triangle) = \frac{1}{2}.$$

**Hinweis:** Zeigen Sie dafür, dass je zwei der Translationsvektoren  $t_{AB}, t_{BC}, t_{CA}$  eine Basis des  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $\mathbb{Z}^2$  bilden, indem Sie nachweisen, dass die gesamte Ebene  $\mathbb{E}^2$  durch ganzzahlige Translate des durch diese zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms parkettiert wird.

- (b) Für den Flächeninhalt eines konvexen Polygons  $\Pi \subseteq \mathbb{R}^2$ , dessen Ecken in  $\mathbb{Z}^2$  liegen, gilt stets

$$\text{vol}(\Pi) = e(\Pi)_{\text{int}} + \frac{1}{2}e(\Pi)_{\text{rand}} - 1,$$

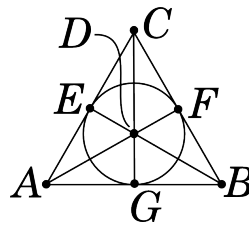
wobei  $e(\Pi)_{\text{int}}$  die Anzahl der ganzzahligen Punkte im Inneren von  $\Pi$  und  $e(\Pi)_{\text{rand}}$  die Anzahl der ganzzahligen Punkte auf dem Rand von  $\Pi$  bezeichnet.

**Hinweis:** Unterteilen Sie  $\Pi$  in Dreiecke, wie sie in Teil (a) behandelt wurden und benutzen Sie die Euler'sche Polyederformel für Netze, wie sie in Schritt 2 des Beweises von Satz 1.76 formuliert ist.



**Aufgabe 1.18.** In dieser Aufgabe untersuchen wir die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$  über dem Körper  $\mathbb{F}_2$  mit zwei Elementen.

- (a) Bestimmen Sie alle Punkte in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ . Wie viele gibt es?
- (b) Aus wie vielen Punkten besteht eine Gerade in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ ? Bestimmen Sie konkrete Werte für die Eckpunkte  $A, B, C, D, E, F$  in der folgenden Abbildung, sodass Punkte auf derselben Linie Punkten in einer projektiven Gerade entsprechen:



**Aufgabe 1.19.** Ist  $g \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  eine Gerade, so gibt es nach Beispiel 1.89 reelle Zahlen  $a_0, a_1, a_2$ , nicht alle Null, mit

$$g = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}.$$

Der Punkt  $P(g) := (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ist dabei durch  $g$  eindeutig festgelegt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Zu zwei voneinander verschiedenen Geraden  $g_1 \neq g_2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sind auch die zugehörigen Punkte  $P(g_1)$  und  $P(g_2)$  voneinander verschieden.
- (b) Haben gegebene Geraden  $g_1, g_2, g_3 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  einen gemeinsamen Schnittpunkt, so liegen die Punkte  $P(g_1), P(g_2), P(g_3)$  auf einer gemeinsamen Geraden.

Abschließend untersuchen wir noch die Verbindungsgerade  $\overleftrightarrow{P_1P_2}$  zweier Punkte  $P_1 = (x_0^{(1)} : x_1^{(1)} : x_2^{(1)})$  und  $P_2 = (x_0^{(2)} : x_1^{(2)} : x_2^{(2)})$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Zeigen Sie die folgende Aussage:

- (c) Es gilt

$$\overleftrightarrow{P_1P_2} = \left\{ P = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

**Aufgabe 1.20.** Seien

$$P(X_1, X_2) = a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{12}X_1X_2 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2 + a_{00},$$

$$\bar{P}(X_0, X_1, X_2) = a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{12}X_1X_2 + a_{01}X_0X_1 + a_{02}X_0X_2 + a_{00}X_0^2$$

Polynome mit reellen Koeffizienten und  $a_{00}a_{11} < 0$ . Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid P(x_1, x_2) = 0 \right\}$$



genau dann ein Kreis<sup>17</sup> ist, wenn der Durchschnitt von

$$\bar{X} := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \bar{P}(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

mit der **unendlich fernen Hyperebene**  $H := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x_0 = 0\}$  genau aus den Punkten  $(0 : 1 : \pm i) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  besteht.

**Aufgabe 1.21.** Seien  $Z_1, Z_2$  zwei projektive Unterräume von  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Diskutieren Sie das mögliche Schnittverhalten von  $Z_1$  und  $Z_2$  in den folgenden Fällen und vergleichen Sie dieses mit dem möglichen Schnittverhalten von affinen Unterräumen entsprechender Dimension von  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ :

- (i)  $Z_1$  ist eine projektive Gerade und  $Z_2$  eine projektive Ebene.
- (ii)  $Z_1$  und  $Z_2$  sind beides projektive Ebenen.

**Aufgabe 1.22 (proj. Raum).** Seien  $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$  projektive Unterräume gleicher Dimension und sei  $\varphi: Z_1 \rightarrow Z_2$  eine Projektivität mit  $\varphi|_{Z_1 \cap Z_2} = \text{id}_{Z_1 \cap Z_2}$ . Zeigen Sie, dass dann  $\varphi$  bereits eine Zentralprojektion ist.

**Aufgabe 1.23 (proj. Raum).** Eine bijektive Abbildung einer projektiven Geraden, die Doppelverhältnisse unverändert lässt, ist eine Projektivität.

**Aufgabe 1.24 ((projektiver) Satz von Pappos, proj. Raum).** Seien  $g \neq h$  zwei verschiedene Geraden in  $\mathbb{P}(V)$  mit Schnittpunkt  $S$ . Seien weiter  $A, B, C \in g \setminus h$  und  $A', B', C' \in h \setminus g$  paarweise verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass dann die Schnittpunkte

$$\begin{aligned} S_1 & \text{ von } \overleftrightarrow{AB'} \text{ und } \overleftrightarrow{BA'}, \\ S_2 & \text{ von } \overleftrightarrow{BC'} \text{ und } \overleftrightarrow{CB'}, \\ S_3 & \text{ von } \overleftrightarrow{CA'} \text{ und } \overleftrightarrow{AC'} \end{aligned}$$

paarweise verschieden und kollinear sind.

---

<sup>17</sup>Ein Kreis in  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  ist natürlich die Menge aller Punkte, die zu einem gegebenen Punkt  $M \in \mathbb{R}^2$  einen gegebenen euklidischen Abstand  $r > 0$  haben.

---

## Inzidenzgeometrie

---

In diesem Kapitel und den Kapiteln 3 und 4 werden wir die ebene Geometrie nach Euklid in moderner Form streng axiomatisch einführen. In Abgrenzung zur Analytischen Geometrie aus Kapitel 1 spricht man hierbei von der *Synthetischen Geometrie*. Im Großen und Ganzen folgen wir der Darstellung aus den *Grundlagen der Geometrie* von Hilbert aus dem Jahr 1899. Die Ausformulierung der Axiome im Detail ist allerdings an keine bestimmte Quelle angelehnt, sondern von uns auf Übersichtlichkeit und gute Verständlichkeit hin optimiert. Um die hierbei verwendete Herangehensweise kennenzulernen und um besser Vergleiche zur Analytischen Geometrie anstellen zu können, studieren wir in diesem Kapitel zunächst deutlich allgemeiner Inzidenzebenen und affine Ebenen.

### 2.1 Inzidenzebenen

Um den Begriff der Inzidenzebene einzuführen gehen wir von einer zunächst beliebigen Menge  $\mathbf{P}$  aus, deren Elemente wir im Folgenden *Punkte* nennen. Zusätzlich betrachten wir eine ebenfalls zunächst beliebige Menge  $\mathbf{G}$  von Teilmengen von  $\mathbf{P}$ , deren Elemente *Geraden* heißen sollen. Für Elemente dieser Mengen führen wir nun die folgenden Sprechweisen ein.

- Wir sagen, ein Punkt  $A \in \mathbf{P}$  *liege auf* einer Geraden  $g \in \mathbf{G}$  oder  $g$  *gehe durch*  $A$ , falls  $A \in g$  gilt.
- Ein Punkt  $A \in \mathbf{P}$  heißt ein *Schnittpunkt* von zwei Geraden  $g, h \in \mathbf{G}$ , falls  $A$  im Mengendurchschnitt  $g \cap h$  liegt.
- Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbf{P}$  mit mindestens 3 Elementen heißt *kollinear*, falls es eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  mit  $M \subseteq g$  gibt.
- Wir sagen, drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  seien *in allgemeiner Lage*, falls  $\{A, B, C\}$  nicht kollinear ist, es also kein  $g \in \mathbf{G}$  mit  $A, B, C \in g$  gibt.
- Zwei Geraden  $g, h \in \mathbf{G}$  heißen *parallel*, in Zeichen  $g \parallel h$ , falls  $g = h$  oder  $g \cap h = \emptyset$  gilt.

Diese Festlegungen passen einerseits ganz gut zu unserer naiven Vorstellung von ebener Geometrie, andererseits ist aber das Konzept der Geraden hier noch sehr allgemein und umfasst zum Beispiel auch den ganzen Raum  $\mathbf{P}$ . Um Geometrie im engeren Sinne betreiben zu können, müssen wir noch einige Forderungen an Punkte- und Geradenmenge stellen:

**Definition 2.1.** Sei  $\mathbf{P}$  eine beliebige Menge und  $\mathbf{G}$  eine beliebige Menge von Teilmengen von  $\mathbf{P}$ . Das Paar  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  heißt eine **Inzidenzebene**, falls die folgenden **Inzidenzaxiome** erfüllt sind.

- ( $I_1$ ) Durch je zwei verschiedene Punkte  $A \neq B \in \mathbf{P}$  existiert genau eine Gerade in  $\mathbf{G}$ . Diese heißt die **Verbindungsgerade**  $\overleftrightarrow{AB}$  von  $A$  und  $B$ .
- ( $I_2$ ) Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.
- ( $I_3$ ) Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.

Für „Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine Inzidenzebene.“ schreiben wir künftig auch kurz „**(I)**“.

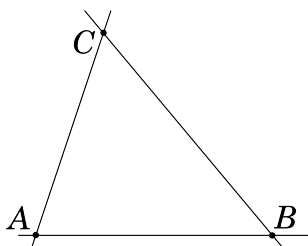
Die erste Frage, die wir uns nun stellen, ist, ob es ein **Modell** für eine Inzidenzebene gibt, also ein Paar  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ , das die Axiome ( $I_1$ ), ( $I_2$ ) und ( $I_3$ ) erfüllt:

**Beispiel 2.2.** Wegen ( $I_3$ ) enthält jede Inzidenzebene mindestens drei Punkte  $A, B, C$ . Das Paar

$$(\mathbf{P}, \mathbf{G}) = (\{A, B, C\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\})$$

erfüllt aber offensichtlich die Inzidenzaxiome. Für  $\mathbf{P} = \{A, B, C\}$  gibt es keine andere Teilmenge  $\mathbf{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{P})$ , für die das stimmt,

denn: Nach ( $I_3$ ) liegt  $\{A, B, C\}$  nicht in  $\mathbf{G}$ . Deshalb sind nach ( $I_1$ ) die Mengen  $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$  in  $\mathbf{G}$ . Schließlich sind nach ( $I_2$ ) die Mengen  $\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}$  keine Geraden. #



Wir haben den Begriff der Inzidenzebene eingeführt und ein Modell dafür gefunden. Wir beweisen nun erste Eigenschaften von Inzidenzebenen und zeigen so, dass man bereits in dieser Allgemeinheit Geometrie betreiben kann:

**Proposition 2.3 (I).** Zwei nicht parallele Geraden  $g$  und  $h$  haben einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt, den wir ab sofort mit  $g \wedge h$  bezeichnen wollen.

*Beweis.* Aus  $g \not\parallel h$  folgt definitionsgemäß  $g \cap h \neq \emptyset$ . Lügen zwei verschiedene Punkte  $A, B$  in  $g \cap h$ , so folgte mit ( $I_1$ ) die Gleichheit  $g = \overleftrightarrow{AB} = h$ , was im Widerspruch zu  $g \not\parallel h$  steht.  $\square$

**Proposition 2.4 (I).** Für je drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  mit  $A \neq B$  und  $A \neq C$  gilt die Äquivalenz

$$C \in \overleftrightarrow{AB} \iff \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}.$$

*Beweis.* Gilt  $C \in \overleftrightarrow{AB}$ , so geht die Gerade  $\overleftrightarrow{AB}$  durch die beiden Punkte  $A$  und  $C$ . Nach  $(I_1)$  folgt  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ . Ist umgekehrt  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ , so gilt offensichtlich  $C \in \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AB}$ .  $\square$

**Proposition 2.5 (I).** (a) Für jede Gerade  $g \in \mathbf{G}$  gibt es einen Punkt  $A \in \mathbf{P}$  mit  $A \notin g$ .

(b) Für jeden Punkt  $A \in \mathbf{P}$  gibt es eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  mit  $A \notin g$ .

*Beweis.* Gäbe es eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$ , die durch alle Punkte in  $\mathbf{P}$  geht, so gäbe es im Widerspruch zu  $(I_3)$  in  $\mathbf{P}$  keine drei Punkte in allgemeiner Lage. Es gibt also für jede Gerade aus  $\mathbf{G}$  mindestens einen Punkt  $A \in \mathbf{P}$ , durch den  $g$  nicht geht. Das ist Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) betrachten wir einen fest gewählten Punkt  $A \in \mathbf{P}$ . Nach  $(I_3)$  gibt es einen Punkt  $B \in \mathbf{P} \setminus \{A\}$  und nach  $(I_1)$  auch die Verbindungsgerade  $\overleftrightarrow{AB}$ . Nach Teil (a) existiert weiter ein Punkt  $C \in \mathbf{P} \setminus \overleftrightarrow{AB}$ . Mit Proposition 2.4 folgt  $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BC}$ , was wieder mit Proposition 2.4 bedeutet, dass  $A$  nicht auf  $\overleftrightarrow{BC}$  liegt.  $\square$

Abschließend für diesen Abschnitt zeigen wir nun, dass die affine Standardebene  $\mathbb{A}^2(K)$  über einem beliebigen Körper  $K$  aus Beispiel 1.3 die Struktur einer Inzidenzebene trägt. Die zu betrachtende Punktmenge ist hier offensichtlich durch  $K^2$  gegeben, die Geradenmenge durch

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_K &:= \{g \text{ affine Gerade in } \mathbb{A}^2(K)\} \\ &\stackrel{1.7}{=} \{A + U \mid A \in K^2, U \subseteq K^2 \text{ Untervektorraum von Dimension 1}\} \\ &= \{g_{A,t} := A + \langle t \rangle_K \mid A, t \in K^2, t \neq 0\}. \end{aligned}$$

**Satz 2.6.** Für einen beliebigen Körper  $K$  ist  $\mathbb{A}^2(K) = (K^2, \mathbf{G}_K)$  eine Inzidenzebene.

*Beweis.* Für je zwei Punkte  $A \neq B \in K^2$  ist offensichtlich die Verbindungsgerade<sup>1</sup>  $\overleftrightarrow{AB} = g_{A, B-A} \in \mathbf{G}_K$  eine Gerade durch  $A$  und  $B$  – vgl. die Anmerkung nach Proposition 1.12. Umgekehrt enthält jede Gerade  $g \in \mathbf{G}_K$  durch  $A$  und  $B$  den (eindimensionalen) affinen Verbindungsraum  $\{A\} \vee \{B\} = g_{A, B-A}$  und muss aus Dimensionsgründen dann mit diesem übereinstimmen, so dass wir das erste Inzidenzaxiom  $(I_1)$  nachgewiesen haben.

Zum Nachweis von  $(I_2)$  betrachten wir eine beliebige Gerade  $g \in \mathbf{G}_K$ . Dann gibt es  $A, t \in K^2$  mit  $t \neq 0$ , so dass wir  $g = g_{A,t}$  schreiben können.  $(I_2)$  folgt, da nach Konstruktion die voneinander verschiedenen Punkte  $A$  und  $A + t$  auf  $g$  liegen.

Schließlich gilt auch  $(I_3)$ , da die Punkte  $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  in allgemeiner Lage sind. Dies erhalten wir, da offensichtlich der Punkt  $X$  nicht auf der Geraden  $g_{O, Y-O} = \langle Y \rangle_K$  liegt.  $\square$

<sup>1</sup>Gemeint ist hier der Verbindungsraum der Punkte  $A, B \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  wie in Proposition 1.10. Indem wir nun  $(I_1)$  nachweisen, zeigen wir, dass dieser gerade die Verbindungsgerade im Sinne von Definition 2.1 ist.

**Bemerkung 2.7.** In der affinen Standardebene  $\mathbb{A}^2(K)$  über einem beliebigen Körper  $K$  ist der Begriff der Parallelität von Geraden nun doppelt definiert:

- wie in diesem Abschnitt:  $g_{A,t} \parallel g_{B,t'} \iff g_{A,t} \cap g_{B,t'} = \emptyset$  oder  $g_{A,t} = g_{B,t'}$ ,
- via 1.16 für affine Unterräume:  $g_{A,t} \parallel g_{B,t'} \iff \langle t \rangle_K = T(g_{A,t}) = T(g_{B,t'}) = \langle t' \rangle_K$ .

Diese Definitionen sind äquivalent,

denn: Ist  $g_{A,t} \cap g_{B,t'} = \emptyset$ , dann sind  $g_{A,t}, g_{B,t'}$  aufgrund von 1.17 parallel im Sinne von 1.16, im Fall  $g_{A,t} = g_{B,t'}$  sind sie dies offensichtlich auch. Ist umgekehrt  $g_{A,t} \cap g_{B,t'} \neq \emptyset$  und  $g_{A,t} \neq g_{B,t'}$ , dann ist

$$0 = \dim(g_{A,t} \cap g_{B,t'}) = \dim T(g_{A,t} \cap g_{B,t'}) = \dim T(g_{A,t}) \cap T(g_{B,t'}) = \dim(\langle t \rangle_K \cap \langle t' \rangle_K),$$

also  $\langle t \rangle_K \neq \langle t' \rangle_K$ , d.h.  $g_{A,t}, g_{B,t'}$  sind nicht parallel im Sinne von 1.16. #

**Definition 2.8.** Seien  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  und  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$  zwei Inzidenzebenen. Eine bijektive Abbildung  $\varphi: \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$  heißt **Isomorphismus** von Inzidenzebenen, wenn sie Geraden auf Geraden abbildet, wenn also

$$\varphi(g) \in \tilde{\mathbf{G}} \quad \text{für alle } g \in \mathbf{G}$$

gilt. Ist hierbei  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}}) = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ , so heißt  $\varphi$  ein **Automorphismus** von  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ . Die Menge der Automorphismen von  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  wird mit  $\text{Aut}(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  bezeichnet.

Nach Übungsaufgabe 2.2 ist für beliebige Inzidenzebenen  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  und  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$  mit  $\varphi: \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$  auch  $\varphi^{-1}: \tilde{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbf{P}$  ein Isomorphismus. Insbesondere ist für eine beliebige Inzidenzebene  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  die Menge  $\text{Aut}(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  zusammen mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe.

**Beispiel 2.9.** Nach Satz 1.35 gibt es für jede affine Ebene  $X$  über einem gegebenen Körper  $K$  im Sinne von Abschnitt 1.1 eine Affinität  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{A}^2(K)$ . Nach Definition 1.19 ist diese bijektiv und bildet Geraden auf Geraden ab. Setzen wir  $\mathbf{P}_X := X$  und sei  $\mathbf{G}_X$  die Menge der affinen Geraden in  $X$ , dann ist  $(\mathbf{P}_X, \mathbf{G}_X)$  eine Inzidenzebene und  $\varphi$  ein Isomorphismus von Inzidenzebenen.

## 2.2 Affine Ebenen

Wie wir in Abschnitt 2.1 gesehen haben, können wir schon in Inzidenzebenen Geometrie betreiben. Wir beschränken nun die Anzahl möglicher Parallelen und studieren die Auswirkungen:

**Definition 2.10.** Sei  $\mathbf{P}$  eine beliebige Menge und  $\mathbf{G}$  eine beliebige Menge von Teilmengen von  $\mathbf{P}$ . Das **schwache Parallelenaxiom** lautet

- (p) Ist  $A \in \mathbf{P}$  ein Punkt und  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade, dann gibt es höchstens eine Gerade  $h \in \mathbf{G}$  mit  $h \parallel g$  und  $A \in h$ .

Das **starke Parallelenaxiom** lautet

- (P) Ist  $A \in \mathbf{P}$  ein Punkt und  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade, dann gibt es genau eine Gerade  $h \in \mathbf{G}$  mit  $h \parallel g$  und  $A \in h$ .

In beiden Fällen bezeichnen wir die eindeutige Parallele zu  $g$  durch  $A$  als  $p_g A$ .

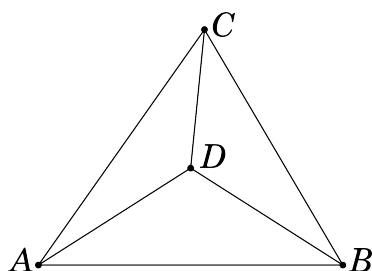
**Definition 2.11.** Eine Inzidenzebene  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ , die das starke Parallelenaxiom erfüllt, heißt eine **affine Ebene**. Für „Sei  $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine affine Ebene.“ schreiben wir künftig auch kurz „**(aff. Ebene)**“.

**Beispiel 2.12.** (a) Die dreipunktige Inzidenzebene aus Beispiel 2.2 erfüllt (P) nicht, da in ihr keine zwei Geraden zueinander parallel sind. Jede affine Ebene hat also mindestens vier Punkte.

(b) Es gibt eine vierelementige affine Ebene, nämlich das Paar

$$(\mathbf{P}, \mathbf{G}) = (\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}),$$

denn: Die Inzidenzaxiome sind schnell überprüft. Zum Beweis von (P) betrachten wir ein  $P \in \mathbf{P}$  und ein  $g \in \mathbf{G}$ . Im Fall  $P \in g$  ist nach Definition die Gerade  $g$  selbst die eindeutig bestimmte Parallele. Im Fall  $P \notin g$  benötigen wir noch einen Punkt aus  $\mathbf{P} \setminus (g \cup \{P\})$  auf der Parallelen, da diese nach  $(I_2)$  zwei verschiedene Punkte außerhalb von  $g$  enthalten muss. Offensichtlich ist in diesem Fall also  $\mathbf{P} \setminus g$  die eindeutig bestimmte Parallele. #



(c) Affine Ebenen im Sinne von Abschnitt 1.1 sind affine Ebenen im Sinne von Definition 2.11,

denn: Nach Beispiel 2.9 genügt es, das starke Parallelenaxiom (P) nachzuweisen. Mit derselben Argumentation wie dort reicht es sogar, dies im Fall der affinen Standardebene  $\mathbb{A}^2(K)$  zu tun. Seien also  $P \in K^2$  und  $g_{A,t} \in \mathbf{G}_K$  beliebig. Nach Bemerkung 2.7 ist eine beliebige Parallele  $h$  zu  $g_{A,t}$  dadurch charakterisiert, dass sie  $\langle t \rangle_K$  als Translationsvektorraum hat, dass es also ein  $B \in K^2$  gibt mit  $h = g_{B,t}$ . Genau dann gilt  $P \in g_{B,t}$ , wenn es ein  $\lambda \in K$  gibt mit

$$P = B + \lambda t \quad \text{bzw.} \quad B = P - \lambda t.$$

Wegen  $g_{P-\lambda t, t} = g_{P, t}$  ist somit  $g_{P, t}$  die eindeutig bestimmte Parallele zu  $g_{A, t}$  durch  $P$ . #

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

Eine Menge von Axiomen heißt **unabhängig**, wenn sich keines davon aus den anderen herleiten lässt. In unserer Situation gilt beispielsweise

- Die Axiome  $(I_1)$ ,  $(I_2)$ ,  $(I_3)$  und  $(p)$  sind unabhängig voneinander.
- Die Axiome  $(I_1)$ ,  $(I_2)$ ,  $(I_3)$  und  $(P)$  sind nicht unabhängig voneinander. Genauer folgt aus  $(I_1)$ ,  $(I_3)$  und  $(P)$  bereits  $(I_2)$ .



Ein Beweis hierfür findet sich im [verlinkten Zusatzmaterial](#). Natürlich ist die Überprüfung der Unabhängigkeit nach jedem Hinzufügen weiterer Axiome wieder interessant. Da dabei allerdings der Aufwand explodiert, werden wir diese Fragestellung nicht weiter verfolgen.

**Proposition 2.13 (aff. Ebene).** *Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbf{G}$ .*

*Beweis.* Da aus  $g = h$  insbesondere  $g \parallel h$  folgt, ist Parallelität reflexiv.

Weiterhin gilt für beliebige  $g, h \in \mathbf{G}$

$$g \parallel h \iff (g = h \text{ oder } g \cap h = \emptyset) \iff (h = g \text{ oder } h \cap g = \emptyset) \iff h \parallel g,$$

so dass die Parallelität auch symmetrisch ist.

Zum Beweis der Transitivität der Parallelität betrachten wir drei Geraden  $f, g, h \in \mathbf{G}$  mit  $f \parallel g$  und  $g \parallel h$ . Zu zeigen ist  $f \parallel h$ . Da wir sonst schon fertig sind, können wir dabei ohne Einschränkung annehmen, es gebe einen Punkt  $A \in f \cap h$ .  $A$  liegt also auf zwei zu  $g$  parallelen Geraden, nämlich auf  $f$  und  $h$ . Wegen der Eindeutigkeitsaussage im starken Parallelenaxiom (P) müssen daher  $f$  und  $h$  übereinstimmen; insbesondere gilt wie verlangt  $f \parallel h$ .  $\square$

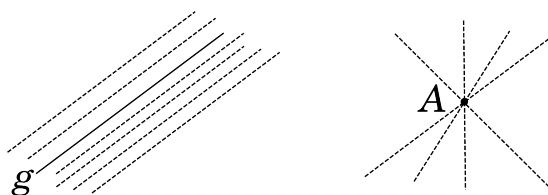
**Definition 2.14 (aff. Ebene).** *Für eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  heißt die Äquivalenzklasse*

$$[g] := \{h \in \mathbf{G} \mid h \parallel g\}$$

das *Parallelenbüschel* zu  $g$ ;<sup>2</sup> insbesondere ist so die Menge  $\mathbf{G}$  eine disjunkte Vereinigung von Parallelenbüscheln. Für einen Punkt  $A \in \mathbf{P}$  heißt die Menge

$$A^* := \{h \in \mathbf{G} \mid A \in h\}$$

das *Geradenbüschel* durch  $A$ .



**Beispiel 2.15.** *Sei  $K$  ein beliebiger Körper. Für eine beliebige Gerade  $g_{A,t} \in \mathbf{G}_K$  ist*

$$[g_{A,t}] = \{h \in \mathbf{G}_K \mid h \parallel g_{A,t}\} \stackrel{2.7}{=} \{g_{B,t} \mid B \in K^2\}$$

das *Parallelenbüschel* von  $g_{A,t}$  in  $\mathbb{A}^2(K)$ . Für einen Punkt  $A \in K^2$  ist

$$A^* = \{h \in \mathbf{G}_K \mid A \in h\} = \{g_{A,t} \mid t \in K^2, t \neq 0\}$$

das *Geradenbüschel* durch  $A$  in  $\mathbb{A}^2(K)$ .

<sup>2</sup>vgl. auch Satz 1.98

**Definition 2.16.** Ein Isomorphismus im Sinne von Definition 2.8 zwischen zwei affinen Ebenen heißt ein **affiner Isomorphismus**. Ein Automorphismus einer affinen Ebene heißt ein **affiner Automorphismus**. Die Menge der affinen Automorphismen einer gegebenen affinen Ebene  $\mathbb{A}$  wird mit  $\text{Aut}(\mathbb{A})$  bezeichnet.

**Beispiel 2.17.**  $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$  ist eine affine Ebene mit den vier Punkten  $\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$  und ist mit einer beliebigen bijektiven Zuordnung von Punkten zur affinen Ebene aus Beispiel 2.12 (b) affin isomorph.

## 2.3 Übungsaufgaben

**Aufgabe 2.1 (proj. Raum).** Sei  $\dim(V) = 3$  und bezeichne  $\mathbf{G}_{\mathbb{P}(V)}$  die Menge der projektiven Geraden in  $\mathbb{P}(V)$ . Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{P}(V), \mathbf{G}_{\mathbb{P}(V)})$  eine Inzidenzebene ist und untersuchen Sie dort die Gültigkeit der Parallelenaxiome (p) und (P).

**Aufgabe 2.2 (I).** Sei  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$  eine Inzidenzebene und  $\varphi: \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$  ein Isomorphismus von  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  nach  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $\varphi^{-1}$  ein Isomorphismus von Inzidenzebenen ist.

**Aufgabe 2.3.** Zeigen Sie, dass die beiden Inzidenzebenen in Beispiel 2.12 auch das schwache Parallelenaxiom erfüllen. Geben Sie eine Inzidenzebene mit fünf Punkten an, die das Axiom (p) nicht erfüllt.

**Aufgabe 2.4 (aff. Ebene).** Sei  $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine affine Ebene. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Seien  $g, h \in \mathbf{G}$  mit  $g \not\parallel h$ . Dann ist die Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} [h] & \rightarrow g, \\ f & \mapsto f \wedge g \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv.

(b) Seien  $g, h \in \mathbf{G}$  mit  $g \neq h$ . Dann gibt es eine Gerade  $f \in \mathbf{G}$  mit  $f \not\parallel g$  und  $f \not\parallel h$ .

(c) Für  $g, h \in \mathbf{G}$  gibt es eine bijektive Abbildung  $\varphi: g \rightarrow h$ ;  $g$  und  $h$  sind also als Mengen gleichmächtig.

**Hinweis:** Benutzen Sie (a) und (b).

**Aufgabe 2.5 (aff. Ebene).** Sei  $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine affine Ebene. Nach Aufgabe 2.4 sind alle Geraden in  $\mathbf{G}$  gleichmächtig. Diese Mächtigkeit heißt die **Ordnung** der affinen Ebene  $\mathbb{A}$ . Im Folgenden sei  $\mathbb{A}$  eine affine Ebene von endlicher Ordnung  $n$ . Nach  $(I_2)$  gilt  $n \geq 2$ . Zeigen Sie:

(a) Jedes Geradenbüschel besteht aus  $n + 1$  Geraden, durch jeden Punkt gehen also  $n + 1$  Geraden.

(b) Es gibt  $n + 1$  Parallelenbüschel.

(c) Jedes Parallelenbüschel besteht aus  $n$  Geraden, zu jeder Geraden gibt es also  $n$  Parallelen.

(d) Es gilt  $|\mathbf{G}| = n(n + 1)$ .



(e) Es gilt  $|\mathbf{P}| = n^2$ .

**Aufgabe 2.6 (aff. Ebene).** Seien  $\tilde{\mathbb{A}} = (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$  eine affine Ebene und  $\varphi: \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$  ein affiner Isomorphismus. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle  $A \neq B \in \mathbf{P}$  gilt  $\varphi(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$ .

(b) Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  sind genau dann kollinear, wenn  $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \in \tilde{\mathbf{P}}$  kollinear sind.

(c)  $\varphi(\mathbf{G}) := \{\varphi(g) \mid g \in \mathbf{G}\} = \tilde{\mathbf{G}}$ .

(d) Für parallele Geraden  $g \parallel h \in \mathbf{G}$  gilt  $\varphi(g) \parallel \varphi(h)$ .

---

## Hilbertebenen

---

In diesem Kapitel führen wir zunächst ausgehend vom Begriff der Inzidenzebene aus Kapitel 2 mit den Anordnungsaxiomen und den Kongruenzaxiomen für Strecken und Winkel weitere Klassen von Axiomen ein. Auf diese Weise erhalten wir in Abschnitt 3.3 die sogenannten Hilbertebenen, in denen wir eine Reihe klassischer geometrischer Sätze synthetisch beweisen können. Es stellt sich jedoch heraus, dass manche Aussagen, darunter auch einige aus der Schulmathematik bekannte, im Kontext von Hilbertebenen nicht allgemein richtig sind. Wir werden diesen Missstand in Kapitel 4 durch Hinzunahme zweier weiterer Axiome beheben.

### 3.1 Die Anordnungsaxiome

In diesem Abschnitt wollen wir auf einer Inzidenzebene Axiome einführen, vermöge derer wir angeben können, wie gegebene kollineare Punkte auf ihrer gemeinsamen Verbindungsgeraden angeordnet sind. Hierfür benötigen wir eine Reihe von Sprechweisen:

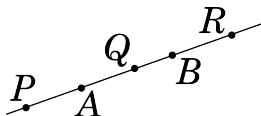
- Sei  $M_*$  eine fest gewählte Teilmenge von  $\mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \mathbf{P}$ , und seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei beliebige Punkte. Liegt das (angeordnete) Tripel  $(A, B, C)$  in  $M_*$ , so sagen wir, der Punkt  $B$  *liege bezüglich der Anordnung  $*$  zwischen  $A$  und  $C$*  und schreiben  $A * B * C$ .
- Sei  $g \in \mathbf{G}$  eine beliebige Gerade, und seien  $A, B \in \mathbf{P} \setminus g$  zwei beliebige Punkte. Falls es einen Punkt auf  $g$  gibt, der zwischen  $A$  und  $B$  liegt, so sagen wir,  $A$  und  $B$  *liegen auf verschiedenen Seiten von  $g$* , und schreiben  $A \mid_g B$ . Andernfalls sagen wir,  $A$  und  $B$  *liegen auf derselben Seite von  $g$* , und schreiben  $AB \mid_g$ .

Dieses Konzept einer Anordnung ist noch sehr allgemein gefasst; entgegen unserer naiven geometrischen Vorstellung ist es etwa möglich, dass von drei Punkten  $A, B, C \in \mathbf{P}$  jeder zwischen den jeweils anderen beiden liegt. Wir fordern daher präzisierend die folgenden Axiome:

**Definition 3.1 (I).** *Das Tripel  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, *)$  erfüllt die Anordnungsaxiome, falls gilt:*

(A<sub>1</sub>) Sind  $A, B, C \in \mathbf{P}$  mit  $A \star B \star C$ , dann sind  $A, B, C$  kollinear, paarweise verschieden und es gilt  $C \star B \star A$ .

(A<sub>2</sub>) Für je zwei Punkte  $A \neq B \in \mathbf{P}$  gibt es  $P, Q, R \in \overleftrightarrow{AB}$  mit  $P \star A \star B$ ,  $A \star Q \star B$  und  $A \star B \star R$ .



(A<sub>3</sub>) Sind  $A, B, C \in \mathbf{P}$  paarweise verschieden und kollinear, so gibt es unter diesen drei Punkten genau einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

(A<sub>4</sub>) Für jede Gerade  $g \in \mathbf{G}$  und alle Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P} \setminus g$  gilt

- Aus  $AB|_g$  und  $BC|_g$  folgt  $AC|_g$ .
- Aus  $A|_g B$  und  $B|_g C$  folgt  $AC|_g$ .



Für „Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine Inzidenzebene, die zusammen mit der Anordnung  $\star$  die Anordnungsaxiome erfüllt.“ schreiben wir künftig auch kurz „ $(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ “.

Die Anordnungsaxiome (A<sub>1</sub>) und (A<sub>3</sub>) sorgen dafür, dass wir uns Geraden in einer Inzidenzebene tatsächlich so vorstellen können wie wir das gerne täten. Axiom (A<sub>2</sub>) ist eine Reichhaltigkeitsaussage, die erzwingt, dass es in jeder Inzidenzebene mit Anordnungsaxiomen unendlich viele Punkte gibt, vgl. Übungsaufgabe 3.2. Axiom (A<sub>4</sub>) hat zur Folge, dass wir in der folgenden Proposition 3.2 das Konzept der Seiten einer Geraden sinnvoll einführen können:

**Proposition 3.2 (I + A).** Für eine beliebige Gerade  $g \in \mathbf{G}$  ist  $\_ |_g$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbf{P} \setminus g$ . Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen  $S_1(g)$  und  $S_2(g)$ , die *Seiten* von  $g$  oder die *von  $g$  begrenzten Halbebenen*. Insbesondere gilt

$$\mathbf{P} = g \cup S_1(g) \cup S_2(g).$$

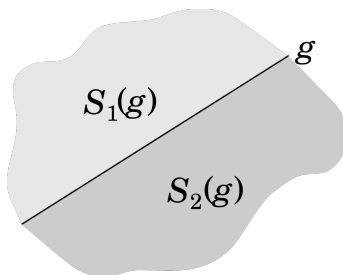


Abbildung 3.1: Nach (A<sub>1</sub>) und (A<sub>4</sub>) hat  $g$  Seiten, nach (A<sub>2</sub>) und (A<sub>4</sub>) genau zwei Stück.

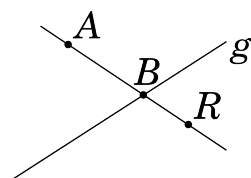
*Beweis.* Zum Beweis der Reflexivität von  $\_ |_g$  betrachten wir  $A \in \mathbf{P} \setminus g$ . Da für einen beliebigen Punkt  $P \in g$  die drei Punkte  $A, P, A$  nicht paarweise verschieden sind, folgt mit  $(A_1)$ , dass es kein  $P \in g$  mit  $A \star P \star A$  gibt. Nach Definition gilt also  $AA |_g$ .

Um die Symmetrie von  $\_ |_g$  zu zeigen, betrachten wir zwei Punkte  $A, B \in \mathbf{P} \setminus g$  mit  $AB |_g$ . Es gibt kein  $P \in g$  mit  $A \star P \star B$  und nach  $(A_1)$  also auch kein  $P \in g$  mit  $B \star P \star A$ . Es folgt  $BA |_g$ .

Die Transitivität von  $\_ |_g$  ist schließlich gerade die erste Aussage von  $(A_4)$ .

Insgesamt wissen wir jetzt also, dass  $\_ |_g$  eine Äquivalenzrelation ist. Es gibt bezüglich  $\_ |_g$  genau zwei Äquivalenzklassen,

denn: Nach Proposition 2.5 bzw.  $(I_2)$  gibt es Punkte  $A \in \mathbf{P} \setminus g$  bzw.  $B \in g$ . Nach  $(A_2)$  gibt es ein  $R \in \overleftrightarrow{AB}$  mit  $A \star B \star R$ , so dass  $A |_g R$  gilt und es mindestens zwei Seiten von  $g$  gibt.



Sei nun  $P \in \mathbf{P} \setminus g$  von  $A$  und von  $R$  verschieden. Gilt  $P |_g A$ , so folgt mit der zweiten Aussage von  $(A_4)$  sofort  $PR |_g$ . Ein beliebiger Punkt  $P$  liegt also stets auf derselben Seite von  $g$  wie  $A$  oder wie  $R$ , so dass es nicht mehr als zwei Seiten von  $g$  gibt. #

□

**Beispiel 3.3.** Wie wir in 1.39 gesehen haben, ist in der affinen Standardebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  die Verbindungsgerade  $\overleftrightarrow{AC}$  zweier voneinander verschiedener Punkte  $A, C \in \mathbb{R}^2$  durch

$$\overleftrightarrow{AC} = \{\lambda A + (1 - \lambda) C \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Davon motiviert definieren wir für je drei Punkte  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$

$$A \star B \star C \quad :\iff \quad A \neq C \text{ und es gibt ein } \lambda \in (0, 1) \text{ mit } B = \lambda A + (1 - \lambda) C. \quad (3.1)$$

Wir geben nun eine Beschreibung der Seiten einer gegebenen Geraden  $g_{P,t}$  mit  $P, t \in \mathbb{R}^2$  und  $t \neq 0$  an: Bezeichnet  $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$ , so nennen wir jeden Vektor  $n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mit  $\langle t \mid n \rangle = 0$  einen **Normalenvektor** von  $g_{P,t}$ . Da der Translationsvektorraum einer Geraden eindimensional ist, ist dieser Begriff wohldefiniert. Wie man schnell nachrechnet, gilt

$$\{n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid \langle n \mid t \rangle = 0\} = \langle t^\perp \rangle_{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \quad \text{mit } t^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t.$$

Mit  $(t^\perp)^\perp = -t$  folgt

$$A \in g_{P,t} \quad \iff \quad A - P \in \langle t \rangle_{\mathbb{R}} \quad \iff \quad \langle A - P \mid t^\perp \rangle = 0,$$

so dass wir die Gerade  $g_{P,t}$  in ihrer **Hesse'schen Normalform**

$$g_{P,t} = \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle A - P \mid t^\perp \rangle = 0\} = \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle A \mid t^\perp \rangle = \langle P \mid t^\perp \rangle\} \quad (3.2)$$

schreiben können. Für  $A \neq B$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus g_{P,t}$  gilt nun

$A \mid_{g_{P,t}} B \iff$  Es gibt ein  $Q \in g_{P,t}$  mit  $A \star Q \star B$ .

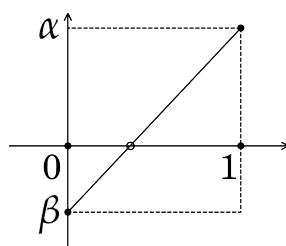
$\stackrel{(3.1)}{\iff}$  Es gibt ein  $\lambda \in (0, 1)$  mit  $\lambda A + (1 - \lambda) B \in g_{P,t}$ .

$\stackrel{(3.2)}{\iff}$  Es gibt ein  $\lambda \in (0, 1)$  mit  $0 = \langle (\lambda A + (1 - \lambda) B) - P \mid t^\perp \rangle$ .

$\iff$  Es gibt ein  $\lambda \in (0, 1)$  mit  $0 = \lambda \cdot \underbrace{\langle A - P \mid t^\perp \rangle}_{=: \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} + (1 - \lambda) \cdot \underbrace{\langle B - P \mid t^\perp \rangle}_{=: \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

$\iff$  Es gibt eine Nullstelle  $\lambda \in (0, 1)$  der Abbildung  $\begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \alpha x + \beta(1 - x). \end{cases}$

$\iff \alpha$  und  $\beta$  haben verschiedene Vorzeichen.



Die zwei Seiten von  $g_{P,t}$  sind somit

$$\{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle A - P \mid t^\perp \rangle > 0\} \quad \text{und} \quad \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle A - P \mid t^\perp \rangle < 0\}.$$

Wir nutzen nun diese Beschreibung, um zu zeigen, dass  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  zusammen mit der Anordnung  $\star$  die Anordnungsaxiome erfüllt; ein Beweis dafür findet sich im [verlinkten Zusatzmaterial](#).

In Beweisen kommt es oft vor, dass drei paarweise verschiedene, kollineare Punkte gegeben sind und man statt mit den Seiten einer noch zu konstruierenden Gerade lieber mit den Seiten des mittleren Punktes argumentieren möchte. Dieses Vorgehen wollen wir nun legitimieren:

**Definition 3.4 (I + A).** Seien  $A, B, P \in \mathbf{P}$  paarweise verschieden und kollinear. Falls  $A \star P \star B$  gilt, dann sagen wir,  $A$  und  $B$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $P$ , und schreiben  $A \mid_P B$ . Ist dies nicht der Fall, dann sagen wir,  $A$  und  $B$  liegen auf derselben Seite von  $P$ , und schreiben  $AB \mid_P$ .

**Proposition 3.5 (I + A).** Für drei paarweise verschiedene und kollineare Punkte  $A, B, P \in \mathbf{P}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i)  $A$  und  $B$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $P$ .

- (ii)  $A$  und  $B$  liegen auf verschiedenen Seiten einer von  $\overleftrightarrow{AB}$  verschiedenen Geraden durch  $P$ .  
 (iii)  $A$  und  $B$  liegen auf verschiedenen Seiten aller von  $\overleftrightarrow{AB}$  verschiedenen Geraden durch  $P$ .

*Beweis.* Aus (iii) folgt (ii), da es nach  $(I_3)$  und  $(I_1)$  eine von  $\overleftrightarrow{AB}$  verschiedene Gerade durch  $P$  gibt.

Gelte nun (ii), und sei  $h$  eine von  $\overleftrightarrow{AB}$  verschiedene Gerade durch  $P$  mit  $A \mid_h B$ . Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt  $Q \in h$  mit  $A \star Q \star B$ . Nach Konstruktion ist  $Q = h \wedge \overleftrightarrow{AB} = P$ . Es folgt  $A \mid_P B$ , also (i).

Gelte schließlich (i), also  $A \star P \star B$ . Sei  $h$  eine beliebige von  $\overleftrightarrow{AB}$  verschiedene Gerade durch  $P$ . Wegen  $P \in h$  gilt dann  $A \mid_h B$ . Wegen der freien Wahl von  $h$  haben wir somit (iii) gezeigt.  $\square$

**Korollar 3.6 (I + A).** Sei  $g \in \mathbf{G}$  eine beliebige Gerade. Für einen beliebigen Punkt  $P \in g$  ist dann  $\_ \mid_P \_$  eine Äquivalenzrelation auf  $g \setminus \{P\}$ . Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen  $S_1(P)$  und  $S_2(P)$ , die **Seiten** von  $P$  auf  $g$  oder die **von  $P$  begrenzten Halbgeraden**. Insbesondere gilt

$$g = \{P\} \cup S_1(P) \cup S_2(P).$$

*Beweis.* Klar mit den Propositionen 3.2 und 3.5.  $\square$

**Definition 3.7 (I + A).** Sei  $n \geq 3$  eine natürliche Zahl. Gilt  $A_i \star A_j \star A_k$  für alle  $1 \leq i < j < k \leq n$ , so schreiben wir einfacher  $A_1 \star \dots \star A_n$ .

**Proposition 3.8 (I + A).** (a) Für beliebige vier Punkte  $A, B, C, D \in \mathbf{P}$  gilt

$$A \star B \star C \text{ und } A \star C \star D \iff B \star C \star D \text{ und } A \star B \star D.$$

(b) Für beliebige vier Punkte  $A, B, C, D \in \mathbf{P}$  gilt

$$A \star B \star C \text{ und } B \star C \star D \implies A \star B \star D \text{ und } A \star C \star D.$$

(c) Sei  $n \geq 3$  eine natürliche Zahl, und seien  $A_1, \dots, A_n \in \mathbf{P}$ . Dann gilt

$$A_i \star A_{i+1} \star A_{i+2} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n-2\} \iff A_1 \star \dots \star A_n.$$

*Beweis.* Die Beweise der drei Teilbehauptungen sind einander sehr ähnlich. Wir beweisen hier nur Aussage (b) und verweisen für den Rest auf Übungsaufgabe 3.1

Es gelten  $A \star B \star C$  und  $B \star C \star D$ . Nach  $(A_1)$  sind dann die Punkte  $A, B, C$  und  $B, C, D$  jeweils kollinear, so dass dies auch auf die vier Punkte  $A, B, C, D$  zutrifft. Außerdem sind wieder nach  $(A_1)$  die Punkte  $A, B, C$  und  $B, C, D$  jeweils paarweise verschieden. Da aus  $A = D$  sofort  $A \star B \star C$  und  $B \star C \star A$  folgte, was nach  $(A_3)$  nicht sein kann, sind die vier Punkte  $A, B, C, D$  auch paarweise verschieden.

Wegen unserer Voraussetzungen  $A \star B \star C$  und  $B \star C \star D$  gelten  $A \mid_B C$  und  $CD \mid_B$ . Mit Korollar 3.6 folgt  $A \mid_B D$ , also  $A \star B \star D$ . Wieder wegen unserer Voraussetzungen  $A \star B \star C$  und  $B \star C \star D$  gelten  $AB \mid_C$  und  $B \mid_C D$ . Mit Korollar 3.6 folgt  $A \mid_C D$ , also  $A \star C \star D$ .  $\square$

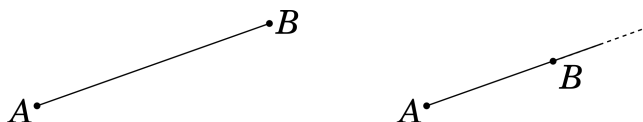
**Bemerkung 3.9.** Eine äquivalente Formulierung des zweiten Anordnungsaxioms ( $A_2$ ) ist

( $A'_2$ ) Für je zwei Punkte  $A \neq B \in \mathbf{P}$  gibt es Punkte  $P, Q, R \in \overleftrightarrow{AB}$  mit  $P \star A \star Q \star B \star R$ ,

denn: ( $A'_2$ ) folgt vermöge Teil (a) von Proposition 3.8 aus ( $A_2$ ). Die andere Richtung ist trivial. #

**Definition 3.10 (I + A).** Seien  $A \neq B \in \mathbf{P}$  zwei verschiedene Punkte. Dann heißen die Mengen

$$\begin{aligned} \overline{AB} &:= \{P \in \overleftrightarrow{AB} \mid A \star P \star B\} \cup \{A, B\} && \text{die Strecke } \overline{AB} \text{ mit den Endpunkten } A, B, \\ \overrightarrow{AB} &:= \{P \in \overleftrightarrow{AB} \mid A \star P \star B \vee A \star B \star P\} \cup \{A, B\} && \text{der Strahl } \overrightarrow{AB} \text{ mit dem Ausgangspunkt } A. \end{aligned}$$



Zwei Strahlen  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC}$  heißen **entgegengesetzt**, falls  $A$  zwischen  $B$  und  $C$  liegt. Wird im Folgenden eine der Notationen  $\overline{AB}$  oder  $\overrightarrow{AB}$  verwendet, ohne dass wir ausdrücklich  $A \neq B$  voraussetzen, so ist dies an dieser Stelle als implizit angenommen zu verstehen.

**Proposition 3.11 (I + A).** Für je zwei verschiedene Punkte  $A, B \in \mathbf{P}$  gilt:

$$\overline{AB} = \overline{BA} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}.$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt unmittelbar aus ( $A_1$ ). Im Beweis der zweiten Aussage folgt die Inklusion  $\supseteq$  unmittelbar aus Definition 3.10. Sei für die andere Inklusion  $P$  ein beliebiger Punkt aus  $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ . Für  $P \in \{A, B\}$  ist nichts zu zeigen, so dass wir annehmen können,  $P$  sei weder  $A$  noch  $B$ . Mit  $P \in \overrightarrow{AB}$  gilt

$$A \star P \star B \quad \text{oder} \quad A \star B \star P,$$

so dass  $A, B, P$  kollinear und paarweise verschieden sind. Mit  $P \in \overrightarrow{BA}$  gilt aber auch

$$B \star P \star A \quad \text{oder} \quad B \star A \star P.$$

Falls  $A \star P \star B$  nicht gilt, kann nach ( $A_1$ ) auch  $B \star P \star A$  nicht gelten. Es folgt, dass dann sowohl  $A \star B \star P$  als auch  $B \star A \star P$  gelten müssten, was ein Widerspruch zu ( $A_3$ ) wäre und deshalb nicht sein kann. Es folgt also  $A \star P \star B$ , also  $P \in \overline{AB}$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Proposition 3.12 (I + A).** Für drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  mit  $B \star A \star C$  gilt:

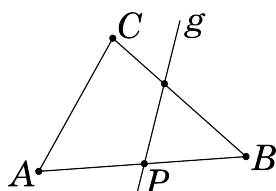
(a)  $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ ,

(b)  $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Sei dafür  $P \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \overrightarrow{AB}$ . Nach Definition 3.10 und  $(A_3)$  gilt dann  $P \mid_A B$ . Wir können ohne Einschränkung  $P \neq C$  annehmen, da  $P$  sonst schon definitionsgemäß auf  $\overrightarrow{AC}$  läge. Es sind dann  $A, P, C$  drei kollineare, paarweise verschiedene Punkte. Wegen  $P \mid_A B$  und  $B \mid_A C$  gilt  $PC \mid_A$ . Es folgt  $P \in \overrightarrow{AC}$ .

Zum Beweis von Behauptung (b) betrachten wir einen Punkt  $P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC}$ . Dieser ist nach Definition entweder gleich  $A$  oder es gilt sowohl  $PB \mid_A$  als auch  $PC \mid_A$ . Da letzteres aufgrund der Voraussetzung  $B \star A \star C$  nicht möglich ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.13** (Satz von Pasch, **I + A**). *Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage und sei  $g \in \mathbf{G}$  mit  $g \cap \overrightarrow{AB} = \{P\}$  für ein  $P \in \mathbf{P}$  mit  $A \star P \star B$ . Dann schneidet  $g$  eine der Strecken  $\overline{AC}$  und  $\overline{BC}$ . Falls  $C$  nicht auf  $g$  liegt, schneidet  $g$  genau eine der beiden Strecken.*



*Beweis.* Da für  $C \in g$  nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung  $C \notin g$  annehmen. Wegen  $A \star P \star B$  gilt  $A \mid_g B$  und also entweder  $CA \mid_g$  oder  $CB \mid_g$ . Da sich diese beiden Situationen durch eine Umbenennung von  $A$  in  $B$  und umgekehrt ineinander überführen lassen, können wir ohne Einschränkung annehmen, es gelte  $CA \mid_g$ . Dann folgt  $B \mid_g C$ , so dass es also einen Punkt  $Q \in g$  mit  $B \star Q \star C$  gibt. Dieser Punkt  $Q$  liegt nach Konstruktion im Durchschnitt  $g \cap \overline{BC}$ , der somit nicht leer sein kann. Andererseits gilt  $AC \mid_g$ , so dass es keinen Punkt  $R \in g$  mit  $A \star R \star C$  gibt, der Durchschnitt  $g \cap \overline{AC}$  ist also leer.  $\square$

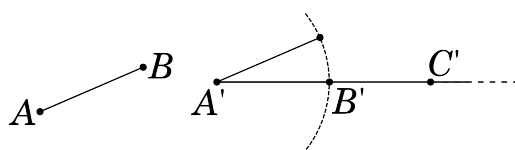
### 3.2 Die Kongruenzaxiome für Strecken

Wir haben im letzten Abschnitt den Begriff der Strecke eingeführt, haben bislang aber noch keine Möglichkeit, solche miteinander zu vergleichen. Wir führen daher den Begriff der **Kongruenz von Strecken** als Relation  $\cong$  auf der Menge  $\mathbf{S}$  aller Strecken in  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein:

**Definition 3.14** (**I + A**). *Das 4-Tupel  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$  erfüllt die Kongruenzaxiome für Strecken, wenn gilt:*

$(K_1)$   $\cong$  ist auf  $\mathbf{S}$  eine Äquivalenzrelation.

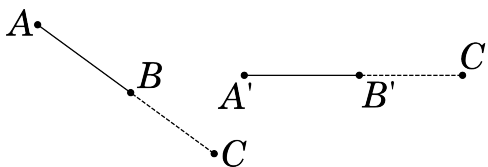
$(K_2)$  Sind  $A \neq B \in \mathbf{P}$  und  $A' \neq C' \in \mathbf{P}$ , so gibt es genau ein  $B' \in \overrightarrow{A'C'}$  mit  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ .





Man sagt, eine beliebige Strecke lasse sich auf einen beliebigen Strahl **abtragen**.

(K<sub>3</sub>) Sind  $A, B, C, A', B', C' \in \mathbf{P}$  mit  $A \star B \star C$ ,  $A' \star B' \star C'$  und  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ , so gilt auch  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ .



Für „Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine Inzidenzebene, die zusammen mit der Anordnung  $\star$  die Anordnungsaxiome und zusammen mit der Relation  $\cong$  auf  $\mathbf{S}$  die Kongruenzaxiome für Strecken erfüllt.“ schreiben wir künftig auch kurz „ $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{K})$ “.

**Beispiel 3.15.** In der affinen Standardebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  definieren wir unseren Kongruenzbegriff für Strecken wie folgt: Für je vier Punkte  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$  mit  $A \neq B$  und  $C \neq D$  setzen wir

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad :\iff \quad d(A, B) = d(C, D),$$

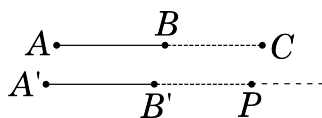
wobei für je zwei Punkte  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{R}^2$  die Zahl

$$d(A, B) = \|B - A\| = \sqrt{\langle B - A \mid B - A \rangle} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \in \mathbb{R}$$

den aus der Linearen Algebra bekannten **euklidischen Abstand** zwischen  $A$  und  $B$  bezeichne. Die affine Standardebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  zusammen mit diesem Kongruenzbegriff  $\cong$  erfüllt die Kongruenzaxiome für Strecken; ein Beweis hierzu findet sich im [verlinkten Zusatzmaterial](#).

**Proposition 3.16 (I + A + K).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte mit  $A \star B \star C$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  drei Punkte mit  $C' \in \overrightarrow{A'B'}$ . Gilt dann  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  und  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ , so folgt  $A' \star B' \star C'$  und  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ .

*Beweis.* Nach Übungsaufgabe 3.3 gibt es einen eindeutig bestimmten Strahl mit Ausgangspunkt  $B'$ , der dem Strahl  $\overrightarrow{B'A'}$  entgegengesetzt ist. Sei  $P$  der nach (K<sub>2</sub>) existente eindeutige Punkt auf diesem Strahl mit  $\overline{B'P} \cong \overline{BC}$ . Daraus und aus  $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$  folgern wir mit (K<sub>3</sub>) die Kongruenz  $\overline{A'P} \cong \overline{AC}$ .



Nun liegen aber sowohl  $P$  als auch  $C'$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'B'}$ , denn für  $C'$  ist das vorausgesetzt, und nach Konstruktion von  $P$  gilt  $A' \star B' \star P$ . Da nach Voraussetzung  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$  gilt, folgt mit (K<sub>1</sub>) unmittelbar  $\overline{A'P} \cong \overline{A'C'}$  und mit der Eindeutigkeitsaussage in (K<sub>2</sub>) schon  $P = C'$ . Das impliziert  $A' \star B' \star C'$  und  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ , also die Behauptung.  $\square$

**Definition 3.17 (I + A + K).** Seien  $A, B, C, D \in \mathbf{P}$  vier Punkte mit  $A \neq B$  und  $C \neq D$ . Gibt es ein  $P \in \mathbf{P}$  mit  $C \star P \star D$  und  $\overline{AB} \cong \overline{CP}$ , so sagen wir, die Strecke  $\overline{AB}$  sei **kleiner** als die Strecke  $\overline{CD}$ , bzw.  $\overline{CD}$  **größer** als  $\overline{AB}$ , und schreiben  $\overline{AB} < \overline{CD}$  bzw.  $\overline{CD} > \overline{AB}$ .

**Proposition 3.18 (I + A + K).** (a) Seien  $A, B, C, D, A', B', C', D'$  Punkte in  $\mathbf{P}$  mit  $A \neq B, C \neq D, A' \neq B', C' \neq D'$  und  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ . Dann gilt

$$\overline{AB} < \overline{CD} \implies \overline{A'B'} < \overline{C'D'}.$$

(b) Sind  $A, B, C, D, E, F$  Punkte in  $\mathbf{P}$  mit  $A \neq B, C \neq D, E \neq F$ , dann gilt

$$\overline{AB} < \overline{CD} \text{ und } \overline{CD} < \overline{EF} \implies \overline{AB} < \overline{EF}.$$

(c) Für beliebige  $A, B, C, D$  in  $\mathbf{P}$  mit  $A \neq B$  und  $C \neq D$  gilt genau eine der folgenden Aussagen

$$\overline{AB} < \overline{CD}, \quad \overline{AB} \cong \overline{CD}, \quad \overline{AB} > \overline{CD}.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Sei dafür  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  und  $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ , und gelte  $\overline{AB} < \overline{CD}$ . Dann existiert ein  $P \in \mathbf{P}$  mit  $C \star P \star D$  und  $\overline{CP} \cong \overline{AB}$ . Nach  $(K_2)$  existiert auf  $\overline{C'D'}$  ein Punkt  $P'$  mit  $\overline{C'P'} \cong \overline{CP} \cong \overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ . Aus Proposition 3.16 erhalten wir  $C' \star P' \star D'$  und damit  $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$ .

Aufgrund von (a) und  $(K_2)$  können wir zum Nachweis von (b) von  $\overline{AB} < \overline{AC}$  und  $\overline{AC} < \overline{AD}$  mit  $B, C$  in  $\overline{AD}$  ausgehen. Insbesondere existiert ein  $C' \in \mathbf{P}$  mit  $A \star C' \star D$  und  $\overline{AC'} \cong \overline{AC}$ . Aufgrund von  $(K_2)$  ist  $C' = C$ , es gilt also  $A \star C \star D$ . Analog ergibt sich  $A \star B \star C$ . Nach Proposition 3.8 gilt  $A \star B \star D$  und somit  $\overline{AB} < \overline{AD}$ .

Zum Nachweis von (c) nehmen wir nach (a) und  $(K_2)$  ohne Einschränkung  $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$  mit  $C \in \overline{AB}$  an. Wir erhalten entweder  $A \star C \star B$  oder  $A \star B \star C$ , was entweder  $\overline{AC} < \overline{AB}$  oder  $\overline{AB} < \overline{AC}$  zur Folge hat.  $\square$

### 3.3 Die Kongruenzaxiome für Winkel

**Definition 3.19 (I + A).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann heißt

$$\angle BAC := \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$$

der Winkel  $\angle BAC$ ,  $A$  sein **Scheitel** und  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  seine **Schenkel**.

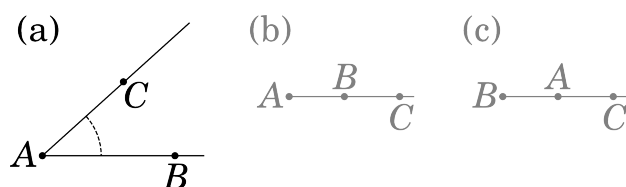


Abbildung 3.2: Wir werden Winkel in Skizzen ab sofort mit einem Bogen wie in (a) darstellen. Dabei ist anzumerken, dass es für jeden Winkel zwei mögliche Wahlen eines solchen Bogens gibt, von denen wir in der Skizze jeweils einen auswählen müssen. Gemeint ist unabhängig von dieser Wahl stets der Winkel selbst. Man bemerke außerdem, dass die obige Definition den Nullwinkel (b) und den geraden Winkel (c) ausschließt.

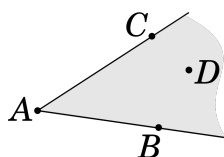
**Proposition 3.20 (I + A).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  je drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- (i)  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ,
- (ii)  $A = A'$  und entweder  $(B' \in \overrightarrow{AB} \text{ und } C' \in \overrightarrow{AC})$  oder  $(B' \in \overrightarrow{AC} \text{ und } C' \in \overrightarrow{AB})$ .

Insbesondere hat jeder Winkel einen eindeutig bestimmten Scheitel.

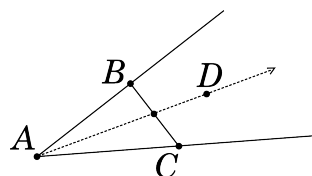
*Beweis.* Unmittelbar mit Definition 3.19 □

**Definition 3.21 (I + A).** Seien  $A, B, C, D \in \mathbf{P}$ , so dass  $A, B, C$  in allgemeiner Lage sind und  $D$  nicht in der Vereinigung der Geraden  $\overleftrightarrow{AB}$  und  $\overleftrightarrow{AC}$  liegt. Wir sagen,  $D$  **liege im Inneren** von  $\angle BAC$  oder der Strahl  $\overrightarrow{AD}$  **liege zwischen** den Strahlen  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC}$ , falls  $DB \mid_{\overleftrightarrow{AC}}$  und  $DC \mid_{\overleftrightarrow{AB}}$  gilt.



**Lemma 3.22 (I + A).** (a) Sei  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade, und seien  $A \in g$ ,  $B \notin g$  und  $P \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ . Dann gilt  $PB \mid_g$ .

(b) Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage und  $D \in \mathbf{P}$  im Inneren von  $\angle BAC$ . Dann schneidet der Strahl  $\overrightarrow{AD}$  die Strecke  $\overline{BC}$ , und der Schnittpunkt ist ungleich  $B, C$ .

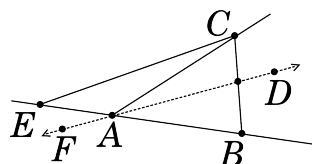


(c) Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  in allgemeiner Lage und  $D \in \mathbf{P}$  ein weiterer Punkt, der nicht in der Vereinigung der Geraden  $\overleftrightarrow{AB}$  und  $\overleftrightarrow{AC}$  liegt. Dann sind äquivalent:

- (i)  $D$  liegt im Inneren von  $\angle BAC$ .
- (ii)  $DB \mid_{\overleftrightarrow{AC}}$  und  $B \mid_{\overleftrightarrow{AD}} C$ .
- (iii)  $DC \mid_{\overleftrightarrow{AB}}$  und  $B \mid_{\overleftrightarrow{AD}} C$ .

*Beweis.* Zum Beweis von Behauptung (a) dürfen wir ohne Einschränkung  $P \neq B$  annehmen. Läge  $P$  auf  $g$ , so wäre  $P$  der Schnittpunkt von  $g$  und  $\overleftrightarrow{PB}$  und somit gleich  $A$ . Das hatten wir aber ausgeschlossen. Gälte  $P \mid_g B$ , so gäbe es einen Punkt auf  $g$  zwischen ihnen. Dieser wäre insbesondere der Schnittpunkt der Geraden  $g$  und  $\overleftrightarrow{PB}$  und somit gleich  $A$ . Es folgte  $P \star A \star B$  im Widerspruch zu  $P \in \overleftrightarrow{AB}$  und  $(A_3)$ . Es gilt also  $PB \mid_g$ .

Nun zeigen wir Behauptung (b). Nach  $(A_2)$  gibt es einen Punkt  $E \in \overleftrightarrow{AB}$  mit  $B \star A \star E$ . Die Punkte  $B, C, E$  sind offenbar in allgemeiner Lage, und wegen  $D \notin \overleftrightarrow{AB}$  schneidet die Gerade  $g := \overleftrightarrow{AD}$  die Strecke  $\overline{BE}$  genau im Punkt  $A$ . Nach dem Satz von Pasch 3.13 schneidet also  $g$  eine der Strecken  $\overline{BC}$  und  $\overline{EC}$ . Nach Wahl von  $E$  gilt  $E \mid_{\overleftrightarrow{AC}} B$ . Mit (a) folgt, dass ganz  $\overleftrightarrow{CE} \setminus \{C\}$  auf der nicht  $B$  enthaltenden Seite von  $\overleftrightarrow{AC}$  liegt. Andererseits liegen nach Voraussetzung  $D$  und  $B$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{AC}$ , also wieder nach (a) auch  $B$  und ganz  $\overleftrightarrow{AD} \setminus \{A\}$ . Es folgt  $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{CE} = \emptyset$ . Sei nun  $\overleftrightarrow{AF}$  der zu  $\overleftrightarrow{AD}$  entgegengesetzte Strahl. Nach Voraussetzung liegen  $D$  und  $C$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{AB}$ , also wieder nach (a) auch  $C$  und ganz  $\overleftrightarrow{AD} \setminus \{A\}$ . Es folgt, dass ganz  $\overleftrightarrow{AF} \setminus \{A\}$  auf der anderen Seite von  $\overleftrightarrow{AB}$  liegen muss. Aber  $\overleftrightarrow{EC} \setminus \{E\}$  liegt gänzlich auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{AB}$  wie  $C$ , also gilt auch  $\overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{EC} = \emptyset$  und insgesamt, dass  $g$  die Strecke  $\overline{BC}$  schneidet. Ganz ähnlich wie zuvor zeigt man  $\overleftrightarrow{AF} \cap \overline{BC} = \emptyset$  und somit Behauptung (b).



Für Behauptung (c) langt es aus Symmetriegründen, die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen.

- Es gelte (i). Für (ii) genügt es dann  $B \mid_{\overleftrightarrow{AD}} C$  zu zeigen. Aufgrund von (b) existiert der Schnittpunkt  $S$  von  $\overleftrightarrow{AD}$  und  $\overline{BC}$ . Es gilt dann aus  $B \star S \star C$  und somit  $B \mid_{\overleftrightarrow{AD}} C$ .
- Gelte umgekehrt (ii). Dann existiert ein Punkt  $S \in \overleftrightarrow{AD}$  mit  $B \star S \star C$ . Es gilt deshalb  $SC \mid_{\overleftrightarrow{AB}}$  und  $SB \mid_{\overleftrightarrow{AC}}$ . Nach Voraussetzung gilt  $DB \mid_{\overleftrightarrow{AC}}$ . Wir erhalten  $SD \mid_{\overleftrightarrow{AC}}$ , insbesondere gilt nicht  $S \star A \star D$ . Somit liegt  $D$  auf dem Strahl  $\overleftrightarrow{AS}$ . Aus (a) ergibt sich  $SD \mid_{\overleftrightarrow{AB}}$  und schließlich  $DC \mid_{\overleftrightarrow{AB}}$ .

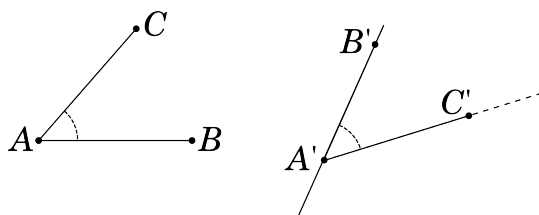
□

Wir führen nun den Begriff der *Kongruenz von Winkeln* als Relation  $\simeq$  auf der Menge  $\mathbf{W}$  aller Winkel in  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$  ein:

**Definition 3.23 (I + A + K).** Das 5-Tupel  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  erfüllt die **Kongruenzaxiome für Winkel**, wenn gilt:

(K<sub>4</sub>)  $\simeq$  ist auf  $\mathbf{W}$  eine Äquivalenzrelation,

(K<sub>5</sub>) Sind  $A, B, C \in \mathbf{P}$  in allgemeiner Lage und  $A' \neq B' \in \mathbf{P}$ , dann gibt es für jede Seite  $S$  von  $\overleftrightarrow{A'B'}$  genau einen Strahl  $\overrightarrow{A'C'}$  mit  $\overrightarrow{A'C'} \subseteq S \cup \{A'\}$  und  $\angle B'A'C' \simeq \angle BAC$ .



Man sagt, ein beliebiger Winkel lasse sich auf einen beliebigen Strahl **abtragen**.

(K<sub>6</sub>) Sind  $A, B, C \in \mathbf{P}$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  je drei Punkte in allgemeiner Lage mit

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C',$$

so gilt

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \angle ABC \simeq \angle A'B'C' \quad \text{und} \quad \angle ACB \simeq \angle A'C'B'.$$

In diesem Fall nennen wir das 5-Tupel  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  auch eine **Hilbertebene**. Wir werden, wenn wir im Folgenden eine Hilbertebene einführen und nichts anderes sagen, stets diese Notation annehmen. Für „Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  eine Hilbertebene.“ schreiben wir künftig auch kurz „**(H)**“.

**Beispiel 3.24.** Wir definieren nun in der affinen Standardebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  zusätzlich zu der bereits eingeführten Anordnung  $\star$  und dem bereits eingeführten Kongruenzbegriff  $\cong$  für Strecken einen Kongruenzbegriff  $\simeq$  für Winkel. Dafür halten wir zunächst fest, dass der Begriff des Winkels aus Definition 3.19 im Fall der affinen Standardebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  mit dem Winkelbegriff aus Definition 1.59 übereinstimmt, so dass wir auf die in (1.14) eingeführte Winkelgröße zurückgreifen können. Wir definieren jetzt, dass zwei Winkel in der affinen Standardebene genau dann kongruent sind, wenn sie die gleiche Winkelgröße haben. Genauer setzen wir für je zwei Winkel  $\angle ABC$  und  $\angle A'B'C'$

$$\angle ABC \simeq \angle A'B'C' \quad :\iff \quad \sphericalangle(A - B, C - B) = \sphericalangle(A' - B', C' - B'). \quad (3.3)$$

Wir werden später zeigen, dass die affine Standardebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  zusammen mit dieser Kongruenz von Winkeln den Kongruenzaxiomen für Winkel genügt. Zusammen mit Satz 2.6 und den Beispielen 3.3 und 3.15 folgt daraus, dass  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  eine Hilbertebene ist.

Wir haben nun einen Begriff dafür, wann zwei Winkel „gleich groß“ sind – wenn sie nämlich kongruent sind. Mit dem Begriff des „Dazwischenliegens“ von Strahlen mit demselben Scheitel können wir auch angeben, wann ein Winkel „größer“ bzw. „kleiner“ als ein anderer ist:

**Definition 3.25 (H).** Seien  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  je drei Punkte in  $\mathbf{P}$  in allgemeiner Lage. Gibt es einen Strahl  $\overrightarrow{A'P}$  zwischen  $\overrightarrow{A'B'}$  und  $\overrightarrow{A'C'}$  mit  $\angle BAC \simeq \angle PA'C'$ , so sagen wir,  $\angle BAC$  sei **kleiner** als  $\angle B'A'C'$ , bzw.  $\angle B'A'C'$  **größer** als  $\angle BAC$ , und schreiben  $\angle BAC < \angle B'A'C'$  bzw.  $\angle B'A'C' > \angle BAC$ .

In Übungsaufgabe 3.5 beweisen wir die folgende Entsprechung von Proposition 3.18.

**Proposition 3.26 (H).** (a) Sind  $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbf{W}$  mit  $\alpha \simeq \alpha'$  und  $\beta \simeq \beta'$ , so ist genau dann  $\alpha < \beta$ , wenn  $\alpha' < \beta'$  gilt.

(b) Sind  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{W}$ , so folgt aus  $\alpha < \beta$  und  $\beta < \gamma$ , dass auch  $\alpha < \gamma$  gilt.

(c) Für zwei Winkel  $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$  gilt genau eine der drei folgenden Aussagen

$$\alpha < \beta, \quad \alpha \simeq \beta, \quad \alpha > \beta.$$

**Definition 3.27 (H).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann heißt das Tripel

$$\triangle ABC := (A, B, C)$$

das **Dreieck** mit den **Eckpunkten**  $A, B, C$ . Die Strecken  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$  heißen die **Seiten** des Dreiecks  $\triangle ABC$  und die Winkel  $\angle ABC, \angle BCA, \angle CAB$  seine **Innenwinkel**.

Sind  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  weitere drei Punkte in allgemeiner Lage, so heißen die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  zueinander **kongruent**, in Zeichen  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ , falls die jeweils entsprechenden Seiten und Innenwinkel jeweils kongruent zueinander sind, falls also gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \\ \angle BAC \simeq \angle B'A'C', \quad \angle ABC \simeq \angle A'B'C', \quad \angle ACB \simeq \angle A'C'B'. \end{aligned}$$

Wir sagen, ein  $D \in \mathbf{P}$  liege im **Inneren** des Dreiecks  $\triangle ABC$ , wenn  $D$  im Inneren seiner drei Innenwinkel liegt.

**Bemerkung 3.28 (H).** (a) Die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle BAC$  sind nicht zwangsläufig kongruent, denn aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt sofort  $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ , d.h. das Dreieck  $\triangle ABC$  ist in diesem Fall gleichschenkelig (vgl. 3.53), was nicht für jedes Dreieck zutrifft. In der Literatur findet sich daher oft die Definition des Dreiecks  $\triangle ABC$  als die nicht geordnete Menge  $\{A, B, C\}$ . Eine solche Festlegung zieht jedoch einen merkbar aufwändigeren Kongruenzbegriff nach sich, während unsere Notation lediglich eine etwas größere Wachsamkeit erfordert.

(b) Mit Definition 3.21 sehen wir sofort, dass ein Punkt  $D \in \mathbf{P}$  im Inneren von  $\triangle ABC$  liegt, wenn er im Inneren von zweien der drei Winkel  $\angle ABC, \angle BCA, \angle CAB$  liegt.

Wir können nun Axiom  $(K_6)$  umformulieren zum **SWS-Kriterium**

( $K'_6$ ) Sind  $A, B, C \in \mathbf{P}$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  je drei Punkte in allgemeiner Lage mit

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C',$$

so sind die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  kongruent.

Wir wollen nun ein Kriterium für die Gültigkeit des SWS-Kriteriums herleiten, und führen dafür zunächst ein paar neue Begriffe ein:

**Definition 3.29.** Fordert man für das Tupel  $\Pi := (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  nicht die Gültigkeit von Axiomen, so nennt man es eine **ebene Geometrie**.<sup>1</sup>

**Definition 3.30.** Ein **Isomorphismus** zwischen zwei ebenen Geometrien

$$\Pi := (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq) \quad \text{und} \quad \tilde{\Pi} := (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\star}, \tilde{\cong}, \tilde{\simeq})$$

ist eine bijektive Abbildung  $\varphi: \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$  mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für alle Teilmengen  $g \subseteq \mathbf{P}$  gilt

$$g \in \mathbf{G} \iff \varphi(g) \in \tilde{\mathbf{G}}.$$

(ii) Für je drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  gilt

$$A \star B \star C \iff \varphi(A) \tilde{\star} \varphi(B) \tilde{\star} \varphi(C).$$

(iii) Für je vier Punkte  $A, B, C, D \in \mathbf{P}$  mit  $A \neq B$  und  $C \neq D$  gilt

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \iff \overline{\varphi(A)\varphi(B)} \tilde{\cong} \overline{\varphi(C)\varphi(D)}.$$

(iv) Für je sechs Punkte  $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{P}$ , so dass  $A, B, C$  und  $D, E, F$  jeweils in allgemeiner Lage sind, gilt

$$\angle ABC \simeq \angle DEF \iff \angle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C) \tilde{\simeq} \angle \varphi(D)\varphi(E)\varphi(F).$$

Ist hierbei  $\tilde{\Pi} = \Pi$ , so heißt  $\varphi$  ein **Automorphismus** von  $\Pi$ . Die Menge aller Automorphismen von  $\Pi$  bezeichnen wir mit  $\text{Aut}(\Pi)$ . Erfüllt ein Automorphismus  $\varphi$  von  $\Pi$  statt (iii) und (iv) die folgenden stärkeren Bedingungen (iii)' und (iv)', so nennen wir  $\varphi$  eine **Bewegung** in  $\Pi$ .

(iii)' Für je zwei Punkte  $A, B \in \mathbf{P}$  mit  $A \neq B$  gilt

$$\overline{AB} \cong \overline{\varphi(A)\varphi(B)}.$$

<sup>1</sup>Hierbei ist zu beachten, dass wir bei der Definition der bei der Definition der Relationen  $\cong$  und  $\simeq$  benötigten Begriffe „Strecke“ und „Winkel“ die Inzidenz- und Anordnungsaxiome vorausgesetzt haben. Rein formal ist dies jedoch nicht notwendig, so dass wir für den Begriff der „ebenen Geometrie“ tatsächlich auf sämtliche Axiome verzichten können. Sinnvolle Sätze lassen sich in einem derart allgemeinen Setting natürlich nicht zeigen, weshalb wir für alle auftretenden Anwendungen die Inzidenz- und Anordnungsaxiome voraussetzen werden.

(iv)' Für je drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  in allgemeiner Lage gilt

$$\angle ABC \simeq \angle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C).$$

Die Menge aller Bewegungen in  $\Pi$  bezeichnen wir mit  $\text{Bew}(\Pi)$ .

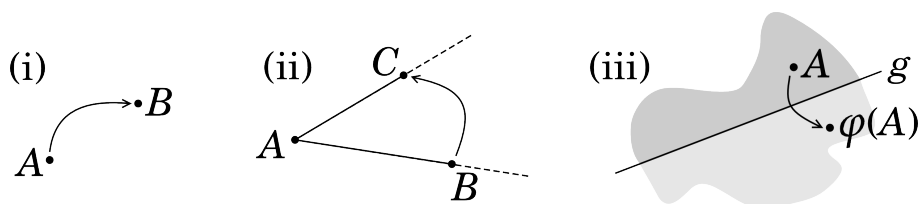
Vereinfachend können wir sagen, dass Bewegungen gerade diejenigen bijektiven Abbildungen auf  $\mathbf{P}$  sind, die die bislang von uns eingeführte Geometrie im Sinne der Kongruenz unverändert lassen. Fordern wir, dass  $\cong$  und  $\simeq$  transitiv sind, so wird  $\text{Bew}(\Pi)$  zu einer Gruppe.

**Beispiel 3.31.** Die Menge  $\text{Bew}((\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq))$  besteht wegen 1.56 und 1.54 genau aus den in Bemerkung 1.64 betrachteten **Bewegungen der analytischen Geometrie**

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ P & \mapsto M \cdot P + A \end{cases} \quad \text{mit } M \in \text{O}_2(\mathbb{R}) \text{ und } A \in \mathbb{R}^2.$$

**Definition 3.32.** Sei  $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  eine ebene Geometrie, die die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome erfüllt. Wir sagen,  $\Pi$  habe **genügend viele Bewegungen**, wenn gilt:

- (i) Für je zwei Punkte  $A, B \in \mathbf{P}$  gibt es ein  $\varphi \in \text{Bew}(\Pi)$  mit  $\varphi(A) = B$ .
- (ii) Für beliebige drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  mit  $A \neq B$  und  $A \neq C$  gibt es ein  $\varphi \in \text{Bew}(\Pi)$  mit  $\varphi(A) = A$  und  $\varphi(\overline{AB}) = \overline{AC}$ .
- (iii) Für jede Gerade  $g \in \mathbf{G}$  gibt es ein  $\varphi \in \text{Bew}(\Pi)$ , so dass zum einen  $\varphi(A) = A$  für alle  $A \in g$  gilt und zum anderen  $A \notin g$  für alle  $A \in \mathbf{P} \setminus g$ .



**Satz 3.33.** Sei  $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  eine ebene Geometrie, die die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome sowie die Axiome  $(K_1), (K_2), (K_4), (K_5)$  erfüllt. Hat dann  $\Pi$  genügend viele Bewegungen, so gilt in  $\Pi$  das SWS-Kriterium  $(K'_6)$ .

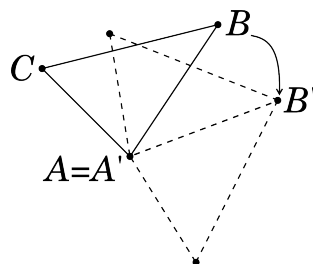
*Beweis.* Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  je drei Punkte in allgemeiner Lage, und gelte

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C'. \quad (3.4)$$

Nach Definition 3.32 (i) gibt es ein  $\varphi_1 \in \text{Bew}(\Pi)$  mit  $\varphi_1(A) = A'$ . Da andererseits  $\varphi_1$  bijektiv ist und Anordnungen und Kongruenzen von Strecken und Winkeln erhält, können wir ohne Einschränkung  $A = A'$  annehmen.



Nach Definition 3.32 (ii) gibt es ein  $\varphi_2 \in \text{Bew}(\Pi)$  mit  $\varphi_2(A) = A$  und  $\varphi_2(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB'}$ . Mit demselben Argument wie oben können wir daher ohne Einschränkung annehmen, dass neben  $A = A'$  auch  $B = B'$  gilt.



Schließlich gibt es nach Definition 3.32 (iii) ein  $\varphi_3 \in \text{Bew}(\Pi)$ , das die Gerade  $\overleftrightarrow{AB}$  punktweise festlässt, und für das  $C \stackrel{\overleftrightarrow{AB}}{\sim} \varphi_3(C)$  gilt. Wieder ohne Einschränkung können wir annehmen, dass nicht nur  $A = A'$  und  $B = B'$  gelten, sondern auch  $CC' \stackrel{\overleftrightarrow{AB}}{\sim} A'B'$ . Unsere Voraussetzungen (3.4) lauten nun

- (i)  $\angle BAC \simeq \angle BAC'$ ,
- (ii)  $\overline{AC} \cong \overline{AC'}$ ,
- (iii)  $CC' \stackrel{\overleftrightarrow{AB}}{\sim}$ .

Mit  $(K_5)$  folgt aus (i) und (iii) sofort  $\overline{AC} = \overline{AC'}$ , mit  $(K_2)$  daraus und aus (ii) die Gleichheit  $C = C'$ . Insgesamt haben wir gezeigt, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen eine Bewegung in  $\text{Bew}(\Pi)$  gibt, die das Dreieck  $\triangle ABC$  auf das Dreieck  $\triangle A'B'C'$  abbildet. Letztere sind also kongruent, was zu zeigen war.  $\square$

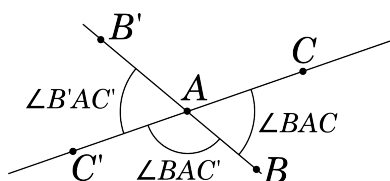


**Beispiel 3.34.** Im *verlinkten Zusatzmaterial* zeigen wir, dass die affine Standardebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  zusammen mit dieser Kongruenz von Winkeln den Kongruenzaxiomen  $(K_4)$ ,  $(K_5)$  für Winkel genügt und genügend viele Bewegungen hat. Zusammen mit Satz 3.33, 2.6 und den Beispielen 3.3 und 3.15 folgt daraus, dass  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  eine Hilbertebene ist.

### 3.4 Ergänzungswinkel, Gegenwinkel und rechte Winkel

In diesem Abschnitt wollen wir Winkel in Hilbertebenen noch etwas genauer studieren. Wir werden Ergänzungswinkel, Gegenwinkel und rechte Winkel definieren und in Satz 3.40 zeigen, dass je zwei rechte Winkel zueinander kongruent sind:

**Definition 3.35 (H).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Seien weiter  $B', C' \in \mathbf{P}$  mit  $B' \star A \star B$  und  $C' \star A \star C$ . Dann heißen  $\angle BAC'$  und  $\angle B'AC$  **Ergänzungswinkel** zu  $\angle BAC$ . Der Winkel  $\angle B'AC'$  heißt der **Gegenwinkel** oder auch der **Scheitelwinkel** von  $\angle BAC$ .



**Proposition 3.36 (H).** Für  $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$  und Ergänzungswinkel  $\alpha'$  bzw.  $\beta'$  zu  $\alpha$  bzw. zu  $\beta$  gilt

$$\alpha \simeq \beta \implies \alpha' \simeq \beta';$$

Ergänzungswinkel kongruenter Winkel sind also kongruent. Insbesondere sind die Ergänzungswinkel eines gegebenen Winkels zueinander kongruent.

*Beweis.* Seien  $\triangle ABC$  und  $\triangle DEF$  Dreiecke mit  $\alpha = \angle BAC$  und  $\beta = \angle EDF$  und seien weiter  $B', C', E', F' \in \mathbf{P}$  mit

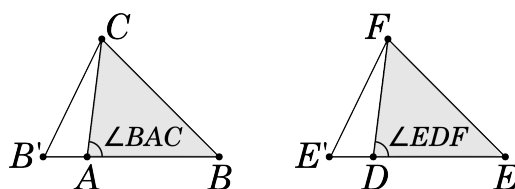
$$B' \star A \star B, \quad C' \star A \star C, \quad E' \star D \star E, \quad F' \star D \star F.$$

Die Menge der Ergänzungswinkel zu  $\alpha$  ist dann durch  $\{\angle BAC', \angle B'AC\}$  gegeben, die Menge der Ergänzungswinkel zu  $\beta$  durch  $\{\angle EDF', \angle E'DF\}$ . Wir werden nun zeigen, dass aus  $\alpha \simeq \beta$  die Kongruenz  $\angle B'AC \simeq \angle E'DF$  folgt; die anderen Fälle ergeben sich nach Umbenennung genauso.

Indem wir gegebenenfalls die Punkte  $E, E', F$  durch andere Punkte auf dem jeweils gleichen von  $D$  ausgehenden Strahl ersetzen, können wir vermöge  $(K_2)$  ohne Einschränkung

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \quad \overline{AC} \cong \overline{DF} \quad \text{und} \quad \overline{AB'} \cong \overline{DE'}$$

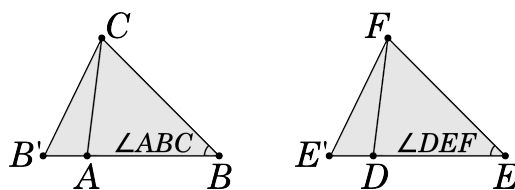
annehmen.



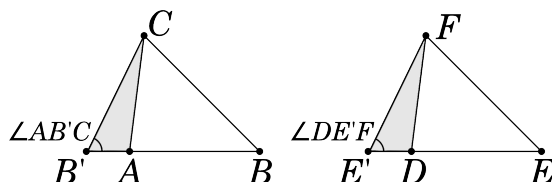
Mit dem SWS-Kriterium  $(K'_6)$  folgt aus  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$  und  $\angle BAC \simeq \angle EDF$  die Kongruenz der Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle DEF$  und insbesondere die Kongruenzen  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  und  $\angle ABC \simeq \angle DEF$ . Weiter gelten

$$B' \star A \star B, \quad E' \star D \star E, \quad \overline{AB'} \cong \overline{DE'} \quad \text{und} \quad \overline{AB} \cong \overline{DE},$$

so dass nach  $(K_3)$  auch  $\overline{BB'} \cong \overline{EE'}$  gilt.



Wir können also wieder das SWS-Kriterium anwenden und erhalten die Kongruenz der Dreiecke  $\triangle BB'C$  und  $\triangle EE'F$ . Hieraus folgen sofort die Kongruenzen  $\overline{B'C} \cong \overline{E'F}$  und  $\angle AB'C \simeq \angle DE'F$ . Zu Beginn des Beweises hatten wir zudem ohne Einschränkung  $\overline{AB'} \cong \overline{DE'}$  gesetzt.



Ein letztes Mal können wir das SWS-Kriterium ( $K'_6$ ) anwenden und erhalten die Kongruenz der Dreiecke  $\triangle AB'C$  und  $\triangle DE'F$ , was insbesondere die Proposition beweist.  $\square$

**Korollar 3.37 (H).** Ein beliebiger Winkel  $\alpha \in \mathbf{W}$  ist zu seinem Gegenwinkel  $\alpha'$  kongruent.

*Beweis.* Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit  $\alpha = \angle BAC$ , und seien weiter  $B', C' \in \mathbf{P}$  Punkte mit  $B' \star A \star B$  und  $C' \star A \star C$ , so dass  $\alpha' = \angle B'AC'$  gilt. Dann sind  $\angle BAC$  und  $\angle B'AC'$  beide Ergänzungswinkel zu  $\angle B'AC$ , also kongruent nach Proposition 3.36.  $\square$

**Definition 3.38 (H).** Ein Winkel  $\alpha \in \mathbf{W}$  heißt ein **rechter Winkel**, wenn er zu einem und somit allen seiner Ergänzungswinkel kongruent ist.

**Proposition 3.39 (H).** Seien  $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$  zwei Winkel. Dann gilt: Ist  $\alpha$  ein rechter Winkel, und sind  $\alpha$  und  $\beta$  kongruent, so ist auch  $\beta$  rechter Winkel. Insbesondere ist jeder Ergänzungswinkel eines rechten Winkels wieder ein rechter Winkel.

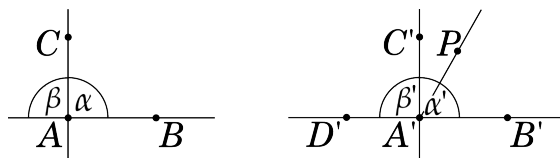
*Beweis.* Sei  $\alpha'$  bzw.  $\beta'$  ein Ergänzungswinkel zu  $\alpha$  bzw.  $\beta$ . Aus  $\alpha \simeq \beta$  folgt mit Proposition 3.36, dass auch  $\alpha'$  und  $\beta'$  zueinander kongruent sind. Da  $\alpha$  ein rechter Winkel ist, folgt

$$\beta \simeq \alpha \simeq \alpha' \simeq \beta'$$

und somit die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.40 (H).** Je zwei rechte Winkel sind zueinander kongruent.

*Beweis.* Sind  $\alpha = \angle BAC$  und  $\alpha' = \angle B'A'C'$  zwei nichtkongruente rechte Winkel, so gilt  $\alpha < \alpha'$  oder  $\alpha' < \alpha$ ; ohne Einschränkung ersteres. Nach Proposition 3.26 gibt es dann einen Punkt  $P$  im Inneren von  $\angle B'A'C'$  mit  $\angle PA'B' \simeq \alpha$ .



Sei nun  $\beta' = \angle C'A'D'$  ein Ergänzungswinkel zu  $\alpha'$ . Da  $P$  im Inneren von  $\angle C'A'B'$  liegt, gelten  $PC' \mid_{\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'D'}}$  und  $PB' \mid_{\overrightarrow{A'C'}}$ . Es folgt  $P \mid_{\overrightarrow{A'C'}} D'$ . Nach Lemma 3.22 ist dann  $C'$  im Inneren von  $\angle PA'D'$ . Daraus folgt sofort  $\beta' < \angle PA'D'$ . Weiter ist  $\angle PA'D'$  Ergänzungswinkel zu  $\angle PA'B' \simeq \alpha$ , so dass nach Proposition 3.36 jeder Ergänzungswinkel  $\beta$  von  $\alpha$  kongruent zu  $\angle PA'D'$  ist. Es folgt  $\beta' < \beta$ . Andererseits folgt aus der Rechtwinkligkeit von  $\alpha$  und  $\alpha'$

$$\beta \simeq \alpha < \alpha' \simeq \beta',$$

also  $\beta < \beta'$ , was nicht sein kann. □

**Korollar 3.41 (H).** Die rechten Winkel bilden eine Kongruenzklasse in  $\mathbf{W}$ .

### 3.5 Orthogonalität und Parallelität

Unsere naive Vorstellung sagt uns, dass wir mit dem Begriff des rechten Winkels ein Kriterium für Parallelität angeben können sollten. Dies soll in diesem Abschnitt untersucht werden:

**Definition 3.42 (H).** Zwei Geraden  $g, h \in \mathbf{G}$  heißen *orthogonal*, in Zeichen  $g \perp h$ , wenn sie sich in genau einem Punkt schneiden (also  $g \nparallel h$ ) und einer der gebildeten Winkel ein rechter Winkel ist.

Nach den Überlegungen des letzten Abschnitts sind zwei nicht-parallele Geraden genau dann orthogonal, wenn alle gebildeten Winkel rechte Winkel sind.

**Satz 3.43 (H).** Für beliebige  $g \in \mathbf{G}$  und  $A \in \mathbf{P}$  gibt es eine Gerade durch  $A$ , die orthogonal auf  $g$  ist.

*Beweis. Fall 1:*  $A \notin g$ . Nach  $(I_2)$  gibt es zwei Punkte  $B \neq C \in g$ . Weiter gibt es nach  $(K_5)$  auf der Seite von  $g$ , auf der  $A$  nicht liegt, genau einen Strahl  $\overrightarrow{BP}$  mit  $\angle PBC \simeq \angle ABC$ . Nach  $(K_2)$  gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt  $Q$  auf  $\overrightarrow{BP}$  mit  $\overline{BQ} \cong \overline{BA}$ . Da  $A$  und  $Q$  nach Konstruktion auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen, gibt es einen Punkt  $R \in g$  mit  $A \star R \star Q$ . Ist  $R = C$ , so ersetzen wir  $C$  durch einen Punkt auf  $g$ , so dass  $B, C$  auf verschiedenen Seiten von  $R$  liegen.

Wir zeigen nun, dass  $\angle ARC$  kongruent zu seinem Ergänzungswinkel  $\angle QRC$  ist. Nach Definition ist er dann ein rechter Winkel und mit  $\overrightarrow{AQ}$  ist eine auf  $g$  orthogonale Gerade gefunden. Im Fall  $R = B$  gilt einfach  $\angle QRC = \angle PBC \simeq \angle ABC = \angle ARC$ . Sind andererseits  $R$  und  $B$  verschieden, so erhalten wir mit dem SWS-Kriterium  $(K'_6)$  die Kongruenz  $\triangle ABR \cong \triangle QBR$ ,

denn: Nach Konstruktion gelten  $\overline{BA} \cong \overline{BQ}$  und  $\overline{BR} \cong \overline{BR}$ . Es bleibt  $\angle ABR \simeq \angle QBR$  zu zeigen. Im Fall  $B \star R \star C$  folgt dies direkt aus  $\angle ABR = \angle ABC \simeq \angle PBC = \angle QBR$ . Der Fall  $B \star C \star R$  geht natürlich analog. Im Fall  $R \star B \star C$  gilt zu beachten, dass  $\angle ABC$  und  $\angle ABR$  bzw.  $\angle QBC$  und  $\angle QBR$  Ergänzungswinkel sind. Aus  $\angle ABC \simeq \angle QBC$  folgt somit nach Proposition 3.36, dass auch  $\angle ABR$  und  $\angle QBR$  kongruent sind. #

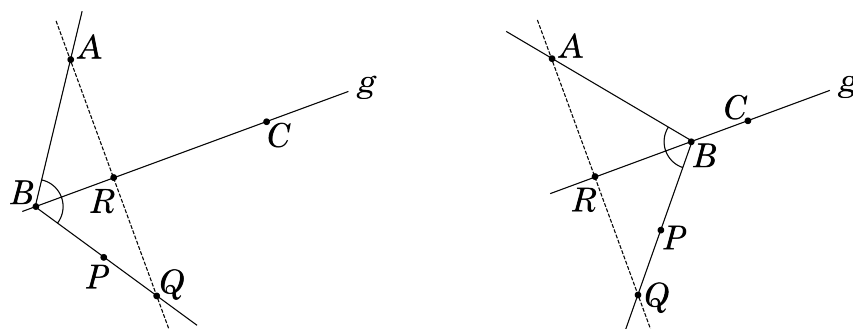
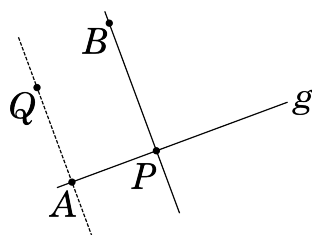


Abbildung 3.3: Die beiden interessanten Fälle  $B \star R \star C$  und  $R \star B \star C$ .

Hieraus folgt direkt  $\angle ARB \simeq \angle QRB$  und mit Korollar 3.37 auch  $\angle ARC \simeq \angle QRC$ .

**Fall 2:**  $A \in g$ . Nach  $(I_3)$  gibt es ein  $B \in \mathbf{P} \setminus g$ , und nach Fall 1 dann auch eine Gerade  $h$  durch  $B$ , die orthogonal auf  $g$  steht. Sei  $P$  der Geradenschnittpunkt  $g \wedge h$ .



Falls bereits  $P = A$  gilt, sind wir fertig. Ansonsten ist nach Konstruktion  $\angle BPA$  ein rechter Winkel. Andererseits gibt es nach  $(K_5)$  auf derselben Seite von  $g$  wie  $B$  einen Strahl  $\overrightarrow{AQ}$  mit  $\angle BPA \simeq \angle QAP$ . Da die rechten Winkel eine Kongruenzklasse bilden, ist also  $\angle QAP$  ein rechter Winkel und  $\overrightarrow{AQ}$  die gesuchte orthogonale Gerade.  $\square$

**Definition 3.44 (H).** Eine Gerade  $t \in \mathbf{G}$  heißt eine **Transversale** zu gegebenen Geraden  $g, h \in \mathbf{G}$ , falls sie  $g$  und  $h$  jeweils genau einmal schneidet und diese Schnittpunkte voneinander verschieden sind.

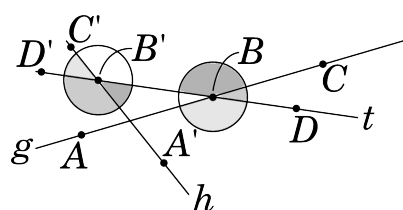
Setzen wir nun  $B := g \wedge t$  und  $B' := h \wedge t$ , und wählen wir Punkte  $A, C \in g$  und  $A', C' \in h$  mit  $A \star B \star C$  und  $A' \star B' \star C'$ , so dass  $A$  und  $A'$  auf derselben Seite von  $t$  liegen, und Punkte  $D, D' \in t$  mit  $D \star B \star B' \star D'$ . Dann heißen

$$(\angle ABB', \angle C'B'B), (\angle ABD, \angle C'B'D'), (\angle CBD, \angle A'B'D') \text{ und } (\angle CBB', \angle A'B'B)$$

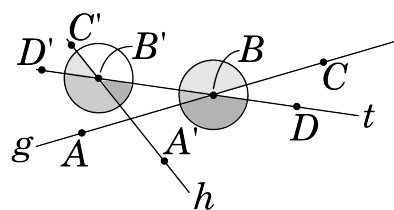
Paare von **Wechselwinkeln** bezüglich der Geraden  $g, h$  und der Transversalen  $t$  und

$$(\angle CBD, \angle C'B'B), (\angle CBB', \angle C'B'D'), (\angle ABB', \angle A'B'D') \text{ und } (\angle ABD, \angle A'B'B)$$

Paare von **Stufenwinkeln** bezüglich der Geraden  $g, h$  und der Transversalen  $t$ .



Wechselwinkel



Stufenwinkel

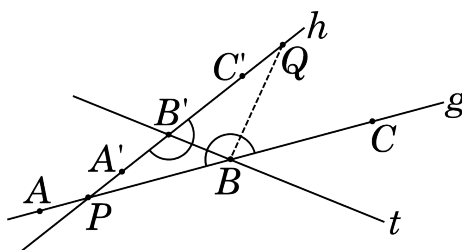
Statt „ $(\alpha, \beta)$  ist ein Paar von Wechselwinkeln bzw. Stufenwinkeln“ werden wir künftig auch einfacher „ $\alpha$  und  $\beta$  sind Wechselwinkel bzw. Stufenwinkel“ schreiben.

**Bemerkung 3.45 (H).** Sind  $\alpha, \beta$  Wechselwinkel und ist  $\beta'$  der Gegenwinkel zu  $\beta$ , dann sind  $\alpha, \beta'$  Stufenwinkel. Sind  $\alpha, \beta$  Stufenwinkel und ist  $\beta'$  der Gegenwinkel zu  $\beta$ , dann sind  $\alpha, \beta'$  Wechselwinkel.

**Satz 3.46 (H).** Es gelten die beiden äquivalenten Aussagen.

- (i) **Schwacher Wechselwinkelsatz:** Haben zwei von einer Transversalen geschnittene Geraden ein Paar kongruenter Wechselwinkel, so sind sie parallel.
- (ii) **Schwacher Stufenwinkelsatz:** Haben zwei von einer Transversalen geschnittene Geraden ein Paar kongruenter Stufenwinkel, so sind sie parallel.

*Beweis.* Nach Bemerkung 3.45 sind die beiden Aussagen zueinander äquivalent. Wir zeigen den schwachen Wechselwinkelsatz und benutzen dabei die Notation aus Definition 3.44. Nach Annahme und Proposition 3.36 gelten dann  $\angle A'B'B \simeq \angle CBB'$  und  $\angle C'B'B \simeq \angle ABB'$ .



Wir nehmen nun an,  $g$  und  $h$  wären nicht parallel und schnitten sich also in genau einem Punkt  $P \in \mathbf{P}$ . Ohne Einschränkung läge dann  $P$  auf derselben Seite von  $t$  wie  $A$  und  $A'$ ; sonst ersetze man  $\angle A'B'B$  und  $\angle CBB'$  durch ihre Ergänzungswinkel.

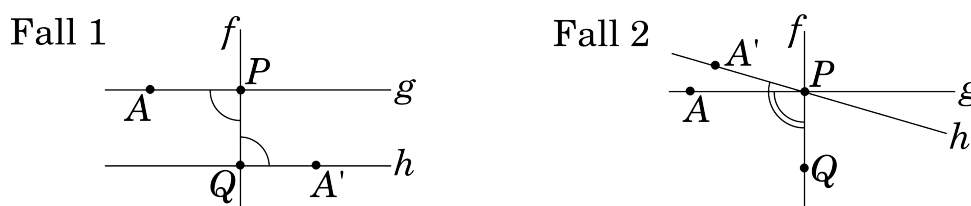
Nach  $(K_2)$  gäbe es auf dem Strahl  $\overrightarrow{B'C'}$  einen eindeutigen Punkt  $Q$  mit  $\overline{B'Q} \cong \overline{BP}$ . Nach dem SWS-Kriterium  $(K_6')$  gälte dann  $\triangle B'BP \cong \triangle BB'Q$  und insbesondere  $\angle CBB' \simeq \angle A'B'B \simeq \angle QBB'$ .

Nach Konstruktion gälte  $QC|_t$ . Mit  $(K_5)$  folgte  $Q \in \overrightarrow{BC} \subseteq g$ , was ein Widerspruch dazu ist, dass  $P$  der einzige Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  ist. Die beiden Geraden sind also parallel.  $\square$

**Korollar 3.47 (H).** Seien  $f, g, h \in \mathbf{G}$  mit  $g \perp f$  und  $h \perp f$ . Dann gilt  $g \parallel h$ .

*Beweis. Fall 1:  $f$  ist transversal zu  $g$  und  $h$ .* Sei  $P := f \wedge g$  und  $Q := f \wedge h$ . Seien außerdem  $A \in g$  und  $A' \in h$  auf verschiedenen Seiten von  $f$ . Dann sind die Winkel  $\angle APQ$  und  $\angle PQA'$  Wechselwinkel. Wegen  $g \perp f$  und  $h \perp f$  sind sie aber auch rechte Winkel und somit nach Satz 3.40 zueinander kongruent. Die Behauptung folgt mit dem schwachen Wechselwinkelsatz 3.46.

**Fall 2:  $f, g, h$  haben einen gemeinsamen Schnittpunkt  $P$ .** Seien  $A \in g$  und  $A' \in h$  auf derselben Seite von  $f$  und  $Q \neq P$  ein weiterer Punkt auf  $f$ . Dann sind die Winkel  $\angle APQ$  und  $\angle A'PQ$  beide rechte Winkel und somit nach Satz 3.40 kongruent. Nach  $(K_5)$  liegt also  $A'$  auf  $\overrightarrow{PA}$ , so dass  $h = \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PA} = g$  und insbesondere  $g \parallel h$  folgt.  $\square$



**Korollar 3.48 (H).** Seien  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade und  $A \in \mathbf{P}$  ein Punkt. Dann gibt es genau eine Gerade  $\ell_g A$  durch  $A$ , die orthogonal zu  $g$  ist. Diese heißt das **Lot** von  $A$  auf  $g$  und ihr Schnittpunkt  $\ell_g A := \ell_g A \wedge g$  mit  $g$  heißt der **Lotfußpunkt** von  $A$  auf  $g$ .

*Beweis.* Die Existenz des Lots haben wir bereits in Satz 3.43 gezeigt. Zum Nachweis der Eindeutigkeit betrachten wir zwei Geraden  $\ell_g A, \ell'_g A \in \mathbf{G}$ , die beide durch  $A$  gehen und beide orthogonal auf  $g$  stehen. Mit Korollar 3.47 folgt  $\ell_g A \parallel \ell'_g A$ , was wegen  $A \in \ell_g A \cap \ell'_g A$  sofort  $\ell_g A = \ell'_g A$  impliziert.  $\square$

**Korollar 3.49 (H).** Seien  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade und  $A \in \mathbf{P}$  ein Punkt. Dann gibt es eine (nicht notwendigerweise eindeutige) Gerade  $h \in \mathbf{G}$  durch  $A$  mit  $g \parallel h$ .

*Beweis.* Es gilt  $\ell_g A \perp g$  und  $\ell_{(\ell_g A)} A \perp \ell_g A$  und somit  $\ell_{(\ell_g A)} A \parallel g$  nach Korollar 3.47.  $\square$

Man kann sich nun fragen, ob die Umkehrung des schwachen Wechselwinkelsatzes auch gilt, dass also Wechselwinkel an parallelen Geraden kongruent sein müssen. Wie wir nun zeigen werden, ist dies genau dann richtig, wenn die betrachtete Hilbertebene affin ist:

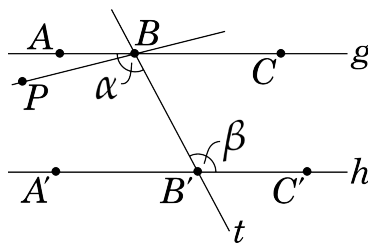
**Satz 3.50 (H).** Folgende Aussagen sind äquivalent.

- (i) Es gilt das schwache Parallelenaxiom  $(p)$ .
- (ii) Es gilt das starke Parallelenaxiom  $(P)$ .
- (iii) Es gilt der **starke Wechselwinkelsatz**: Je zwei parallele Geraden haben bezüglich einer beliebigen Transversalen vier Paare kongruenter Wechselwinkel.
- (iv) Es gilt der **starke Stufenwinkelsatz**: Je zwei parallele Geraden haben bezüglich einer beliebigen Transversalen vier Paare kongruenter Stufenwinkel.

*Beweis.* Nach Bemerkung 3.45 sind offenbar der starke Wechselwinkelsatz und der starke Stufenwinkelsatz äquivalent, so dass zum Beweis des Satzes genügt, die Äquivalenz der Aussagen (i), (ii) und (iii) zu zeigen.

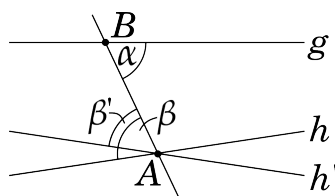
Wir nehmen zunächst an, es gelte das schwache Parallelenaxiom ( $p$ ), es gebe also zu je einem Punkt  $A \in \mathbf{P}$  und einer Gerade  $g \in \mathbf{G}$  nie mehr als eine Parallele zu  $g$  durch  $A$ . Da es aber nach Korollar 3.49 stets mindestens eine solche Parallele gibt, folgt das starke Parallelenaxiom ( $P$ ).

Wir zeigen nun, dass aus dem starken Parallelenaxiom ( $P$ ) der starke Wechselwinkelsatz folgt. Sei dazu  $t \in \mathbf{G}$  eine Transversale zu zwei gegebenen parallelen Geraden  $g \parallel h \in \mathbf{G}$ . Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung  $g \neq h$  annehmen. Wir nennen die Schnittpunkte  $B := t \wedge g$  und  $B' := t \wedge h$  und wählen Punkte  $A, C \in g$  mit  $A \star B \star C$  und Punkte  $A', C' \in h$  mit  $A' \star B' \star C'$  und  $AA' \perp t$ . Der starke Wechselwinkelsatz ist gezeigt, wenn wir die Kongruenz  $\alpha := \angle ABB' \simeq \angle C'B'B =: \beta$  zeigen können, da daraus mit Proposition 3.36 und Korollar 3.37 die übrigen Kongruenzen folgen.



Nehmen wir dafür im Gegenteil an, es gälte  $\alpha \neq \beta$ , ohne Einschränkung  $\alpha > \beta$ . Dann gäbe es einen Punkt  $P$  im Inneren von  $\alpha$  mit  $\angle PBB' \simeq \beta$  und nach dem schwachen Wechselwinkelsatz 3.46 wären die Geraden  $\overleftrightarrow{BP}$  und  $h$  parallel. Andererseits ist nach Voraussetzung auch  $g$  eine Parallele zu  $h$  durch  $B$ . Nach ( $P$ ) gälte daher  $\overleftrightarrow{BP} = g$ , was nicht sein kann, da  $P$  ein Punkt im Inneren von  $\alpha$  ist.

Es verbleibt das schwache Parallelenaxiom ( $p$ ) aus dem starken Wechselwinkelsatz herzuleiten. Seien dafür  $g \in \mathbf{G}$  und  $A \in \mathbf{P}$  gegeben. Im Fall  $A \in g$  ist  $g$  selbst offenbar die einzige Parallele zu  $g$  durch  $A$ . Im Folgenden können wir daher ohne Einschränkung  $A \notin g$  annehmen. Seien  $h, h' \in \mathbf{G}$  zwei zu  $g$  parallele Geraden durch  $A$  und sei  $B \in g$  beliebig.



Die Gerade  $\overleftrightarrow{AB}$  ist eine Transversale zu  $g$  und  $h$ . Nach dem starken Wechselwinkelsatz haben also  $g, h$  bzgl.  $\overleftrightarrow{AB}$  ein Paar kongruenter Wechselwinkel  $\alpha \simeq \beta$ . Andererseits ist  $\overleftrightarrow{AB}$  auch eine Transversale zu  $g$  und  $h'$ . Wieder nach dem starken Wechselwinkelsatz ist der Wechselwinkel  $\beta'$  zu  $\alpha$  zwischen  $\overleftrightarrow{AB}$  und  $h'$  zu  $\alpha$  kongruent. Es folgt  $\beta \simeq \beta'$ , und mit ( $K_5$ ) die Gleichheit der Geraden  $h$  und  $h'$ .  $\square$



**Bemerkung 3.51.** Wir nehmen Satz 3.50 zum Anlass, in Hilbertebenen nicht weiter zwischen schwachem und starkem Parallelenaxiom zu unterscheiden und nur noch vom Parallelenaxiom (P) zu reden. Für „Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  eine Hilbertebene, in der das Parallelenaxiom (P) gilt.“ schreiben wir künftig auch kurz „ $(\mathbf{H} + \mathbf{P})$ “.

### 3.6 Der Kongruenzsatz für Dreiecke

Der Kongruenzsatz fasst mehrere Kongruenzkriterien für Dreiecke zusammen. Wir werden ihn benutzen, um in Abschnitt 3.7 zu einer gegebenen Strecke einen Mittelpunkt zu konstruieren. Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Propositionen:

**Proposition 3.52 (H).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage und  $A' \neq B' \in \mathbf{P}$  zwei verschiedene Punkte mit  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ . Dann gibt es auf jeder Seite von  $\overleftrightarrow{A'B'}$  genau einen Punkt  $C'$  mit  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

*Beweis.* Nach  $(K_5)$  gibt es auf jeder fest ausgewählten Seite von  $\overleftrightarrow{A'B'}$  genau einen Strahl  $\overrightarrow{A'P}$  mit  $\angle CAB \simeq \angle PA'B'$ . Weiter gibt es nach  $(K_2)$  genau einen Punkt  $C'$  auf diesem Strahl mit  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ . Nach dem SWS-Kriterium  $(K'_6)$  sind die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  kongruent.  $\square$

**Definition 3.53 (H).** Genau dann heißt ein Dreieck **gleichschenkelig**, wenn zwei seiner Seiten zueinander kongruent sind. Diese beiden Seiten heißen dann die **Schenkel** des gleichschenkligen Dreiecks, die verbleibende Strecke die **Basis**.

**Proposition 3.54 (H).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann gilt die Äquivalenz

$$\overline{AB} \cong \overline{AC} \iff \angle ABC \simeq \angle ACB.$$

Ein Dreieck ist also genau dann gleichschenkelig, wenn zwei seiner Winkel zueinander kongruent sind. Diese Winkel heißen dann die **Basiswinkel** des gleichschenkligen Dreiecks.

*Beweis.* Dass aus der Kongruenz der Strecken die Kongruenz der Winkel folgt, sehen wir sofort durch Anwenden des SWS-Kriteriums  $(K'_6)$  auf die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle ACB$ .

Gelte nun umgekehrt  $\angle ABC \simeq \angle ACB$ . Angenommen, es gälte  $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$ , ohne Einschränkung  $\overline{AB} > \overline{AC}$ . Dann gäbe es ein  $D \in \overline{AB}$  mit  $\overline{DB} \cong \overline{AC}$  und insbesondere  $A \star D \star B$ . Nach Konstruktion liegt daher  $D$  im Inneren des Winkels  $\angle BCA$ . Da  $D$  auf  $\overline{AB}$  liegt, gilt aber andererseits  $\angle ABC = \angle DBC$ . Mit dem SWS-Kriterium  $(K'_6)$  folgt  $\triangle DBC \cong \triangle ACB$  und insbesondere  $\angle DCB \simeq \angle ACB$ . Das ist ein Widerspruch dazu, dass  $D$  im Inneren von  $\angle ACB$  liegt.  $\square$

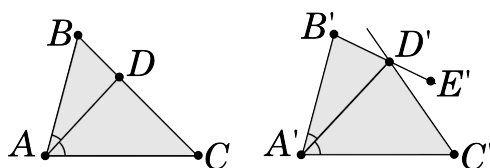
**Proposition 3.55 (H).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  bzw.  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage, und sei  $D$  bzw.  $D'$  ein Punkt im Inneren von  $\angle BAC$  bzw.  $\angle B'A'C'$ . Dann folgt aus je zwei der Kongruenzen

$$\angle BAD \simeq \angle B'A'D', \quad \angle DAC \simeq \angle D'A'C', \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C'$$

die jeweils dritte.

*Beweis.* Der Beweis zerfällt offensichtlich in drei Fälle.

**Fall 1:**  $(\angle BAD \simeq \angle B'A'D') \wedge (\angle DAC \simeq \angle D'A'C') \implies (\angle BAC \simeq \angle B'A'C')$ . Nach Lemma 3.22 schneidet der Strahl  $\overrightarrow{AD}$  die Strecke  $\overline{BC}$ . Indem wir gegebenenfalls  $D$  durch diesen Schnittpunkt ersetzen, können wir daher ohne Einschränkung  $B \star D \star C$  annehmen. Weiter können wir nach  $(K_2)$  die Punkte  $B', C', D'$  jeweils derart durch Punkte auf demselben Strahl aus  $A'$  ersetzen, dass  $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ ,  $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$  und  $\overline{A'D'} \cong \overline{AD}$  gelten. Nach Annahme gelten außerdem  $\angle B'A'D' \simeq \angle BAD$  und  $\angle D'A'C' \simeq \angle DAC$ . Nach dem SWS-Kriterium  $(K'_6)$  sind dann die Dreiecke  $\triangle BAD$  und  $\triangle B'A'D'$  bzw.  $\triangle DAC$  und  $\triangle D'A'C'$  kongruent.



Sei nun  $E'$  ein Punkt auf der Geraden  $\overleftrightarrow{B'D'}$  mit  $B' \star D' \star E'$ ; so etwas gibt es nach  $(A_2)$ . Dann ist  $\angle A'D'E'$  ein Ergänzungswinkel zu  $\angle A'D'B' \simeq \angle ADB$ . Andererseits ist  $\angle ADC$  ein Ergänzungswinkel zu  $\angle ADB$ , so dass mit Proposition 3.36 die Kongruenz  $\angle A'D'E' \simeq \angle ADC \simeq \angle A'D'C'$  folgt.

Da  $C'$  und  $B'$  auf verschiedenen Seiten von  $\overleftrightarrow{A'D'}$  liegen und  $B'$  und  $E'$  ebenso, liegen nach  $(A_4)$  die Punkte  $C'$  und  $E'$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{A'D'}$ . Nach  $(K_5)$  sind daher die Winkel  $\angle A'D'E'$  und  $\angle A'D'C'$  sogar identisch. Insbesondere gilt  $B' \star D' \star C'$ .

Da wir mit der Kongruenz der Dreiecke schon vorhin  $\overline{B'D'} \cong \overline{BD}$  und  $\overline{D'C'} \cong \overline{DC}$  eingesehen hatten, folgt mit  $(K_3)$  die Kongruenz  $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$ . Weiter hatten wir schon  $\angle A'C'B' = \angle A'C'D' \simeq \angle ACD = \angle ACB$  erkannt und  $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$  vorausgesetzt. Mit dem SWS-Kriterium  $(K'_6)$  folgt somit die Kongruenz der Dreiecke  $\triangle A'B'C'$  und  $\triangle ABC$  und insbesondere die Behauptung.

**Fall 2:**  $(\angle BAD \simeq \angle B'A'D') \wedge (\angle BAC \simeq \angle B'A'C') \implies (\angle DAC \simeq \angle D'A'C')$ . Nach  $(K_5)$  existiert ein  $C''$ , das auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{A'D'}$  liegt wie  $C'$  und das  $\angle D'A'C'' \simeq \angle DAC$  erfüllt. Wenn wir  $C'$  durch  $C''$  ersetzen, haben wir also die Voraussetzungen für Fall 1 erfüllt und erhalten so  $\angle B'A'C'' \simeq \angle BAC$ . Das impliziert

$$\angle B'A'C' \simeq \angle BAC \simeq \angle B'A'C''$$

und somit  $C'' \in \overleftrightarrow{A'C'}$ . Daraus ergibt sich

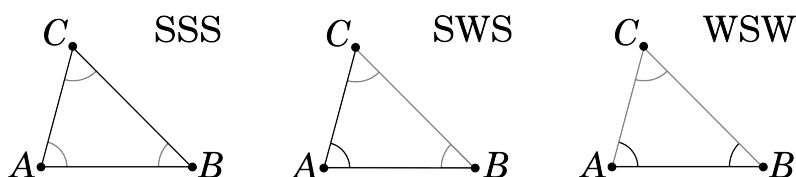
$$\angle DAC \simeq \angle D'A'C'' \simeq \angle D'A'C'$$

und also die Behauptung.

**Fall 3:**  $(\angle BAC \simeq \angle B'A'C') \wedge (\angle DAC \simeq \angle D'A'C') \implies (\angle BAD \simeq \angle B'A'D')$ . Dieser Fall ist nach Umbenennung mit Fall 2 identisch.  $\square$

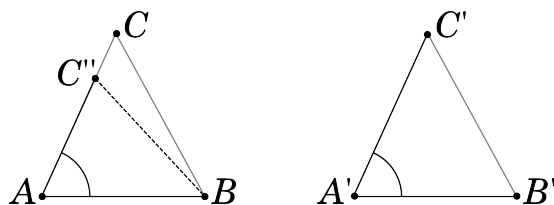
**Satz 3.56** (Kongruenzsatz für Dreiecke, **H**). Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  je drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i)  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ,
- (ii)  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$  und  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$  (SSS)
- (iii)  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$  und  $\angle BAC \simeq \angle B'A'C'$ , (SWS)
- (iv)  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\angle BAC \simeq \angle B'A'C'$  und  $\angle ABC \simeq \angle A'B'C'$ . (WSW)



*Beweis.* Dass aus (i) die anderen drei Aussagen folgen, ist klar. Dass aus (iii) Aussage (i) folgt, gilt mit dem SWS-Kriterium ( $K'_6$ ) und somit nach Definition der Hilbertebene.

Wir wollen nun das WSW-Kriterium zeigen, das besagt, dass aus (iv) Aussage (i) folgt. Nehmen wir dafür an, es gelten die Kongruenzen aus (iv). Mit ( $K_2$ ) wählen wir auf dem Strahl  $\overrightarrow{AC}$  einen Punkt  $C''$  mit  $\overline{AC''} \cong \overline{A'C'}$ . Da nach Voraussetzung  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  und  $\angle BAC'' = \angle BAC \simeq \angle B'A'C'$  gelten, können wir das SWS-Kriterium auf die Dreiecke  $\triangle ABC''$  und  $\triangle A'B'C'$  anwenden und erhalten deren Kongruenz.



Daraus und wieder aus (iv) folgt

$$\angle ABC'' \simeq \angle A'B'C' \simeq \angle ABC. \quad (3.5)$$

Nach Konstruktion liegen  $C$  und  $C''$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{AB}$ , so dass wegen (3.5) und ( $K_5$ ) bereits die Identität der Strahlen  $\overrightarrow{BC}$  und  $\overrightarrow{BC''}$  gilt. Es folgt

$$C'' = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC} = C$$

und insbesondere  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ . Wir dürfen also das SWS-Kriterium auf die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  anwenden und zeigen so (i).

Am aufwändigsten ist der Beweis des SSS-Kriteriums, dessentwegen wir die Propositionen 3.52, 3.54 und 3.55 gezeigt haben. Nehmen wir dafür an, es gelten die Kongruenzen aus (ii). Nach Proposition 3.52 gibt es auf der  $B'$  gegenüberliegenden Seite von  $\overleftrightarrow{A'C'}$  genau einen Punkt

$B''$  mit  $\triangle A'B''C' \cong \triangle ABC$ . Wir setzen  $P := \overleftarrow{A'C'} \wedge \overleftarrow{B'B''}$ . In Abhängigkeit von der Lage von  $P$  auf der Geraden  $\overleftarrow{A'C'}$  ergeben sich verschiedene Fälle.

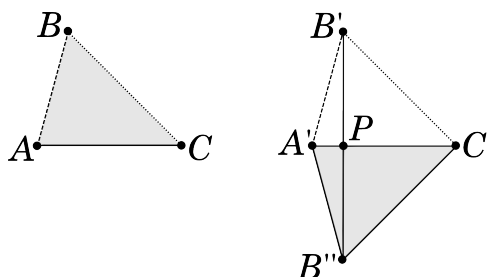
**Fall 1:**  $P = A'$ . In diesem Fall sind die Punkte  $A', B', B''$  kollinear. Da sonst die Punkte  $A', B', C'$  kollinear wären, sind deswegen  $C', B', B''$  in allgemeiner Lage. Wegen der Kongruenz  $\overline{B'C'} \cong \overline{BC} \cong \overline{B''C'}$  ist das Dreieck  $\triangle C'B'B''$  gleichschenkelig und hat kongruente Basiswinkel  $\angle C'B'B'' = \angle A'B'C'$  und  $\angle C'B''B' = \angle A'B''C'$  nach Proposition 3.54. Das reicht, um mit dem SWS-Kriterium die Kongruenz von Dreiecken  $\triangle ABC \cong \triangle A'B''C' \cong \triangle A'B'C'$  folgern zu können.

**Fall 2:**  $P = C'$ . Dieser Fall ist nach Umbenennung mit Fall 1 identisch.

**Fall 3:**  $A', C', P$  paarweise verschieden. Analog zu Fall 1 sind die Dreiecke  $\triangle C'B'B''$  und  $\triangle A'B'B''$  gleichschenkelig, woraus mit 3.54 die Kongruenzen

$$\angle C'B'P \simeq \angle C'B''P \quad \text{und} \quad \angle A'B'P \simeq \angle A'B''P$$

der jeweiligen Basiswinkel folgen. Mit Proposition 3.55 erhalten wir  $\angle C'B'A' \simeq \angle C'B''A'$ , was mithilfe des SWS-Kriteriums die Behauptung zeigt.



□

### 3.7 Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass jede gegebene Strecke eine eindeutige Mittelsenkrechte besitzt und jeder gegebene Winkel eine eindeutige Winkelhalbierende. Für beide Ziele wird es sich als vorteilig erweisen, zu einer gegebenen Strecke einen Mittelpunkt konstruieren zu können. Damit wollen wir beginnen:

**Definition 3.57 (H).** Gegeben seien drei paarweise verschiedene kollineare Punkte  $A, B, M \in \mathbf{P}$ . Genau dann heißt  $M$  ein **Mittelpunkt** der Strecke  $\overline{AB}$ , wenn  $\overline{AM} \cong \overline{MB}$  gilt.

**Lemma 3.58 (H).** Seien  $A, B, M \in \mathbf{P}$  paarweise verschieden und kollinear. Ist  $M$  ein Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$ , so gilt  $A \star M \star B$ .

*Beweis.* Gälte  $M \star A \star B$ , so folgte nach Definition  $\overline{AM} = \overline{MA} < \overline{MB}$ . Dies stünde nach Proposition 3.18 im Widerspruch zur Annahme  $\overline{AM} \cong \overline{MB}$  und kann daher nicht sein. Gälte  $A \star B \star M$ ,

so folgte nach Definition  $\overline{AM} > \overline{BM} = \overline{MB}$ . Dies stünde genauso im Widerspruch zur Annahme  $\overline{AM} \cong \overline{MB}$  und kann daher ebenfalls nicht sein. Nach  $(A_3)$  liegt aber genau einer der Punkte  $A, B, M$  zwischen den anderen beiden, so dass wir das Lemma gezeigt haben.  $\square$

**Satz 3.59 (H).** Für zwei beliebige Punkte  $A \neq B \in \mathbf{P}$  hat die Strecke  $\overline{AB}$  genau einen Mittelpunkt.

*Beweis.* Wir wollen zunächst die Existenz zeigen. Wie in Proposition 3.2 gilt für  $g := \overleftrightarrow{AB}$  die Aufteilung

$$\mathbf{P} = g \cup S_1(g) \cup S_2(g)$$

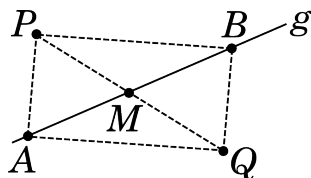
von  $\mathbf{P}$  in  $g$  und die durch  $g$  begrenzten Halbebenen. Für einen beliebigen Punkt  $P \in S_1(g)$  gibt es nach Proposition 3.52 genau einen Punkt  $Q \in S_2(g)$  mit  $\triangle ABP \cong \triangle BAQ$  und insbesondere

$$\overline{AP} \cong \overline{BQ} \quad \text{und} \quad \overline{PB} \cong \overline{QA}. \quad (3.6)$$

Die Punkte  $A, P, Q$  sind in allgemeiner Lage,

denn: Nach Konstruktion ist  $g$  eine Transversale der beiden Geraden  $\overleftrightarrow{BP}$  und  $\overleftrightarrow{AQ}$  mit kongruenten Wechselwinkeln  $\angle PBA \simeq \angle QAB$ . Nach dem schwachen Wechselwinkelsatz 3.46 sind somit die Geraden  $\overleftrightarrow{BP}$  und  $\overleftrightarrow{AQ}$  parallel. Da sie wegen  $A \neq B$  zudem voneinander verschieden sind, folgt die Behauptung.  $\#$

Analog zeigt man, dass auch die Punkte  $B, Q, P$  in allgemeiner Lage sind.



Insgesamt können wir das SSS-Kriterium 3.56 auf die Dreiecke  $\triangle APQ$  und  $\triangle BQP$  anwenden und erhalten wegen  $\overline{PQ} \cong \overline{QP}$  und (3.6) deren Kongruenz. Insbesondere gelten die Kongruenzen von Winkeln

$$\angle APQ \simeq \angle BQP \quad \text{und} \quad \angle AQP \simeq \angle BPQ. \quad (3.7)$$

Wegen  $P \mid_g Q$  schneidet  $g$  die Strecke  $\overline{PQ}$  in einem Punkt  $M$ . Für diesen gilt  $A \star M \star B$ ,

denn: Da die Punkte  $A, P, Q$  bzw.  $B, Q, P$  in allgemeiner Lage sind, liegen weder  $A$  noch  $B$  auf der Verbindungsgeraden  $\overleftrightarrow{PQ}$ ; es ist also  $M \notin \{A, B\}$ . Weiter gilt nicht  $M \star A \star B$ , denn sonst läge  $A$  jeweils im Inneren der Winkel  $\angle BPM$  und  $\angle BQM$  und es folgte

$$\begin{aligned} \angle APQ &= \angle APM < \angle BPM = \angle BPQ \\ &\stackrel{(3.7)}{\simeq} \angle AQP = \angle AQM < \angle BQM = \angle BQP \end{aligned}$$

$$\stackrel{(3.7)}{\simeq} \angle APQ,$$

was offensichtlich nicht sein kann. Analog zeigt man, dass auch  $A \star B \star M$  nicht sein kann, so dass die Behauptung mit dem Anordnungsaxiom ( $A_3$ ) folgt. #

Es gilt nun

$$\angle MAP = \angle BAP \simeq \angle ABQ = \angle MBQ, \quad (A \star M \star B, \triangle ABP \cong \triangle BAQ)$$

$$\overline{AP} \stackrel{(3.6)}{\cong} \overline{BQ},$$

$$\angle APM = \angle APQ \stackrel{(3.7)}{\simeq} \angle BQP = \angle BQM \quad (P \star M \star Q)$$

und also mit dem WSW-Kriterium 3.56 die Kongruenz der Dreiecke  $\triangle AMP$  und  $\triangle BMQ$ . Insbesondere folgt die Kongruenz von Strecken  $\overline{AM} \cong \overline{MB}$  und somit, dass  $M$  ein Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$  ist.

Es verbleibt die Eindeutigkeit des Streckenmittelpunkts zu zeigen. Sei dafür  $M'$  ein von  $M$  verschiedener Mittelpunkt von  $\overline{AB}$ . Wir können ohne Einschränkung  $\overline{AM} < \overline{AM'}$  annehmen, insbesondere also  $A \star M \star M'$ . Aufgrund von  $A \star M' \star B$  folgt mit 3.8 die Anordnung  $M \star M' \star B$  und deshalb  $\overline{BM'} < \overline{BM}$ . Insgesamt erhalten wir aber mit den Mittelpunktseigenschaften von  $M$  und  $M'$  die Ungleichungskette

$$\overline{AM} < \overline{AM'} \cong \overline{M'B} < \overline{MB} \cong \overline{AM}$$

und somit nach Proposition 3.18 einen Widerspruch.  $\square$

Die Existenz eines eindeutigen Streckenmittelpunkts bedingt die Existenz einer eindeutigen Mittelsenkrechten und einer eindeutigen Winkelhalbierenden wie folgt:

**Definition 3.60 (H).** Seien  $A \neq B \in \mathbf{P}$  zwei verschiedene Punkte. Das Lot des Mittelpunkts von  $\overline{AB}$  auf  $\overleftrightarrow{AB}$  nennen wir die **Mittelsenkrechte**  $m_{AB}$  von  $\overline{AB}$ .

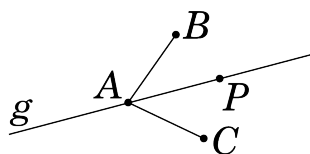
**Proposition 3.61 (H).** Für zwei verschiedene Punkte  $A \neq B \in \mathbf{P}$  gilt

$$m_{AB} = \{P \in \mathbf{P} \mid \overline{AP} \cong \overline{BP}\}.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass für ein beliebiges  $P \in m_{AB}$  die Bedingung  $\overline{AP} \cong \overline{BP}$  gilt. Da dies für den Streckenmittelpunkt  $M$  von  $\overline{AB}$  definitionsgemäß richtig ist, können wir dabei ohne Einschränkung  $P \in m_{AB} \setminus \{M\}$  annehmen. Nach dem SWS-Kriterium sind dann die rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle AMP$  und  $\triangle BMP$  kongruent, insbesondere gilt  $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ .

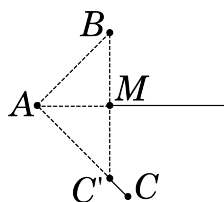
Sei nun umgekehrt  $P \in \mathbf{P}$  mit  $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ . Im Fall  $P = M$  liegt  $P$  trivialerweise auf  $m_{AB}$ . Im Fall  $P \neq M$  ist das Dreieck  $\triangle PAB$  gleichschenkelig, woraus  $\angle PAM \simeq \angle PBM$  folgt. Mithilfe des SWS-Kriteriums erhalten wir  $\triangle PAM \cong \triangle PBM$ , was  $\angle PMA \simeq \angle PMB$  zur Folge hat. Diese Winkel sind Ergänzungswinkel, weshalb  $\angle PMA$  ein rechter Winkel ist. Aus der Eindeutigkeit des Lotes folgt wie verlangt  $P \in m_{AB}$ .  $\square$

**Definition 3.62 (H).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage und  $g$  eine Gerade durch  $A$ . Genau dann heißt  $g$  eine **Winkelhalbierende** von  $\angle BAC$ , wenn  $B$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen und für ein (und damit alle)  $P \in g \setminus \{A\}$  die Kongruenz  $\angle PAB \simeq \angle PAC$  gilt.



**Proposition 3.63 (H).** Zu je drei Punkten  $A, B, C \in \mathbf{P}$  in allgemeiner Lage gibt es genau eine Winkelhalbierende  $w_{\angle CAB}$  des Winkels  $\angle CAB$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Existenz. Nach  $(K_2)$  gibt es einen eindeutigen Punkt  $C' \in \overrightarrow{AC}$  mit  $\overline{AC'} \cong \overline{AB}$ . Nach Satz 3.59 hat die Strecke  $\overline{BC'}$  einen Mittelpunkt  $M$ , der definitionsgemäß  $\overline{BM} \cong \overline{MC'}$  erfüllt.



Damit können wir das SSS-Kriterium auf die Dreiecke  $\triangle ABM$  und  $\triangle AC'M$  anwenden und erhalten deren Kongruenz. Insbesondere gilt dann auch  $\angle BAM \simeq \angle C'AM$ , so dass durch die Gerade  $\overleftrightarrow{AM}$  eine Winkelhalbierende des Winkels  $\angle C'AB = \angle CAB$  gegeben ist.

Die Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden zeigt man analog zur Eindeutigkeit des Streckenmittelpunkts im Beweis von Satz 3.59.  $\square$

### 3.8 Innen- und Außenwinkel im Dreieck

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff des Außenwinkels eines Dreiecks ein und zeigen zwei Aussagen über das Verhältnis von Innen- und Außenwinkeln einerseits und Innenwinkeln und Dreiecksseiten andererseits. Daraus folgern wir noch ein weiteres Kongruenzkriterium für Dreiecke:

**Definition 3.64 (H).** Ein beliebiger Ergänzungswinkel eines Innenwinkels eines gegebenen Dreiecks heißt ein **Außenwinkel** dieses Dreiecks.

Die folgenden beiden Resultate sind jeweils eine Abschwächung des in euklidischen Ebenen gültigen Satzes 1.68 von der Innenwinkelsumme im Dreieck:

**Proposition 3.65 (H + P).** Seien  $\alpha, \beta, \gamma$  die Innenwinkel eines Dreiecks  $\Delta$  und seien  $\alpha', \beta', \gamma'$  die Innenwinkel eines weiteren Dreiecks  $\Delta'$ . Dann gilt

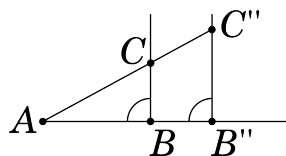
$$\left( \alpha \simeq \alpha' \quad \text{und} \quad \beta \simeq \beta' \right) \implies \gamma \simeq \gamma'.$$

*Beweis.* Wir schreiben  $\Delta = \Delta ABC$  und  $\Delta' = \Delta A'B'C'$  und setzen

$$\begin{aligned} \alpha &:= \angle CAB, & \beta &:= \angle ABC & \text{und} & \gamma &:= \angle BCA, \\ \alpha' &:= \angle C'A'B', & \beta' &:= \angle A'B'C' & \text{und} & \gamma' &:= \angle B'C'A'. \end{aligned}$$

Nach  $(K_2)$  gibt es auf dem Strahl  $\overrightarrow{AB}$  einen eindeutigen Punkt  $B''$  mit  $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$ . Ohne Einschränkung können wir  $B'' \neq B$  annehmen, da sonst nach dem WSW-Kriterium die Dreiecke  $\Delta ABC$  und  $\Delta A'B'C'$  kongruent und somit nichts zu zeigen wäre. Nach Proposition 3.52 gibt es dann genau einen Punkt  $C''$  mit

$$C''C \perp_{\overrightarrow{AB}} \quad \text{und} \quad \Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'. \quad (3.8)$$



Insbesondere gilt

$$\angle ABC = \beta \simeq \beta' = \angle A'B'C' \stackrel{(3.8)}{\simeq} \angle AB''C'',$$

so dass die beiden Geraden  $\overleftrightarrow{BC}$  und  $\overleftrightarrow{B''C''}$  bezüglich der Transversalen  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB''}$  kongruente Stufenwinkel haben. Nach dem schwachen Stufenwinkelsatz 3.46 gilt somit  $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B''C''}$ .

Andererseits gilt die Kongruenz

$$\angle CAB = \alpha \simeq \alpha' = \angle C'A'B' \stackrel{(3.8)}{\simeq} \angle C''AB'' = \angle C''AB.$$

Wegen  $C''C \perp_{\overrightarrow{AB}}$  stimmen folglich nach  $(K_5)$  die Strahlen  $\overrightarrow{AC}$  und  $\overrightarrow{AC''}$  überein. Wir können daher den starken Stufenwinkelsatz 3.50 auf die Transversale  $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AC''}$  der parallelen Geraden  $\overleftrightarrow{BC}$  und  $\overleftrightarrow{B''C''}$  anwenden und erhalten wie verlangt die Kongruenz der Winkel

$$\gamma = \angle BCA \simeq \angle B''C''A \stackrel{(3.8)}{\simeq} \angle B'C'A' = \gamma'.$$

□

**Satz 3.66 (Außenwinkelsatz, H).** Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  die Innenwinkel eines Dreiecks und ist  $\gamma'$  ein Ergänzungswinkel zu  $\gamma$ , so gilt

$$\alpha < \gamma' \quad \text{und} \quad \beta < \gamma'.$$

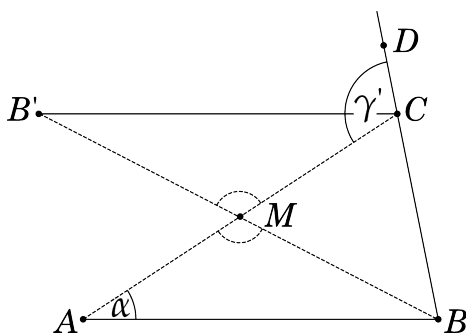


*Beweis.* Wir schreiben  $\triangle ABC$  für das Dreieck und setzen

$$\alpha := \angle CAB, \quad \beta := \angle ABC \quad \text{und} \quad \gamma := \angle BCA.$$

Da nach Proposition 3.36 beide Wahlen für den Außenwinkel  $\gamma'$  kongruent sind, dürfen wir zudem ohne Einschränkung einen Punkt  $D \in \overleftrightarrow{BC}$  mit  $B \star C \star D$  wählen und  $\gamma' := \angle ACD$  setzen.

Da die Behauptungen  $\alpha < \gamma'$  und  $\beta < \gamma'$  unter Umbenennung zueinander äquivalent sind, genügt es, die erste der beiden zu zeigen. Sei dafür  $M$  der nach Satz 3.59 existierende eindeutige Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AC}$ . Für diesen gilt definitionsgemäß  $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ . Wir wählen nun auf  $\overleftrightarrow{BM}$  einen Punkt  $B'$  mit  $B \star M \star B'$  und  $\overline{BM} \cong \overline{MB'}$ .



Da die Winkel  $\angle AMB$  und  $\angle CMB'$  als Gegenwinkel kongruent sind, können wir dann das SWS-Kriterium auf die Dreiecke  $\triangle ABM$  und  $\triangle CB'M$  anwenden und erhalten deren Kongruenz. Insbesondere folgt die Kongruenz der Winkel  $\alpha$  und  $\angle MCB' = \angle ACB'$ . Andererseits liegt  $B'$  im Inneren des Winkels  $\angle ACD = \gamma'$ ,

*denn:* Nach Konstruktion gilt  $B \mid_{\overleftrightarrow{AC}} B'$ . Außerdem gilt  $AB' \mid_{\overleftrightarrow{BC}}$ , denn es gilt  $AM \mid_{\overleftrightarrow{BC}}$  wegen  $A \star M \star C$  und es gilt  $B'M \mid_{\overleftrightarrow{BC}}$  wegen  $B \star M \star B'$ . Folglich liegt der Punkt  $A$  im Inneren des Winkels  $\angle BCB'$ . Nach Lemma 3.22 bedeutet dies  $AB \mid_{\overleftrightarrow{B'C}}$  und  $B \mid_{\overleftrightarrow{AC}} B'$ . Wegen  $B \star C \star D$  ist dies äquivalent zu  $A \mid_{\overleftrightarrow{B'D}} D$  und  $B'D \mid_{\overleftrightarrow{AC}}$ . Wieder nach Lemma 3.22 ist dies gleichbedeutend dazu, dass  $B'$  im Inneren von  $\angle DCA = \angle ACD$  liegt. #

□

Aus dem Außenwinkelsatz 3.66 folgern wir einen Zusammenhang zwischen Innenwinkeln eines Dreiecks und den jeweils gegenüberliegenden Seiten. Dieser Zusammenhang wird für euklidische Ebenen mit dem Sinussatz 1.69 präzisiert:

**Satz 3.67 (H).** *In einem Dreieck  $\triangle ABC$  gilt*

$$\overline{AB} > \overline{BC} \iff \angle BCA > \angle CAB.$$

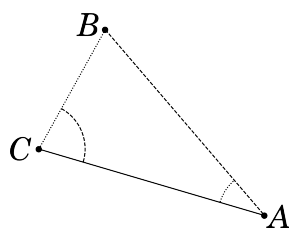
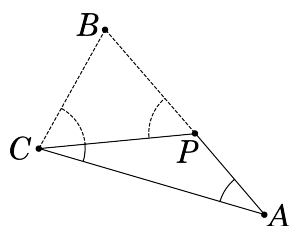


Abbildung 3.4: Der größeren Dreiecksseite liegt stets der größere Innenwinkel gegenüber.

*Beweis.* Unter der Annahme  $\overline{AB} > \overline{BC}$  gibt es einen Punkt  $P$  zwischen  $A$  und  $B$  mit  $\overline{BP} \cong \overline{BC}$ . Da  $\angle CPB$  ein Außenwinkel des Dreiecks  $\triangle CPA$  ist, ist er nach dem Außenwinkelsatz 3.66 größer als der Innenwinkel  $\angle CAP = \angle CAB$ . Da  $P$  im Inneren des Winkels  $\angle BCA$  liegt, ist zudem letzterer größer als  $\angle BCP$ . Da das Dreieck  $\triangle BCP$  nach Konstruktion gleichschenkelig ist, sind schließlich seine Basiswinkel  $\angle BCP$  und  $\angle CPB$  kongruent. Insgesamt haben wir

$$\angle BCA > \angle BCP \cong \angle CPB > \angle CAB$$

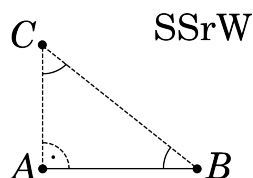
gezeigt und somit die erste Implikation.



Gelte nun umgekehrt  $\angle BCA > \angle CAB$ . Da die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks stets kongruent sind, kann dann nicht  $\overline{AB} \cong \overline{BC}$  gelten. Gälte  $\overline{AB} < \overline{BC}$ , so folgte  $\angle BCA < \angle CAB$  nach dem bereits Gezeigten, was nicht sein kann. Der Satz folgt im Ausschlussprinzip nach Proposition 3.26.  $\square$

**Satz 3.68 (H).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  je drei Punkte in allgemeiner Lage und seien  $\angle BAC$  und  $\angle B'A'C'$  rechte Winkel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

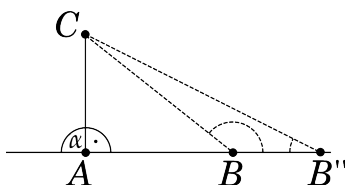
- (i)  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ,
- (ii)  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$  und  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ . (SSrW)



*Beweis.* Dass (ii) aus (i) folgt, ist trivial. Gelte also umgekehrt (ii). Auf  $\overline{AB}$  gibt es einen eindeutigen Punkt  $B''$  mit  $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$ . Für diesen gilt nach dem SWS-Kriterium die Kongruenz von

Dreiecken  $\triangle AB''C \cong \triangle A'B'C'$  und insbesondere die Streckenkongruenz  $\overline{B''C} \cong \overline{B'C'} \cong \overline{BC}$ . Wir unterscheiden drei Fälle für die Lage der drei Punkte  $A, B, B''$  zueinander.

**Fall 1:**  $B'' = B$ . Es gilt  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  und mit (ii) und dem SSS-Kriterium folgt die gewünschte Kongruenz der Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$ .



**Fall 2:**  $A \star B \star B''$ . Sei  $\alpha$  ein Ergänzungswinkel zu  $\angle CAB$ . Durch Anwendung des Außenwinkelsatzes 3.66 auf das Dreieck  $\triangle AB''C$  folgt  $\angle AB''C < \alpha$ . Außerdem ist  $\angle CBB''$  ein Ergänzungswinkel zu  $\angle ABC$ , d.h ein Außenwinkel an  $\triangle ABC$ . Mit dem Außenwinkelsatz 3.66 und der Rechtwinkligkeit von  $\alpha$  ergibt sich  $\alpha \simeq \angle BAC < \angle CBB''$ . Dies liefert

$$\angle BB''C = \angle AB''C < \alpha < \angle CBB''.$$

Wenden wir Satz 3.67 auf das Dreieck  $\triangle BB''C$  an, so folgt  $\overline{BC} < \overline{B''C}$ , was im Widerspruch zu der oben gezeigten Kongruenz  $\overline{BC} \cong \overline{B''C}$  steht.

**Fall 3:**  $A \star B'' \star B$ . Das ist nach Umbenennung gerade Fall 2. □

### 3.9 In- und Umkreis

Wir haben gesehen, dass sich in Hilbertebenen gut Geometrie betreiben lässt. Da die klassische Geometrie ohne Kreise nicht vorstellbar ist, wollen wir diese nun einführen:

**Definition 3.69 (H).** Seien  $M \neq A \in \mathbf{P}$  zwei verschiedene Punkte. Dann heißt

$$K(M, A) := \{P \in \mathbf{P} \mid \overline{MA} \cong \overline{MP}\}$$

der **Kreis** mit **Mittelpunkt**  $M$  und **Radius**  $\overline{MA}$ .

**Proposition 3.70 (H).** Sei  $K \subseteq \mathbf{P}$  ein Kreis. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- (a) Der Kreis  $K$  ist nichtleer.
- (b) Jede Gerade durch einen Mittelpunkt von  $K$  schneidet  $K$  in genau zwei Punkten.
- (c) Der Kreis  $K$  hat genau einen Mittelpunkt.

*Beweis.* Aussage (a) ist trivialerweise richtig, da für  $K = K(M, A)$  definitionsgemäß  $A \in K$  gilt.

Ist  $K = K(M, A)$ , so können wir auf jedem Strahl aus  $M$  eindeutig den Radius abtragen. Aussage (b) folgt, da sich eine beliebige Gerade  $g$  durch  $M$  als Vereinigung von genau zwei solcher Strahlen schreiben lässt und deren Durchschnitt gerade aus dem Punkt  $M$  besteht.

Es verbleibt Aussage (c) zu zeigen. Nach (a) gibt es einen Punkt  $A \in K$ . Nehmen wir nun an,  $K$  hätte zwei Mittelpunkte  $M \neq M'$ . Dann könnten wir  $K = K(M, A) = K(M', A)$  schreiben. Nach (b) schneide die Gerade  $\overleftrightarrow{MM'}$  den Kreis  $K$  dann in genau zwei Punkten, die wir  $B$  und  $C$  nennen wollen. Diese erfüllten einerseits  $B \star M \star C$  und  $\overline{BM} \cong \overline{MC}$  und andererseits  $B \star M' \star C$  und  $\overline{BM'} \cong \overline{M'C}$ . Da der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BC}$  nach Satz 3.59 eindeutig ist, folgte  $M = M'$ , was wir ausgeschlossen hatten. Der Mittelpunkt eines Kreises ist also stets eindeutig bestimmt und Aussage (c) bewiesen.  $\square$

Unter zusätzlicher Voraussetzung des Parallelenaxioms (P) können wir nun mithilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 3.7 noch zwei bekannte Sätze über Kreise herleiten:

**Satz 3.71 (Umkreissatz, H + P).** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck. Dann schneiden sich die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  und  $\overline{CA}$  in einem gemeinsamen Punkt  $U$ . Der Kreis  $K(U, A)$  enthält die Punkte  $A, B, C$  und ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt. Wir nennen  $K(U, A)$  den **Umkreis** und  $U$  den **Umkreismittelpunkt** von  $\triangle ABC$ .<sup>2</sup>

*Beweis.* Die drei Mittelsenkrechten sind paarweise nicht parallel,

denn: Nach Definition gelten  $m_{AB} \perp \overleftrightarrow{AB}$  und  $m_{AC} \perp \overleftrightarrow{AC}$ . Gälte  $m_{AB} \parallel m_{AC}$ , so folgte  $m_{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$  mit dem starken Wechselwinkelsatz 3.50, was nach Korollar 3.47 sofort die Unmöglichkeit  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{AC}$  implizierte.  $\#$

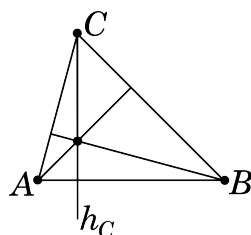
Je zwei Mittelsenkrechten des Dreiecks  $\triangle ABC$  schneiden sich also in genau einem Punkt. Sei  $U$  der Schnittpunkt von  $m_{AB}$  und  $m_{AC}$ . Nach Proposition 3.61 gilt dann  $\overline{BU} \cong \overline{AU} \cong \overline{CU}$ , was wieder nach 3.61 zur Folge hat, dass  $U$  in  $m_{BC}$  liegt. Es schneiden sich also die drei Mittelsenkrechten von  $\triangle ABC$  in genau einem Punkt, nämlich in  $U$ .

Nach Konstruktion ist dann  $K(U, A)$  ein Kreis, der die Punkte  $A, B, C$  enthält. Sei  $K'$  ein weiterer Kreis, der  $A, B, C$  enthält, und sei  $U'$  der – nach Proposition 3.70 eindeutige – Mittelpunkt von  $K'$ . Dann gilt insbesondere  $\overline{BU'} \cong \overline{AU'} \cong \overline{CU'}$ , und aus Proposition 3.61 folgt  $U' = m_{AB} \cap m_{AC} = U$ . Es folgt also  $K' = K(U', A) = K(U, A)$ .  $\square$

**Bemerkung 3.72.** Mit dem Umkreissatz haben wir insbesondere gezeigt, dass je drei Punkte in allgemeiner Lage einen eindeutigen Kreis bestimmen.

**Definition 3.73 (H).** Für ein Dreieck  $\triangle ABC$  heißt das Lot von  $C$  auf die Gerade  $\overleftrightarrow{AB}$  die **Höhe** von  $\triangle ABC$  durch  $C$  und wird mit  $h_C$  bezeichnet. Der Schnittpunkt  $h_C \cap \overleftrightarrow{AB}$  heißt dabei der **Fußpunkt** der Höhe  $h_C$ . Analog werden auch die Höhen  $h_A$  und  $h_B$  und ihre Fußpunkte definiert.

<sup>2</sup>Diese Namensgebung erhält ihren tieferen Sinn erst dann, wenn man zeigt, dass mit Ausnahme der Eckpunkte  $A, B, C$  alle Punkte des Umkreises „außerhalb“ von  $\triangle ABC$  liegen, was wir allerdings nicht tun werden.



**Satz 3.74** (Höhensatz, **H + P**). Die Höhen  $h_A, h_B, h_C$  eines Dreiecks  $\triangle ABC$  schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt  $H$ .

*Beweis.* Seien

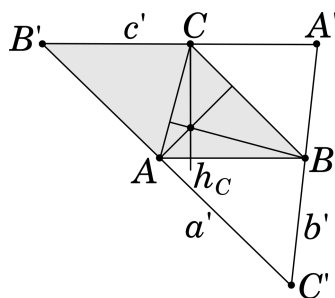
$a'$  die Parallele zu  $\overleftrightarrow{BC}$  durch  $A$ ,  
 $b'$  die Parallele zu  $\overleftrightarrow{CA}$  durch  $B$ ,  
 $c'$  die Parallele zu  $\overleftrightarrow{AB}$  durch  $C$ .

Per Widerspruchsbeweis sieht man schnell ein, dass diese Geraden paarweise nicht parallel sind. Seien also weiter

$$A' := b' \wedge c', \quad B' := c' \wedge a', \quad C' := a' \wedge b'.$$

Diese Punkte  $A', B', C'$  sind in allgemeiner Lage,

denn: Lägen sie auf einer gemeinsamen Geraden  $g$ , so auch die Punkte  $A, B, C$ , was ausgeschlossen war. #



Nach Übungsaufgabe 3.10 gilt nun

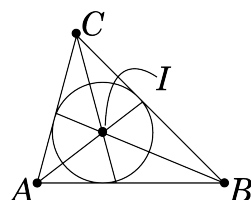
$$M_{A'B'} = C, \quad M_{B'C'} = A, \quad M_{C'A'} = B.$$

Wegen  $h_A \perp \overleftrightarrow{BC} \parallel a'$  folgt daraus  $h_A = m_{B'C'}$  und analog  $h_B = m_{C'A'}$  und  $h_C = m_{A'B'}$ . Der Satz folgt mit dem Umkreissatz 3.71 angewandt auf das Dreieck  $\triangle A'B'C'$ .  $\square$

**Satz 3.75** (Inkreissatz, **H + P**). Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck. Dann schneiden sich die Winkelhalbierenden der Innenwinkel  $\alpha := \angle CAB$ ,  $\beta := \angle ABC$  und  $\gamma := \angle BCA$  in einem gemeinsamen Punkt  $I$ . Der Kreis  $K(I, L_{\overleftrightarrow{AB}}I)$  enthält die Lotfußpunkte

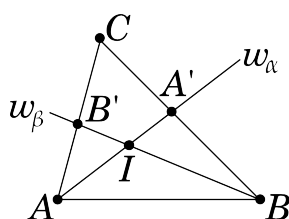
$$L_a := L_{\overleftrightarrow{BC}}I, \quad L_b := L_{\overleftrightarrow{CA}}I \quad \text{und} \quad L_c := L_{\overleftrightarrow{AB}}I$$

und ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt. Wir nennen  $K(I, L_{\overrightarrow{AB}}I)$  den **Inkreis** und  $I$  den **Inkreismittelpunkt** von  $\triangle ABC$ .<sup>3</sup>



*Beweis.* Die drei Winkelhalbierenden sind paarweise nicht parallel,

denn: Es langt zu zeigen, dass sich die Winkelhalbierenden  $w_\alpha$  und  $w_\beta$  schneiden; die anderen beiden Fälle ergeben sich analog. Wegen  $B \notin w_\alpha$  und  $B \in w_\beta$  sind  $w_\alpha$  und  $w_\beta$  verschieden. Wegen  $B \mid_{w_\alpha} C$  gibt es einen Schnittpunkt  $A'$  von  $w_\alpha$  und  $\overline{BC}$ . Nach Konstruktion gilt  $C \star A' \star B$ , so dass  $A'C \mid_{w_\beta}$  gilt. Andererseits gilt nach Definition der Winkelhalbierenden  $A \mid_{w_\beta} C$ , und mit  $(A_4)$  erhalten wir  $A \mid_{w_\beta} A'$ . Es muss daher einen Schnittpunkt von  $w_\beta$  und  $\overline{AA'} \subseteq w_\alpha$  geben. #

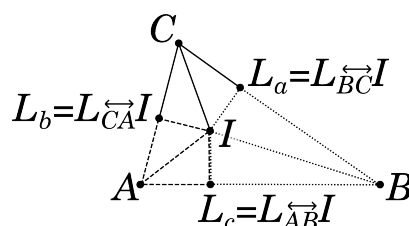


Den eindeutig bestimmten Geradenschnittpunkt  $w_\alpha \wedge w_\beta$  bezeichnen wir im Folgenden als  $I$ . Füllen wir sein Lot auf die drei Seiten des Dreiecks und schreiben

$$L_a := L_{\overrightarrow{BC}}I, \quad L_b := L_{\overrightarrow{CA}}I \quad \text{und} \quad L_c := L_{\overrightarrow{AB}}I,$$

so erhalten wir kongruente Dreiecke  $\triangle AIL_c \cong \triangle AIL_b$  und  $\triangle BIL_c \cong \triangle BIL_a$ ,

denn: Da  $w_\alpha$  Winkelhalbierende ist, gilt  $\angle IAL_b \simeq \angle IAL_c$ . Andererseits sind nach Konstruktion  $\angle IL_cA$  und  $\angle IL_bA$  rechte Winkel und nach Satz 3.40 somit ebenfalls kongruent. Nach Proposition 3.65 sind daher auch  $\angle AIL_c$  und  $\angle AIL_b$  kongruent. Da die beiden Dreiecke außerdem die Seite  $\overline{AI}$  gemeinsam haben, folgt die erste der gesuchten Kongruenzen mit dem WSW-Kriterium. Die andere Kongruenz zeigt man analog. #



<sup>3</sup>Diese Namensgebung erhält ihren tieferen Sinn erst dann, wenn man zeigt, dass mit Ausnahme der Lotfußpunkte  $L_a, L_b, L_c$  alle Punkte des Inkreises „innerhalb“ von  $\triangle ABC$  liegen, was wir allerdings nicht tun werden.

Aus dem gerade Gezeigten folgt insbesondere  $\overline{IL_c} \cong \overline{IL_a} \cong \overline{IL_b}$ . Man kann zeigen, dass die Punkte  $L_a, L_b, L_c$  in allgemeiner Lage sind, dies führen wir hier nicht aus. Nach dem Umkreissatz 3.71 ist  $K(I, L_c)$  der eindeutige Kreis durch die Lotfußpunkte  $L_a, L_b$  und  $L_c$ .

Wir haben den Inkreissatz bewiesen, wenn wir noch  $\overleftrightarrow{CI} = w_\gamma$  zeigen können. Wegen  $\overline{IL_a} \cong \overline{IL_b}$  und da  $\angle IL_bC, \angle IL_aC$  nach Konstruktion rechte Winkel sind, gilt nach dem SSrW-Kriterium 3.68 die Kongruenz von Dreiecken  $\triangle IL_bC \cong \triangle IL_aC$  und insbesondere

$$\angle ACI = \angle L_bCI \simeq \angle L_aCI = \angle BCI.$$

Es verbleibt also zu zeigen, dass die Punkte  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten von  $\overleftrightarrow{CI}$  liegen. Nach Lemma 3.22 genügt es dafür zu zeigen, dass  $I$  im Inneren des Winkels  $\gamma$  liegt. Dem ist aber so,

denn: Die Punkte  $A$  und  $C$  liegen nach Definition der Winkelhalbierenden auf verschiedenen Seiten von  $w_\beta$  und  $I$  liegt nach Konstruktion auf der Strecke  $\overline{AA'}$ , weshalb  $I$  und  $A$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{BC}$  liegen. Nach Lemma 3.22 liegt  $I$  also im Inneren des Winkels  $\beta$ . Dass  $I$  auch im Inneren des Winkels  $\alpha$  liegt, zeigt man analog. Die Behauptung folgt mit Teil (b) von Bemerkung 3.28. #

□

### 3.10 Übungsaufgaben

**Aufgabe 3.1 (I + A).** Beweisen Sie die Aussagen (a) und (c) von Proposition 3.8.

**Aufgabe 3.2 (I + A).** Zeigen Sie, dass  $\mathbf{P}$  unendlich viele Elemente hat.

**Aufgabe 3.3 (I + A).** Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- Seien  $A \neq B \in \mathbf{P}$  Punkte und  $\overline{AB}$  die sie verbindende Strecke. Dann gibt es in  $\overline{AB}$  keine Punkte  $C, D$  mit  $C \star A \star D$ . Die Endpunkte von  $\overline{AB}$  sind also bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt.
- Seien  $A \neq B \in \mathbf{P}$  Punkte und  $\overrightarrow{AB}$  der Strahl von  $A$  durch  $B$ . Dann gibt es in  $\overrightarrow{AB}$  keinen Punkt  $C$  mit  $C \star A \star B$ . Der Ausgangspunkt eines Strahls ist also eindeutig bestimmt. Ist  $C$  ein beliebiger, von  $A$  verschiedener Punkt auf  $\overrightarrow{AB}$ , dann ist  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ .
- Seien  $A \neq B \in \mathbf{P}$  Punkte und  $\overrightarrow{AB}$  der Strahl von  $A$  durch  $B$ . Dann gibt es ein  $C \in \mathbf{P}$ , so dass die Strahlen  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC}$  einander entgegengesetzt sind, und der Strahl  $\overrightarrow{AC}$  ist mit dieser Eigenschaft eindeutig. Zu jedem Strahl gibt es also genau einen entgegengesetzten Strahl.

**Aufgabe 3.4.** Zeigen Sie, dass die Definition der Anordnung auf  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  wie in (3.1) äquivalent zu folgender Definition ist.

Es gilt  $A \star B \star C$ , wenn  $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$  paarweise verschieden und kollinear sind und mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$a_1 < b_1 < c_1, \quad a_2 < b_2 < c_2, \quad a_1 > b_1 > c_1 \quad \text{oder} \quad a_2 > b_2 > c_2.$$

**Aufgabe 3.5 (H).** Beweisen Sie Proposition 3.26.

**Aufgabe 3.6 (I + A).** Seien  $A, B, C, B', C' \in \mathbf{P}$  derart gegeben, dass  $A, B, C$  und  $A, B', C'$  jeweils in allgemeiner Lage sind. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

- (i)  $\angle BAC = \angle B'AC'$ ,
- (ii) Ein Punkt  $P \in \mathbf{P}$  liegt genau im Inneren von  $\angle BAC$ , wenn er im Inneren von  $\angle B'AC'$  liegt.

**Aufgabe 3.7 (I + A).** Eine Teilmenge  $S \subseteq \mathbf{P}$  heißt **konvex**, falls für alle  $A \neq B \in S$  auch die gesamte Strecke  $\overline{AB}$  in  $S$  enthalten ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Beliebige Durchschnitte konvexer Mengen sind wieder konvex. Die Vereinigung zweier konvexer Mengen ist jedoch nicht notwendig konvex.
- (b) Für eine beliebige Gerade  $g \in \mathbf{G}$  sind die durch  $g$  begrenzten Halbebenen  $S_1(g)$  und  $S_2(g)$  konvex.
- (c) Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  in allgemeiner Lage. Dann sind die Mengen

$$I_{\angle BAC} := \{P \in \mathbf{P} \mid P \text{ liegt im Inneren des Winkels } \angle BAC\},$$

$$I_{\triangle ABC} := \{P \in \mathbf{P} \mid P \text{ liegt im Inneren des Dreiecks } \triangle ABC\}$$

konvex.

**Aufgabe 3.8 (H).** Zeigen Sie, dass es einen Winkel gibt, der kein rechter Winkel ist.

**Aufgabe 3.9 (H).** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Es gilt das Kongruenzkriterium (SSW) für Dreiecke, also

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \iff (\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \text{ und } \angle BAC \simeq \angle B'A'C').$$

- (b) Es gilt das Kongruenzkriterium (WWS) für Dreiecke, also

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \iff (\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \angle BAC \simeq \angle B'A'C' \text{ und } \angle ACB \simeq \angle A'C'B').$$

**Aufgabe 3.10 (H + P).** Seien  $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbf{P}$  paarweise verschiedene Punkte, so dass je drei von ihnen nicht kollinear sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $\overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2}$  und  $\overleftrightarrow{A_1C_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2}$ .
- (ii)  $\overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2}$ ,  $\overline{A_1B_1} \cong \overline{A_2B_2}$  und die Punkte  $B_1, C_1$  liegen auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{A_1D}$ .

Ist dies der Fall, so heißt das 4-Tupel  $\Pi A_1A_2A_3A_4 := (A_1, A_2, A_3, A_4)$  ein **Parallelogramm**.

**Aufgabe 3.11 (H + P).** Seien  $A_1, A_2$  zwei Punkte auf einer Geraden  $g$ , und seien  $B_1, C_1, B_2, C_2$  Punkte auf derselben Seite von  $g$ , so dass  $A_1, B_1, C_1$  und  $A_2, B_2, C_2$  jeweils in allgemeiner Lage sind. Dann gilt

$$\overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2} \text{ und } \overleftrightarrow{A_1C_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2} \implies \angle B_1A_1C_1 \simeq \angle B_2A_2C_2.$$



**Aufgabe 3.12 (H).** Sei  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade. Die **Geradenspiegelung**  $\sigma_g$  an  $g$  ist dann die Abbildung  $\sigma_g: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ , die die Gerade  $g$  punktweise festlässt und einen beliebigen Punkt  $A \notin g$  auf den eindeutigen Punkt  $A' \in \ell_g A$  mit

$$A \star L_g A \star A' \quad \text{und} \quad \overline{BL_g A} \cong \overline{AL_g A}$$

schickt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung  $\sigma_g$  ist bijektiv, genauer gilt  $\sigma_g \circ \sigma_g = \text{id}_{\mathbf{P}}$ .

(b) Für  $A \neq B \in \mathbf{P}$  gilt  $\overline{AB} \cong \overline{\sigma_g(A)\sigma_g(B)}$ .

**Hinweis:** Machen Sie eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit von der Lage der Punkte  $A, B$  zur Geraden  $g$ .

(c) Für  $A, B \in \mathbf{P}$  gibt es eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  mit  $\sigma_g(A) = B$ .

(d) Für  $A, B, C \in \mathbf{P}$  mit  $A \neq B$  und  $A \neq C$  gibt es eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  mit  $\sigma_g(A) = A$  und  $\sigma_g(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$ .

**Aufgabe 3.13 (H).** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage, und sei  $P \in \mathbf{P}$  mit  $A \star P \star B$ .

(a) Zeigen Sie, dass im Fall, dass  $\angle BAC$  ein rechter Winkel ist, die Abschätzung

$$\overline{AC} < \overline{PC} < \overline{BC}$$

gilt. Insbesondere ist  $\overline{BC}$  die längste Seite des Dreiecks  $\triangle ABC$ .

(b) Folgern Sie aus (a), dass ganz allgemein stets  $\overline{PC} < \overline{AC}$  oder  $\overline{PC} < \overline{BC}$  gilt.

(c) Sei  $K = K(M, A) \subseteq \mathbf{P}$  ein Kreis. Das **Innere**  $I_K$  von  $K$  sei die Menge

$$I_K := \{P \in \mathbf{P} \mid P = M \text{ oder } \overline{MP} < \overline{MA}\}.$$

Zeigen Sie, dass  $I_K \cup K$  konvex im Sinne von Übungsaufgabe 3.7 ist.

(d) Wir nehmen nun an, dass in  $\mathbb{H}$  zusätzlich (P) gilt. Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  in allgemeiner Lage und  $K$  der Umkreis von  $\triangle ABC$ . Folgern Sie dann aus (c), dass alle von  $A, B, C$  verschiedenen Punkte auf den Seiten von  $\triangle ABC$  in  $I_K$  liegen.

**Aufgabe 3.14 (Höhenformel).** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck in  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  mit Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ , und seien  $A', B', C'$  die Fußpunkte der Höhen  $h_A, h_B, h_C$ . Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten.

$$\begin{aligned} \|A - A'\| &= c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma, \\ \|B - B'\| &= a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha, \\ \|C - C'\| &= b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

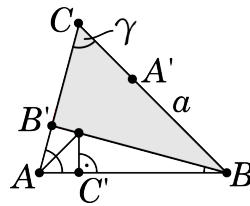


Abbildung 3.5: Zum Ablesen markiert:  $\|B - B'\| = a \cdot \sin \gamma$ .

---

## Euklidische Geometrie

---

Im Kontext von Hilbertebenen haben wir bereits eine Vielzahl klassischer geometrischer Sätze gezeigt. Es stellt sich jedoch heraus, dass einige klassische Aussagen in beliebigen Hilbertebenen nicht korrekt sind. So werden wir in Kapitel 5 eine Hilbertebene konstruieren, in der das Parallelenaxiom und damit auch der starke Wechselwinkelsatz 3.50 nicht gelten. Offensichtlich müssen wir also unserem Axiomensatz noch weitere Axiome hinzufügen. So kommen wir zum Begriff der *euklidischen Ebene*, in der uns alle Objekte und Schlussweisen zur Verfügung stehen, die in Euklids Elementen eine Rolle spielen. Über den Hauptsatz für euklidische Ebenen 4.9 sehen wir ein, dass sich alle euklidischen Ebenen in geeigneter Weise identifizieren lassen, so dass es genügt, die Geometrie in einem Standardmodell zu untersuchen.

### 4.1 Das Vollständigkeitsaxiom

Für die Identifikation einer gegebenen Hilbertebene  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  mit der euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}$  konstruiert man ein Koordinatensystem, das eine gegebene Gerade bijektiv auf die  $x$ -Achse abbildet. Damit dies möglich ist, muss die zugrundeliegende Hilbertebene bestimmte Vollständigkeitseigenschaften erfüllen. Wir erinnern zunächst an das aus der Analysis bekannte

**Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen** Sei  $(S, T)$  ein Dedekindschnitt von  $\mathbb{R}$ , d. h. ein Paar  $(S, T)$  nichtleerer Teilmengen von  $\mathbb{R}$  mit  $S \cup T = \mathbb{R}$  und  $p < q$  für alle  $p \in S$  und alle  $q \in T$ . Dann gibt es genau ein  $r \in \mathbb{R}$  mit  $p \leq r \leq q$  für alle  $p \in S$  und alle  $q \in T$ . Insbesondere ist dann

$$\begin{array}{l} \text{entweder} \quad S = (-\infty, r) \text{ und } T = [r, \infty) \\ \text{oder} \quad \quad S = (-\infty, r] \text{ und } T = (r, \infty). \end{array}$$

Wir bemerken, dass die Ungleichung  $p < q$  für alle  $p \in S$  und alle  $q \in T$  aus der obigen Definition eines Dedekindschnitts von  $\mathbb{R}$  insbesondere impliziert, dass kein Punkt aus  $S$  zwischen zwei Punkten aus  $T$  liegt und kein Punkt aus  $T$  zwischen zwei Punkten aus  $S$ . Die nachfolgende Übertragung des Begriffs des Dedekindschnitts in unsere Situation ist daher naheliegend:

**Definition 4.1 (I + A).** Ein *Dedekindschnitt* einer Geraden  $g \in \mathbf{G}$  ist ein Paar  $(s, t)$  nichtleerer Teilmengen von  $g$  mit

- $s \cup t = g$ .
- Kein Punkt von  $t$  liegt zwischen zwei Punkten aus  $s$ , für beliebige  $P \neq Q \in s$  gilt also  $\overline{PQ} \subseteq s$ .
- Kein Punkt von  $s$  liegt zwischen zwei Punkten aus  $t$ , für beliebige  $P \neq Q \in t$  gilt also  $\overline{PQ} \subseteq t$ .

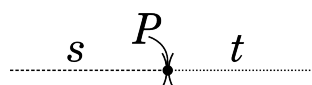
**Definition 4.2 (H).** Die Hilbertebene  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  erfüllt das **Vollständigkeitsaxiom**, wenn gilt:

(V) Für jede Gerade  $g \in \mathbf{G}$  und jeden Dedekindschnitt  $(s, t)$  von  $g$  gibt es genau einen Punkt  $P \in \mathbf{P}$ , so dass für alle  $A \in s, B \in t$  genau eine der folgenden drei Aussagen gilt.

$$P = A, \quad P = B \quad \text{oder} \quad A \star P \star B.$$

Für „Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  eine Hilbertebene, in der das Vollständigkeitsaxiom (V) gilt.“ schreiben wir künftig auch kurz „**(H + V)**“.

**Bemerkung 4.3 (H + V).** Ist  $(s, t)$  ein Dedekindschnitt einer Geraden  $g$  und  $P$  der von (V) dazu gelieferte Punkt, dann ist entweder  $s$  ein Strahl auf  $g$  mit Ausgangspunkt  $P$  und  $t$  das Komplement von  $s$ , oder  $t$  ist ein Strahl auf  $g$  mit Ausgangspunkt  $P$  und  $s$  ist das Komplement von  $t$ ,



denn: Hier liegen sind zwei Fälle zu betrachten.

**Fall 1:**  $P \in t$ . Es existiert ein von  $P$  verschiedener Punkt  $Q \in t$ , andernfalls läge  $P$  zwischen zwei Punkten aus  $s$ . Es folgt  $\overline{PQ} \subseteq t$ . Sei  $R \in g$  mit  $P \star Q \star R$ . Wäre  $R \in s$ , so ergäbe sich ein Widerspruch zu (V). Somit liegt  $R$  in  $t$  und es folgt  $\overline{PQ} \subseteq t$ . Nach (V) gilt  $S \star P \star Q$  für ein beliebiges  $S \in s$ . Sei nun  $R \in t \setminus \{P\}$ . Wiederum aufgrund von (V) ergibt sich  $S \star P \star R$ , also  $QR|_P$  und damit  $R \in \overline{PQ}$ . Insgesamt erhalten wir  $t = \overline{PQ}$  und  $t = g \setminus s$ .

**Fall 2:**  $P \in s$ . Dieser Fall ergibt sich analog. #

**Beispiel 4.4.** (a)  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  erfüllt das Vollständigkeitsaxiom (V),

denn: Sei  $g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  eine Gerade, und sei  $(s, t)$  ein Dedekindschnitt von  $g$ . Für beliebige aber feste  $A \neq B \in g$  schreiben wir

$$g = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

und setzen

$$S := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda A + (1 - \lambda)B \in s\} \quad \text{und} \quad T := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda A + (1 - \lambda)B \in t\}.$$

Wegen  $g = s \cup t$  gilt hierbei  $\mathbb{R} = S \cup T$ . Nun sind entweder alle  $p \in S$  kleiner als alle  $q \in T$  oder umgekehrt, da es sonst  $p_1, p_2 \in S$  und  $q_1, q_2 \in T$  gäbe mit  $p_1 > q_1$  und  $p_2 < q_2$ . Zwangsläufig läge für diese Punkte einer der folgenden drei Fälle vor.

**Fall 1:**  $q_1 > p_2$ . Dann gälte  $p_1 > q_1 > p_2$ , und es folgte schnell die Existenz eines Punktes in  $t$ , der zwischen zwei Punkten von  $s$  liegt.

**Fall 2:**  $q_1 = p_2$ . Unter dieser Voraussetzung wären  $S$  und  $T$  und damit auch  $s$  und  $t$  nicht disjunkt.

**Fall 3:**  $q_1 < p_2$ . Hier ergäbe sich  $q_1 < p_2 < q_2$ , und es folgte schnell die Existenz eines Punktes in  $s$ , der zwischen zwei Punkten von  $t$  liegt.

Da alle drei Möglichkeiten zu einem Widerspruch führen, müssen tatsächlich alle  $p \in S$  kleiner als alle  $q \in T$  sein oder umgekehrt. Nehmen wir ohne Einschränkung an, für alle  $p \in S$  und  $q \in T$  gelte  $p < q$ . Nach dem Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen gibt es genau ein  $r \in \mathbb{R}$  mit  $p \leq r \leq q$  für alle  $p \in S$  und alle  $q \in T$ . Dies ist äquivalent dazu, dass genau ein  $P \in g$  existiert, so dass für alle  $A \in s$  und alle  $B \in t$  genau eine der folgenden Aussagen gilt.

$$P = A, \quad P = B \quad \text{oder} \quad A \star P \star B.$$

Damit ist die Gültigkeit von (V) nachgewiesen. #

(b)  $\mathbb{A}^2(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})$  erfüllt das Vollständigkeitsaxiom (V) nicht,

denn: Dort lässt sich die  $x$ -Achse als die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$s = \{(x, 0) \in (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})^2 \mid x < \pi\} \quad \text{und} \quad t = \{(x, 0) \in (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})^2 \mid x > \pi\}$$

schreiben. Offenbar ist  $(s, t)$  ein Dedekindschnitt der  $x$ -Achse. Ein Punkt  $P$  wie in (V) gefordert existiert aber nicht, da  $\pi$  transzendent ist und somit nicht in  $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$  liegt. #

**Satz 4.5** (Archimedisches Axiom, **H + V**). Es seien  $A \neq B$  sowie  $A' \neq B'$  Punkte aus **P**. Seien induktiv für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  die Punkte  $A'_k$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'B'}$  durch folgende Vorschrift eindeutig bestimmt.

- $A'_0 := A'$ ,
- $A'_1$  ist der eindeutige Punkt auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'B'}$  mit  $\overline{A'_0 A'_1} \cong \overline{AB}$ ,
- für alle natürlichen Zahlen  $k \geq 2$  ist  $A'_k$  der eindeutig bestimmte Punkt auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'B'}$  mit  $A'_{k-2} \star A'_{k-1} \star A'_k$  und  $\overline{A'_{k-1} A'_k} \cong \overline{AB}$ .

Dann gibt es eine natürliche Zahl  $n$  mit  $A' \star B' \star A'_n$ .

*Beweis.* Sei  $g := \overleftarrow{A'B'}$  und  $\overrightarrow{A'C'}$  der zu  $\overrightarrow{A'B'}$  entgegengesetzte Strahl. Wir setzen

$$s := \{P \in g \mid \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } A' \star P \star A'_n\} \cup \overrightarrow{A'C'},$$

$$t := g \setminus s.$$

Im Falle  $t = \emptyset$  ist  $s = g$ , und insbesondere liegt der Punkt  $B'$  in  $s$ . Also gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $A' \star B' \star A'_n$ . Wir nehmen daher im Folgenden  $t \neq \emptyset$  an. Dann ist  $(s, t)$  ein Dedekindschnitt von  $g$ ,

*denn:* Offenbar ist  $g$  die disjunkte Vereinigung der beiden nichtleeren Teilmengen  $s$  und  $t$ . Darüber hinaus liegt kein Punkt von  $s$  zwischen zwei Punkten von  $t$ . Sind nämlich  $P, P' \in t$  und  $Q \in s$  mit  $P \star Q \star P'$ , dann liegt mit  $P$  und  $P'$  auch der Punkt  $Q$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'B'}$ . Nach Konstruktion von  $s$  gibt es dann ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $A' \star Q \star A'_n$ . Nach Konstruktion gilt nun entweder  $A' \star P \star Q \star P'$  oder  $A' \star P' \star Q \star P$ , woraus sich entweder  $A' \star P \star Q \star A'_n$  oder  $A' \star P' \star Q \star A'_n$  ergibt, also entweder  $A' \star P \star A'_n$  oder  $A' \star P' \star A'_n$ , im Widerspruch zu  $P, P' \in t$ . Analog zeigt man, dass kein Punkt von  $t$  zwischen zwei Punkten von  $s$  liegt. #

Aufgrund des Vollständigkeitsaxioms existiert ein Punkt  $U \in g$ , so dass für alle  $P \in s$  und alle  $Q \in t$  eine der drei Möglichkeiten  $U = P$ ,  $U = Q$  oder  $P \star U \star Q$  gilt.

Der Punkt  $U$  liegt nicht in  $s$ ,

*denn:* Nehmen wir an,  $U$  läge in  $s$ . Wegen  $A' \in s$  und  $t \subseteq \overrightarrow{A'B'}$  folgte aus der obigen Eigenschaft  $U \in \overrightarrow{A'B'}$ . Nach Konstruktion von  $s$  gäbe es somit ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $A' \star U \star A'_n$ . Sei nun  $Q$  ein Punkt aus der Menge  $t$ . Dieser ist insbesondere verschieden von den Punkten  $A', A'_n$ , und es gälte offenbar  $A' \star A'_n \star Q$ , denn sowohl  $Q \star A' \star A'_n$  als auch  $A' \star Q \star A'_n$  führten sofort zum Widerspruch. Wir erhielten  $A' \star U \star A'_n \star Q$  und insbesondere  $U \star A'_n \star Q$ , was wegen  $A'_n \in s$  und  $Q \in t$  im Widerspruch zur charakterisierenden Eigenschaft von  $U$  steht. #

Der Punkt  $U$  liegt auch nicht in  $t$ ,

*denn:* Nehmen wir an,  $U$  läge in  $t$  und  $V$  wäre der eindeutig bestimmte Punkt auf dem Strahl  $\overrightarrow{UC'}$  mit  $\overline{UV} \cong \overline{AB}$ . Im Fall  $V \in t$  läge  $V$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'B'}$ . Das lieferte  $A' \star V \star U$ , was wegen  $A' \in s$  im Widerspruch zur Konstruktion von  $U$  steht. Also müsste  $V$  in der Menge  $s$  liegen. Läge  $V$  speziell auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'C'}$ , so folgte  $V \star A' \star U$ , also  $\overline{A'U} < \overline{VU} \cong \overline{AA'_1}$ , so dass im Widerspruch zu  $U \in t$  die Anordnung  $V \star A' \star U \star A'_1$  gälte.  $V$  läge somit nicht auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'C'}$ , und es gäbe eine natürliche Zahl  $n$  mit  $A' \star V \star A'_n$ . Wegen  $U \in t$  gälte weiterhin  $A' \star A'_n \star U$  und somit  $A' \star V \star A'_n \star U$ . Es folgte  $\overline{A'_nU} < \overline{UV}$ , was wegen  $\overline{UV} \cong \overline{A'_nA'_{n+1}}$  mittels 3.18 zu  $\overline{A'_nU} < \overline{A'_nA'_{n+1}}$  führte. Das wiederum implizierte  $A'_n \star U \star A'_{n+1}$ . Insgesamt erhielten wir  $A' \star V \star A'_n \star U \star A'_{n+1}$  und deshalb  $A' \star U \star A'_{n+1}$ . Weil die Punkte  $A'$  und  $A'_{n+1}$  in  $s$  lägen, läge auch der Punkt  $U$  in  $s$ , was ein Widerspruch ist. #

Unsere Annahme  $t \neq \emptyset$  ist damit nicht haltbar.  $\square$

## 4.2 Euklidische Ebenen

Wir wollen nun den bereits in der Einleitung dieses Kapitels beschriebenen Begriff der euklidischen Ebene in einer Definition festhalten:

**Definition 4.6.** Eine Hilbertebene, die das Vollständigkeitsaxiom (V) und das Parallelenaxiom (P) erfüllt, heißt *euklidische Ebene*.

**Definition 4.7.** Ein Isomorphismus im Sinne von Definition 3.30 zwischen zwei euklidischen Ebenen heißt ein *Isomorphismus euklidischer Ebenen*. Ein Isomorphismus von einer euklidischen Ebene  $\mathbb{E}$  auf sich selbst heißt ein *Automorphismus* von  $\mathbb{E}$ . Die Menge der Automorphismen von  $\mathbb{E}$  wird mit  $\text{Aut}(\mathbb{E})$  bezeichnet.

**Beispiel 4.8.** Nach den Beispielen 2.12, 3.24 und 4.4 ist die reelle affine Standardebene  $\mathbb{E} := \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq)$  eine euklidische Ebene. Wir nennen sie das kartesische Modell der **euklidischen Standardebene**.

Das zentrale Resultat in der Theorie der euklidischen Ebenen ist der folgende Satz:

**Satz 4.9** (Hauptsatz für euklidische Ebenen). *Jede euklidische Ebene ist isomorph zu  $\mathbb{E}$ .*

Der Beweis dieses Satzes ist sehr aufwändig und wird hier nicht durchgeführt. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in den Abschnitten 4.3 bis 4.8 unseres Lehrbuchs „Grundlagen der ebenen Geometrie“.

Eine Folgerung ist, dass wir den Beweis einer behaupteten Aussage in einer beliebigen euklidischen Ebene stets in der euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}$  führen dürfen und dabei sowohl analytische als auch synthetische Methoden heranziehen können. Für „Sei  $\mathbb{E}$  die euklidische Standardebene.“ schreiben wir künftig auch kurz  $(\mathbb{E})$ .

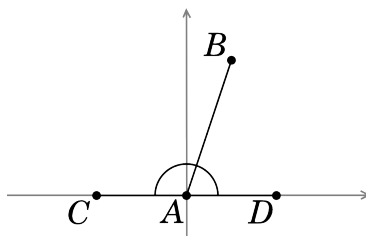
Als ein erstes Beispiel wollen wir die synthetisch eingeführten Begriffe des Ergänzungswinkels und des Inneren eines Winkels mit dem in Abschnitt 1.3 eingeführten analytischen Winkelmaß quantitativ untersuchen:

**Proposition 4.10**  $(\mathbb{E})$ . *Seien  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$  vier Punkte, so dass sowohl  $A, B, C$  als auch  $A, B, D$  in allgemeiner Lage sind. Dann gilt*

- (a) *Sind  $\angle CAB, \angle BAD$  Ergänzungswinkel, dann gilt  $\angle CAB + \angle BAD = \pi$ . Insbesondere ist  $\angle CAB$  genau dann ein rechter Winkel, wenn  $\angle CAB = \frac{\pi}{2}$  ist.*
- (b) *Liegt der Punkt  $D$  im Inneren von  $\angle BAC$ , so gilt  $\angle BAD + \angle DAC = \angle BAC$ .*

*Beweis.* Wir beweisen zunächst (a). Seien also  $\angle CAB$  und  $\angle BAD$  Ergänzungswinkel. Dann gilt  $C \star A \star D$ , so dass es eine Bewegung gibt, die  $A$  auf den Ursprung und  $C, D$  auf Punkte auf der  $x$ -Achse abbildet, die auf verschiedenen Seiten von  $A$  liegen. Da Bewegungen Winkelgrößen unverändert lassen, können wir ohne Einschränkung von dieser Situation ausgehen. Weiter können wir  $C$  und  $D$  durch beliebige Punkte ihres jeweiligen von  $A$  ausgehenden Strahls ersetzen. Insgesamt können wir daher für geeignete  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  ohne Einschränkung annehmen, es gelte

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Mit (1.11) folgt

$$\cos \angle CAB = \frac{\langle C | B \rangle}{\|C\| \cdot \|B\|} = \frac{-b_1}{\|B\|} = -\frac{\langle B | D \rangle}{\|B\| \cdot \|D\|} = -\cos \angle BAD.$$

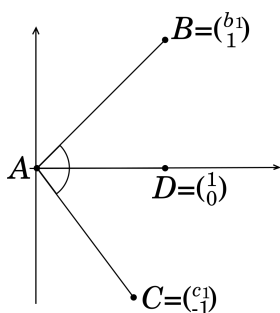
Da beide Winkelmaße im Intervall  $(0, \pi)$  liegen, haben wir damit (a) gezeigt.

Beim Beweis von (b) können wir ohne Einschränkung von

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ausgehen. Da  $D$  im Inneren des Winkels  $\angle BAC$  liegt, liegen  $B$  und  $C$  nach Lemma 3.22 auf verschiedenen Seiten der Geraden  $\overleftrightarrow{AD}$ , also der  $x$ -Achse. Ohne Einschränkung liege  $B$  in der oberen und  $C$  in der unteren Halbebene. Weil wir weiter  $B$  und  $C$  durch beliebige Punkte ihres jeweiligen von  $A$  ausgehenden Strahls ersetzen können, dürfen wir sogar annehmen, es gelte

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Wegen  $CD \perp_{\overleftrightarrow{AB}}$  folgt mit den Überlegungen aus Beispiel 3.3

$$\begin{aligned} -\operatorname{sgn}(c_1 + b_1) &= \operatorname{sgn}\left(\left\langle \begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right\rangle\right) = \operatorname{sgn}(\langle C | B^\perp \rangle) \\ &= \operatorname{sgn}(\langle D | B^\perp \rangle) = \operatorname{sgn}\left(\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right\rangle\right) = -\operatorname{sgn}(1) \end{aligned}$$



und somit  $b_1 + c_1 > 0$ . Mit (1.16) erhalten wir

$$\sin \angle BAD = \frac{|\det(B \ D)|}{\|B\| \cdot \|D\|} = \frac{1}{\|B\|} \quad \text{und} \quad \sin \angle DAC = \frac{|\det(D \ C)|}{\|D\| \cdot \|C\|} = \frac{1}{\|C\|}.$$

Mit den Additionstheoremen von Sinus und Kosinus folgt nun

$$\begin{aligned} \sin(\angle BAD + \angle DAC) &= \sin \angle BAD \cos \angle DAC + \cos \angle BAD \sin \angle DAC \\ &= \frac{1}{\|B\|} \frac{c_1}{\|C\|} + \frac{b_1}{\|B\|} \frac{1}{\|C\|} = \frac{c_1 + b_1}{\|B\| \|C\|} > 0, \\ \cos(\angle BAD + \angle DAC) &= \cos \angle BAD \cos \angle DAC - \sin \angle BAD \sin \angle DAC \\ &= \frac{b_1}{\|B\|} \frac{c_1}{\|C\|} - \frac{1}{\|B\|} \frac{1}{\|C\|} = \frac{b_1 c_1 - 1}{\|B\| \|C\|} = \frac{\langle B \mid C \rangle}{\|B\| \|C\|} = \cos \angle BAC. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich schließlich wie verlangt  $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$ .  $\square$

### 4.3 Kreise

Kreise als geometrische Figuren haben wir bereits in Abschnitt 3.9 eingeführt. Da wir nun auch analytisch argumentieren dürfen, bietet sich aber eine etwas eingängigere Notation an. Von nun an schreiben wir für alle  $M \in \mathbb{R}^2$  und alle  $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$K_r(M) := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - M\| = r\}$$

für den **Kreis** mit **Mittelpunkt**  $M$  und **Radius**  $r$ . Das ist insofern mit der alten Notation kompatibel, als für jeden beliebigen Punkt  $A \in K_r(M)$  die Identität  $K_r(M) = K(M, A)$  gilt. Die Punkte  $P \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|P - M\| < r$  liegen **innerhalb** von  $K_r(M)$ , die Punkte mit  $\|P - M\| > r$  **außerhalb**.

Wir hatten schon in Proposition 3.70 festgestellt, dass ein Kreis mit einer Geraden durch seinen Mittelpunkt immer genau zwei Schnittpunkte hat. Wir wollen nun den Durchschnitt eines Kreises mit einer beliebigen Geraden studieren:

**Proposition 4.11** ( $\mathbb{E}$ ). Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , und sei  $g = g_{P,v}$  eine Gerade in  $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  mit  $P, v \in \mathbb{R}^2$  und  $v \neq 0$ . Dann gilt:

(a) Genau dann besteht  $K \cap g$  aus zwei Punkten, wenn

$$\|P - M\|^2 < r^2 + \left\langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2$$

gilt. In diesem Fall nennt man  $g$  eine **Sekante** von  $K$ .

(b) Genau dann besteht  $K \cap g$  aus einem Punkt, wenn

$$\|P - M\|^2 = r^2 + \left\langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2$$

gilt. In diesem Fall nennt man  $g$  eine **Tangente** von  $K$ .

(c) Genau dann ist  $K \cap g$  leer, wenn

$$\|P - M\|^2 > r^2 + \left\langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2$$

gilt. In diesem Fall nennt man  $g$  eine **Passante** von  $K$ .

In den Fällen (b) und (c) besitzt  $g$  keine Punkte im Inneren von  $K$ .

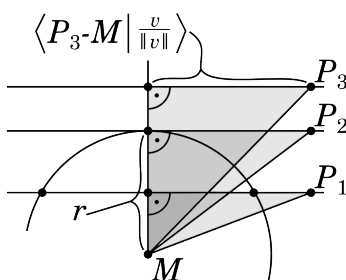


Abbildung 4.1: Der Durchschnitt von  $K$  und  $g$  ist zwei-, ein- bzw. nullelementig, falls der Lotfußpunkt von  $M$  auf  $g$  im Kreis bzw. auf dem Kreis bzw. außerhalb des Kreises liegt.

*Beweis.* Sei  $Q = P + \lambda v \in g$  mit einem  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} Q &\in K_r(M) \\ \Leftrightarrow r &= \|Q - M\| \\ \Leftrightarrow r^2 &= \|Q - M\|^2 = \langle Q - M \mid Q - M \rangle = \langle P + \lambda v - M \mid P + \lambda v - M \rangle \\ &= \|P - M\|^2 + 2\lambda \langle P - M \mid v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= \|v\|^2 \cdot \lambda^2 + 2\langle P - M \mid v \rangle \cdot \lambda + (\|P - M\|^2 - r^2) \end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Gleichung in  $\lambda$ , deren Lösungsmenge in Abhängigkeit vom Vorzeichen  $\in \{+, 0, -\}$  ihrer Diskriminante

$$\begin{aligned} &(2\langle P - M \mid v \rangle)^2 - 4 \cdot \|v\|^2 \cdot (\|P - M\|^2 - r^2) \\ &= -4\|v\|^2 \cdot (\|P - M\|^2 - r^2 - \langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|} \rangle^2) \end{aligned}$$

zweielementig, einelementig oder leer ist. In den Fällen (b) und (c) gilt wegen  $Q \in g = g_{Q,v}$

$$\|Q - M\|^2 \geq r^2 + \left\langle Q - M \mid \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2 \geq r^2,$$

so dass  $g$  keinen Punkt im Inneren von  $K$  besitzt.  $\square$

**Korollar 4.12 (E).** Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  und sei  $g = g_{P,v}$  eine Gerade in  $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  mit  $P, v \in \mathbb{R}^2$  und  $v \neq 0$ . Sei weiter  $Q$  ein Element im Durchschnitt  $K \cap g$ . Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

(i)  $g$  ist Tangente an  $K$ ,

$$(ii) \quad \angle(Q - M, v) = \frac{\pi}{2}.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung setzen wir  $P = Q$ . Nach Proposition 4.11 gilt dann

$$g \text{ Tangente an } K \iff \|Q - M\|^2 = r^2 + \left\langle Q - M \mid \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2.$$

Da wir  $Q$  als Element des Kreises angenommen hatten, ist  $\|Q - M\| = r$ , und wir haben

$$\begin{aligned} g \text{ Tangente an } K &\iff \left\langle Q - M \mid \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2 = 0 \\ &\iff (Q - M) \perp v \\ &\iff \angle(Q - M, v) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Wir wissen jetzt, wie viele Schnittpunkte eine gegebene Gerade mit einem gegebenen Kreis hat, und wollen noch etwas über die Lage dieser Schnittpunkte in Erfahrung bringen. Zunächst führen wir dazu eine Hilfsgröße ein:

**Definition 4.13** ( $\mathbb{E}$ ). Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , und sei  $P \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt. Dann heißt

$$\kappa_K(P) := \|P - M\|^2 - r^2$$

die **Potenz** von  $P$  in Bezug auf  $K$ .

Offensichtlich gibt das Vorzeichen der Potenz Auskunft darüber, ob der Punkt  $P$  in  $K$ , auf  $K$  oder außerhalb von  $K$  liegt. Der Betrag der Potenz liefert dafür Informationen über die (relative) Lage der Schnittpunkte von Sekanten oder Tangenten von  $K$  in  $P$ .

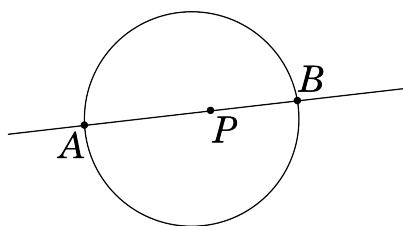


Abbildung 4.2: Eine **Sehne** eines Kreises  $K$  ist die Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten einer gegebenen Sekante von  $K$ .

**Satz 4.14** (Zwei-Sehnen-Satz,  $\mathbb{E}$ ). Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  und sei  $P \in \mathbb{R}^2 \setminus K$  ein Punkt. Sei weiter  $g$  eine Sekante von  $K$  durch  $P$  mit  $g \cap K = \{A, B\}$ . Dann gilt

$$\|P - A\| \cdot \|P - B\| = |\kappa_K(P)|,$$

für alle durch  $P$  verlaufenden Sekanten von  $K$  ist also das Produkt der sogenannten **Sehnenabschnitte** gleich.

*Beweis.* Sei  $g_{P,v}$  eine Sekante durch  $P$  mit  $\|v\| = 1$ . Genau dann liegt  $Q := P + \lambda v$  im Durchschnitt  $g_{P,v} \cap K$ , wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \|v\|^2 \cdot \lambda^2 + 2\langle P - M | v \rangle \cdot \lambda + (\|P - M\|^2 - r^2) \\ &= \lambda^2 + 2\langle P - M | v \rangle \cdot \lambda + \kappa_K(P) \end{aligned}$$

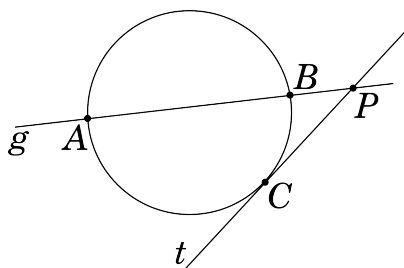
gilt; das ist genau wie im Beweis von Proposition 4.11. Da  $g_{P,v}$  eine Sekante von  $K$  ist, hat diese quadratische Gleichung in  $\lambda$  zwei reelle Lösungen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Es gilt also  $\kappa_K(P) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$  und ohne Einschränkung  $A = P + \lambda_1 v$  und  $B = P + \lambda_2 v$ . Es folgt die Behauptung

$$\|P - A\| \cdot \|P - B\| = \|\lambda_1 v\| \cdot \|\lambda_2 v\| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2| = |\kappa_K(P)|.$$

□

**Satz 4.15** (Sehnen-Tangenten-Satz,  $\mathbb{E}$ ). Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , und sei  $P \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt außerhalb von  $K$ . Seien weiter  $g$  eine Sekante von  $K$  durch  $P$  mit  $g \cap K =: \{A, B\}$  und  $t$  eine Tangente an  $K$  durch  $P$  mit  $t \cap K =: \{C\}$ . Dann gilt

$$\|P - A\| \cdot \|P - B\| = \|P - C\|^2 = |\kappa_K(P)|.$$



*Beweis.* Nach dem Zwei-Sehnen-Satz 4.14 ist nur das zweite Gleichheitszeichen zu zeigen. Dessen Beweis erfolgt analog, außer, dass es statt zwei verschiedenen Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2$  der quadratischen Gleichung nurmehr eine doppelte Nullstelle  $\mu$  gibt. □

Wir wollen uns jetzt dem Problem des Durchschnitts zweier Kreise widmen und betrachten dazu die Menge der Punkte, die bezüglich zweier verschiedener Kreise die gleiche Potenz haben. Es stellt sich heraus, dass diese eine Gerade ist, deren Durchschnitte mit je einem der beteiligten Kreise mit dem Durchschnitt der Kreise untereinander übereinstimmen. So lässt sich die Frage des Durchschnitts zweier Kreise auf die bereits behandelte Frage des Durchschnitts eines Kreises mit einer Geraden zurückführen:

**Proposition 4.16** ( $\mathbb{E}$ ). Für je zwei Kreise  $K_1 = K_r(M)$  und  $K_2 = K_s(N)$  mit  $M \neq N \in \mathbb{R}^2$  und  $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt:

- $p_{K_1, K_2} := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \kappa_{K_1}(P) = \kappa_{K_2}(P)\}$  ist eine Gerade in  $\mathbb{E}$ , die sogenannte **Potenzgerade** von  $K_1$  und  $K_2$ .
- $p_{K_1, K_2} \perp \overleftrightarrow{MN}$ ,

$$(c) \quad K_1 \cap K_2 = K_1 \cap p_{K_1, K_2} = K_2 \cap p_{K_1, K_2}.$$

Insbesondere schneiden sich zwei verschiedene Kreise in höchstens zwei Punkten.

*Beweis.* Zum Nachweis von (a) sei  $P \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} P \in p_{K_1, K_2} &\iff \kappa_{K_1}(P) = \kappa_{K_2}(P) \\ &\iff \|P - M\|^2 - r^2 = \|P - N\|^2 - s^2 \\ &\iff \|P\|^2 - 2\langle P | M \rangle + \|M\|^2 - r^2 = \|P\|^2 - 2\langle P | N \rangle + \|N\|^2 - s^2 \\ &\iff \langle P | N - M \rangle = \frac{1}{2}(r^2 - s^2 + \|N\|^2 - \|M\|^2). \end{aligned}$$

Aufgrund von  $M \neq N$  ist  $p_{K_1, K_2}$  insbesondere nicht leer. Ist nun  $A \in p_{K_1, K_2}$  fixiert, so ergibt sich

$$P \in p_{K_1, K_2} \iff \langle P | N - M \rangle = \langle A | N - M \rangle \iff \langle P - A | N - M \rangle = 0.$$

Die obige Gleichung beschreibt genau die Hesse'sche Normalform der Geraden  $g_{A, (N-M)^\perp}$ , was neben (a) auch (b) impliziert. Die erste Gleichung in (c) ergibt sich nun direkt aus der Äquivalenz

$$\begin{aligned} P \in K_1 \cap K_2 &\iff \kappa_{K_1}(P) = 0 \text{ und } \kappa_{K_2}(P) = 0 \\ &\iff \kappa_{K_1}(P) = 0 \text{ und } \kappa_{K_1}(P) = \kappa_{K_2}(P) \\ &\iff P \in K \cap p_{K_1, K_2}, \end{aligned}$$

und die zweite Gleichung folgt aus Symmetriegründen. □

Nachdem wir nun wissen, dass der Durchschnitt zweier verschiedener Kreise höchstens zwei Elemente hat, wollen wir nun herausfinden, unter welchen Voraussetzungen es keinen, einen oder zwei Schnittpunkte gibt. Dabei hilft uns das folgende Lemma:

**Lemma 4.17** ( $\mathbb{E}$ ). *Sei  $\varphi$  eine Bewegung der euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}$ , und sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dann gilt*

$$\varphi(K_r(M)) = K_r(\varphi(M)),$$

insbesondere bilden also Bewegungen Kreise auf Kreise ab.

*Beweis.* Sei zunächst  $P \in K_r(M)$  ein Punkt. Dann gilt mit den bekannten Bewegungseigenschaften  $\|\varphi(M) - \varphi(P)\| = \|M - P\| = r$ , so dass  $\varphi(P)$  in  $K_r(\varphi(M))$  liegt. Es folgt

$$\varphi(K_r(M)) \subseteq K_r(\varphi(M)).$$

Da nach Beispiel 3.31 mit  $\varphi$  auch  $\varphi^{-1}$  eine Bewegung ist, gilt analog

$$\varphi^{-1}(K_r(\varphi(M))) \subseteq K_r(\varphi^{-1} \circ \varphi(M)) = K_r(M).$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$K_r(M) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(K_r(M)) = \varphi^{-1}(\varphi(K_r(M))) \subseteq \varphi^{-1}(K_r(\varphi(M))) \subseteq K_r(M),$$

so dass in allen Teilmengenbeziehungen Gleichheit gelten muss, was das Lemma zeigt. □

**Satz 4.18** (Kreis-Kreis-Schnitt-Eigenschaft,  $\mathbb{E}$ ). Für zwei Kreise  $K_1 = K_r(M)$  und  $K_2 = K_s(N)$  mit  $M, N \in \mathbb{R}^2$  und  $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$  sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- (i)  $K_1$  besitzt einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb von  $K_2$ .<sup>1</sup>  
(ii)  $|K_1 \cap K_2| = 2$ .

*Beweis.* Da im Fall  $M = N$  stets sowohl Aussage (i) als auch Aussage (ii) falsch ist, können wir für den Rest des Beweises ohne Einschränkung  $M \neq N$  annehmen, und da die Fragestellung unter Bewegungen invariant ist, sogar

$$K_1 = K_r\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad K_2 = K_s(N) \quad \text{mit} \quad N = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } n > 0.$$

Für einen Schnittpunkt  $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  gilt

$$\begin{aligned} S \in K_1 \cap K_2 &\implies \|S - M\| = r \quad \text{und} \quad \|S - N\| = s \\ &\implies x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad (x - n)^2 + y^2 = s^2 \\ &\implies 2xn - n^2 = x^2 - (x - n)^2 = r^2 - s^2 \\ &\implies x = \frac{r^2 - s^2 + n^2}{2n}. \end{aligned}$$

Die  $x$ -Koordinate eines Schnittpunkts ist also eindeutig. Da jeder Schnittpunkt insbesondere auf  $K_1$  liegen muss, folgt daher

$$\begin{aligned} |K_1 \cap K_2| = 2 &\iff y^2 = r^2 - \left(\frac{r^2 - s^2 + n^2}{2n}\right)^2 \quad \text{hat zwei Lösungen} \\ &\iff -r < \frac{r^2 - s^2 + n^2}{2n} < r \\ &\stackrel{n>0}{\iff} -2nr < r^2 - s^2 + n^2 < 2nr \\ &\iff (n - r)^2 < s^2 < (n + r)^2 \\ &\iff \left\| \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 < s^2 < \left\| \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &\iff \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ liegt innerhalb von } K_2 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ liegt außerhalb von } K_2. \end{aligned}$$

Es verbleibt zu zeigen, dass dies äquivalent dazu ist, dass es auf  $K_1$  je irgendeinen Punkt innerhalb beziehungsweise außerhalb von  $K_2$  gibt. Dem ist aber so,

denn: Aus der Analysis wissen wir, dass sich ein beliebiger Punkt  $P \in K_1$  in der Form

$$P = P(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit einem } t \in \mathbb{R}$$

<sup>1</sup>Aus Symmetriegründen besitzt dann auch  $K_2$  einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb von  $K_1$ .

schreiben lässt. Durch den Abstand

$$\|P(t) - N\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + (n - r \cos t)^2} = \sqrt{r^2 - 2nr \cos t + n^2}$$

ist offenbar eine stetige Funktion in der Variablen  $t \in \mathbb{R}$  gegeben. Wegen  $n > 0$  nimmt diese ihre (globalen) Minima in  $t \in 2\mathbb{Z}\pi$  und ihre (globalen) Maxima in  $t \in (2\mathbb{Z} + 1)\pi$  an. Es ist also  $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$  derjenige Punkt von  $K_1$ , der den kleinsten Abstand zu  $N$  hat, und  $\begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}$  der Punkt von  $K_1$  mit dem größten Abstand. Gibt es nun irgendwelche Punkte  $A, B \in K_1$ , so dass  $A$  innerhalb und  $B$  außerhalb von  $K_2$  liegt, dann folgt mit dem soeben Bewiesenen

$$s > \|A - N\| \geq \left\| \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} - N \right\| \quad \text{und} \quad s < \|B - N\| \leq \left\| \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} - N \right\|.$$

Es liegt also auch  $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$  innerhalb und  $\begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}$  außerhalb von  $K_2$ . Da die andere Schlussrichtung trivial ist, folgt hieraus die Behauptung. #

□

Die gerade nachgewiesene Kreis-Kreis-Schnitt-Eigenschaft ist nicht besonders gut dafür geeignet, für zwei gegebene euklidische Kreise tatsächlich nachzuprüfen, ob sie sich schneiden. In diesem Kontext ist das folgende, angenehmere Kriterium sehr nützlich. Es ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis von Satz 4.18 und macht auch eine Aussage, wenn zwei gegebene Kreise nur einen oder gar keinen Punkt gemeinsam haben:

**Korollar 4.19** ( $\mathbb{E}$ ). Für  $K_1 = K_r(M)$  und  $K_2 = K_s(N)$  mit  $M, N \in \mathbb{R}^2$ ,  $r \geq s \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $K_1 \neq K_2$  gilt

$$\begin{aligned} \left| \|M - N\| - r \right| < s &\iff |K_1 \cap K_2| = 2, \\ \left| \|M - N\| - r \right| = s &\iff |K_1 \cap K_2| = 1, \\ \left| \|M - N\| - r \right| > s &\iff |K_1 \cap K_2| = 0. \end{aligned}$$

Wir wollen im Rest dieses Abschnitts Kreise dazu verwenden, Dreiecke genauer zu studieren:

**Satz 4.20** (Peripheriewinkelsatz,  $\mathbb{E}$ ). Seien  $A \neq B \in \mathbb{R}^2$  Punkte auf dem Kreis  $K_r(U)$  um einen Punkt  $U \in \mathbb{R}^2$  mit einem Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Seien weiter die Seiten der Gerade  $\overleftrightarrow{AB}$  mit  $S_1$  und  $S_2$  bezeichnet. Dann gilt für einen von  $A$  und  $B$  verschiedenen Punkt  $C \in K_r(U) \cap S_1$

$$\angle ACB = \begin{cases} \frac{1}{2} \angle AUB & \text{für } U \in S_1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } U \in \overleftrightarrow{AB}, \\ \pi - \frac{1}{2} \angle AUB & \text{für } U \in S_2. \end{cases}$$

Inbesondere ist die Winkelgröße  $\angle ACB$  nicht von der Wahl des Punkts  $C \in K_r(U) \cap S_1$  abhängig.

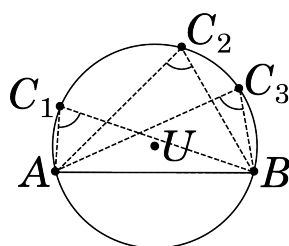


Abbildung 4.3:  $U$  und die drei Punkte  $C_1, C_2, C_3$  liegen auf derselben Seite der Geraden zwischen  $A$  und  $B$ . Die markierten drei Winkel sind also kongruent.

*Beweis.* Sei  $C \in K_r(U) \cap S_1$  ein beliebiger aber fest gewählter Punkt. Dann unterteilt das Dreieck  $\triangle ABC$  das Innere des Kreises in vier durch die Lage auf den verschiedenen Seiten von  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  und  $\overleftrightarrow{BC}$  definierte Teile und die drei Dreiecksseiten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  und  $\overline{BC}$  selbst. So ergeben sich für den Beweis des Satzes sieben Fälle, von denen wir hier allerdings nur einen behandeln wollen. Die übrigen Fälle werden in Übungsaufgabe 4.4 behandelt.

Liege dafür  $U$  im Sinne von Definition 3.27 im Inneren des Dreiecks  $\triangle ABC$ . Nach dem Satz von der Winkelsumme 1.68 für das Dreieck  $\triangle AUB$  gilt

$$\angle AUB = \pi - \angle UAB - \angle UBA.$$

Da  $U$  insbesondere im Inneren der Winkel  $\angle CAB$  und  $\angle CBA$  liegt, gelten nach Proposition 4.10

$$\angle UAB = \angle CAB - \angle CAU \quad \text{und} \quad \angle UBA = \angle CBA - \angle CBU.$$

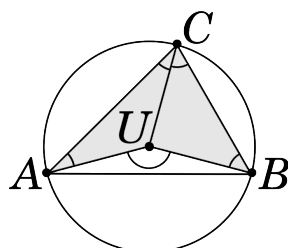
Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} \angle AUB &= \pi - (\angle CAB - \angle CAU) - (\angle CBA - \angle CBU) \\ &= (\pi - \angle CAB - \angle CBA) + (\angle CAU + \angle CBU). \end{aligned}$$

Mit dem Satz von der Winkelsumme 1.68 für das Dreieck  $\triangle ABC$  folgt

$$\angle AUB = \angle ACB + (\angle CAU + \angle CBU).$$

Nun ist  $U$  auch der Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $\triangle ABC$ , so dass  $\|U - A\| = \|U - B\| = \|U - C\|$  gilt und also die Dreiecke  $\triangle AUC$  und  $\triangle BUC$  gleichschenkelig sind.



Insbesondere gilt nach Proposition 3.54

$$\angle CAU \simeq \angle ACU \quad \text{und} \quad \angle CBU \simeq \angle UCB.$$



Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\angle AUB = \angle ACB + (\angle ACU + \angle UCB) = 2\angle ACB,$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen verwendet haben, dass  $U$  auch im Inneren des Winkels  $\angle ACB$  liegt. Damit ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen.  $\square$

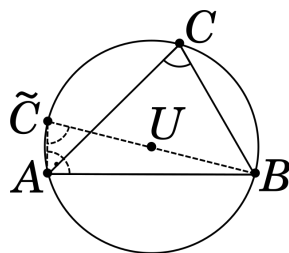
**Korollar 4.21** (Satz des Thales,  $\mathbb{E}$ ). Seien  $A, U, B \in \mathbb{R}^2$  drei Punkte mit  $A \star U \star B$  und  $\|U - A\| = \|U - B\|$ . Ist dann  $C \in \mathbb{R}^2$  ein dritter Punkt auf dem Kreis  $K(U, A)$ , so ist der Winkel  $\angle ACB$  ein rechter.

*Beweis.* Das ist gerade der Peripheriewinkelsatz für  $U \in \overleftrightarrow{AB}$ .  $\square$

**Satz 4.22** (Verschärfung des Sinussatzes,  $\mathbb{E}$ ). Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , Seitenlängen  $(a, b, c)$  und Umkreis  $K_r(U)$ . Dann gilt

$$2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung liege  $U$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{AB}$  wie  $C$ .<sup>2</sup> Nach dem bereits gezeigten Sinussatz 1.69 genügt es für den Beweis des Satzes  $\sin \gamma = \frac{c}{2r}$  zu zeigen. Da  $U$  und  $C$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{AB}$  liegen, liegt der zweite Schnittpunkt  $\tilde{C}$  der Geraden  $\overleftrightarrow{BU}$  mit dem Kreis  $K_r(U)$  auch auf derselben Seite wie  $C$ .



Nach dem Peripheriewinkelsatz 4.20 gilt also weiterhin  $\angle AC\tilde{B} = \gamma$ . Andererseits ist aber  $\tilde{a} := \|\tilde{C} - B\| = 2r$  leicht zu berechnen, und nach dem Satz des Thales 4.21 ist  $\angle \tilde{C}AB$  ein rechter Winkel. Da nach Korollar 1.70 der Sinus eines Winkels in rechtwinkligen Dreiecken als Quotient der Längen von Gegenkathete und Hypotenuse ausgedrückt werden kann, gilt die zu beweisende Beziehung

$$\sin \gamma = \frac{c}{\tilde{a}} = \frac{c}{2r}.$$

$\square$

<sup>2</sup>Ist dies nicht der Fall, so liegt  $U$  zwangsläufig auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{BC}$  wie  $A$ , und wir können nach einer Umbenennung der Punkte  $A, B, C$  denselben Beweis führen. Das schließt ausdrücklich auch den Fall mit ein, dass  $U$  auf der Strecke  $AB$  liegt.

**Satz 4.23** (Eulergleichung,  $\mathbb{E}$ ). Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Schwerpunkt  $S$ , Höhenschnittpunkt  $H$  und Umkreismittelpunkt  $U$ . Dann gilt die **Eulergleichung**

$$3S = H + 2U.$$

*Beweis.* Nach Definition gilt für den Schwerpunkt  $3S = A + B + C$ . Es folgt

$$\langle 3S \mid B - A \rangle = \langle A + B + C \mid B - A \rangle = \langle A + B \mid B - A \rangle + \langle C \mid B - A \rangle.$$

Nach Definition ist  $B - A$  ein Normalenvektor der Geraden  $h_C$  bzw.  $m_{AB}$ . Die jeweiligen Hesse'schen Normalformen (vgl. Beispiel 3.3) lauten also

$$h_C = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \langle P \mid B - A \rangle = \langle C \mid B - A \rangle\},$$

$$m_{AB} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \langle P \mid B - A \rangle = \langle \frac{1}{2}(A + B) \mid B - A \rangle\}.$$

Mit  $H \in h_C$  und  $U \in m_{AB}$  folgt

$$\langle H \mid B - A \rangle = \langle C \mid B - A \rangle,$$

$$\langle 2U \mid B - A \rangle = \langle A + B \mid B - A \rangle.$$

Zusammengenommen ergibt sich

$$\langle 3S \mid B - A \rangle = \langle 2U \mid B - A \rangle + \langle H \mid B - A \rangle$$

und somit

$$\langle 3S - 2U - H \mid B - A \rangle = 0.$$

Analog kann man  $\langle 3S - 2U - H \mid C - A \rangle = 0$  zeigen. Nun sind aber die Punkte  $A, B, C$  in allgemeiner Lage, so dass insbesondere  $B - A$  und  $C - A$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$  bilden. Da das Skalarprodukt in der euklidischen Standardebene nicht ausgeartet ist, folgt  $3S - 2U - H = 0$  und somit der Satz.  $\square$

In Übungsaufgabe 4.6 zeigen wir, dass Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt genau dann paarweise verschieden sind, wenn das zugehörige Dreieck nicht gleichseitig ist. In diesem Fall gilt noch folgende erstaunliche Folgerung:

**Korollar 4.24** ( $\mathbb{E}$ ). Sei  $\triangle ABC$  ein nicht gleichseitiges Dreieck mit Schwerpunkt  $S$ , Höhenschnittpunkt  $H$  und Umkreismittelpunkt  $U$ . Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

- (a) Es gilt  $H \star S \star U$ , insbesondere sind die Punkte  $H, S, U$  kollinear.  
 (b)  $\frac{\|H-S\|}{\|U-S\|} = 2$ .

Die Gerade  $\overleftrightarrow{HU}$  heißt die **Eulergerade** von  $\triangle ABC$ .

*Beweis.* Aus  $3S = H + 2U$  folgt  $S = \frac{1}{3}H + \frac{2}{3}U$ . Da nach Übungsaufgabe 4.6 in einem nicht gleichseitigen Dreieck der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt verschieden sind, folgt daraus  $H \star S \star U$  sowie

$$\|H - S\| = \left\| \frac{2}{3}H - \frac{2}{3}U \right\| = 2 \cdot \left\| \frac{1}{3}H - \frac{1}{3}U \right\| = 2 \cdot \|S - U\| = 2 \cdot \|U - S\|.$$

$\square$

#### 4.4 Die Inversion am Kreis

Mit den Methoden von Abschnitt 4.3 studieren wir nun mit den Kreisspiegelungen eine neue Klasse von Abbildungen in der euklidischen Standardebene. Diese werden wir in Abschnitt 5.1 dazu benutzen, ein Modell einer Hilbertebene ohne Parallelenaxiom zu konstruieren. Wir werden in diesem Abschnitt nicht alle Resultate beweisen. Die fehlenden Beweise können in Abschnitt 5.3 unseres Lehrbuchs „Grundlagen der ebenen Geometrie“ nachgeschlagen werden.

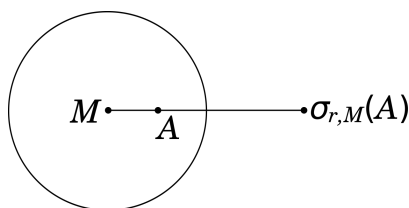
**Definition 4.25 (E).** Zu einem gegebenen Kreis  $K_r(M)$  definieren wir die Abbildung

$$\sigma_{r,M} : \mathbb{R}^2 \setminus \{M\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{M\},$$

indem wir jedem  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$  den eindeutig bestimmten Punkt  $\sigma_{r,M}(A)$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{MA}$  mit

$$\|M - A\| \cdot \|M - \sigma_{r,M}(A)\| = r^2$$

zuordnen. Die Abbildung  $\sigma_{r,M}$  heißt die **Inversion** oder auch **Spiegelung** am Kreis  $K_r(M)$ , und  $\sigma_{r,M}(A)$  heißt das bezüglich  $K_r(M)$  zu  $A$  **Inverse**.



Wir fixieren für den Rest dieses Abschnitts einen Kreis  $K := K_r(M)$  und schreiben kurz  $\sigma$  für  $\sigma_{r,M}$ . Unmittelbar aus Definition 4.25 folgt:

**Proposition 4.26 (E).** (a)  $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$ . Insbesondere ist  $\sigma$  bijektiv und zu sich selbst invers.

(b)  $\sigma$  bildet Punkte im Inneren von  $K$  auf Punkte außerhalb von  $K$  ab und umgekehrt. Punkte auf  $K$  werden auf sich selbst abgebildet.

Ab sofort verwenden wir für einen beliebigen Punkt  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$  die abkürzende Schreibweise  $A' := \sigma(A)$ . Wir geben nun im Fall, dass  $A$  innerhalb von  $K$  liegt, eine geometrische Konstruktion für  $A'$  an:

**Proposition 4.27 (E).** Sei  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$  ein Punkt im Inneren von  $K$ . Seien weiter  $P$  und  $Q$  die Schnittpunkte der Lotgeraden  $\ell_{\overrightarrow{AM}}A$  mit  $K$  und  $t_KP$  bzw.  $t_KQ$  die Tangenten an  $K$  in  $P$  bzw.  $Q$ . Dann schneiden sich die drei Geraden  $t_KP$ ,  $t_KQ$  und  $\overleftarrow{AM}$  im Punkt  $A'$ .

*Beweis.* Die drei Geraden  $t_KP$ ,  $t_KQ$  und  $\overleftarrow{AM}$  haben einen gemeinsamen Schnittpunkt  $S$ ,

denn: Der Schnittpunkt von  $\overleftarrow{AM}$  mit  $t_KP$  heiße  $S_P$ , der mit  $t_KQ$  entsprechend  $S_Q$ . Wegen  $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$  ist das Dreieck  $\triangle MPQ$  gleichschenkelig. Nach dem SSrW-Kriterium 3.68 sind daher die Dreiecke  $\triangle MAP$  und  $\triangle MAQ$  kongruent, insbesondere gilt  $\angle PMA \simeq \angle QMA$ . Nach

dem WSW-Kriterium 3.56 sind schließlich auch die Dreiecke  $\triangle MPS_P$  und  $\triangle MQS_Q$  kongruent, insbesondere gilt  $\overline{MS_P} \cong \overline{MS_Q}$  und somit die Behauptung. #

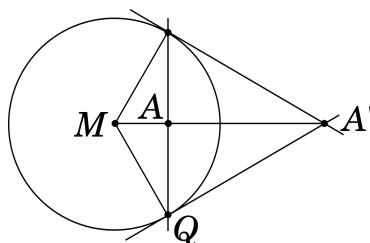
Die beiden rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle MAP$  und  $\triangle MPS$  haben dieselbe Winkelgröße bei  $M$ . Mit Korollar 1.70 folgt

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - P\|} = \frac{\|M - P\|}{\|M - S\|},$$

also

$$\|M - A\| \cdot \|M - S\| = \|M - P\|^2 = r^2.$$

Da  $A'$  der einzige Punkt auf dem Strahl  $\overrightarrow{MA}$  mit dieser Eigenschaft ist, gilt  $S = A'$ .



□

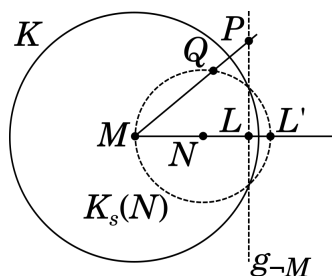
**Proposition 4.28 (E).** Sei  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ ,  $g_M \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  eine Gerade mit  $M \in g_M$ ,  $g_{-M} \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  eine Gerade mit  $M \notin g_{-M}$  und  $K_s(N)$  ein Kreis durch  $M$ . Dann gilt:

- (a)  $\sigma(\overrightarrow{MA} \setminus \{M\}) = \overrightarrow{MA'} \setminus \{M\}$ ,
- (b)  $\sigma(g_M \setminus \{M\}) = g_M \setminus \{M\}$ .
- (c)  $\sigma(g_{-M})$  ist ein Kreis durch  $M$ , bei dem der Punkt  $M$  entfernt ist.
- (d)  $\sigma(K_s(N) \setminus \{M\})$  ist eine Gerade, die nicht durch  $M$  geht.

*Beweis.* Behauptung (a) folgt unmittelbar aus der Definition von  $\sigma$  und aus  $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$ , und Behauptung (b) folgt direkt aus (a).

Zum Beweis von Behauptung (c) betrachten wir nun  $L := L_{g_{-M}}M$ , seinen Spiegelpunkt  $L'$  und den Kreis

$$K_s(N) \quad \text{mit } N := \frac{1}{2}(M + L') \text{ und } s := \|L' - N\|.$$



Wir zeigen  $\sigma(g_{-M}) = K_s(N) \setminus \{M\}$ . Sei dafür zunächst  $P \in g_{-M}$  beliebig. Dann hat die Gerade  $\overleftrightarrow{MP}$  außer  $M$  noch einen zweiten Schnittpunkt  $Q$  mit dem Kreis  $K_s(N)$ ,

denn: Sonst wäre  $\overleftrightarrow{MP}$  die Tangente an  $K_s(N)$  in  $M$  und stünde somit senkrecht auf  $\overleftrightarrow{MN} = \ell_{g_{-M}}M$ . Dann wären  $g_{-M}$  und  $\overleftrightarrow{MP}$  parallele Geraden durch  $P$ , also identisch. Das kann nicht sein, da dann  $M$  auf  $g_{-M}$  läge. #

Nach dem Satz von Thales 4.21 ist  $\angle MQL'$  ein rechter Winkel. Andererseits ist nach Konstruktion  $\angle MLP$  ebenfalls ein rechter Winkel, so dass mit Korollar 1.70

$$\frac{\|M - Q\|}{\|M - L'\|} = \frac{\|M - L\|}{\|M - P\|}$$

folgt. Mit Definition 4.25 erhalten wir

$$\|M - P\| \cdot \|M - Q\| = \|M - L\| \cdot \|M - L'\| = r^2$$

und somit  $P' = Q \in K_s(N) \setminus \{M\}$ .

Für einen beliebigen Punkt  $Q \in K_s(N) \setminus \{M\}$  sind umgekehrt die Geraden  $\overleftrightarrow{MQ}$  und  $g_{-M}$  nicht parallel,

denn: Sonst stünde  $\overleftrightarrow{MQ}$  orthogonal auf  $\overleftrightarrow{MN}$  und wäre somit eine Tangente an  $K_s(N)$ , was nicht sein kann, da  $\overleftrightarrow{MQ}$  ja zwei voneinander verschiedene Schnittpunkte mit  $K_s(N)$  hat. #

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von  $\overleftrightarrow{MQ}$  und  $g_{-M}$  mit  $P$ , dann sind wieder  $\angle MQL'$  und  $\angle MLP$  rechte Winkel, und mit derselben Argumentation wie gerade eben folgt  $Q = P' \in \sigma(g_{-M})$ . Insgesamt haben wir somit Behauptung (c) gezeigt.

Behauptung (d) zeigt man analog zu Behauptung (c).  $\square$

Auch wenn wir das  $\sigma$ -Bild eines Kreises, der nicht durch  $M$  geht, noch nicht kennen, legt Proposition 4.28 nahe, im Kontext der Inversion am Kreis Geraden und Kreise in einem gemeinsamen Oberbegriff zusammenzufassen:

**Definition 4.29 (E).** Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ , die eine Gerade oder ein Kreis ist, nennen wir auch eine *verallgemeinerte Gerade*. Für eine beliebige verallgemeinerte Gerade  $g$  und ein beliebiges  $P \in g$  heißt

$$t_g P := \begin{cases} g & \text{für } g \text{ eine Gerade,} \\ \text{die Tangente an } g \text{ in } P & \text{für } g \text{ ein Kreis} \end{cases}$$

die *Tangente* an die verallgemeinerte Gerade  $g$  im Punkt  $P$ .

**Proposition 4.30 (E).** Für eine verallgemeinerte Gerade  $g$  mit  $g \cap K = \{P, Q\}$  gilt:

- (a)  $t_K P \perp t_g P \iff t_g P = \overleftrightarrow{MP}$ .
- (b)  $t_K P \perp t_g P \iff t_K Q \perp t_g Q$ . Im Orthogonalitätsfall heißen  $K$  und  $g$  zueinander *orthogonal*.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Nach Korollar 4.12 gilt  $t_K P \perp \overleftrightarrow{MP}$ . Gilt nun zunächst  $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$ , so folgt sofort

$$t_K P \perp \overleftrightarrow{MP} = T_g P.$$

Gilt umgekehrt  $t_K P \perp t_g P$ , so folgt daraus

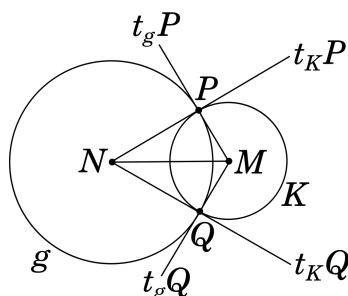
$$\overleftrightarrow{MP} \perp t_K P \perp t_g P$$

und also  $t_g P \parallel \overleftrightarrow{MP}$ . Mit  $P \in t_g P \cap \overleftrightarrow{MP}$  erhalten wir  $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$  und insgesamt somit Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) genügt es offenbar, eine der behaupteten Implikationen zu zeigen. Gelte also ohne Einschränkung  $t_K P \perp t_g P$ . Nach Teil (a) gilt dann  $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$ .

**Fall 1:  $g$  ist eine Gerade.** Nach Voraussetzung gilt  $Q \in g = t_g P = \overleftrightarrow{MP}$ , also  $g = \overleftrightarrow{MQ}$ . Nach Korollar 4.12 folgt  $t_K Q \perp \overleftrightarrow{MQ} = g = t_g Q$  und somit Behauptung (b) in diesem Fall.

**Fall 2:  $g$  ist ein Kreis.** Schreiben wir  $g = K_s(N)$ , so gilt nach dem SSS-Kriterium 3.56 die Kongruenz von Dreiecken  $\triangle MPN \cong \triangle MQN$  und insbesondere die Kongruenz von Winkeln  $\angle MPN \simeq \angle MQN$ . Analog zu  $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$  zeigt man  $t_K P = \overleftrightarrow{NP}$ , so dass wegen  $t_K P \perp t_g P$  der Winkel  $\angle MPN \simeq \angle MQN$  ein rechter Winkel ist. Es folgt  $\overleftrightarrow{MQ} \perp \overleftrightarrow{NQ}$  und mit Korollar 4.12 weiter  $t_K Q = \overleftrightarrow{NQ}$  und  $t_g Q = \overleftrightarrow{MQ}$ . Das zeigt Behauptung (b) auch in diesem Fall.



□

**Proposition 4.31 (E).** Für einen Kreis  $K_s(N)$  gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Ist  $K_s(N)$  orthogonal zu  $K$ , so gilt  $\sigma(K_s(N)) = K_s(N)$  und  $M \notin K_s(N)$ .
- (b) Gibt es ein  $A \in K_s(N) \setminus K$  mit  $A' \in K_s(N)$ , so ist  $K_s(N)$  orthogonal zu  $K$ .

*Beweis.* Sei  $K_s(N)$  orthogonal zu  $K$  mit Schnittpunkten  $P$  und  $Q$ . Nach Teil (a) von Proposition 4.30 gilt dann  $t_{K_s(N)} P = \overleftrightarrow{MP}$  und  $t_{K_s(N)} Q = \overleftrightarrow{MQ}$ . Für einen beliebigen Punkt  $A \in K_s(N) \setminus \{P, Q\}$  schneidet die Gerade  $\overleftrightarrow{AM}$  den Kreis  $K_s(N)$  in einem weiteren Punkt  $B$ ,

denn: Hätte die Gerade  $\overleftrightarrow{AM}$  keinen weiteren Schnittpunkt mit  $K_s(N)$ , so gälte  $\overleftrightarrow{AM} = t_{K_s(N)} A$ . Mit  $\overleftrightarrow{AM}$ ,  $\overleftrightarrow{MP}$  und  $\overleftrightarrow{MQ}$  gäbe es also drei paarweise verschiedene Tangenten an  $K_s(N)$  durch  $M$ .

Das kann aber nicht sein, denn nach Korollar 4.12 wären dann  $\angle MAN$ ,  $\angle MPN$  und  $\angle MQN$  allesamt rechte Winkel, so dass nach dem Satz des Thales 4.21 die drei paarweise verschiedenen Punkte  $A, P, Q$  im Durchschnitt von  $K_s(N)$  mit dem „Thaleskreis“  $K(\frac{1}{2}(M+N), N)$  lägen. Da sich nach Proposition 4.11 eine Gerade und ein Kreis in höchstens zwei Punkten schneiden, wären die drei Punkte  $A, P, Q$  in allgemeiner Lage. Nach dem Umkreissatz 3.71 stimmten daher die Kreise  $K_s(N)$  und  $K(\frac{1}{2}(M+N), N)$  jeweils mit dem Umkreis des Dreiecks  $\triangle APQ$  und damit auch miteinander überein. Wegen  $N \in K(\frac{1}{2}(M+N), N)$  und  $N \notin K_s(N)$  kann das aber nicht sein. #

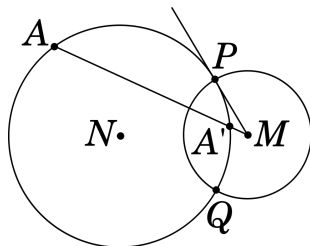
Nach dem Sehnen-Tangenten-Satz 4.15 gilt jetzt

$$\|M - A\| \cdot \|M - B\| = \|M - P\|^2 = r^2.$$

Nach Definition 4.25 ist also  $B = A' \in K_s(N)$ . Da  $A$  in  $K_s(N) \setminus \{P, Q\}$  beliebig gewählt war und mit

$$P' = P \in K_s(N) \quad \text{und} \quad Q' = Q \in K_s(N)$$

folgt die Inklusion  $\sigma(K_s(N)) \subseteq K_s(N)$ . Mit  $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$  erhalten wir auch die umgekehrte Inklusion und insgesamt  $\sigma(K_s(N)) = K_s(N)$ .



Wäre schließlich  $M \in K_s(N)$ , so lägen nach der gerade erfolgten Diskussion für ein beliebiges  $A \in K_s(N) \setminus \{P, Q\}$  die drei kollinearen Punkte  $M, A, A'$  allesamt auf dem Kreis  $K_s(N)$ , was nicht sein kann, da sich nach Proposition 4.11 eine Gerade und ein Kreis in höchstens zwei Punkten schneiden. Zusammengefasst haben wir also Behauptung (a) gezeigt.

Wir zeigen nun Behauptung (b). Da  $K_s(N)$  mit  $A$  und  $A'$  je einen Punkt innerhalb und außerhalb von  $K$  enthält, schneiden sich  $K$  und  $K_s(N)$  nach Satz 4.18 in genau zwei Punkten  $P$  und  $Q$ . Nach Definition 4.25 gilt

$$\|M - A\| \cdot \|M - A'\| = r^2 = \|M - P\|^2.$$

Mit der Umkehrung des Sehnen-Tangenten-Satzes 4.15<sup>3</sup> folgt  $\overleftrightarrow{MP} = t_{K_s(N)}P$ . Durch zweifache Anwendung von Korollar 4.12 erhalten wir daraus

$$\overleftrightarrow{MP} = t_{K_s(N)}P \perp \overleftrightarrow{NP} = t_KP.$$

Nach Teil (b) von Proposition 4.30 sind also  $K$  und  $K_s(N)$  orthogonal zueinander, und Behauptung (b) ist gezeigt.  $\square$

Teil (a) von Proposition 4.31 lässt sich durch Verwendung einer zentrischen Streckung zu Proposition 4.32 verallgemeinern:

**Proposition 4.32 (E).** *Für einen Kreis  $K_s(N)$  mit  $M \notin K_s(N)$  ist  $\sigma(K_s(N))$  wieder ein Kreis.*

Aufgrund der Bijektivität von  $\sigma$  gilt für je zwei beliebige Teilmengen  $A, B \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$

$$\sigma(A \cap B) = \sigma(A) \cap \sigma(B). \quad (4.1)$$

Wir spezialisieren diese Aussage, indem wir für  $A$  und  $B$  jeweils verallgemeinerte Geraden einsetzen, um unter Verwendung der Propositionen 4.28 und 4.32 das  $\sigma$ -Bild ihrer Schnittpunkte zu studieren. Hierbei bedienen wir uns eines Tricks und führen einen zusätzlichen Punkt  $\infty$  ein. Durch Proposition 4.28 motiviert setzen wir dann die Inversion  $\sigma$  durch

$$\hat{\sigma}(P) := \begin{cases} P' & \text{für } P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}, \\ \infty & \text{für } P = M, \\ M & \text{für } P = \infty \end{cases}$$

auf eine Bijektion der Menge  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  fort und setzen für eine beliebige verallgemeinerte Gerade  $g$

$$\hat{g} := \begin{cases} g \cup \{\infty\} & \text{für } g \text{ eine Gerade,} \\ g & \text{für } g \text{ ein Kreis.} \end{cases}$$

Mit (4.1) folgt dann für je zwei verallgemeinerte Geraden  $g, h$  sofort

$$\hat{\sigma}(\hat{g} \cap \hat{h}) = \hat{\sigma}(\hat{g}) \cap \hat{\sigma}(\hat{h}). \quad (4.2)$$

Wir wollen nun aus (4.2) eine Aussage über verallgemeinerte Geraden herleiten und stellen dafür zunächst fest, dass nach den Propositionen 4.28 und 4.32 durch die für den Rest dieses Abschnitts fixierte Zuordnung

$$g \mapsto \hat{\sigma}(\hat{g}) \cap \mathbb{R}^2 =: g' \quad (4.3)$$

verallgemeinerte Geraden auf verallgemeinerte Geraden abgebildet werden. Für je zwei verallgemeinerte Geraden  $g, h$  gilt nun

$$g' \cap h' = \hat{\sigma}(\hat{g} \cap \hat{h}) \cap \mathbb{R}^2, \quad (4.4)$$

insbesondere gilt die folgende Spezialisierung dieser Aussage:

**Lemma 4.33 (E).** *Seien  $g, h$  zwei verallgemeinerte Geraden, so dass nicht  $g$  und  $h$  beide Geraden sind. Besteht der Durchschnitt von  $g$  und  $h$  aus genau einem Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$ , so gilt*

$$g' \cap h' = \begin{cases} \{P'\} & \text{für } P \neq M, \\ \emptyset & \text{für } P = M. \end{cases}$$



Mit einigem Aufwand lässt sich nun der folgende Zusammenhang zwischen den Tangenten  $t_{g'}P'$  und  $t_gP$  beschreiben:

**Proposition 4.34** ( $\mathbb{E}$ ). *Sei  $g$  eine verallgemeinerte Gerade. Für ein beliebiges  $P \in g \setminus \{M\}$  gilt:*

$$t_{g'}P' = \begin{cases} \sigma_{m_{PP'}}(t_gP) & \text{für } P \in g \setminus (K \cup \{M\}), \\ \sigma_{t_KP}(t_gP) & \text{für } P \in g \cap K, \end{cases}$$

die Tangente des Bilds von  $g$  am Bild von  $P$  unter der Inversion am Kreis lässt sich also stets durch eine Geradenspiegelung aus  $t_gP$  erhalten.

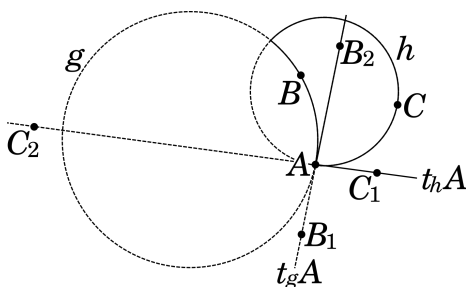
**Definition 4.35** ( $\mathbb{E}$ ). *Seien  $g, h$  verallgemeinerte Geraden, und sei  $A \in g \cap h$  ein Punkt mit  $t_gA \neq t_hA$ . Seien weiter  $B \in g \setminus h$  und  $C \in h \setminus g$ .*

(a) *Sind  $g$  und  $h$  Kreise, so gibt es Punkte  $B_1, B_2 \in t_gA$  und  $C_1, C_2 \in t_hA$  mit*

$$|\overrightarrow{AB_1} \cap h| = 1, \quad |\overrightarrow{AB_2} \cap h| = 2, \quad |\overrightarrow{AC_1} \cap g| = 1 \quad \text{und} \quad |\overrightarrow{AC_2} \cap g| = 2,$$

und wir setzen

$$\tilde{B} := \begin{cases} B_1 & \text{für } B \text{ außerhalb von } h, \\ B_2 & \text{für } B \text{ innerhalb von } h \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{C} := \begin{cases} C_1 & \text{für } C \text{ außerhalb von } g, \\ C_2 & \text{für } C \text{ innerhalb von } g. \end{cases}$$

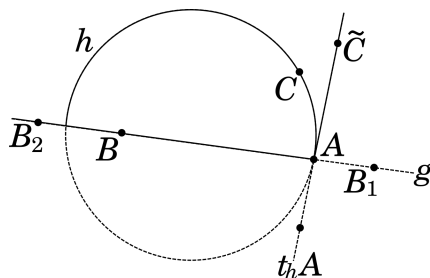


(b) *Ist  $g$  eine Gerade und  $h$  ein Kreis, so gibt es Punkte  $B_1, B_2 \in t_gA$  und  $\tilde{C} \in t_hA$  mit*

$$|\overrightarrow{AB_1} \cap h| = 1, \quad |\overrightarrow{AB_2} \cap h| = 2 \quad \text{und} \quad \tilde{C}C|_g,$$

und wir setzen

$$\tilde{B} := \begin{cases} B_1 & \text{für } B \text{ außerhalb von } h, \\ B_2 & \text{für } B \text{ innerhalb von } h. \end{cases}$$



Den Fall, dass  $g$  ein Kreis und  $h$  eine Gerade ist, erhält man natürlich genauso.

(c) Sind  $g$  und  $h$  Geraden, so setzen wir  $\tilde{B} := B$  und  $\tilde{C} := C$ .

In allen Fällen definieren wir die **verallgemeinerte Winkelgröße**  $\angle_{(g,h)}BAC$  bezüglich  $g$  und  $h$  durch

$$\angle_{(g,h)}BAC := \angle\tilde{B}\tilde{A}\tilde{C}.$$

Mit einigem Aufwand ließe sich nun zeigen, dass Inversionen am Kreis verallgemeinerte Winkelgrößen in folgendem Sinne erhalten:

**Satz 4.36 (E).** Für je zwei verallgemeinerte Geraden  $g, h$  und drei von  $M$  verschiedene Punkte  $A \in g \cap h$  mit  $t_g A \neq t_h A$ ,  $B \in g \setminus h$  und  $C \in h \setminus g$  gilt

$$\angle_{(g',h')}B'A'C' = \angle_{(g,h)}BAC.$$

**Definition 4.37 (E).** Seien  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$  vier paarweise verschiedene Punkte. Dann heißt

$$DV(A, B, C, D) := \frac{\|A - C\|}{\|A - D\|} \cdot \frac{\|B - D\|}{\|B - C\|}$$

das **Doppelverhältnis** der Punkte  $A, B, C, D$ .

**Proposition 4.38 (E).** Das Doppelverhältnis je vier paarweise verschiedener Punkte  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$  ist invariant unter  $\sigma$ , es gilt also:

$$DV(A', B', C', D') = DV(A, B, C, D).$$

*Beweis.* Nach Definition der Inversion gilt

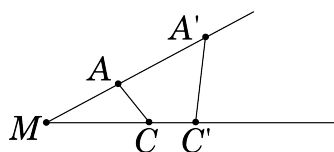
$$\begin{aligned} \frac{\|M - A\|}{\|M - C\|} &= \frac{\|M - A\| \cdot \|M - A'\|}{\|M - C\| \cdot \|M - A'\|} = \frac{r^2}{\|M - C\| \cdot \|M - A'\|} \\ &= \frac{\|M - C\| \cdot \|M - C'\|}{\|M - C\| \cdot \|M - A'\|} = \frac{\|M - C'\|}{\|M - A'\|}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hieraus folgt

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} = \frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|}, \quad (4.6)$$

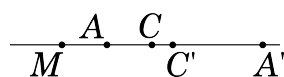
denn: Wir machen eine Fallunterscheidung.

**Fall 1:  $M, A, C$  sind in allgemeiner Lage.** Da  $A, A'$  bzw.  $C, C'$  jeweils auf demselben von  $M$  ausgehenden Strahl liegen, haben die Dreiecke  $\triangle MAC$  und  $\triangle MC'A'$  dieselbe Winkelgröße bei  $M$ , es gilt also  $\angle AMC = \angle A'MC'$ . Nach Definition 1.81, einem zum SWS-Kriterium 3.56 analogen Kriterium für Ähnlichkeit und (4.5) sind dann die Dreiecke  $\triangle MAC$  und  $\triangle MC'A'$  ähnlich, insbesondere gilt (4.6).



**Fall 2:  $M, A, C$  sind kollinear.** Hier gibt es in Abhängigkeit von der Anordnung der drei Punkte  $M, A, C$  drei Unterfälle. Diese lassen sich alle sehr ähnlich beweisen, und wir führen nur den Fall  $M \star A \star C$  vor. Hier folgt nach der Definition der Inversion am Kreis  $M \star C' \star A'$  und also

$$\|A - C\| = \|M - C\| - \|M - A\| \quad \text{und} \quad \|A' - C'\| = \|M - A'\| - \|M - C'\|.$$



Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|} &= \frac{\|M - C\| - \|M - A\|}{\|M - A'\| - \|M - C'\|} \stackrel{(4.5)}{=} \frac{\|M - A\| \cdot \|M - A'\| \cdot \|M - C'\|^{-1} - \|M - A\|}{\|M - C\| \cdot \|M - C'\| \cdot \|M - A\|^{-1} - \|M - C'\|} \\ &= \frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} \cdot \frac{\|M - A'\| \cdot \|M - C'\|^{-1} - 1}{\|M - C\| \cdot \|M - A\|^{-1} - 1} \stackrel{(4.5)}{=} \frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} \end{aligned}$$

und also (4.6). #

Ersetzt man im gesamten bisherigen Beweis  $C$  und  $C'$  durch  $D$  und  $D'$ , so erhält man

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - D'\|} = \frac{\|A - D\|}{\|A' - D'\|}.$$

Kombiniert gilt

$$\frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|} \cdot \frac{\|A' - D'\|}{\|A - D\|} = \frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} \cdot \frac{\|M - D'\|}{\|M - A\|} = \frac{\|M - D'\|}{\|M - C'\|}.$$

Ersetzt man im gesamten bisherigen Beweis  $A$  und  $A'$  durch  $B$  und  $B'$ , so erhält man

$$\frac{\|B - C\|}{\|B' - C'\|} \cdot \frac{\|B' - D'\|}{\|B - D\|} = \frac{\|M - D'\|}{\|M - C'\|}.$$

Zusammengefügt ergibt sich

$$\frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|} \cdot \frac{\|A' - D'\|}{\|A - D\|} = \frac{\|B - C\|}{\|B' - C'\|} \cdot \frac{\|B' - D'\|}{\|B - D\|},$$

was sich leicht in die Behauptung  $DV(A', B', C', D') = DV(A, B, C, D)$  umformen lässt. □

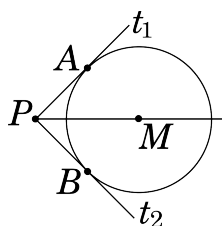
## 4.5 Übungsaufgaben

**Aufgabe 4.1** ( $\mathbb{E}$ ). Seien  $A$  ein Punkt auf einem Kreis  $K$ ,  $t$  die Tangente an  $K$  in  $A$  und  $s$  eine Sekante von  $K$  durch  $A$ . Sei weiter  $r$  derjenige Teilstrahl von  $s$  mit Ausgangspunkt  $A$ , der nicht den zweiten Schnittpunkt von  $s$  mit  $K$  enthält. Dann liegen  $r \setminus \{A\}$  und  $K \setminus \{A\}$  auf verschiedenen Seiten von  $t$ .

**Hinweis:** Ohne Einschränkung können Sie für den Beweis annehmen, der Mittelpunkt des Kreises sei der Ursprung und  $A$  liege auf der positiven  $x$ -Achse. Bestimmen Sie eine Geradengleichung von  $s$  aus einer geeigneten Parameterdarstellung des zweiten Schnittpunktes.

**Aufgabe 4.2** ( $\mathbb{E}$ ). Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , und sei  $P \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt außerhalb von  $K$ . Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

- (a) Es gibt genau zwei Tangenten  $t_1, t_2$  an  $K$  durch  $P$ .
- (b) Ist  $t_1 \cap K =: \{A\}$  und  $t_2 \cap K =: \{B\}$ , so ist  $\overrightarrow{MP}$  die Winkelhalbierende von  $\angle APB$ .



**Aufgabe 4.3** (Satz von Monge,  $\mathbb{E}$ ). Es seien  $M, M', M'' \in \mathbb{R}^2$  paarweise verschieden sowie  $r, r', r'' \in \mathbb{R}_{>0}$ . Für die drei Kreise  $K := K_r(M), K' := K_{r'}(M'), K'' := K_{r''}(M'')$  gilt

- (a) Die Punkte  $M, M', M''$  sind genau dann kollinear, wenn die Potenzgeraden  $p_{K,K'}, p_{K,K''}, p_{K',K''}$  alle parallel zueinander sind.
- (b) Die Punkte  $M, M', M''$  sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn sich die drei Potenzgeraden  $p_{K,K'}, p_{K,K''}, p_{K',K''}$  in genau einem Punkt schneiden.

**Aufgabe 4.4** ( $\mathbb{E}$ ). Zeigen Sie die übrigen Fälle im Beweis des Peripheriewinkelsatzes 4.20.

**Aufgabe 4.5** ( $\mathbb{E}$ ). In der Situation von Proposition 4.27 ist der Inkreismittelpunkt  $I$  des Dreiecks  $\triangle PQ\sigma_r(M)(A)$  durch den Schnittpunkt des Strahls  $\overrightarrow{MA}$  mit dem Kreis  $K_r(M)$  gegeben.

**Aufgabe 4.6** ( $\mathbb{E}$ ). Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Schwerpunkt  $S$ , Höhenschnittpunkt  $H$  und Umkreismittelpunkt  $U$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) Zwei der drei Punkte  $S, H, U$  stimmen überein.
- (ii)  $S = H = U$ .
- (iii)  $\triangle ABC$  ist **gleichseitig**, es gilt also  $\|A - B\| = \|B - C\| = \|C - A\|$ .

---

## Nichteuklidische Geometrie

---

Schon seit Euklid war die Notwendigkeit des Parallelenaxioms in der euklidischen Geometrie umstritten. Jedoch konnte diese Frage erst im 19. Jahrhundert endgültig geklärt werden. Dies gelang durch Angabe eines Modells einer Geometrie, die mit Ausnahme des Parallelenaxioms allen von Euklid geforderten Eigenschaften genügt, in unserer Sprache also durch Angabe eines Modells einer Hilbertebene, die das Vollständigkeitsaxiom (V) aber nicht das Parallelenaxiom (P) erfüllt. Wir werden in Abschnitt 5.1 mit dem Poincaré'schen Kreismodell ein solches Modell einführen und in Abschnitt 5.2 die Geometrie darin studieren.

### 5.1 Das Poincaré'sche Kreismodell

**Definition 5.1.** Eine Hilbertebene, die das Vollständigkeitsaxiom (V) und das *hyperbolische Axiom*

(H) Ist  $A$  ein Punkt und  $g$  eine Gerade, die nicht durch  $A$  geht, dann gibt es unendlich viele zu  $g$  parallele Geraden durch  $A$ .

erfüllt, heißt *hyperbolische Ebene*.

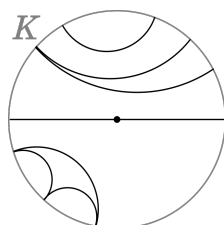
Wir fixieren für den Rest dieses Abschnitts

- den Ursprung  $O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  der euklidischen Standardebene,
- den Einheitskreis  $K := K_1(O)$  in der euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}$ ,
- die Inversion  $\sigma := \sigma_{1,O}$  an  $K$ .

Dann heißt das Paar  $\mathbb{H}_k := (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k)$  mit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &:= \{A \in \mathbb{R}^2 \mid A \text{ liegt im Inneren von } K\}, \\ \mathbf{G}_k &:= \{g \cap \mathbf{P}_k \mid g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}} \text{ orth. zu } K\} \cup \{K_r(M) \cap \mathbf{P}_k \mid K_r(M) \text{ zu } K \text{ orth. Kreis}\} \end{aligned}$$

das *Poincaré'sche Kreismodell*. Die Elemente von  $\mathbf{P}_k$  nennen wir hierbei *k-Punkte*, die Elemente von  $\mathbf{G}_k$  heißen *k-Geraden*. Die k-Geraden, die von euklidischen Geraden herkommen, nennen wir auch k-Geraden *vom ersten Typ*, diejenigen, die von euklidischen Kreisen herkommen, k-Geraden *vom zweiten Typ*.



Zur besseren Unterscheidbarkeit von den Konstruktionen in der euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}$  werden wir die entsprechenden Konstruktionen in  $\mathbb{H}_k$  künftig immer mit einem Index „k“ kennzeichnen. So bezeichnen wir beispielsweise die k-Verbindungsgerade zweier k-Punkte  $A, B \in \mathbf{P}_k$  mit  $\overleftrightarrow{AB}^k$ .

**Definition 5.2 (E).** Die zu einer beliebigen k-Geraden vom ersten Typ gehörige euklidische Gerade und der zu einer beliebigen k-Geraden vom zweiten Typ gehörige euklidische Kreis haben jeweils genau zwei Schnittpunkte mit  $K$ . Diese Schnittpunkte nennen wir die **Endpunkte** der k-Geraden.

Wir weisen nun schrittweise nach, dass  $\mathbb{H}_k$  ausgestattet mit geeigneten Anordnungs- und Kongruenzbegriffen eine hyperbolische Ebene im Sinne von Definition 5.1 ist:

**Proposition 5.3 (E).** Das Poincaré'sche Kreismodell  $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k)$  ist eine Inzidenzebene.

*Beweis.* Als erstes zeigen wir das Inzidenzaxiom ( $I_1$ ), dass also durch je zwei k-Punkte genau eine k-Gerade geht. Seien dafür zwei k-Punkte  $A \neq B \in \mathbf{P}_k$  gegeben.

**Fall 1:  $A, B, O$  sind kollinear in  $\mathbb{E}$ .** Dann ist  $\overleftrightarrow{AB} \cap \mathbf{P}_k$  eine k-Gerade durch  $A$  und  $B$ . In  $\mathbb{E}$  gilt ( $I_1$ ), so dass jede weitere k-Gerade durch  $A$  und  $B$  vom zweiten Typ wäre, also ein Durchschnitt eines zu  $K$  orthogonalen Kreises  $K_r(M)$  durch  $A, B$  mit  $\mathbf{P}_k$ . So etwas gibt es aber nicht,

denn: Nach Teil (a) von Proposition 4.31 lägen dann mit  $A, B$  auch  $A', B'$  auf  $K_r(M)$ . Wegen

$$\overleftrightarrow{AA'} = \overleftrightarrow{AO} = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{OB} = \overleftrightarrow{B'B}$$

enthielte also  $K_r(M)$  vier kollineare Punkte, was nach Proposition 4.11 nicht sein kann. #

**Fall 2:  $A, B, O$  sind in  $\mathbb{E}$  in allgemeiner Lage.** Offensichtlich geht dann keine k-Gerade vom ersten Typ durch  $A, B$ . Andererseits enthält nach Teil (a) von Proposition 4.31 jeder zu  $K$  orthogonale Kreis  $K_r(M) \subseteq \mathbb{E}$  durch  $A, B$  auch den Punkt  $A'$ . Die Punkte  $A, A', B$  sind in allgemeiner Lage, da sonst mit  $O, A, A'$  auch  $O, A, B$  kollinear wären. Nach dem Umkreissatz 3.71 gibt es also einen eindeutig bestimmten Kreis  $K_r(M) \subseteq \mathbb{E}$  durch  $A, A', B$ . Nach Teil (b) von Proposition 4.31 sind wegen  $A, A' \in K_r(M)$  die Kreise  $K$  und  $K_r(M)$  orthogonal zueinander, so dass  $K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$  die eindeutig bestimmte k-Gerade durch  $A, B$  ist.

Für  $(I_2)$  müssen wir zeigen, dass auf jeder  $k$ -Geraden mindestens zwei  $k$ -Punkte liegen. Für eine  $k$ -Gerade vom ersten Typ ist dies einfach, denn diese ist der Durchschnitt einer Geraden  $g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  durch  $O$  mit dem Inneren des Kreises  $K$ . Für einen beliebigen Schnittpunkt  $P$  von  $g$  mit  $K$  ist dann beispielsweise  $\frac{1}{2}(O + P)$  neben  $O$  ein zweiter  $k$ -Punkt. Eine  $k$ -Gerade vom zweiten Typ ist der Durchschnitt eines zu  $K$  orthogonalen Kreises  $K_r(M)$  mit dem Inneren von  $K$ . Der Mittelpunkt  $M$  von  $K_r(M)$  liegt dabei außerhalb von  $K$ ,

denn: Ist  $P$  einer der Schnittpunkte von  $K$  und  $K_r(M)$ , so hat das Dreieck  $\triangle OPM$  nach Definition der Orthogonalität einen rechten Winkel  $\angle OPM$ . Mit dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck 1.68 und Satz 3.67 gilt dann  $\overline{OP} < \overline{OM}$ . #

Seien  $P, Q$  die Endpunkte von  $K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$ . Dann liegen zwischen den Strahlen  $\overrightarrow{MP}$  und  $\overrightarrow{MQ}$  unendlich viele euklidische Strahlen aus  $M$ , die paarweise verschiedene Schnittpunkte mit  $K_r(M)$  aufweisen. Unendlich viele solcher Schnittpunkte  $S$  liegen im Inneren von  $K$ ,

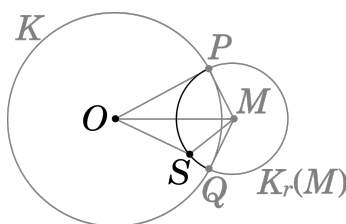
denn: Ohne Einschränkung seien  $S, O, M$  nicht kollinear und das Dreieck  $\triangle OSM$  somit wohldefiniert. Nach Anwendung des Kosinussatzes 1.66 auf  $\triangle OSM$  und des Satzes von Pythagoras 1.67 auf  $\triangle OPM$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|O - S\|^2 &= \|O - M\|^2 + \|S - M\|^2 - 2 \cdot \|O - M\| \cdot \|S - M\| \cdot \cos \angle SMO \\ &= (1 + r^2) + r^2 - 2r \cdot \sqrt{1 + r^2} \cdot \cos \angle SMO. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Aus Symmetriegründen und da nach Konstruktion der Strahl  $\overrightarrow{MS}$  zwischen den Strahlen  $\overrightarrow{MP}$  und  $\overrightarrow{MQ}$  liegt, gilt mit Korollar 1.70

$$\cos \angle SMO > \cos \angle PMO = \cos \angle QMO = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

Eingesetzt in (5.1) erhalten wir  $\|O - S\|^2 < 1$  und somit die Behauptung. #



Es folgt, dass unendlich viele solcher Schnittpunkte  $S$   $k$ -Punkte auf der gegebenen  $k$ -Geraden vom zweiten Typ sind, so dass wir  $(I_2)$  auch in diesem Fall nachgewiesen haben.

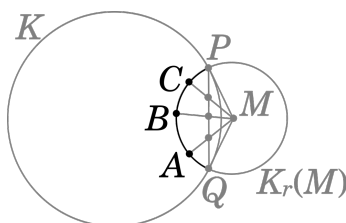
Zuletzt zeigen wir  $(I_3)$ , dass es also drei  $k$ -Punkte in  $k$ -allgemeiner Lage gibt. Seien dafür  $A, B \in \mathbf{P}_k$  zwei  $k$ -Punkte, so dass  $A, B, O$  in  $\mathbb{E}$  in allgemeiner Lage sind. Dann ist  $\overleftrightarrow{AB}^k$  der Durchschnitt eines zu  $K$  orthogonalen Kreises  $K_r(M)$  durch  $A, B$  mit  $\mathbf{P}_k$ . Nach Teil (a) von Proposition 4.31 liegt  $O$  nicht auf  $\overleftrightarrow{AB}^k$ , so dass  $A, B, O$  auch in  $\mathbb{H}_k$  in  $k$ -allgemeiner Lage sind.  $\square$

Um  $\mathbb{H}_k$  zu einer Hilbertebene zu machen, müssen wir als nächstes eine **Anordnung**  $\star_k$  einführen. Hierzu definieren wir für drei  $k$ -kollineare  $k$ -Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}_k$ :

- Liegen  $A, B, C$  auf einer  $k$ -Geraden vom ersten Typ, so setzen wir

$$A \star_k B \star_k C \iff A \star B \star C.$$

- Liegen  $A, B, C$  auf einer  $k$ -Geraden  $g_k \in \mathbf{G}_k$  vom zweiten Typ, so gibt es einen zu  $K$  orthogonalen Kreis  $K_r(M)$  mit  $g_k = K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$ . Wie schon im Beweis von Proposition 5.3 eingesehen liegt der Mittelpunkt  $M$  von  $K_r(M)$  außerhalb von  $K$ .



Wir bezeichnen die Endpunkte von  $g_k$  mit  $P$  und  $Q$ , die nach Teil (b) von Lemma 3.22 existenten Schnittpunkte der Strahlen aus  $M$  durch  $A, B, C$  mit der Strecke  $\overline{PQ}$  mit

$$\{\hat{A}\} := \overline{MA} \cap \overline{PQ}, \quad \{\hat{B}\} := \overline{MB} \cap \overline{PQ} \quad \text{und} \quad \{\hat{C}\} := \overline{MC} \cap \overline{PQ} \quad (5.2)$$

und setzen

$$\begin{aligned} A \star_k B \star_k C &\iff \hat{A} \star \hat{B} \star \hat{C} \\ &\iff \hat{B} \text{ liegt im Inneren des (euklidischen) Winkels } \angle \hat{A}M\hat{C} \\ &\iff B \text{ liegt im Inneren des (euklidischen) Winkels } \angle AMC. \end{aligned}$$

**Proposition 5.4 (E).** Das Poincaré'sche Kreismodell  $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k)$  erfüllt die Anordnungsaxiome  $(A_1) - (A_4)$ .<sup>1</sup>

Einen Beweis für diese Proposition führen wir nicht durch.

Als nächstes wollen wir nun auf  $\mathbb{H}_k$  einen *Kongruenzbegriff*  $\cong_k$  für  $k$ -Strecken einführen. Seien dafür  $A \neq B$  zwei  $k$ -Punkte und seien  $P, Q$  die Endpunkte der  $k$ -Gerade  $\overleftrightarrow{AB}^k$ . Wir definieren dann zunächst den *hyperbolischen Abstand*  $d_k(A, B)$  der  $k$ -Punkte  $A, B$  durch

$$d_k(A, B) := \begin{cases} |\log DV(A, B, P, Q)| = \left| \log \left( \frac{\|A-P\|}{\|A-Q\|} \cdot \frac{\|B-Q\|}{\|B-P\|} \right) \right| & \text{für } A \neq B, \\ 0 & \text{für } A = B. \end{cases} \quad (5.3)$$

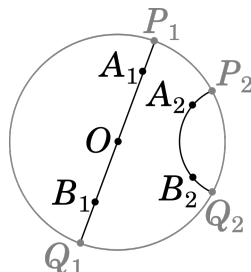
Dies gibt eine wohldefinierte Abbildung  $d_k : \mathbf{P}_k \times \mathbf{P}_k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit den folgenden Eigenschaften.

(a)  $d_k(A, B) = 0 \iff A = B,$

<sup>1</sup>Obwohl wir das Poincaré'sche Kreismodell  $\mathbb{H}_k$  nur als das Paar  $(\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k)$  definiert haben, nennen wir auch das Tripel  $(\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k)$  das Poincaré'sche Kreismodell und schreiben auch hier  $\mathbb{H}_k$ . Ähnliches gilt später, wenn wir die weiteren Strukturen einer Hilbertebene hinzufügen.



(b)  $d_k(A, B) = d_k(B, A)$  für alle  $A, B \in \mathbf{P}_k$ .



Einen Beweis für diese Aussage führen wir nicht durch. Tatsächlich erfüllt  $d_k$  auch die Dreiecksungleichung und ist somit eine Metrik auf  $\mathbf{P}_k$ . Unter Verwendung von  $d_k$  können wir folgende sehr nützliche Charakterisierung von  $\star_k$  angeben:

**Lemma 5.5 (E).** Für drei  $k$ -Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}_k$  sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- (i)  $A \star_k B \star_k C$ ,
- (ii)  $A, B, C$  sind paarweise verschieden,  $k$ -kollinear und es gilt

$$d_k(A, C) = d_k(A, B) + d_k(B, C).$$

Einen Beweis für dieses Lemma führen wir nicht durch. Für zwei Paare verschiedener  $k$ -Punkte  $A_1 \neq B_1$  und  $A_2 \neq B_2$  setzen wir

$$\overline{A_1 B_1}^k \cong_k \overline{A_2 B_2}^k : \iff d_k(A_1, B_1) = d_k(A_2, B_2). \quad (5.4)$$

**Proposition 5.6 (E).** Das Poincaré'sche Kreismodell  $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k, \cong_k)$  erfüllt die Kongruenzaxiome für Strecken  $(K_1) - (K_3)$ .

Einen Beweis für diese Proposition führen wir nicht durch.

Einen *Kongruenzbegriff*  $\simeq_k$  für  $k$ -Winkel führen wir über die verallgemeinerte Winkelgröße aus Abschnitt 4.4 ein: Für je drei  $k$ -Punkte  $A, B, C$  in  $k$ -allgemeiner Lage ist der  $k$ -Winkel  $\angle_k BAC$  als Vereinigung

$$\angle_k BAC = \overrightarrow{AB}^k \cup \overrightarrow{AC}^k$$

definiert. Die  $k$ -Strahlen  $\overrightarrow{AB}^k$  und  $\overrightarrow{AC}^k$  liegen auf zwei eindeutig bestimmten  $k$ -Geraden  $\overleftarrow{AB}^k \neq \overleftarrow{AC}^k$  und es gibt eindeutig bestimmte zu  $K$  orthogonale verallgemeinerte Geraden  $g \neq h$  mit

$$\overleftarrow{AB}^k = g \cap \mathbf{P}_k \quad \text{und} \quad \overleftarrow{AC}^k = h \cap \mathbf{P}_k.$$

Nun gilt zum Einen  $t_g A \neq t_h A$ ,

denn: Wir unterscheiden drei Fälle.

**Fall 1:  $g, h$  sind beide Geraden.** Dann gilt  $t_g A = g \neq h = t_h A$ .

**Fall 2:  $g$  ist eine Gerade und  $h$  ein Kreis.** Wegen  $A \in \mathbf{P}_k$  folgt wie im Beweis von Proposition 4.31, dass die Gerade  $g = \overleftrightarrow{OA}$  den Kreis  $h$  in zwei Punkten schneidet. Mit Proposition 4.11 folgt  $g = t_g A \neq t_h A$ .

**Fall 3:  $g, h$  sind beide Kreise.** Nach Voraussetzung ist  $A = \overleftrightarrow{AB}^k \wedge_k \overleftrightarrow{AC}^k$ . Da  $g$  und  $h$  unter  $\sigma$  jeweils auf sich selbst abgebildet werden, ist  $A'$  ein Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  außerhalb von  $K$ ; insbesondere gilt  $|g \cap h| = 2$ . Gälte nun  $t_g A = t_h A$ , so lägen nach Korollar 4.12 der Punkt  $A$  und die Mittelpunkte von  $g$  und  $h$  auf einer gemeinsamen Geraden, die senkrecht auf  $t_g A$  stünde. Wegen  $\kappa_g(A) = 0 = \kappa_h(A)$  läge  $A$  zudem auf der Potenzgeraden  $p_{g,h}$ . Nach Teil (b) von Proposition 4.16 gälte also  $t_g A = p_{g,h}$ , und nach Teil (c) derselben Proposition folgte daraus

$$g \cap h = g \cap p_{g,h} = g \cap t_g A = \{A\}.$$

Das steht im Widerspruch zu  $|g \cap h| = 2$  und kann also nicht sein. #

Zum Anderen lässt sich dem  $k$ -Winkel  $\angle_k BAC$  wegen der Eindeutigkeit von  $g$  bzw.  $h$  wohldefiniert die in Definition 4.35 eingeführte verallgemeinerte Winkelgröße  $\angle_{(g,h)} BAC$  zuordnen. Wir schreiben

$$\angle_k BAC := \angle_{(g,h)} BAC$$

und nennen diesen Wert das  *$k$ -Bogenmaß* bzw. die  *$k$ -Winkelgröße* des  $k$ -Winkels  $\angle_k BAC$ . Für weitere drei  $k$ -Punkte  $D, E, F$  in  $k$ -allgemeiner Lage definieren wir so

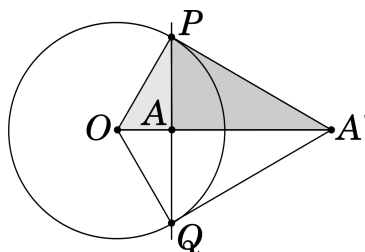
$$\angle_k BAC \simeq_k \angle_k EDF : \iff \angle_k BAC = \angle_k EDF.$$

**Proposition 5.7 (E).** Das Poincaré'sche Kreismodell  $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k, \cong_k, \simeq_k)$  erfüllt die Kongruenzaxiome für Winkel ( $K_4$ ) - ( $K_6$ ).

Einen Beweis für diese Proposition führen wir nicht durch. Wir wollen aber nun nachweisen, dass  $\mathbb{H}_k$  das Vollständigkeitsaxiom erfüllt. Dafür müssen wir zunächst etwas ausholen:

**Proposition 5.8 (E).** Für  $A \in \mathbf{P}_k$  beliebig gibt es eine  $k$ -Bewegung  $\varphi$  mit  $\varphi(A) = O$  und  $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbf{P}_k}$ .

*Beweis.* Wir erinnern an die Konstruktion des Spiegelpunkts  $A'$  im Beweis von Proposition 4.27: Sind  $P, Q$  die Schnittpunkte der Lotgeraden  $\ell_{\overleftrightarrow{OA}} A$  mit  $K$ , so ist  $A'$  der Schnittpunkt der Tangenten an  $K$  in  $P$  und  $Q$  mit dem Strahl  $\overleftrightarrow{OA}$ .



Wegen  $\angle PA'O \simeq \angle PA'A$  und dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck 1.68 sind die rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle A'PO$  und  $\triangle A'AP$  ähnlich zueinander. Es folgt

$$\frac{\|A' - A\|}{\|A' - P\|} = \frac{\|A' - P\|}{\|A' - O\|}$$

und also

$$\|A' - P\|^2 = \|A' - A\| \|A' - O\|.$$

Aus  $O \star A \star A'$  folgt zudem  $O \in \overrightarrow{A'A}$ . Der Punkt  $O$  ist also das Bild von  $A$  unter der Kreisspiegelung  $\sigma_{\|A'-P\|, A'}$ . Unter Verwendung von Satz 4.36 kann man zeigen, dass Einschränkungen auf  $\mathbf{P}_k$  von euklidischen Kreisspiegelungen an zu  $K$  orthogonalen Kreisen  $k$ -Bewegungen sind. Die Proposition folgt also, wenn wir  $\varphi := \sigma_{\|A'-P\|, A'}|_{\mathbf{P}_k}$  setzen.  $\square$

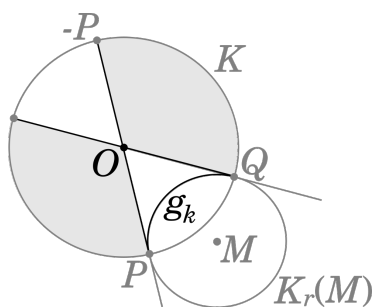
**Proposition 5.9** ( $\mathbb{E}$ ). *Das Poincaré'sche Kreismodell  $\mathbb{H}_k$  erfüllt das Vollständigkeitsaxiom (V).*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass es zu jeder  $k$ -Gerade  $g_k$  und jedem  $k$ -Dedekindschnitt  $(s, t)$  von  $g_k$  genau einen  $k$ -Punkt  $P$  gibt, so dass für alle  $k$ -Punkte  $A \in s, B \in t$  genau eine der drei Aussagen  $P = A, P = B$  oder  $A \star_k P \star_k B$  gilt. Wählen wir einen  $k$ -Punkt  $Q \in g_k$  aus. Nach Proposition 5.8 gibt es eine  $k$ -Bewegung, die  $Q$  auf den Ursprung  $O$  abbildet und somit  $g_k$  wegen  $Q \in g_k$  auf eine  $k$ -Gerade vom ersten Typ. Es genügt daher, das Vollständigkeitsaxiom (V) für eine  $k$ -Gerade  $g_k$  vom ersten Typ nachzuweisen. Da die hyperbolische Anordnung  $\star_k$  auf  $k$ -Geraden vom ersten Typ durch die euklidische Anordnung erklärt ist, folgt dies unmittelbar aus der Gültigkeit desselben in der euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}$ .  $\square$

**Proposition 5.10** ( $\mathbb{E}$ ). *Das Poincaré'sche Kreismodell  $\mathbb{H}_k$  erfüllt das hyperbolische Axiom (H).*

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass es zu jedem  $k$ -Punkt  $A$  und jeder  $k$ -Geraden  $g_k$ , die nicht durch  $A$  geht, unendlich viele  $k$ -Geraden durch  $A$  gibt, die  $g_k$  nicht schneiden. Nach Proposition 5.8 gibt es eine  $k$ -Bewegung, die  $A$  auf den Ursprung  $O$  abbildet und  $g_k$  wegen  $A \notin g_k$  auf eine  $k$ -Gerade vom zweiten Typ. Es langt also zu zeigen, dass es zu jeder  $k$ -Geraden  $g_k$  vom zweiten Typ unendlich viele  $k$ -Geraden vom ersten Typ gibt, die  $g_k$  nicht schneiden.

Sei also  $g_k$  eine fest gewählte Gerade vom zweiten Typ, sei  $K_r(M)$  der zu  $K$  orthogonale Kreis mit  $g_k = K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$ , und seien  $P, Q$  die Endpunkte von  $g_k$ .



Die Geraden  $\overleftrightarrow{OP}$  und  $\overleftrightarrow{OQ}$  sind die beiden Tangenten des Kreises  $K_r(M)$ , die durch  $O$  gehen. Es folgt, dass alle Punkte in  $K_r(M) \setminus \{P\}$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{OP}$  liegen wie  $M$ ,

denn: Läge ein  $B \in K_r(M)$  auf der  $M$  entgegengesetzten Seite von  $\overleftrightarrow{OP}$ , so gäbe es ein  $S \in \overleftrightarrow{MB} \cap \overleftrightarrow{OP}$  mit  $M \star S \star B$ . Es gälte dann  $\|M - S\| < \|M - B\| = r$ , so dass  $S$  ein innerer Punkt von  $K_r(M)$  wäre. Da  $\overleftrightarrow{OP}$  eine Tangente an  $K_r(M)$  ist und Tangenten nach Proposition 4.11 keine Punkte im Inneren des zugehörigen Kreises besitzen, kann es ein solches  $B$  nicht geben. #

Wegen  $Q \in K_r(M) \setminus \{P\}$  folgt, dass alle Punkte in  $K_r(M) \setminus \{P\}$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{OP}$  liegen wie  $Q$ . Analog zeigt man, dass alle Punkte in  $K_r(M) \setminus \{Q\}$  auf derselben Seite von  $\overleftrightarrow{OQ}$  liegen wie  $P$ . Mit Ausnahme von  $P, Q$  liegen also alle Punkte von  $K_r(M)$  im Inneren des Winkels  $\angle POQ$ . Es folgt, dass ein Strahl aus  $O$  höchstens dann einen Schnittpunkt mit  $K_r(M)$  hat, wenn er im Inneren von  $\angle POQ$  verläuft oder mit einem der Strahlen  $\overleftrightarrow{OP}, \overleftrightarrow{OQ}$  übereinstimmt.

Der von  $P$  verschiedene Schnittpunkt von  $\overleftrightarrow{OP}$  und  $K$  ist  $-P$ . Es ist  $\angle QO(-P)$  ein Ergänzungswinkel von  $\angle POQ$ , und für jeden Punkt  $A$  im Inneren von  $\angle QO(-P)$  ist die Gerade  $\overleftrightarrow{OA}$  die Vereinigung zweier Strahlen, die mit Ausnahme des Punktes  $O$  jeweils im Inneren eines Ergänzungswinkels zu  $\angle POQ$  liegen. Für jeden Punkt  $A$  im Inneren von  $\angle QO(-P)$  hat also die Gerade  $\overleftrightarrow{OA}$  keinen Schnittpunkt mit  $K_r(M)$ . Auf der Strecke  $\overline{Q(-P)}$  liegen wegen  $(A_2)$  unendlich viele Punkte, von denen bis auf  $Q$  und  $-P$  alle im Inneren des Winkels  $\angle QO(-P)$  liegen. Da die Verbindungsgeraden durch  $O$  und jeweils einen Punkt von  $\overline{Q(-P)} \setminus \{Q, -P\}$  paarweise verschieden sind, erhalten wir durch Schneiden derselben mit  $\mathbf{P}_k$  unendlich viele  $k$ -Geraden vom ersten Typ, die  $K_r(M)$  und insbesondere  $g_k$  nicht schneiden.  $\square$

Zusammengefasst erhalten wir:

**Satz 5.11 (E).** *Das Poincaré'sche Kreismodell  $\mathbb{H}_k$  ist eine hyperbolische Ebene.*

## 5.2 Hyperbolische Geometrie

In diesem Abschnitt werden wir exemplarisch einige wichtige Aussagen der hyperbolischen ebenen Geometrie im Poincaré'schen Kreismodell  $\mathbb{H}_k$  beweisen. Wir schreiben dabei kurz  $(\mathbb{H}_k)$  für „Sei  $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k, \cong_k, \simeq_k)$  das in Abschnitt 5.1 eingeführte Poincaré'sche Kreismodell.“

Zunächst erinnern wir aber an die aus der Analysis bekannten Hyperbelfunktionen

$$\sinh : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \end{cases} \quad \cosh : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \end{cases} \quad \tanh : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{cases}$$

Folgende, leicht zu überprüfende Rechenregeln für diese werden wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts noch benötigen:

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

**Lemma 5.12** ( $\mathbb{H}_k$ ). Für einen beliebigen  $k$ -Punkt  $A$  gilt  $d_k(O, A) = \log \frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|}$ .

*Beweis.* Sind  $P, Q$  die Endpunkte der  $k$ -Gerade  $\overleftrightarrow{OA}^k$ , so ergibt sich unabhängig von der Wahl ihrer Anordnung aus der Definition von  $d_k$

$$d_k(O, A) = |\log DV(O, A, P, Q)| = \left| \log \frac{\|O - P\| \|A - Q\|}{\|O - Q\| \|A - P\|} \right| = \left| \log \frac{1 \pm \|A\|}{1 \mp \|A\|} \right| = \log \frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|}.$$

□

**Lemma 5.13** ( $\mathbb{H}_k$ ). Für einen beliebigen  $k$ -Punkt  $A$  gilt

$$\sinh d_k(O, A) = \frac{2\|A\|}{1 - \|A\|^2} \quad \text{und} \quad \cosh d_k(O, A) = \frac{1 + \|A\|^2}{1 - \|A\|^2}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \sinh d_k(O, A) &= \frac{e^{d_k(O, A)} - e^{-d_k(O, A)}}{2} \stackrel{5.12}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|} - \frac{1 - \|A\|}{1 + \|A\|} \right) = \frac{2\|A\|}{1 - \|A\|^2}, \\ \cosh d_k(O, A) &= \frac{e^{d_k(O, A)} + e^{-d_k(O, A)}}{2} \stackrel{5.12}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|} + \frac{1 - \|A\|}{1 + \|A\|} \right) = \frac{1 + \|A\|^2}{1 - \|A\|^2}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.14** ( $\mathbb{H}_k$ ). Sei  $g_k$  eine  $k$ -Gerade vom zweiten Typ mit Endpunkten  $P, Q$ , und sei  $K_r(M)$  der zu  $K$  orthogonale Kreis mit  $g_k = K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$ . Für jeden  $k$ -Punkt  $A \in g_k$  gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt  $\hat{A}$  mit

$$\{\hat{A}\} = \overline{PQ} \cap \overline{OA}.$$

Für diesen gilt

$$\|\hat{A}\| = \tanh d_k(O, A) = \frac{2\|A\|}{1 + \|A\|^2}.$$

*Beweis.* Der  $k$ -Strahl  $\overrightarrow{OA}^k$  liegt im  $k$ -Inneren von  $\angle_k POQ$  und somit der Strahl  $\overrightarrow{OA}$  im Inneren von  $\angle POQ$ . Nach Teil (b) von Lemma 3.22 gibt es dann einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt  $\hat{A}$  von  $\overrightarrow{OA}$  und  $\overline{PQ}$ .

Im Beweis von Proposition 4.31 haben wir bereits gesehen, dass  $A'$  der von  $A$  verschiedene zweite Schnittpunkt von  $\overrightarrow{OA}$  mit  $K_r(M)$  ist. Weiter gilt

$$\sigma(\hat{A}) = \frac{1}{2} (A + A') =: M_{AA'},$$

denn: Im Spezialfall  $\hat{A} = \frac{1}{2}(P + Q)$  geht die Gerade  $\overleftrightarrow{O\hat{A}} = \overleftrightarrow{OA}$  durch den Kreismittelpunkt  $M$ . Insbesondere sind  $A, A', M$  kollinear, und es gilt  $M_{AA'} = M$ . Da die Kreise  $K$  und  $K_r(M)$  orthogonal zueinander sind, ist daher  $M_{AA'}$  der Schnittpunkt der Geraden  $\overleftrightarrow{O\hat{A}}$  mit den Tangenten an  $K$  in  $P$  und in  $Q$ . Mit Proposition 4.27 folgt die Behauptung in diesem Fall.

Im Folgenden sei  $\hat{A} \neq \frac{1}{2}(P + Q) =: M_{PQ}$ . Da  $M$  als Mittelpunkt von  $K_r(M)$  auf der Mittelsenkrechten  $m_{AA'} = \ell_{\overleftrightarrow{OM_{AA'}}}M_{AA'}$  liegt, ist  $\angle MM_{AA'}O$  genau wie  $\angle \hat{A}M_{PQ}O$  ein rechter Winkel. Da zudem die Winkel  $\angle \hat{A}OM_{PQ}$  und  $\angle MOM_{AA'}$  übereinstimmen, sind nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck 1.68 die Dreiecke  $\triangle O\hat{A}M_{PQ}$  und  $\triangle OMM_{AA'}$  ähnlich zueinander. Insbesondere gilt

$$\frac{\|\hat{A}\|}{\|M_{PQ}\|} = \frac{\|M\|}{\|M_{AA'}\|}$$

und also

$$\|\hat{A}\| \cdot \|M_{AA'}\| = \|M_{PQ}\| \cdot \|M\| = 1,$$

wobei sich die letzte Gleichung aus dem vorher betrachteten Spezialfall ergibt. #

Wir erhalten

$$\|\hat{A}\| = \frac{1}{\|M_{AA'}\|} = \frac{2}{\|A\| + \|A'\|} = \frac{2}{\|A\| + \frac{1}{\|A\|}} = \frac{2\|A\|}{1 + \|A\|^2} = \tanh d_k(O, A).$$

□

**Satz 5.15** ( $\mathbb{H}_k$ ). Sei  $\triangle_k ABC$  ein rechtwinkliges  $k$ -Dreieck mit  $k$ -Seitenlängen  $(a, b, c)$  und  $k$ -Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \frac{\pi}{2})$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.

$$(a) \quad \sin \alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{\sinh b}{\sinh c},$$

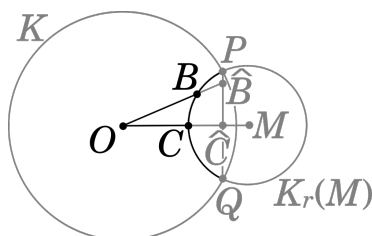
$$(b) \quad \cos \alpha = \frac{\tanh b}{\tanh c} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\tanh a}{\tanh c},$$

$$(c) \quad \cosh a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \quad \text{und} \quad \cosh b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},$$

$$(d) \quad \cosh c = \cosh a \cdot \cosh b = \cot \alpha \cdot \cot \beta.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Aussage (b). Nach Proposition 5.8 gibt es eine  $k$ -Bewegung, die  $A$  auf den Ursprung  $O$  abbildet, so dass wir ohne Einschränkung  $A = O$  annehmen können. Die  $k$ -Gerade  $\overleftrightarrow{BC}^k$  ist dann vom zweiten Typ, so dass es einen eindeutig bestimmten zu  $K$  orthogonalen Kreis  $K_r(M)$  mit  $K_r(M) \cap \mathbf{P}_k = \overleftrightarrow{BC}^k$  gibt. Der Punkt  $C$  liegt auf dem Strahl  $\overrightarrow{OM}$ , denn: Nach Voraussetzung ist  $\angle_k OCB$  ein rechter  $k$ -Winkel, weshalb die Tangente  $t_{K_r(M)}C$  orthogonal zur Geraden  $\overleftrightarrow{OC}$  ist. Andererseits ist  $t_{K_r(M)}C$  auch orthogonal zu  $\overleftrightarrow{MC}$ , so dass wir

$\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{MC}$  und also  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{MC}$  erhalten. Es folgt  $C \in \overrightarrow{OM}$ . Da  $O$  außerhalb von  $K_r(M)$  liegt, gilt zudem  $r = \|M - C\| < \|O - M\|$ , so dass  $C \star O \star M$  ausgeschlossen ist. #



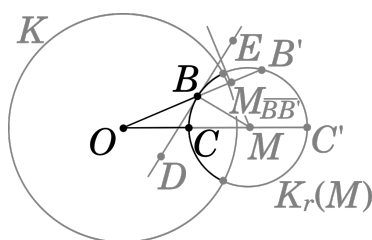
Sind  $P, Q$  die Endpunkte von  $\overrightarrow{BC}^k$  und  $\hat{B} := \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{PQ}$ ,  $\hat{C} := \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{PQ}$ , so hat daher das Dreieck  $\triangle O\hat{C}\hat{B}$  einen rechten Winkel bei  $\hat{C}$ , vgl. Teil (b) von Proposition 4.16. Mit Korollar 1.70 folgt dann

$$\cos \alpha = \frac{\|\hat{C}\|}{\|\hat{B}\|} \stackrel{5.14}{=} \frac{\tanh b}{\tanh c'}$$

und damit die erste Teilbehauptung von (b). Die zweite Teilbehauptung folgt durch Umbenennung der Variablen.

Für den Beweis von Behauptung (a) setzen wir  $B' := \sigma(B)$ ,  $C' := \sigma(C)$  und  $M_{BB'} := \frac{1}{2}(B + B')$ . Es gilt dann  $O \star B \star M_{BB'} \star B'$ . Sind  $D, E$  zwei Punkte auf der Tangente an  $K_r(M)$  in  $B$ , so dass  $C$  und  $D$  auf derselben Seite von  $\overrightarrow{OB}$  liegen und  $E \star B \star D$  gilt, so folgt nach Definition des hyperbolischen Bogenmaßes

$$\beta = \angle_k OBC = \angle OBD = \angle EBM_{BB'}.$$



Da das  $k$ -Dreieck  $\triangle_k OBC$  rechtwinklig ist, folgt mit dem Außenwinkelsatz 3.66

$$\angle EBM_{BB'} = \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Der Punkt  $M_{BB'}$  liegt also im Inneren des rechten Winkels  $\angle EBM$ , und es folgt

$$\beta = \angle EBM - \angle M_{BB'}BM = \frac{\pi}{2} - \angle M_{BB'}BM = \pi - \frac{\pi}{2} - \angle M_{BB'}BM.$$

Da  $M_{BB'}$  und  $M$  beide auf  $m_{\overrightarrow{BB'}}$  liegen, ist  $\angle BM_{BB'}M$  ein rechter Winkel, und mit dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck 1.68 angewandt auf das Dreieck  $\triangle BM_{BB'}M$  erhalten wir

$$\beta = \pi - \angle BM_{BB'}M - \angle M_{BB'}BM = \angle BMM_{BB'}.$$

Nach Korollar 1.70 ergibt sich

$$\sin \beta = \frac{\|B - M_{BB'}\|}{\|M - B\|} = \frac{\frac{1}{2} \|B - B'\|}{\frac{1}{2} \|C' - C\|} = \frac{\|B - B'\|}{\|C - C'\|}.$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \|B - B'\| &= \|B'\| - \|B\| = \frac{1}{\|B\|} - \|B\| = \frac{1 - \|B\|^2}{\|B\|} \stackrel{5.13}{=} \frac{2}{\sinh c'} \\ \|C - C'\| &= \|C'\| - \|C\| = \frac{1}{\|C\|} - \|C\| = \frac{1 - \|C\|^2}{\|C\|} \stackrel{5.13}{=} \frac{2}{\sinh b} \end{aligned}$$

und somit  $\sin \beta = \frac{\sinh b}{\sinh c}$ . Das ist die zweite Teilbehauptung von (a). Die erste Teilbehauptung ergibt sich durch Umbenennung der Variablen.

Für den Nachweis von Behauptung (d) bemerken wir zunächst

$$\begin{aligned} \sinh^2 c &= \sinh^2 c (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \stackrel{(a),(b)}{=} \sinh^2 c \cdot \left( \frac{\sinh^2 a}{\sinh^2 c} + \frac{\tanh^2 b}{\tanh^2 c} \right) \\ &= \sinh^2 a + \cosh^2 c \cdot \tanh^2 b. \end{aligned}$$

Mit (5.6) folgt daraus

$$\cosh^2 c = 1 + \sinh^2 c = \cosh^2 a + \cosh^2 c \cdot \tanh^2 b$$

und somit

$$\cosh^2 c \cdot \cosh^2 b = \cosh^2 a \cdot \cosh^2 b + \cosh^2 c \cdot \sinh^2 b.$$

Erneutes Anwenden von (5.6) liefert

$$\cosh^2 c = \cosh^2 c (\cosh^2 b - \sinh^2 b) = \cosh^2 a \cdot \cosh^2 b.$$

Mit der Positivität von  $\cosh$  folgt hieraus das erste Gleichheitszeichen in (d) und also

$$\begin{aligned} \cosh a &= \frac{\cosh c}{\cosh b} = \frac{\sinh c}{\sinh b} \cdot \frac{\tanh b}{\tanh c} \stackrel{(a),(b)}{=} \frac{\cos \alpha}{\sin \beta'} \\ \cosh b &= \frac{\cosh c}{\cosh a} = \frac{\sinh c}{\sinh a} \cdot \frac{\tanh a}{\tanh c} \stackrel{(a),(b)}{=} \frac{\cos \beta}{\sin \alpha'} \end{aligned}$$

und somit Behauptung (c). Hieraus ergibt sich schließlich mit

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \cot \alpha \cdot \cot \beta$$

auch das zweite Gleichheitszeichen in (d). □

**Satz 5.16** ( $\mathbb{H}_k$ ). Sei  $\triangle_k ABC$  ein  $k$ -Dreieck mit  $k$ -Seitenlängen  $(a, b, c)$  und  $k$ -Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:



(a) *Der hyperbolische Seitenkosinussatz*

$$\begin{aligned}\cosh a &= \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos \alpha, \\ \cosh b &= \cosh c \cdot \cosh a - \sinh c \cdot \sinh a \cdot \cos \beta, \\ \cosh c &= \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos \gamma.\end{aligned}$$

(b) *Der hyperbolische Winkelkosinussatz*

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cosh a \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \beta \cdot \cos \gamma, \\ \cos \beta &= \cosh b \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \alpha, \\ \cos \gamma &= \cosh c \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta.\end{aligned}$$

(c) *Der hyperbolische Sinussatz*

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}.$$

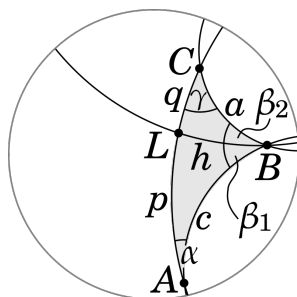
*Beweis.* Wir betrachten den Lotfußpunkt  $L := L_{\overrightarrow{AC}^k} B$  und setzen

$$h := d_k(B, L), \quad p := d_k(A, L), \quad q := d_k(L, C), \quad \beta_1 := \angle_k ABL, \quad \beta_2 := \angle_k LBC.$$

Im Folgenden werden wir nur den Fall  $A \star_k L \star_k C$  betrachten, die anderen Fälle lassen sich analog behandeln. In diesem Fall gelten

$$b = p + q \quad \text{und} \quad \beta = \beta_1 + \beta_2, \tag{5.7}$$

*denn:* Die erste Teilbehauptung folgt direkt mit Lemma 5.5. Da es nach Proposition 5.8 eine selbstinverse  $k$ -Bewegung gibt, die  $B$  auf  $O$  abbildet, können wir für den Beweis der zweiten Teilbehauptung ohne Einschränkung  $B = O$  annehmen. Nach Voraussetzung liegt dann der  $k$ -Strahl  $\overrightarrow{OL}^k$  zwischen den  $k$ -Strahlen  $\overrightarrow{OA}^k$  und  $\overrightarrow{OC}^k$ . Da die Winkelmaße in diesem Fall mit den zugehörigen euklidischen Winkelmaßen übereinstimmen, folgt die zweite Teilbehauptung mit Proposition 4.10. #



Zum Beweis des hyperbolischen Seitenkosinussatzes (a) genügt es, die letzte Gleichung zu zeigen, da sich die anderen Gleichungen durch Umbenennung erreichen lassen. Hier gilt

$$\cosh c \stackrel{5.15(d)}{=} \cosh p \cdot \cosh h \stackrel{(5.7)}{=} \cosh(b - q) \cdot \cosh h$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(5.5)}{=} (\cosh b \cdot \cosh q - \sinh b \cdot \sinh q) \cosh h \\
&= \cosh b \cdot \cosh q \cdot \cosh h - \sinh b \cdot \sinh q \cdot \cosh h \\
&\stackrel{5.15(d)}{=} \cosh b \cdot \cosh a - \sinh b \cdot \sinh q \cdot \frac{\cosh a}{\cosh q} \\
&= \cosh b \cdot \cosh a - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \frac{\cosh a \cdot \sinh q}{\sinh a \cdot \cosh q} \\
&= \cosh b \cdot \cosh a - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \frac{\tanh q}{\tanh a} \\
&\stackrel{5.15(b)}{=} \cosh b \cdot \cosh a - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos \gamma.
\end{aligned}$$

Genauso genügt es in (b), die zweite Gleichung zu zeigen. Hier gilt

$$\begin{aligned}
\cosh b &\stackrel{(5.7)}{=} \cosh(p+q) \stackrel{(5.5)}{=} \cosh p \cdot \cosh q + \sinh p \cdot \sinh q \\
&\stackrel{5.15(a),(c)}{=} \frac{\cos \beta_1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \beta_2}{\sin \gamma} + \sinh c \cdot \sinh \beta_1 \cdot \sinh a \cdot \sinh \beta_2 \\
&= \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin \alpha \cdot \sinh c \cdot \sinh a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \\
&\stackrel{5.15(a)}{=} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sinh^2 h}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \\
&= \frac{\cos(\beta_1 + \beta_2) + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 (1 + \sinh^2 h)}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \\
&\stackrel{(5.7),(5.6)}{=} \frac{\cos \beta + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \cosh^2 h}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \\
&\stackrel{5.15(c)}{=} \frac{\cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}.
\end{aligned}$$

Zum Beweis des hyperbolischen Sinussatzes (c) berechnen wir

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} \stackrel{5.15(a)}{=} \frac{1}{\sinh a} \cdot \frac{\sinh h}{\sinh c} \stackrel{5.15(a)}{=} \frac{\sin \gamma}{\sinh c'}$$

die andere Gleichung ergibt sich analog.  $\square$

**Satz 5.17** (Winkelsumme im Dreieck (hyperbolisch),  $\mathbb{H}_k$ ). Für ein beliebiges  $k$ -Dreieck  $\triangle_k ABC$  mit  $k$ -Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  gilt

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi,$$

die Summe der  $k$ -Innenwinkelgrößen eines  $k$ -Dreiecks ist also stets kleiner als  $\pi$ .

*Beweis.* Sei  $D \in \overleftrightarrow{AC}^k$  ein  $k$ -Punkt mit  $A \star_k C \star_k D$ . Nach dem Außenwinkelsatz 3.66 gilt dann

$$\angle_k CBA < \angle_k BCD.$$

Nach Proposition 5.8 gibt es eine selbstinverse  $k$ -Bewegung, die den Scheitel eines gegebenen  $k$ -Winkels auf den Ursprung abbildet. Aus den entsprechenden Überlegungen in der euklidischen Standardebene folgt daher zum Einen, dass ein  $k$ -Winkel genau dann kleiner als ein

anderer  $k$ -Winkel ist, wenn dieselbe Relation zwischen den zugehörigen  $k$ -Winkelgrößen gilt, und zum Anderen, dass sich die  $k$ -Winkelgrößen eines gegebenen  $k$ -Winkels und eines seiner  $k$ -Ergänzungswinkel zu  $\pi$  aufaddieren. Es folgt daher

$$\beta = \angle_k CBA < \angle_k BCD = \pi - \angle_k BCA = \pi - \gamma. \quad (5.8)$$

Nach dem hyperbolischen Winkelkosinussatz 5.16 gilt

$$\cos \alpha = \cosh a \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

Nach (5.6) ist  $\cosh^2 a = 1 + \sinh^2 a > 1$ . Mit  $\cosh a > 0$  folgt daraus  $\cosh a > 1$  und somit

$$\begin{aligned} \cos \alpha &> 1 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \beta \cdot \cos \gamma \\ &= -(\cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \beta \cdot \sin \gamma) \\ &= -\cos(\beta + \gamma) \\ &= \cos(\pi - (\beta + \gamma)). \end{aligned}$$

Da  $\alpha$  und nach (5.8) auch  $\pi - (\beta + \gamma)$  im Intervall  $(0, \pi)$  liegen und da der Kosinus dort streng monoton fällt, folgt wie behauptet

$$\alpha < \pi - (\beta + \gamma).$$

□

### 5.3 Übungsaufgaben

**Aufgabe 5.1 (E).** Sei  $g_k$  eine  $k$ -Gerade vom ersten Typ, und sei  $g$  eine zu  $K$  orthogonale Gerade mit  $g_k = g \cap \mathbf{P}_k$ . Zeigen Sie, dass dann die Einschränkung auf  $\mathbf{P}_k$  der Spiegelung an  $g$  eine Bewegung im Poincaré'schen Kreismodell  $\mathbb{H}_k$  ist.

**Aufgabe 5.2 (E).** In dieser Aufgabe führen wir mit der Poincaré-Halbebene  $\mathbb{H}_h$  ein weiteres Modell einer hyperbolischen Ebene ein. Das Paar  $\mathbb{H}_h := (\mathbf{P}_h, \mathbf{G}_h)$  mit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_h &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}, \\ \mathbf{G}_h &:= \{g \cap \mathbf{P}_h \mid g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}} \text{ orth. zu } \mathbb{R}\} \cup \{K' \cap \mathbf{P}_h \mid K' \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ zu } \mathbb{R} \text{ orth. Kreis}\} \end{aligned}$$

heißt die **Poincaré-Halbebene**. Hierbei (und im Weiteren) identifizieren wir wie üblich die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  und die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  mit der  $x$ -Achse darin. Die Elemente von  $\mathbf{P}_h$  nennen wir  **$h$ -Punkte**, die Elemente von  $\mathbf{G}_h$  heißen  **$h$ -Geraden**. Zeigen Sie:

(a) Die **Cayley-Abbildung**

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}, \\ z & \mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{cases}$$

ist eine Bijektion.

(b) Die Einschränkung von  $\phi$  auf  $\mathbb{R}$  liefert eine Bijektion  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\} \setminus \{1\}$ .

- (c) Die Einschränkung von  $\phi$  auf  $\mathbf{P}_h$  liefert eine Bijektion  $\phi : \mathbf{P}_h \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\} \cong \mathbf{P}_k$ .
- (d) Es gilt  $\phi|_{\mathbf{P}_h}(z) = -i \cdot \overline{\sigma_{\sqrt{2}, -i}(z)}$ .
- (e) Für alle  $g_h \in \mathbf{G}_h$  gilt  $\phi(g_h) \in \mathbf{G}_k$ , und für alle  $g_k \in \mathbf{G}_k$  gilt  $\phi^{-1}(g_k) \in \mathbf{G}_h$ .

Offensichtlich wird  $\mathbb{H}_h$  zu einer hyperbolischen Ebene, wenn die Anordnung und die Kongruenzbegriffe für Strecken und Winkel dadurch erklärt werden, dass die Cayley-Abbildung  $\phi$  die entsprechenden Verträglichkeiten eines Isomorphismus wie in Definition 3.30 erfüllen soll.

**Aufgabe 5.3** ( $\mathbb{H}_k$ ). Seien  $A, B, P, Q \in \mathbf{P}_k$  mit  $A \neq P$  und  $B \neq Q$ , und seien  $R, S \in K$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Es existieren genau zwei  $k$ -Bewegungen  $\phi$  mit  $\phi(A) = A$  und  $\phi(\overrightarrow{AP}^k) = \overrightarrow{AP}^k$ .
- (b) Es existieren genau zwei  $k$ -Bewegungen  $\phi$  mit  $\phi(A) = B$  und  $\phi(\overrightarrow{AP}^k) = \overrightarrow{BQ}^k$ .
- (c) Es existieren genau zwei  $k$ -Bewegungen  $\phi$  mit  $\phi(A) = B$  und  $\phi(\overrightarrow{AR}^k) = \overrightarrow{BS}^k$ .

**Aufgabe 5.4** ( $\mathbb{H}_k$ ). Zeigen Sie, dass sich jede  $k$ -Bewegung als Komposition von höchstens vier  $k$ -Geradenspiegelungen schreiben lässt.