

Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2019

Vorlesungsskript

Dr. Hendrik Kasten und Dr. Denis Vogel

19. September 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Analytische Geometrie	3
1.1	Affine Räume	3
1.2	Affine Abbildungen	11
1.3	Affine Koordinaten	16
1.4	Polytope	27
1.5	Projektive Räume	36
1.6	Projektive Abbildungen	40
1.7	Projektive Koordinaten	49
1.8	Computergraphik	58
1.9	Übungsaufgaben	61
2	Inzidenzgeometrie	64
2.1	Inzidenzebenen	64
2.2	Affine Ebenen	67
2.3	Übungsaufgaben	70
3	Hilbertebenen	72
3.1	Die Anordnungsaxiome	72
3.2	Die Kongruenzaxiome für Strecken	78
3.3	Die Kongruenzaxiome für Winkel	80
3.4	Ergänzungswinkel, Gegenwinkel und rechte Winkel	87
3.5	Orthogonalität und Parallelität	89
3.6	Der Kongruenzsatz für Dreiecke	94
3.7	Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende	97
3.8	Innen- und Außenwinkel im Dreieck	100
3.9	In- und Umkreis	104
3.10	Übungsaufgaben	108
4	Euklidische Geometrie	111
4.1	Das Vollständigkeitsaxiom	111
4.2	Euklidische Ebenen	114
4.3	Kreise	116
4.4	Die Inversion am Kreis	126

4.5	Übungsaufgaben	135
5	Nichteuklidische Geometrie	137
5.1	Das Poincaré'sche Kreismodell	137
5.2	Hyperbolische Geometrie	144
5.3	Übungsaufgaben	151

Analytische Geometrie

Nach heutigem Sprachgebrauch versteht man unter der *Analytischen Geometrie* den Teil der Geometrie, der mit Hilfsmitteln der Linearen Algebra betrieben wird. Verwendung von höherer Algebra führt zur *Algebraischen Geometrie*; in der *Differentialgeometrie* werden geometrische Objekte mit den Methoden der Analysis untersucht.

In den Abschnitten 1.1 und 1.2 führen wir zunächst affine Räume und Abbildungen zwischen ihnen ein und untersuchen diese Objekte. In Abschnitt 1.3 zeigen wir mithilfe affiner Koordinaten und insbesondere des Teilverhältnisses einige klassische Resultate der affinen Geometrie, wie etwa den Strahlensatz. Schließlich vertiefen wir in Abschnitt 1.4 mit den Polytopen exemplarisch ein Thema der dreidimensionalen reellen affinen Geometrie.

In den Abschnitten 1.5 und 1.6 untersuchen wir projektive Räume und den Zusammenhang zwischen diesen und den zuvor eingeführten affinen Räumen. In Abschnitt 1.7 zeigen wir mithilfe projektiver Koordinaten und insbesondere des Doppelverhältnis einige klassische Resultate der projektiven Geometrie, wie etwa den Satz von Pappos und den Satz von Desargues. Abschließend für dieses Kapitel behandeln wir in Abschnitt 1.8 als ein konkretes Anwendungsbeispiel für die in Abschnitt 1.5 eingeführte Theorie Fragestellungen aus der *Darstellenden Geometrie*, also aus dem Teilbereich der Geometrie, der sich mit der Konstruktion von Projektionen dreidimensionaler Objekte auf eine zweidimensionale Darstellungsebene befasst.

1.1 Affine Räume

Definition 1.1. Ein *affiner Raum* über einem Körper K ist ein Tripel $(X, T(X), \tau)$ aus

- einer nichtleeren Menge X , deren Elemente wir **Punkte** nennen,
- einem K -Vektorraum $T(X)$, dessen Elemente **Translationen** heißen,

- einer einfach transitiven Aktion τ von $T(X)$ auf X , also einem Gruppenhomomorphismus

$$\tau : \begin{cases} T(X) & \rightarrow \mathcal{S}(X), \\ t & \mapsto \tau_t, \end{cases}^1$$

für den es zu je zwei $A, B \in X$ genau ein $\tau_t \in \mathcal{S}(X)$ mit $\tau_t(A) = B$ gibt.

Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen soll auch die leere Menge (ohne Angabe von $T(X)$ und τ) ein affiner Raum sein. Für „Sei $(X, T(X), \tau)$ ein affiner Raum über einem Körper K .“ schreiben wir künftig auch kurz „(aff. Raum)“.

Definition 1.2 (aff. Raum). Die **Dimension** von $(X, T(X), \tau)$ ist durch $\dim_K T(X)$ gegeben und wird $\dim_K X$ bzw. $\dim X$ bezeichnet. Die leere Menge erhält die Dimension -1 . Speziell heißt ein affiner Raum X

- eine **affine Ebene**, wenn $\dim X = 2$ gilt,
- eine **affine Gerade**, wenn $\dim X = 1$ gilt.

Beispiel 1.3. Der **affine Standardraum** von Dimension $n \in \mathbb{N}^2$ über dem Körper K ist gegeben durch

$$\mathbb{A}^n(K) := (K^n, K^n, \tau^{(K^n)}) \quad \text{mit } \tau^{(K^n)} : \begin{cases} K^n & \rightarrow \mathcal{S}(K^n), \\ t & \mapsto \tau_t^{(K^n)}, \end{cases} \quad \text{und } \tau_t^{(K^n)} : \begin{cases} K^n & \rightarrow K^n, \\ A & \mapsto A + t \end{cases}$$

und ist auch tatsächlich ein affiner Raum von Dimension n ,

denn: Die Aussage über die Dimension ist trivial. Zu zeigen ist daher lediglich, dass $\tau^{(K^n)}$ einfach transitiv auf K^n operiert. Für alle $A, t, t' \in K^n$ gilt

$$\begin{aligned} \tau^{(K^n)}(t + t')(A) &= \tau_{(t+t')}^{(K^n)}(A) = A + (t + t') = (A + t) + t' \\ &= \tau_{t'}^{(K^n)}(\tau_t^{(K^n)}(A)) = (\tau_{t'}^{(K^n)} \circ \tau_t^{(K^n)})(A) = (\tau^{(K^n)}(t') \circ \tau^{(K^n)}(t))(A), \end{aligned}$$

durch $\tau^{(K^n)}$ ist also eine Aktion auf K^n gegeben. Für je zwei Punkte $A, B \in K^n$ ist zudem $t = B - A$ offensichtlich das eindeutig bestimmte $t \in K^n$ mit

$$\tau_t^{(K^n)}(A) = A + t = B.$$

Somit operiert $\tau^{(K^n)}$ einfach transitiv auf K^n .

#

Um mit diesen Begriffen besser umgehen zu können, vereinfachen wir von nun an die Bezeichnungen ein wenig:

- Anstelle des Tripels $(X, T(X), \tau)$ schreiben wir künftig oft einfacher X .

¹Hierbei bezeichne wie üblich $\mathcal{S}(X)$ die symmetrische Gruppe der Menge X .

²In diesem Skript ist null keine natürliche Zahl und wir schreiben stets $\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

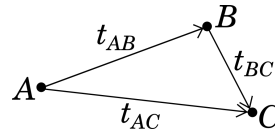
- Da die Aktion τ einfach transitiv ist, ist sie insbesondere injektiv. Daher können wir jedes $t \in T(X)$ mit der zugehörigen Translation τ_t identifizieren, also als bijektive Abbildung auf der Punktmenge X ansehen. Anstelle von τ_t schreiben wir künftig oft einfacher t .
- Da die Abbildung $\tau : T(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt wie im Beweis von Beispiel 1.3

$$(t + t')(A) = t(t'(A)) \quad \text{für alle } t, t' \in T(X), A \in X. \quad (1.1)$$

Die zu den Punkten $A, B \in X$ eindeutig bestimmte Translation t mit $t(A) = B$ bezeichnen wir mit t_{AB} ; in der Literatur heißt diese Translation t_{AB} oft der **Verbindungsvektor** von A nach B . Nach (1.1) gilt dann offenbar für je drei Punkte $A, B, C \in X$

$$t_{AB} + t_{BC} = t_{AC}. \quad (1.2)$$

Im affinen Standardraum K^n gilt $t_{AB} = B - A$ und der gerade hergeleitete Sachverhalt lässt sich dort schön zeichnen:



Die Pfeile deuten hierbei die Wirkungen der jeweiligen Translationen an.

- Eine geometrische Eigenschaft eines affinen Raumes X ist, dass all seine Punkte gleichberechtigt sind. Wählen wir einen festen Punkt $O \in X$ aus, so ist die Zuordnung

$$\eta : \begin{cases} X & \rightarrow T(X), \\ A & \mapsto t_{OA} \end{cases}$$

aufgrund der einfachen Transitivität der Aktion von $T(X)$ auf X bijektiv und bildet O auf das Nullelement in $T(X)$ ab; in der Literatur heißt die Translation t_{OA} oft der **Ortsvektor** von A . Sehr pauschal kann man sagen, dass ein affiner Raum aus einem Vektorraum entsteht, indem man die Auswahl eines festen Elements als der Ursprung aufhebt.

Definition 1.4 (aff. Raum). Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt ein **affiner Unterraum** von X , wenn entweder Y leer ist oder es ein $P \in Y$ gibt, für das

$$T(Y) := \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y\}$$

ein Untervektorraum von $T(X)$ ist. Anders ausgedrückt ist dann Y die Bahn eines Punktes P unter der Aktion eines Untervektorraums von $T(X)$.

Beispiel 1.5. Durch Wahl eines Ursprungs O können wir bekanntlich den affinen Standardraum $\mathbb{A}^n(K)$ von Dimension $n \in \mathbb{N}$ über einem Körper K mit dem Vektorraum K^n identifizieren. Die affinen Unterräume von $\mathbb{A}^n(K)$ werden hierbei offenbar mit der leeren Menge und Mengen der Form

$$P + U \quad \text{mit } P \in K^n, U \subseteq K^n \text{ Untervektorraum}$$



Video

identifiziert. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass solche Mengen gerade die Lösungsmengen von inhomogenen linearen Gleichungssystemen sind. Im verlinkten Zusatzmaterial findet sich ein Beweis für letzteres. Dieser ist allerdings in der Sprache der linearen Abbildungen verfasst.

Proposition 1.6 (aff. Raum). Sei $Y \subseteq X$ ein nichtleerer affiner Unterraum. Dann ist für jedes $P \in Y$ die Menge

$$T_P(Y) := \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y\}$$

ein Untervektorraum von $T(X)$ und es gilt $T_P(Y) = T_Q(Y)$ für je zwei $P, Q \in Y$.

Beweis. Nach Definition 1.4 gibt es ein $P \in Y$, so dass $T(Y) = T_P(Y)$ ein Untervektorraum von $T(X)$ ist. Es ist daher offenbar genug, zu zeigen, dass für alle $Q \in Y$ die Gleichheit $T_Q(Y) = T_P(Y)$ gilt. Für ein beliebiges $Q \in Y$ gilt nach (1.2)

$$t_{QA} = t_{QP} + t_{PA} \quad \text{für alle } A \in Y$$

und somit wegen $t_{QP} = -t_{PQ} \in T_P(Y)$ tatsächlich

$$T_Q(Y) = t_{QP} + T_P(Y) = T_P(Y).$$

□

Definition 1.7 (aff. Raum). Die **Dimension** eines nichtleeren affinen Unterraums $Y \subseteq X$ ist durch $\dim_K T(Y)$ gegeben und wird $\dim_K Y$ bzw. $\dim Y$ bezeichnet. Sie ist wohldefiniert nach Proposition 1.6. Der leere affine Unterraum erhält wieder die Dimension -1 . Speziell heißt ein affiner Unterraum $Y \subseteq X$

- eine (**affine**) **Hyperebene** in X , wenn $\dim Y = \dim X - 1$ gilt,
- eine (**affine**) **Ebene** in X , wenn $\dim Y = 2$ gilt,
- eine (**affine**) **Gerade** in X , wenn $\dim Y = 1$ gilt.

Ab sofort werden wir Geraden in affinen Räumen mit kleinen Buchstaben bezeichnen.

Wir haben noch nicht nachgewiesen, dass affine Unterräume stets selbst affine Räume sind. Das holen wir nun nach.

Proposition 1.8 (aff. Raum). Jeder affine Unterraum $Y \subseteq X$ kann auf kanonische Weise zu einem affinen Raum gemacht werden.

Beweis. Für $Y = \emptyset$ ist nichts zu zeigen, so dass wir ohne Einschränkung $Y \neq \emptyset$ annehmen können. Für alle $t \in T(Y)$ gilt dann $t(Y) = Y$,

denn: Nach Proposition 1.6 gilt für einen beliebigen Punkt $P \in Y$ die Gleichheit

$$T(Y) = T_P(Y) = \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y\}.$$

Es gibt daher für jedes $t \in T(Y)$ ein $A \in Y$ mit $t = t_{PA}$, also mit $t(P) = A \in Y$. Hieraus folgt $t(Y) \subseteq Y$. Andererseits gilt analog

$$(-t)(Y) \subseteq Y \quad \text{für alle } t \in T(Y)$$

und mit (1.1) angewandt auf t und $-t$ somit auch $Y \subseteq t(Y)$. #

Hieraus folgt, dass sich die Aktion $\tau : T(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$ zu einer Aktion

$$\sigma : \begin{cases} T(Y) & \rightarrow \mathcal{S}(Y), \\ t & \mapsto t|_Y \end{cases}$$

einschränken lässt. Diese ist trivialerweise wieder einfach transitiv. □

Proposition 1.9 (aff. Raum). *Sei $(Y_i)_{i \in I}$ eine Familie affiner Unterräume von X . Dann gilt:*

- (a) $Y := \bigcap_{i \in I} Y_i$ ist wieder ein affiner Unterraum von X .
- (b) Der Durchschnitt aller affinen Unterräume $Y \subseteq X$ mit $\bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq Y$ heißt der **Verbindungsraum** $\bigvee_{i \in I} Y_i$ und ist wieder ein affiner Unterraum von X . Im Fall $I = \{1, 2, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir auch $\bigvee_{i \in I} Y_i = Y_1 \vee Y_2 \vee \dots \vee Y_n$.

Beweis. Im Beweis von Behauptung (a) dürfen wir ohne Einschränkung $Y \neq \emptyset$ annehmen, da sonst nichts zu zeigen ist. Dann ist für einen beliebigen Punkt $P \in Y$

$$T(Y) = \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in \bigcap_{i \in I} Y_i\} = \bigcap_{i \in I} \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y_i\} = \bigcap_{i \in I} T(Y_i) \quad (1.3)$$

als Durchschnitt von Untervektorräumen von $T(X)$ selbst wieder ein Untervektorraum von $T(X)$. Damit ist Behauptung (a) gezeigt.

Behauptung (b) zeigen wir nur im Fall $I = \{1, 2\}$. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

Fall 1: $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2), \quad (1.4)$$

denn: Für einen beliebigen fest gewählten Punkt $P \in Y_1 \cap Y_2$ gilt nach Proposition 1.6

$$\begin{aligned} T(Y_1) \cup T(Y_2) &= \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y_1\} \cup \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y_2\} \\ &= \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y_1 \cup Y_2\} \\ &\subseteq \{t_{PA} \in T(X) \mid A \in Y_1 \vee Y_2\} \\ &= T(Y_1 \vee Y_2). \end{aligned}$$

Da mit einer beliebigen Teilmenge eines gegebenen Vektorraums auch deren lineare Hülle in diesem Vektorraum enthalten ist, folgt

$$T(Y_1) + T(Y_2) \subseteq T(Y_1 \vee Y_2).$$

Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir den affinen Unterraum

$$Y := \{t(P) \mid t \in T(Y_1) + T(Y_2)\} \subseteq X.^3$$

Aus $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ folgt nach Definition des Verbindungsraums $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$. Mit Proposition 1.6 ergibt sich wie im Beweis der ersten Inklusion

$$T(Y_1 \vee Y_2) \subseteq T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

#

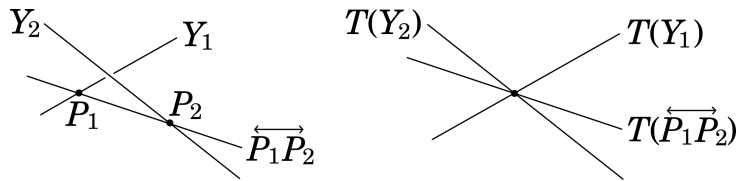
Da somit $T(Y_1 \vee Y_2)$ ein Untervektorraum von $T(X)$ ist, folgt Behauptung (b) in diesem Fall.

Fall 2: $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Sind $Y_1 = \{P_1\}$ und $Y_2 = \{P_2\}$ beide Punkte, so ist nach Übungsaufgabe 1.1

$$\overleftrightarrow{P_1 P_2} := \{P_1\} \vee \{P_2\} = \langle t_{P_1 P_2} \rangle_K(P_1)$$

eine Gerade, die *Verbindungsgerade* von P_1 und P_2 . Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir im Weiteren ohne Einschränkung annehmen, Y_1 und Y_2 seien beide nicht leer. Dann gibt es je einen Punkt $P_1 \in Y_1$ und $P_2 \in Y_2$ und es gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = (T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(\overleftrightarrow{P_1 P_2}), \quad (1.5)$$



denn: Aus $\overleftrightarrow{P_1 P_2} \subseteq Y_1 \vee Y_2$ folgt

$$\begin{aligned} T(Y_1 \vee Y_2) &= T(Y_1 \vee \overleftrightarrow{P_1 P_2} \vee Y_2) \stackrel{(1.4)}{=} T(Y_1) + T(\overleftrightarrow{P_1 P_2} \vee Y_2) \stackrel{(1.4)}{=} T(Y_1) + T(\overleftrightarrow{P_1 P_2}) + T(Y_2) \\ &= (T(Y_1) + T(Y_2)) + T(\overleftrightarrow{P_1 P_2}). \end{aligned}$$

Es verbleibt die Direktheit der Summe ganz rechts zu zeigen. Hierfür genügt es einzusehen, dass der Erzeuger $t_{P_1 P_2}$ von $T(\overleftrightarrow{P_1 P_2})$ nicht in $T(Y_1) + T(Y_2)$ liegt. Wäre dies aber der Fall, so gäbe es nach Proposition 1.6 je einen Punkt $Q_1 \in Y_1$ und $Q_2 \in Y_2$ mit

$$t_{P_1 P_2} = t_{P_1 Q_1} - t_{P_2 Q_2}.$$

Aus

$$t_{Q_1 Q_2} = t_{Q_1 P_1} + t_{P_1 P_2} + t_{P_2 Q_2} = t_{Q_1 P_1} + (t_{P_1 Q_1} - t_{P_2 Q_2}) + t_{P_2 Q_2} = 0$$

folgte dann $Q_1 = Q_2$ und also $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. #

□

³Die Menge Y ist tatsächlich ein affiner Unterraum von X : In Definition 1.4 hatten wir festgestellt, dass sich affine Unterräume von X äquivalent als Bahnen fester Punkte unter der Aktion je eines Untervektorraums von $T(X)$ auffassen lassen. Für Y wählen wir den Punkt P und den Untervektorraum $T(Y_1) + T(Y_2)$

Satz 1.10 (aff. Raum). Es gelte $\text{char } K \neq 2$. Für je zwei affine Unterräume

$$Y_1, Y_2 \subseteq X \quad \text{mit} \quad Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$$

gilt dann

$$Y_1 \vee Y_2 = \bigcup_{\substack{P_1 \neq P_2 \\ P_1 \in Y_1, P_2 \in Y_2}} \overleftrightarrow{P_1 P_2};$$

der Verbindungsraum von Y_1 und Y_2 ist also die Vereinigung der Verbindungsgeraden zwischen Punkten in Y_1 und Punkten in Y_2 .

Beweis. Da für beliebige voneinander verschiedene $P_1 \in Y_1$ und $P_2 \in Y_2$ die Verbindungsgerade $\overleftrightarrow{P_1 P_2} = \langle t_{P_1 P_2} \rangle_K(P_1)$ im affinen Unterraum $Y_1 \vee Y_2$ enthalten ist, ist die rechte Seite der Behauptung in der linken Seite enthalten.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion wählen wir einen beliebigen Punkt $P \in Y_1 \cap Y_2$. Ist $Q \in Y_1 \vee Y_2$, so gilt $t_{PQ} \in T(Y_1 \vee Y_2)$ und es gibt nach Teil (b) von Proposition 1.9 je einen Punkt $P_1 \in Y_1$ und $P_2 \in Y_2$ mit

$$t_{PQ} = t_{PP_1} + t_{PP_2}.$$

Es genügt, wenn wir den Fall behandeln, dass P, P_1, P_2 paarweise verschieden sind, da sonst nichts zu zeigen ist. Wegen $\text{char}(K) \neq 2$ sind dann

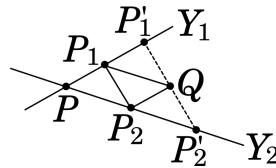
$$P'_1 := (2t_{PP_1})(P) \in Y_1 \quad \text{und} \quad P'_2 := (2t_{PP_2})(P) \in Y_2$$

voneinander verschieden und es gilt

$$t_{P'_1 Q} = t_{P'_1 P} + t_{PQ} = 2t_{P_1 P} + (t_{PP_1} + t_{PP_2}) = t_{P_1 P} + t_{PP_2} = t_{P_1 P_2},$$

$$t_{P'_2 Q} = t_{P'_2 P} + t_{PQ} = 2t_{P_2 P} + (t_{PP_1} + t_{PP_2}) = t_{P_2 P} + t_{PP_1} = t_{P_2 P_1}.$$

Es folgt $t_{P'_1 Q} = -t_{P'_2 Q}$ und also $Q \in \overleftrightarrow{P'_1 P'_2}$.



□

In Analogie zur Dimensionsformel für Untervektorräume, für die sich im verlinkten Zusatzmaterial ein Beweis findet, geben wir nun auch im Kontext affiner Unterräume eine derartige Formel an.

Satz 1.11 (Dimensionsformel für affine Unterräume, **aff. Raum**). Seien $Y_1, Y_2 \subseteq X$ zwei nichtleere affine Unterräume. Dann gilt:

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \begin{cases} \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(Y_1 \cap Y_2) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset. \end{cases}$$



Video

Beweis. Mit der Dimensionsformel für Untervektorräume gilt

$$\begin{aligned}
 \dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\
 &\stackrel{(1.4),(1.5)}{=} \begin{cases} \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim((T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(\overrightarrow{P_1 P_2})) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, P_1 \in Y_1, P_2 \in Y_2 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} \\
 &\stackrel{(1.3)}{=} \begin{cases} \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(Y_1 \cap Y_2) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

Definition 1.12 (aff. Raum). Zwei affine Unterräume $Y_1, Y_2 \subseteq X$ heißen

- *parallel*, in Zeichen $Y_1 \parallel Y_2$, wenn $T(Y_1) \subseteq T(Y_2)$ oder $T(Y_2) \subseteq T(Y_1)$ gilt.
- *windschief*, wenn sie nicht parallel sind und leeren Durchschnitt haben.

Bemerkung 1.13 (aff. Raum). Ist von zwei affinen Unterräumen $Y_1, Y_2 \subseteq X$ einer eine Hyperebene, so sind Y_1, Y_2 nicht windschief,

denn: Ohne Einschränkung sei Y_1 eine Hyperebene und $Y_2 \neq X$. Wären $Y_1, Y_2 \subseteq X$ windschief, so gälte nach der Dimensionsformel 1.11

$$\begin{aligned}
 \dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 \\
 &> (\dim X - 1) + \dim Y_2 - \dim Y_2 + 1 \\
 &= \dim X.
 \end{aligned}$$

Das kann nicht sein, da $Y_1 \vee Y_2$ ein affiner Unterraum von X ist. #

Insbesondere gibt es in der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(K)$ keine zwei windschiefen Geraden; je zwei Geraden $g, h \subseteq \mathbb{A}^2(K)$ sind also parallel oder haben nichtleeren Durchschnitt.

Bemerkung 1.14 (aff. Raum). Die Aussage von Satz 1.10 wird falsch, wenn wir die Voraussetzung $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ weglassen,

denn: Betrachten wir die beiden windschiefen Geraden

$$Y_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Nach der Dimensionsformel 1.11 gilt einerseits

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 + 0 + 1 = 3$$

und somit $Y_1 \vee Y_2 = \mathbb{R}^3$. Andererseits kann man durch Aufstellen einer allgemeinen Geradengleichung leicht überprüfen, dass etwa der Punkt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

auf keiner Verbindungsgerade $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ mit $P_1 \in Y_1$ und $P_2 \in Y_2$ liegt. #

1.2 Affine Abbildungen

Definition 1.15 (aff. Raum). Sei $(Y, T(Y), \sigma)$ ein affiner Raum über dem Körper K . Eine Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ heißt **affine Abbildung**, wenn es eine lineare Abbildung $T(\varphi) : T(X) \rightarrow T(Y)$ mit

$$t_{\varphi(A)\varphi(B)} = T(\varphi)(t_{AB}) \quad \text{für alle } A, B \in X \quad (1.6)$$

gibt.⁴ Eine bijektive affine Abbildung heißt auch eine **Affinität**.

Beispiel 1.16 (aff. Raum). Offensichtlich sind die Abbildungen

$$\text{id} : \begin{cases} X & \rightarrow X, \\ A & \mapsto A \end{cases} \quad \text{und} \quad * : \begin{cases} X & \rightarrow \{*\}, \\ A & \mapsto * \end{cases}$$

affine Abbildungen mit $T(\text{id})(t) = t$ und $T(*) (t) = 0_{T(\{*\})}$ für alle $t \in T(X)$.

Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen affinen Abbildungen und linearen Abbildungen zwischen den zugehörigen Translationsvektorräumen, den wir in den folgenden beiden Propositionen untersuchen werden.

Proposition 1.17 (aff. Raum). Seien $(Y, T(Y), \sigma)$ ein affiner Raum über dem Körper K und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Gibt es einen Punkt $O \in X$, für den die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} T(X) & \rightarrow T(Y), \\ t_{OA} & \mapsto t_{\varphi(O)\varphi(A)} \end{cases}$$

linear ist, so ist φ affin.

Beweis. Für beliebige Punkte $A, B \in X$ gilt

$$\Phi(t_{AB}) = \Phi(t_{OB} - t_{OA}) = \Phi(t_{OB}) - \Phi(t_{OA}) = t_{\varphi(O)\varphi(B)} - t_{\varphi(O)\varphi(A)} = t_{\varphi(A)\varphi(B)}.$$

Die Proposition folgt dann direkt aus Definition 1.15. □

Proposition 1.18 (aff. Raum). Sei $(Y, T(Y), \sigma)$ ein affiner Raum über dem Körper K . Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $\Phi : T(X) \rightarrow T(Y)$ und jedem Paar (O, O') mit $O \in X$ und $O' \in Y$ genau eine affine Abbildung

$$\varphi : X \rightarrow Y \quad \text{mit } \varphi(O) = O' \text{ und } T(\varphi) = \Phi.$$

⁴Die Notation $T(\varphi)$ ist dadurch gerechtfertigt, dass $T(\varphi)$ nach (1.6) bereits eindeutig durch φ festgelegt ist.

Beweis. Die Eindeutigkeit von φ ist klar,

denn: Nach (1.6) folgt aus $T(\varphi) = \Phi$

$$t_{\varphi(O)\varphi(A)} = \Phi(t_{OA}) \quad \text{für alle } A \in X \quad (1.7)$$

und somit

$$\Phi(t_{OA})(\varphi(O)) = \varphi(A) \quad \text{für alle } A \in X.$$

Der Bildpunkt $\varphi(A)$ ergibt sich also aus den gegebenen Daten $\varphi(O) = O'$ und $\Phi(t_{OA})$. #

Definieren wir umgekehrt φ durch (1.7), so folgt mit Proposition 1.17 sofort, dass φ eine affine Abbildung ist. $\square$

Beispiel 1.19. Als Spezialfall von Proposition 1.18 erhalten wir, dass es zu jedem $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und zu jedem $P \in \mathbb{R}^n$ genau eine affine Abbildung

$$\varphi_{M,P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit } \varphi_{M,P}(0) = P \text{ und } T(\varphi_{M,P})(A) = MA \text{ für alle } A \in \mathbb{R}^n$$

gibt. Offensichtlich sind hierdurch alle affinen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ auf sich selbst beschrieben und es gilt

$$\varphi_{M,P}(A) = MA + P \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^n.$$

Im Fall $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ist $\varphi_{M,P}$ eine Affinität mit der Umkehrabbildung

$$\varphi_{M,P}^{-1}(A) = M^{-1}A - M^{-1}P \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^n.$$

Ist sogar $M \in \text{O}_n(\mathbb{R})$, so heißt $\varphi_{M,P}$ eine **Bewegung**. Eine solche Bewegung heißt dabei **eigentlich**, wenn M bereits in $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ liegt, und **uneigentlich** sonst. Für $n = 2$ ist aus der Linearen Algebra Folgendes bekannt (vgl. verlinktes Zusatzmaterial):

- Jedes $M \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ lässt sich eindeutig schreiben als die **Drehung**

$$M = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

um $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit Zentrum $0 \in \mathbb{R}^2$.

- Jedes $M \in \text{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_2(\mathbb{R})$ lässt sich eindeutig schreiben als die **Spiegelung**

$$M = S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Bewegungen werden uns in Abschnitt 3.3 dabei helfen nachzuweisen, dass $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ den Axiomen einer sogenannten Hilbertebene genügt.



Video

Wir werden in Proposition 1.20 mit den Parallelprojektionen eine weitere Klasse affiner Abbildungen einführen, müssen vorher aber noch ein wenig ausholen. Sei also $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum eines gegebenen affinen Raumes X und sei $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit

$$T(X) = W \oplus T(Y). \quad (1.8)$$

Dann ist offensichtlich die W -Bahn

$$W(P) := \{A \in X \mid t_{PA} \in W\}$$

eines beliebigen vorgegebenen Punktes $P \in X$ ein affiner Unterraum mit $T(W(P)) = W$, insbesondere gilt $W(P) \parallel W(Q)$ für beliebige $P, Q \in X$. Für ein beliebiges $P \in X$ gilt nun

$$\dim(W(P) \cap Y) = 0,$$

denn: Gälte $W(P) \cap Y = \emptyset$, so folgte nach der Dimensionsformel 1.11

$$\begin{aligned} \dim(W(P) \vee Y) &= \dim W(P) + \dim Y - \dim(T(W(P)) \cap T(Y)) + 1 \\ &= \dim W + \dim T(Y) - \dim(W \cap T(Y)) + 1 \\ &\stackrel{(1.8)}{=} \dim X + 1. \end{aligned}$$

Das kann nicht sein, da $W(P) \vee Y$ ein affiner Unterraum von X ist. Es gilt daher $W(P) \cap Y \neq \emptyset$ und es gilt

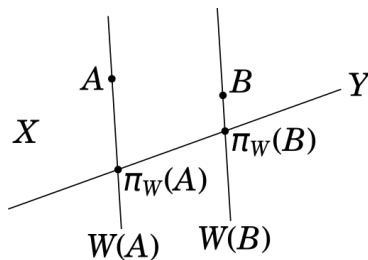
$$\begin{aligned} \dim(W(P) \cap Y) &= \dim(T(W(P) \cap Y)) \\ &\stackrel{(1.3)}{=} \dim(T(W(P)) \cap T(Y)) \\ &= \dim(W \cap T(Y)) \\ &\stackrel{(1.8)}{=} 0. \end{aligned}$$

#

Proposition 1.20 (aff. Raum). Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum und sei $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit $T(X) = W \oplus T(Y)$. Dann ist die Abbildung

$$\pi_W^{X,Y} := \pi_W : \begin{cases} X & \rightarrow Y, \\ P & \mapsto \pi_W(P) \end{cases} \quad \text{mit } \{\pi_W(P)\} := W(P) \cap Y \text{ und } W(P) := \{A \in X \mid t_{PA} \in W\}$$

affin und surjektiv. Wir nennen π_W die **Parallelprojektion längs W** .



Beweis. Nach unseren Vorüberlegungen ist π_W wohldefiniert.

Um nachzuweisen, dass π_W eine affine Abbildung ist, betrachten wir zwei Punkte $A, B \in X$. Dann gilt

$$t_{AB} = t_{A\pi_W(A)} + t_{\pi_W(A)\pi_W(B)} + t_{\pi_W(B)B} = (t_{A\pi_W(A)} - t_{B\pi_W(B)}) + t_{\pi_W(A)\pi_W(B)}.$$

Offensichtlich liegt der erste Summand rechts in W und der zweite in $T(Y)$. Wegen der Direktheit der Summation in (1.8) ist diese Zerlegung eindeutig. Über die Zuordnung

$$t_{AB} \mapsto t_{\pi_W(A)\pi_W(B)}$$

ist daher eine Abbildung $T(\pi_W) : T(X) \rightarrow T(Y)$ definiert. Nach Konstruktion ist diese gerade die kanonische Projektion von $T(X)$ auf $T(Y)$ und insbesondere eine lineare Abbildung. Das zeigt, dass π_W eine affine Abbildung ist.

Schließlich gilt für ein beliebiges $P \in Y$

$$\{\pi_W(P)\} = W(P) \cap Y = \{A \in Y \mid t_{PA} \in W\} = \{P\},$$

was unmittelbar die Surjektivität von π_W zeigt. $\square$

Wir haben jetzt einige Beispiele affiner Abbildungen kennengelernt. In Proposition 1.24 werden wir zeigen, dass nicht jede Abbildung zwischen zwei affinen Räumen affin ist, indem wir eine geometrische Eigenschaft affiner Abbildungen herleiten, die offenkundig nicht allgemeingültig ist. Vorher müssen wir noch einige Begriffe einführen.

Definition 1.21 (aff. Raum). Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **kollinear**, falls es eine Gerade $g \subseteq X$ mit $M \subseteq g$ gibt.

Definition 1.22 (aff. Raum). Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl und seien $A_1, \dots, A_n$ nicht kollineare und paarweise verschiedene Punkte, die in einer gemeinsamen Ebene $E \subseteq X$ liegen. Dann heißt das n -Tupel

$$\Pi A_1 \dots A_n := (A_1, \dots, A_n)$$

das n -Eck mit den **Eckpunkten** $A_1, \dots, A_n$. Im wichtigen Spezialfall eines **Dreiecks** schreiben wir für $\Pi A_1 A_2 A_3$ auch $\triangle A_1 A_2 A_3$.

Drei Eckpunkte $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$ von $\Pi A_1 \dots A_n$ heißen **aufeinanderfolgend**, falls

$$i_1 \equiv i_2 - 1 \equiv i_3 - 2 \pmod{n}$$

gilt. $\Pi A_1 \dots A_n$ heißt **entartet**, falls es drei aufeinanderfolgende Eckpunkte gibt, die kollinear sind, und ansonsten **nicht entartet**.

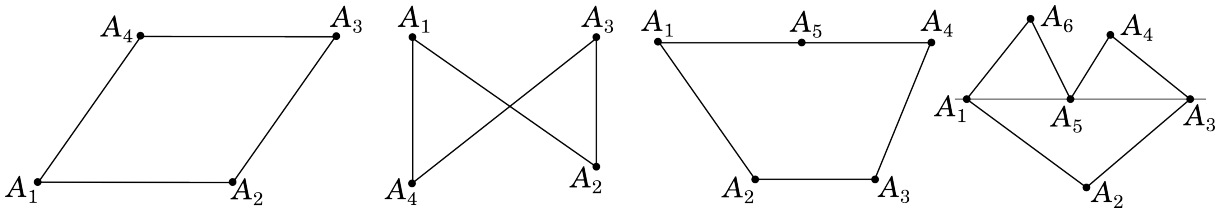


Abbildung 1.1: Nur das dritte n -Eck ist entartet.

Definition 1.23 (aff. Raum). Ein nicht entartetes Viereck $\Pi ABCD$ heißt ein **Parallelogramm**, falls $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ und $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ gilt.

In der folgenden Proposition 1.24 zeigen wir nun, dass affine Abbildungen – cum grano salis – Parallelogramme auf Parallelogramme abbilden.

Proposition 1.24 (aff. Raum). Sei $(Y, T(Y), \sigma)$ ein affiner Raum über dem Körper K , sei $\varphi : X \rightarrow Y$ eine affine Abbildung und sei $\Pi ABCD$ ein Parallelogramm in X . Sind die Bildpunkte $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ paarweise verschieden und nicht kollinear, so ist

$$\varphi(\Pi ABCD) = \Pi \varphi(A) \varphi(B) \varphi(C) \varphi(D)$$

wieder ein Parallelogramm.

Beweis. Nach Definition 1.15 gibt es eine lineare Abbildung $T(\varphi) : T(X) \rightarrow T(Y)$ mit (1.6). Für je vier Punkte $A, B, C, D \in X$ gilt daher

$$t_{AB} = t_{CD} \implies t_{\varphi(A)\varphi(B)} = t_{\varphi(C)\varphi(D)}.$$

Gelten $A \neq B, C \neq D, \varphi(A) \neq \varphi(B)$ und $\varphi(C) \neq \varphi(D)$, so folgt hieraus

$$T(\overleftrightarrow{AB}) = T(\overleftrightarrow{CD}) \implies T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) = T(\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}). \quad (1.9)$$

Für ein beliebiges Parallelogramm $\Pi ABCD$ gilt nach den Definitionen 1.12 und 1.23

$$T(\overleftrightarrow{AB}) = T(\overleftrightarrow{CD}) \quad \text{und} \quad T(\overleftrightarrow{AD}) = T(\overleftrightarrow{BC}).$$

Unter der Voraussetzung, dass $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)$ paarweise verschieden sind, erhalten wir daraus mit (1.9)

$$T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) = T(\overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \quad \text{und} \quad T(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(D)}) = T(\overleftrightarrow{\varphi(B)\varphi(C)}) \quad (1.10)$$

und also

$$\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \parallel \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} \quad \text{und} \quad \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(D)} \parallel \overleftrightarrow{\varphi(B)\varphi(C)}. \quad (1.11)$$

Sind $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)$ zusätzlich nicht kollinear, so gilt

$$\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \cap \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} = \emptyset, \quad (1.12)$$

denn: Wäre dem nicht so, gälte einerseits nach der Dimensionsformel 1.11

$$\begin{aligned} & \dim(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \\ &= \dim \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} + \dim \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} - \dim(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \cap \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

und andererseits wegen der Parallelität der Geraden

$$\dim(\overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overleftrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)})$$

$$\begin{aligned}
&= \dim T(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \\
&\stackrel{(1.4)}{=} \dim(T(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) + T(\overrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)})) \\
&\stackrel{(1.10)}{=} 1.
\end{aligned}$$

Das kann nicht sein. #

Wenden wir nun die Dimensionsformel 1.11 an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\dim(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \vee \overrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}) \\
&= \dim \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} + \dim \overrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} - \dim(T(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) \cap T(\overrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)})) + 1 \\
&\stackrel{(1.10)}{=} 1 + 1 - 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Die Geraden $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$ und $\overrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)}$ und insbesondere die vier Punkte $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ liegen also einer gemeinsamen Ebene. Es folgt, dass unter diesen Voraussetzungen $\Pi\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)$ ein Viereck, nach (1.12) nicht ausgeartet und nach (1.11) sogar ein Parallelogramm ist. □

1.3 Affine Koordinaten

Definition 1.25 (aff. Raum). Sei n eine natürliche Zahl. Ein $(n+1)$ -Tupel $(A_0, \dots, A_n)$ von Punkten in X heißt **affin unabhängig** bzw. eine **affine Basis** von X , wenn das n -Tupel $(t_{A_0A_1}, \dots, t_{A_0A_n})$ in $T(X)$ linear unabhängig bzw. eine Basis ist.

Beispiel 1.26 (aff. Raum). Ist $O \in X$ und $(t_1, \dots, t_n)$ eine Basis von $T(X)$, so ist offensichtlich durch

$$(O, t_1(O), \dots, t_n(O))$$

eine affine Basis von X gegeben. Bezeichnet speziell $(e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $T(\mathbb{A}^n(K)) = K^n$, so ist

$$(0, E_1, \dots, E_n) \quad \text{mit } E_i := e_i(0) = e_i - 0 = e_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

eine affine Basis von $\mathbb{A}^n(K)$.

Bemerkung 1.27 (aff. Raum). Die Definition der affinen Unabhängigkeit hängt nicht von der Reihenfolge der Punkte ab; genauer gilt

$$(A_0, \dots, A_n) \text{ affin unabhängig} \iff (A_{\sigma(0)}, \dots, A_{\sigma(n)}) \text{ affin unabhängig für alle } \sigma \in S_n,$$

denn: Da die linke Seite sofort aus der rechten folgt und die lineare Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren nicht von deren Reihenfolge abhängt, langt es zu zeigen, dass unter Annahme der linken Seite für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die Menge

$$\{t_{A_iA_j} \mid j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}\}$$

linear unabhängig ist. Dem ist so, denn für alle $\lambda_j \in K$ mit $j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}$ gilt

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \lambda_j t_{A_i A_j} \\
 \implies 0 &= -\lambda_0 t_{A_0 A_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j (t_{A_i A_0} + t_{A_0 A_j}) \\
 \implies 0 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j t_{A_0 A_j} - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \right) t_{A_0 A_i} \\
 \stackrel{\text{linke Seite}}{\implies} \lambda_j &= 0 \text{ für alle } j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}.
 \end{aligned}$$

#

Satz 1.28 (aff. Raum). Seien $(A_0, \dots, A_n)$ eine affine Basis von X , Y ein affiner Raum über K und $B_0, \dots, B_n$ beliebige Punkte in Y . Dann gibt es genau eine affine Abbildung

$$\varphi : X \rightarrow Y \quad \text{mit } \varphi(A_i) = B_i \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Weiter gilt:

- (a) $\varphi(X) = \bigvee_{i=0}^n \{B_i\}$.
- (b) φ injektiv $\iff (B_0, \dots, B_n)$ ist affin unabhängig.
- (c) φ bijektiv $\iff (B_0, \dots, B_n)$ ist affine Basis von Y .

Beweis. Nach dem verlinkten entsprechenden Satz für Vektorräume aus der Linearen Algebra gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\Phi : T(X) \rightarrow T(Y) \quad \text{mit } \Phi(t_{A_0 A_i}) = t_{B_0 B_i} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Nach Proposition 1.18 gibt es dann genau eine affine Abbildung

$$\varphi : X \rightarrow Y \quad \text{mit } \varphi(A_0) = B_0 \text{ und } T(\varphi) = \Phi.$$

Die Behauptungen (a), (b) und (c) folgen nun direkt mit Übungsaufgabe 1.2. □

Nach Satz 1.28 gibt es zu jeder affinen Basis $(A_0, \dots, A_n)$ eines gegebenen affinen Raums X genau eine Affinität

$$\varphi : X \rightarrow K^n \quad \text{mit } \varphi(A_0) = 0, \varphi(A_1) = E_1, \dots, \varphi(A_n) = E_n,$$

wobei $(0, E_1, \dots, E_n)$ die in Beispiel 1.26 eingeführte affine Basis von $\mathbb{A}^n(K)$ bezeichne.



Video

Definition 1.29 (aff. Raum). Sei $n := \dim(X)$. Dann heißt eine beliebige Affinität $\eta : X \rightarrow K^n$ ein **affines Koordinatensystem** von X . Setzen wir

$$A_0 := \eta^{-1}(0), A_1 := \eta^{-1}(E_1), \dots, A_n := \eta^{-1}(E_n),$$

so ist $(A_0, \dots, A_n)$ nach Teil (c) von Übungsaufgabe 1.2 und Teil (c) von Satz 1.28 eine affine Basis von X und für jeden Punkt $A \in X$ heißt

$$\eta(A) =: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

der **Koordinatenvektor** von A bezüglich der affinen Basis $(A_0, \dots, A_n)$. Die Zahlen $x_1, \dots, x_n$ heißen die **Koordinaten** von A bezüglich $(A_0, \dots, A_n)$.

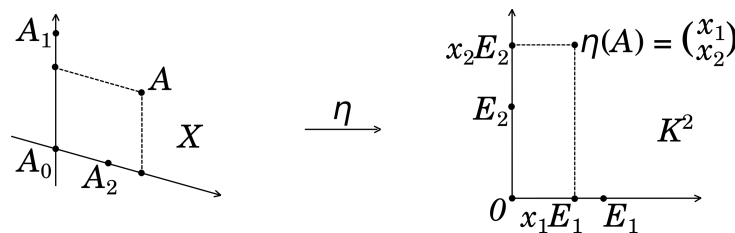


Abbildung 1.2: Affine Koordinatensysteme lassen sich über beliebigen Körpern definieren. Diese Abbildung dient zur Veranschaulichung der Situation in angeordneten Körpern wie $\mathbb{R}$. Über nicht angeordneten Körpern, etwa über $\mathbb{C}$, ist eine Visualisierung schwieriger. Dieser Hinweis gilt gleichermaßen für die folgenden Abbildungen.

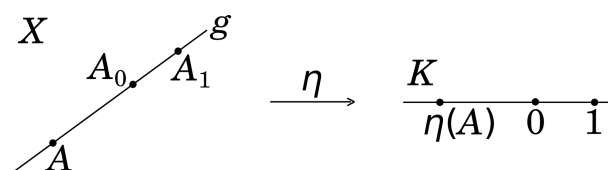
Ein wichtiger Grundbegriff der affinen Geometrie ist das Teilverhältnis.

Definition 1.30 (aff. Raum). Seien $g \subseteq X$ eine Gerade und $A_0, A_1, A \in g$ Punkte mit $A_0 \neq A_1$. Dann ist (A_0, A_1) eine affine Basis von g und es gibt nach Satz 1.28 ein eindeutig bestimmtes affines Koordinatensystem

$$\eta : g \rightarrow K \quad \text{mit } \eta(A_0) = 0 \text{ und } \eta(A_1) = 1.$$

Die Koordinate $\eta(A) \in K$ von A bezüglich (A_0, A_1) heißt das **Teilverhältnis** $\text{TV}(A_0, A_1, A)$ von A_0, A_1, A . Offensichtlich gilt

$$t_{A_0 A} = \text{TV}(A_0, A_1, A) t_{A_0 A_1}. \quad (1.13)$$



Bemerkung 1.31. Sei K ein beliebiger Körper und seien

$$A_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

drei kollineare Punkte mit $A_0 \neq A_1$, so dass es insbesondere ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_i^{(0)} \neq x_i^{(1)}$ gibt. Dann gilt

$$\text{TV}(A_0, A_1, A) = \frac{x_i - x_i^{(0)}}{x_i^{(1)} - x_i^{(0)}},$$

denn: Nach (1.13) gilt in der vorliegenden Situation

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(0)} \end{pmatrix} = A - A_0 = \text{TV}(A_0, A_1, A)(A_1 - A_0) = \text{TV}(A_0, A_1, A) \begin{pmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} - x_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung erhalten wir durch Auslesen der i -ten Zeile. #

Proposition 1.32 (aff. Raum). Das Teilverhältnis ist eine affine Invariante. Genauer gilt für einen affinen Raum Y über K , eine affine Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ und kollineare Punkte $A_0, A_1, A \in X$ mit $\varphi(A_0) \neq \varphi(A_1)$ ⁵

$$\text{TV}(\varphi(A_0), \varphi(A_1), \varphi(A)) = \text{TV}(A_0, A_1, A).$$

Beweis. Nach Satz 1.28 (a) gilt $\overleftarrow{\varphi(A_0 A_1)} = \overleftarrow{\varphi(A_0)} \varphi(A_1)$, so dass nach Satz 1.28 (c) die Einschränkung $\varphi|_{\overleftarrow{A_0 A_1}}$ bijektiv ist. Sei η bzw. η' das eindeutig bestimmte affine Koordinatensystem von $\overleftarrow{A_0 A_1}$ bzw. $\overleftarrow{\varphi(A_0) \varphi(A_1)}$ mit

$$\eta(A_0) = 0 \text{ und } \eta(A_1) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \eta'(\varphi(A_0)) = 0 \text{ und } \eta'(\varphi(A_1)) = 1.$$

Als Verkettung zweier Affinitäten ist $\eta' \circ \varphi|_{\overleftarrow{A_0 A_1}}$ wieder bijektiv und somit ein affines Koordinatensystem von $\overleftarrow{A_0 A_1}$. Wegen

$$\eta(A_0) = 0 = (\eta' \circ \varphi|_{\overleftarrow{A_0 A_1}})(A_0) \quad \text{und} \quad \eta(A_1) = 1 = (\eta' \circ \varphi|_{\overleftarrow{A_0 A_1}})(A_1)$$

und der Eindeutigkeit von η folgt

$$\eta' \circ \varphi|_{\overleftarrow{A_0 A_1}} = \eta.$$

Nach Definition 1.30 gilt dann

$$\text{TV}(\varphi(A_0), \varphi(A_1), \varphi(A)) = \eta'(\varphi(A)) = \eta(A) = \text{TV}(A_0, A_1, A)$$

und somit die Proposition. □

⁵Ist speziell φ eine Affinität, so gilt für $A_0 \neq A_1$ stets auch $\varphi(A_0) \neq \varphi(A_1)$. Eine Affinität lässt also alle möglichen Teilverhältnisse fest.

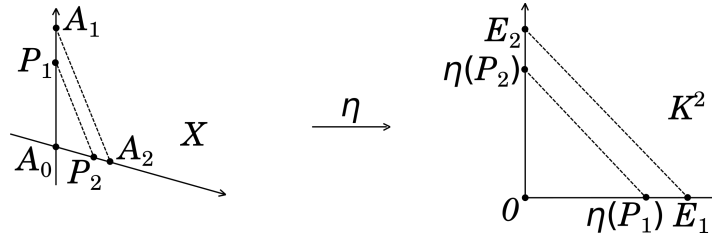
Wir zeigen nun exemplarisch einige klassische Sätze der affinen Geometrie.

Satz 1.33 (Strahlensatz, aff. Raum). Seien $A_0, A_1, A_2 \in X$ affin unabhängig und seien $P_1 \in \overrightarrow{A_0A_1}$ und $P_2 \in \overrightarrow{A_0A_2}$ von A_0 verschieden. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\overrightarrow{P_1P_2} \parallel \overrightarrow{A_1A_2}$,
- (ii) $\text{TV}(A_0, A_1, P_1) = \text{TV}(A_0, A_2, P_2)$,
- (iii) $t_{P_1P_2} = \text{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{A_1A_2}$.

Beweis. Sei $Y \subseteq X$ die eindeutig bestimmte Ebene mit affiner Basis (A_0, A_1, A_2) . Nach Satz 1.28 gibt es daher ein eindeutig bestimmtes affines Koordinatensystem $\eta : Y \rightarrow K^2$ mit

$$\eta(A_0) = 0, \quad \eta(A_1) = E_1, \quad \eta(A_2) = E_2.$$



Es gilt dann

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{P_1P_2} \parallel \overrightarrow{A_1A_2} &\implies T(\overrightarrow{P_1P_2}) = T(\overrightarrow{A_1A_2}) \\
 &\stackrel{(1.9)}{\implies} T(\overrightarrow{\eta(P_1)\eta(P_2)}) = T(\overrightarrow{E_1E_2}) \\
 &\stackrel{(1.13)}{\implies} \langle \text{TV}(0, E_2, \eta(P_2))E_2 - \text{TV}(0, E_1, \eta(P_1))E_1 \rangle_K = \langle E_2 - E_1 \rangle_K \\
 &\implies \text{TV}(0, E_1, \eta(P_1)) = \text{TV}(0, E_2, \eta(P_2)) \\
 &\stackrel{1.32}{\implies} \text{TV}(A_0, A_1, P_1) = \text{TV}(A_0, A_2, P_2) \\
 &\implies t_{P_1P_2} = t_{P_1A_0} + t_{A_0P_2} \\
 &\quad = \text{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{A_1A_0} + \text{TV}(A_0, A_2, P_2) \cdot t_{A_0A_2} \implies \overrightarrow{P_1P_2} \parallel \overrightarrow{A_1A_2}. \\
 &\quad = \text{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{A_1A_2}
 \end{aligned}$$

und somit der Satz. □

Bemerkung 1.34 (aff. Raum). Der Gedanke hinter der letzten Folgerung im Beweis des Strahlensatzes 1.33 lässt sich noch verschärfen: Ist $E \subseteq X$ die eindeutig bestimmte Ebene mit $A_0, A_1, A_2 \in E$ und $\varphi : E \rightarrow E$ die nach Satz 1.28 eindeutig bestimmte Affinität mit

$$\varphi(A_0) = A_0, \quad \varphi(A_1) = P_1, \quad \varphi(A_2) = P_2,$$

so gilt unter Annahme einer der äquivalenten Aussagen (i), (ii), (iii) des Strahlensatzes

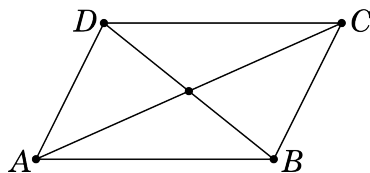
$$t_{\varphi(A)\varphi(B)} = \text{TV}(A_0, A_1, P_1) \cdot t_{AB} \quad \text{für alle } A, B \in E.$$

Die lineare Abbildung $T(\varphi)$ ist dann also gerade die Multiplikation mit der Zahl $\text{TV}(A_0, A_1, P_1) \in K$, also eine zentrische Streckung.⁶

Definition 1.35 (aff. Raum). Sei $\text{char}(K) \neq 2$ und seien $A, B \in X$ fest gegeben. Dann heißt der eindeutig bestimmte Punkt M_{AB} auf $\overleftrightarrow{AB}$ mit $\text{TV}(A, B, M_{AB}) = \frac{1}{2}$ der **Mittelpunkt** von A und B . Ist speziell $X = K^n$, so gilt offensichtlich $M_{AB} = \frac{1}{2}(A + B)$.

Satz 1.36 (Diagonalensatz, aff. Raum). Sei $\text{char}(K) \neq 2$. Dann sind für ein nicht entartetes Viereck $\Pi ABCD$ in X die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\Pi ABCD$ ist ein Parallelogramm.
- (ii) Es gelten die (äquivalenten) Vektoridentitäten $t_{CD} = -t_{AB}$ und $t_{BC} = t_{AD}$.
- (iii) Die Mittelpunkte M_{AC} und M_{BD} stimmen überein.



Beweis. Nach Definition 1.23 ist $\Pi ABCD$ genau dann ein Parallelogramm, wenn

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \quad \text{und} \quad \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$$

und somit

$$\langle t_{AB} \rangle_K = T(\overleftrightarrow{AB}) = T(\overleftrightarrow{CD}) = \langle t_{CD} \rangle_K \quad \text{und} \quad \langle t_{AD} \rangle_K = T(\overleftrightarrow{AD}) = T(\overleftrightarrow{BC}) = \langle t_{BC} \rangle_K$$

gelten. Das ist äquivalent dazu, dass es $\lambda, \mu \in K \setminus \{0\}$ mit

$$t_{CD} = \lambda t_{AB} \quad \text{und} \quad t_{BC} = \mu t_{AD}$$

gibt. An dieser Stelle ist klar, dass Aussage (i) aus Aussage (ii) folgt. Nehmen wir andererseits (i) an, so folgt aus den bisherigen Überlegungen

$$t_{AB} + t_{CD} = (\lambda + 1)t_{AB} \quad \text{und} \quad t_{DA} + t_{BC} = (\mu - 1)t_{AD}.$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir mit (1.2)

$$0 = t_{AB} + t_{BC} + t_{CD} + t_{DA} = (\lambda + 1)t_{AB} + (\mu - 1)t_{AD}.$$

Da $\Pi ABCD$ nicht entartet ist, sind insbesondere die drei Punkte A, B, D nicht kollinear, also (A, B, D) affin unabhängig, also (t_{AB}, t_{AD}) linear unabhängig. Mit der obigen Gleichung folgt daher $\lambda = -1$ und $\mu = 1$, also (ii).

⁶Ist allgemein $(A_0, \dots, A_n)$ eine affine Basis von X und $\lambda \in K$ gegeben, so heißt die nach Proposition 1.18 eindeutig bestimmte affine Abbildung $\psi : X \rightarrow X$ mit

$$\psi(A_0) = A_0 \quad \text{und} \quad T(\psi)(t) = \lambda \cdot t \quad \text{für alle } t \in T(X).$$

die **zentrische Streckung** mit Zentrum A_0 und Streckungsfaktor λ .

Es verbleibt die Äquivalenz der Aussagen (ii) und (iii) zu zeigen. Nach (1.13) ist M_{AC} bzw. M_{BD} der eindeutig bestimmte Punkt auf $\overleftrightarrow{AC}$ bzw. $\overleftrightarrow{BD}$ mit

$$t_{AM_{AC}} = \frac{1}{2}t_{AC} \quad \text{und} \quad t_{BM_{BD}} = \frac{1}{2}t_{BD}.$$

Es gilt also

$$t_{AM_{BD}} = t_{AB} + t_{BM_{BD}} = t_{AB} + \frac{1}{2}t_{BD} = \frac{1}{2}(t_{AB} + t_{AD})$$

und somit

$$M_{BD} = M_{AC} \iff t_{AM_{BD}} = \frac{1}{2}t_{AC} \iff t_{AD} = t_{BC}.$$

□

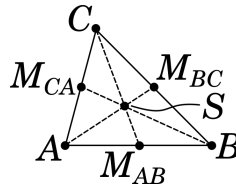
Satz 1.37 (Schwerpunktsatz, **aff. Raum**). Sei $\text{char}(K) \neq 2, 3$. Dann schneiden sich in einem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ in X die **Seitenhalbierenden**

$$\overleftrightarrow{AM_{BC}}, \quad \overleftrightarrow{BM_{CA}}, \quad \overleftrightarrow{CM_{AB}}$$

von $\triangle ABC$ in einem eindeutig bestimmten gemeinsamen Punkt S , dem **Schwerpunkt** von $\triangle ABC$. Hierbei gilt

$$\text{TV}(A, M_{BC}, S) = \text{TV}(B, M_{CA}, S) = \text{TV}(C, M_{AB}, S) = \frac{2}{3}.$$

Ist speziell $X = K^n$ für ein $n \geq 2$, so gilt $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$.



Beweis. Sei n die Dimension von X . Nach Satz 1.28 gibt es dann ein affines Koordinatensystem $\eta : X \rightarrow K^n$, so dass wir nach Proposition 1.32 für den Beweis ohne Einschränkung $X = K^n$ annehmen können.

Wegen

$$S := \frac{1}{3}(A + B + C) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}M_{BC}$$

liegt der Punkt S auf der Seitenhalbierenden $\overleftrightarrow{AM_{BC}}$ und es gilt

$$S - A = \frac{2}{3}(M_{BC} - A),$$

nach (1.13) also $\text{TV}(A, M_{BC}, S) = \frac{2}{3}$. Dass die entsprechenden Aussagen bei den anderen beiden Seitenhalbierenden zutreffen, zeigt man analog.

Es verbleibt zu zeigen, dass der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eindeutig ist. Aber wäre er es nicht, so stimmten alle drei Seitenhalbierenden überein. Insbesondere wären die Punkte A, B, C kollinear, was nicht sein kann, da $\triangle ABC$ ein Dreieck ist. □

In affinen Räumen über angeordneten Körpern⁷ lässt sich ein Winkelbegriff definieren.

Definition 1.38 (aff. Raum). Sei K ein angeordneter Körper und seien $A, B, C \in X$ paarweise verschieden und nicht kollinear.

- (a) Die Menge $\overline{AB} := \{(\lambda t_{AB})(A) \mid \lambda \in K, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ heißt die **Strecke** zwischen A und B .
- (b) Die Menge $\overrightarrow{AB} := \{(\lambda t_{AB})(A) \mid \lambda \in K, 0 \leq \lambda\}$ heißt der **Strahl** aus A durch B .
- (c) Die Vereinigung $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ heißt der **Winkel** $\angle BAC$.

Wenn wir zur Untersuchung von Winkeln in affinen Räumen affine Koordinatensysteme heranziehen wollen, bietet es sich an, einen Begriff der Winkelgröße einzuführen. Hierfür beschränken wir uns auf den Fall der affinen Standardräume $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, für welche wir eine solche Winkelgröße bereits aus der Linearen Algebra kennen. Wir erinnern uns: Bezeichnet $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, so ist $\angle(t, t')$ für je zwei Vektoren $t, t' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl im Intervall $[0, \pi]$ mit

$$\cos \angle(t, t') = \frac{\langle t \mid t' \rangle}{\|t\| \cdot \|t'\|}. \quad (1.14)$$

Einem Winkel $\angle BAC$ lässt sich so seine **Winkelgröße**

$$\angle BAC := \angle(B - A, C - A) \quad (1.15)$$

zuteilen. Dies wollen wir nun auf Winkel in Dreiecken anwenden und führen dafür den Begriff der Innenwinkelgrößen ein.

Definition 1.39. Sei $n \geq 2$ und sei $\triangle ABC$ ein Dreieck im affinen Standardraum $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Dann heißen

- $(\|B - C\|, \|C - A\|, \|A - B\|)$ seine **Seitenlängen**,
- $(\angle CAB, \angle CBA, \angle ACB)$ seine **Innenwinkelgrößen**.

Wir können nun leicht weitere klassische Sätze der affinen Geometrie herleiten.

Satz 1.40 (Kosinussatz). Sei $n \geq 2$ und sei $\triangle ABC$ ein Dreieck im affinen Standardraum $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ mit Innenwinkelgrößen (α, β, γ) und Seitenlängen (a, b, c) . Dann gilt:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \end{aligned}$$

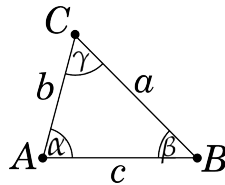
⁷Ein **angeordneter Körper** ist ein Paar $(K, \leq)$ aus einem Körper K und einer Totalordnung „ $\leq$ “ auf K , so dass für alle $a, b, c \in K$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- (i) Aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$.
- (ii) Aus $0 \leq a$ und $0 \leq b$ folgt $0 \leq ab$.

Offenbar ist der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der Standardanordnung angeordnet.

⁸Dies ist wohldefiniert wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $|\langle t \mid t' \rangle| \leq \|t\| \cdot \|t'\|$, wobei Gleichheit hier genau dann besteht, wenn t und t' linear abhängig sind.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



Video

Beweis. Es genügt offensichtlich, eine der Gleichungen zu zeigen. Da Bewegungen weder Längen noch Winkelgrößen ändern (vgl. §23 im verlinkten Zusatzmaterial) können wir ohne Einschränkung

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c, c_2 > 0$$

wählen. Mit diesen Werten berechnen wir leicht

$$a^2 = \|B - C\|^2 = (c - c_1)^2 + c_2^2 = (c_1^2 + c_2^2) + c^2 - 2cc_1 = b^2 + c^2 - 2cc_1. \quad (1.16)$$

Andererseits gilt auch

$$\cos \alpha = \frac{\langle C | B \rangle}{\|C\| \cdot \|B\|} = \frac{c_1 c}{bc} = \frac{c_1}{b}.$$

Setzen wir dies in (1.16) ein, so erhalten wir die erste der behaupteten Gleichungen. $\square$

Da das Bogenmaß eines Winkels immer im Intervall $(0, \pi)$ liegt, gilt für je drei nicht kollineare Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^n$

$$\langle B - A | C - A \rangle = 0 \iff \angle BAC = \frac{\pi}{2}.$$

Ist dies der Fall, so nennen wir $B - A$ und $C - A$ zueinander **orthogonal** und $\angle BAC$ einen **rechten Winkel**. Dies führt unmittelbar zu einer wichtigen Folgerung des Kosinussatzes 1.40.

Korollar 1.41 (Satz des Pythagoras). Sei $n \geq 2$ und sei $\triangle ABC$ ein Dreieck im affinen Standardraum $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ mit Innenwinkelgrößen (α, β, γ) und Seitenlängen (a, b, c) . Genau dann ist $\angle BCA$ ein rechter Winkel, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Satz 1.42 (Winkelsumme im Dreieck). Sei $n \geq 2$ und sei $\triangle ABC$ ein Dreieck im affinen Standardraum $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ mit Innenwinkelgrößen (α, β, γ) . Dann gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, die drei Punkte liegen in der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ und es gilt $A = 0$. Dann gilt direkt nach (1.14)

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\langle B \mid C \rangle}{\|B\| \cdot \|C\|}, \\ \cos \beta &= \frac{\langle -B \mid C - B \rangle}{\|B\| \cdot \|C - B\|} = \frac{\|B\|^2 - \langle B \mid C \rangle}{\|B\| \cdot \|B - C\|}, \\ \cos \gamma &= \frac{\langle -C \mid B - C \rangle}{\|B\| \cdot \|B - C\|} = \frac{\|C\|^2 - \langle B \mid C \rangle}{\|C\| \cdot \|B - C\|}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Für den weiteren Beweis hätten wir gerne ebensolche Gleichungen für die respektiven Sinuswerte. Setzen wir für beliebige $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, t' = \begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$[t, t'] = \det(t \ t') = t_1 t'_2 - t_2 t'_1,$$

so gilt in Entsprechung zu (1.14)

$$\sin \angle(t, t') = \frac{|[t, t']|}{\|t\| \cdot \|t'\|},\tag{1.18}$$

denn: Zunächst einmal gilt

$$\begin{aligned}[t, t']^2 + \langle t \mid t' \rangle^2 &= (t_1 t'_2 - t_2 t'_1)^2 + (t_1 t'_1 + t_2 t'_2)^2 \\ &= (t_1^2 + t_2^2) \cdot ((t'_1)^2 + (t'_2)^2) \\ &= \|t\|^2 \cdot \|t'\|^2.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Hieraus folgt⁹

$$\sin^2 \angle(t, t') = 1 - \cos^2 \angle(t, t') \stackrel{(1.14)}{=} 1 - \frac{\langle t \mid t' \rangle^2}{\|t\|^2 \cdot \|t'\|^2} \stackrel{(1.19)}{=} \frac{[t, t']^2}{\|t\|^2 \cdot \|t'\|^2}$$

und die Behauptung ergibt sich durch Wurzelziehen. #

⁹Die hier verwendete Rechenregel

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

wird oft als Satz von Pythagoras bezeichnet. Andererseits wird der Zusammenhang zu dem von uns bereits bewiesenen Satz dieses Namens (vgl. Korollar 1.41) erst mit Korollar 1.44 klar, welches auf diesem Beweis aufbaut. Es ist von daher wichtig, uns daran zu erinnern, dass sich obige Rechenregel direkt mit analytischen Methoden aus den Reihendarstellungen von Sinus und Kosinus herleiten lässt. Tatsächlich gilt mit dem Additionstheorem des Kosinus

$$1 = \cos 0 = \cos(x - x) = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{|[B, C]|}{\|B\| \cdot \|C\|}, \\ \sin \beta &= \frac{|[-B, C - B]|}{\|B\| \cdot \|C - B\|} = \frac{|[B, C]|}{\|B\| \cdot \|B - C\|}, \\ \sin \gamma &= \frac{|[-C, B - C]|}{\|B\| \cdot \|B - C\|} = \frac{|[B, C]|}{\|C\| \cdot \|B - C\|}.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Aus den Additionstheoremen von Sinus und Kosinus erhalten wir

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ &\stackrel{(1.17), (1.20)}{=} \frac{|[B, C]| \cdot (\|B\|^2 - \langle B | C \rangle) + \langle B | C \rangle \cdot |[B, C]|}{\|B\|^2 \cdot \|C\| \cdot \|B - C\|} \\ &= \frac{|[B, C]|}{\|C\| \cdot \|B - C\|} \\ &\stackrel{(1.20)}{=} \sin \gamma = \sin(\pi - \gamma)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ &\stackrel{(1.17), (1.20)}{=} \frac{\langle B | C \rangle \cdot \|B\|^2 - \langle B | C \rangle^2 - [B, C]^2}{\|B\|^2 \cdot \|C\| \cdot \|B - C\|} \\ &\stackrel{(1.19)}{=} \frac{\langle B | C \rangle - \|C\|^2}{\|C\| \cdot \|B - C\|} \\ &\stackrel{(1.17)}{=} -\cos \gamma = \cos(\pi - \gamma).\end{aligned}$$

Mit $0 < \alpha + \beta, \pi - \gamma < 2\pi$ folgt daraus $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ und somit der Satz. $\square$

Satz 1.43 (Sinussatz). Sei $n \geq 2$ und sei $\triangle ABC$ ein Dreieck im affinen Standardraum $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ mit Innenwinkelgrößen (α, β, γ) und Seitenlängen (a, b, c) . Dann gilt

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Beweis. Durch Quadrieren von zwei der Gleichungen aus dem Kosinussatz 1.40 erhalten wir

$$4b^2c^2 \cos^2 \alpha = (b^2 + c^2 - a^2)^2 \quad \text{und} \quad 4a^2c^2 \cos^2 \beta = (a^2 + c^2 - b^2)^2.$$

Dies verwenden wir, um folgende Umformungen zu zeigen.

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} &= \frac{4a^2b^2c^2(1 - \cos^2 \alpha)}{4a^2b^2c^2(1 - \cos^2 \beta)} = \frac{4a^2b^2c^2 - a^2 \cdot (4b^2c^2 \cos^2 \alpha)}{4a^2b^2c^2 - b^2 \cdot (4a^2c^2 \cos^2 \beta)} \\ &= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} = \frac{a^2}{b^2}.\end{aligned}$$

Da $a, b, \sin \alpha, \sin \beta$ allesamt positive reelle Zahlen sind, folgt $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$ und also die erste behauptete Gleichheit. Die zweite Gleichheit zeigt man analog. $\square$

Korollar 1.44. Sei $n \geq 2$. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ im affinen Standardraum $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ mit rechtem Winkel $\angle BCA$ heißen $\overline{BC}, \overline{CA}$ die **Katheten** und $\overline{AB}$ die **Hypotenuse** von $\triangle ABC$. Sind $(\alpha, \beta, \frac{\pi}{2})$ die Winkelgrößen und (a, b, c) die Seitenlängen von $\triangle ABC$, dann gilt

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{c}.$$

Beweis. Mit dem Sinussatz 1.43 und dem Satz über die Winkelsumme des Dreiecks 1.42 gilt

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin \alpha = \sin(\pi - \frac{\pi}{2} - \beta) = \cos \beta, \\ \frac{b}{c} &= \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin \beta = \sin(\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha. \end{aligned}$$

□

1.4 Polytope

Wir schließen die analytische affine Geometrie ab, indem wir mit den Polytopen exemplarisch ein tieferes Thema der dreidimensionalen reellen affinen Geometrie untersuchen. Um uns diesen Einblick zu ermöglichen argumentieren wir in diesem Abschnitt gelegentlich ein wenig skizzenhaft.

Wir betrachten zunächst eine beliebige Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$. Deren Komplement in $\mathbb{R}^3$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten S_+, S_- ,

denn: Nach dem verlinkten Basisergänzungssatz für Vektorräume aus der Linearen Algebra lässt sich eine beliebige affine Basis (A_0, A_1, A_2) von E durch Hinzunahme eines Punktes $A_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus E$ zu einer affinen Basis (A_0, A_1, A_2, A_3) von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Ist $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ das affine Koordinatensystem bezüglich dieser affinen Basis, so gilt

$$E = \{A \in \mathbb{R}^3 \mid \eta(A) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x_3 = 0\}.$$

Offensichtlich zerfällt das Komplement von E in die beiden durch das Vorzeichen der dritten affinen Koordinate beschriebenen Zusammenhangskomponenten. #

Die Mengen S_+ und S_- nennen wir **offene Halbräume**, die Mengen $S_+ \cup E$ und $S_- \cup E$ **abgeschlossene Halbräume**.

Definition 1.45. Ein nichtleerer Durchschnitt $P \subseteq \mathbb{R}^3$ endlich vieler abgeschlossener Halbräume heißt ein **konvexes Polyeder**. Der Durchschnitt der zugehörigen offenen Halbräume wird als das **Innere** des Polyeders P bezeichnet. Ein beschränktes konvexes Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^3$ mit nichtleerem Inneren heißt ein **Polytop**.



Video

Beispiel 1.46. *Inspiziert durch unsere Vorüberlegungen betrachten wir für $i = 1, 2, 3$ jeweils die Ebene*

$$E^i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Hier sind wieder die jeweils zugehörigen offenen Halbräume S_+^i und S_-^i durch das Vorzeichen der i -ten Koordinate definiert. Ein beliebiger Durchschnitt der so erhaltenen zugehörigen sechs abgeschlossenen Halbräume liefert jeweils ein Beispiel für ein konvexes Polyeder, das kein Polytop ist.

Bemerkung 1.47. (a) *Da abgeschlossene Halbräume konvex sind, sind konvexe Polyeder tatsächlich konvex und insbesondere zusammenhängend.*

(b) *Sei P ein Polytop, und seien $H^i = E^i \cup S_-^i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ abgeschlossene Halbräume mit*

$$P = \bigcap_{i=1}^n H^i = \bigcap_{i=1}^n (E^i \cup S_-^i).$$

Der Rand ∂P von P ist gegeben durch die nicht notwendig disjunkte endliche Vereinigung

$$\partial P = \bigcup_{i=1}^n (P \cap \partial H^i) = \bigcup_{i=1}^n (P \cap E^i) = \bigcup_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (P \cap \bigcap_{i \in I} E^i)$$

*von Ecken, Kanten und Flächen. Die Menge $P \cap \bigcap_{i \in I} E^i$ heißt hierbei eine **Ecke**, wenn sie ein Punkt ist, eine **Kante**, wenn sie kein Punkt ist, aber in einer Gerade enthalten ist, und eine **Fläche** sonst.*

Definition 1.48. *Für ein gegebenes Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^3$ nennen wir*

- $e(P)$ *die Anzahl der Ecken in ∂P ,*
- $k(P)$ *die Anzahl der Kanten in ∂P ,*
- $f(P)$ *die Anzahl der Flächen in ∂P*

und sprechen dabei auch von den Ecken bzw. Kanten bzw. Flächen von P .

Beispiel 1.49. *Für $i = 1, 2, 3$ seien*

$$H_+^i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \geq 0 \right\},$$

$$\tilde{H}_-^i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \leq 1 \right\}.$$

Dann ist der Durchschnitt

$$P := \bigcap_{i=1}^3 H_+^i \cap \bigcap_{i=1}^3 \tilde{H}_-^i$$

ein Würfel mit Kantenlänge 1 und erfüllt $e(P) = 8$, $k(P) = 12$ und $f(P) = 6$. Insbesondere gilt

$$e(P) - k(P) + f(P) = 2.$$

Dieser Zusammenhang gilt auch allgemein.

Satz 1.50 (Euler'sche Polyederformel). Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Polytop. Dann gilt

$$e(P) - k(P) + f(P) = 2.$$

Beweisskizze. Sei P für den Beweis des Satzes fest gewählt. Offenbar lassen Translationen und zentrische Streckungen die untersuchten Anzahlen $e(P), k(P), f(P)$ fest. Da P als Polytop ein nichtleeres Inneres hat, gibt es ein $A_0 \in \mathbb{R}^3$ im Inneren von P . Nach möglicher Anwendung der Translation $A \mapsto A - A_0$ können wir hierbei $A_0 = 0$ annehmen. Da P als Polytop beschränkt ist, gibt es zudem ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $A \in P$ die euklidische Norm die Abschätzung $\|A\| < \lambda$ erfüllt. Nach möglicher Anwendung der zentrischen Streckung $A \mapsto \frac{1}{\lambda} \cdot A$ können wir daher weiter annehmen, P liege im Inneren der Einheitskugel

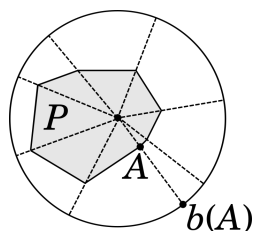
$$S^2 = \{A \in \mathbb{R}^3 \mid \|A\| = 1\}.$$

Schritt 1. Wir „blasen“ das Polytop P auf, bis alle Randpunkte zu Punkten auf S^2 werden. Formal betrachten wir die Zuordnung

$$b : \begin{cases} \partial P & \rightarrow S^2, \\ A & \mapsto b(A) := \overrightarrow{0A} \cap S^2. \end{cases}$$

Diese ist wohldefiniert und liefert einen Homöomorphismus zwischen den jeweils mit der Teilraumtopologie bzgl. $\mathbb{R}^3$ ausgestatteten topologischen Räumen ∂P und S^2 ,

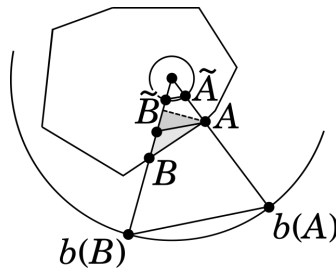
denn: Die Wohldefiniertheit ergibt sich aus $\overrightarrow{0A} \cap S^2 = \frac{A}{\|A\|}$.



Die Bijektivität von b lässt sich leicht daraus folgern, dass P konvex ist und der Punkt 0 im Inneren von P liegt.

Wir zeigen nun die Stetigkeit von b in einem beliebigen Punkt $B \in \partial P$. Da 0 ein innerer Punkt von P ist, gibt es ein $r \in (0, 1)$ mit $\|A\| > r$ für alle $A \in \partial P$. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $A \in \partial P$ ein Punkt mit $\|B - A\| < r\varepsilon$. Bezeichnet $\tilde{B}$ bzw. $\tilde{A}$ den eindeutigen Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{0B}$ bzw. $\overrightarrow{0A}$ mit $\|\tilde{B}\| = \|\tilde{A}\| = r$, so gilt nach dem Strahlensatz 1.33

$$\|b(B) - b(A)\| = \frac{1}{r} \cdot \|\tilde{B} - \tilde{A}\| = \frac{1}{r} \cdot \frac{\|\tilde{A}\|}{\|A\|} \cdot \frac{\|A\|}{\|\tilde{A}\|} \|\tilde{B} - A\|.$$



Nehmen wir ohne Einschränkung an, es gelte $\|A\| < \|B\|$, so folgt mit Übungsaufgabe 1.8 die Abschätzung

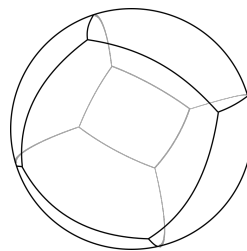
$$\|b(B) - b(A)\| < \frac{1}{r} \cdot \frac{\|\tilde{A}\|}{\|A\|} \cdot \|B - A\| < \frac{1}{r} \cdot \|B - A\| < \varepsilon$$

und somit die behauptete Stetigkeit von b . Die Stetigkeit von b^{-1} zeigt man genauso. #

Der Homöomorphismus b bildet

- die Ecken von P auf paarweise verschiedene Punkte in S^2 ab. Diese nennen wir die **sphärischen Ecken** von $b(\partial P)$.
- die Kanten von P auf selbstschnittfreie Kurven in S^2 ab, die je zwei sphärische Ecken verbinden, und die sich gegenseitig nur in ihren Anfangs- und Endpunkten schneiden. Diese nennen wir die **sphärischen Kanten** von $b(\partial P)$.
- die Flächen von P auf abgeschlossene Teilmengen von S^2 ab, deren jeweiliger Rand aus sphärischen Kanten besteht. Diese nennen wir die **sphärischen Flächen** von $b(\partial P)$.

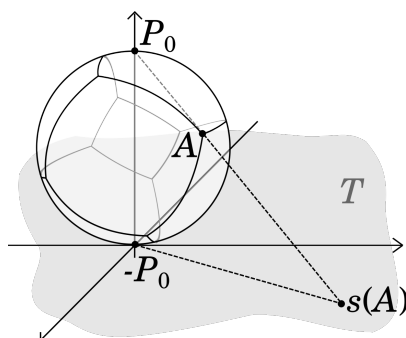
Auf diese Weise definiert b auf S^2 die Struktur eines **sphärischen Polytops**. Aufgrund der Bijektivität von b ist hierbei die Anzahl der sphärischen Ecken $e(P)$, die Anzahl der sphärischen Kanten $k(P)$ und die Anzahl der sphärischen Flächen $f(P)$. Die folgende Abbildung zeigt einen sphärischen Würfel als ein Beispiel eines sphärischen Polytops.



Schritt 2. Wir fixieren einen Punkt P_0 im Inneren einer der Flächen des sphärischen Polytops und definieren eine **stereographische Projektion** s , indem wir jedem Punkt $A \in S^2 \setminus \{P_0\}$ den eindeutigen Schnittpunkt der Tangentialebene

$$T := \{-P_0 + t \mid \langle t \mid -P_0 \rangle = 0\}$$

an S^2 in $-P_0$ mit der Geraden $\overleftrightarrow{P_0 A}$ zuordnen.



Auf diese Weise erhalten wir einen Homöomorphismus $s : S^2 \setminus \{P_0\} \rightarrow T$,

denn: Gilt $s(A) = s(B)$ für zwei Punkte $A, B \in S^2 \setminus \{P_0\}$, so sind nach Konstruktion P_0, A, B drei kollineare Punkte auf S^2 . Da nach Übungsaufgabe 1.9 keine Gerade mehr als zwei Schnittpunkte mit S^2 hat und sich A und B beide von P_0 unterscheiden, folgt $A = B$ und somit die Injektivität von s . Hätte weiter für ein beliebiges $S \in T$ die Gerade $\overleftrightarrow{P_0 S}$ außer P_0 keinen Schnittpunkt mit S^2 , so wäre sie bereits ganz in der Tangentialebene an S^2 in P_0 enthalten, und S wäre ein Schnittpunkt von T mit dieser Tangentialebene. Da aber die Tangentialebenen an S^2 in P_0 und in $-P_0$ voneinander verschieden und zueinander parallel sind, kann das nicht sein, so dass es ein $A \in S^2 \setminus \{P_0\}$ mit $s(A) = S$ gibt. Das zeigt die Surjektivität von s .

Die Topologie beider beteiligten Räume ist die Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^3$. Die Stetigkeit von s bzw. s^{-1} in einem gegebenen Punkt $A \in S^2 \setminus \{P_0\}$ bzw. $S \in T$ lässt sich daher leicht zeigen, wenn man als offene Umgebungen von A und $s(A)$ bzw. von S und $s^{-1}(S)$ die jeweiligen Durchschnitte von offenen Kugeln mit dem jeweiligen Teilraum betrachtet und ähnlich wie für die Stetigkeit von b argumentiert. #

Der Homöomorphismus $s \circ b$ definiert auf T die Struktur eines sogenannten *Netzes* N von P . Genauer bildet $s \circ b$

- die Ecken von P auf paarweise verschiedene Punkte in T ab. Diese nennen wir die **Ecken** von N .
- die Kanten von P auf selbstschnittsfreie Kurven in T ab, die je zwei Ecken von N verbinden, und die sich gegenseitig nur in ihren Anfangs- und Endpunkten schneiden. Diese nennen wir die **Kanten** von N .
- die Flächen von P mit Ausnahme derer, in deren Innerem $b^{-1}(n)$ liegt, auf abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von T ab, deren jeweiliger Rand aus Kanten von N besteht. Diese nennen wir die **Flächen** von N . Die verbleibende Fläche von P wird auf die Umgebung des Netzes N abgebildet und im Weiteren ignoriert.

Aufgrund der Bijektivität von $s \circ b$ gilt in Missbrauch unserer Notation insgesamt

$$e(N) = e(P), \quad k(N) = k(P), \quad f(N) = f(P) - 1$$

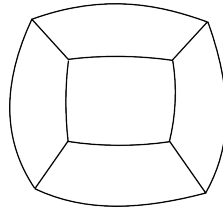
und insbesondere

$$e(N) - k(N) + f(N) = e(P) - k(P) + f(P) - 1.$$

Um die Euler'sche Polyederformel zu beweisen, genügt es also

$$e(N) - k(N) + f(N) = 1$$

zu zeigen. Die folgende Abbildung zeigt beispielhaft ein Netz eines Würfels.



Schritt 3. Wir werden nun unser Netz N sukzessive vereinfachen und mitprotokollieren, wie sich das auf die Anzahlen von Ecken, Kanten und Flächen auswirkt. Zunächst wählen wir eine Fläche von $N =: N_0$ aus und ziehen diese unter Verwendung einer geeigneten Homotopie zu einem einzigen Punkt zusammen. Auf diese Weise erhalten wir ein neues Netz N_1 . Hatte die entfernte Fläche n Eckpunkte, so gilt in N_1

$$e(N_1) = e(N_0) - (n - 1), \quad k(N_1) = k(N_0) - n, \quad f(N_1) = f(N_0) - 1$$

und somit

$$e(N_1) - k(N_1) + f(N_1) = e(N_0) - k(N_0) + f(N_0).$$

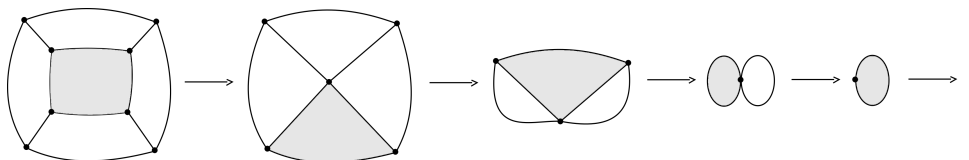
Wir iterieren unser Vorgehen indem wir eine Fläche unseres Netzes nach der anderen zusammenziehen und erhalten jeweils aus dem Netz N_{k-1} ein Netz N_k mit

$$e(N_k) - k(N_k) + f(N_k) = e(N_{k-1}) - k(N_{k-1}) + f(N_{k-1}) = e(N_0) - k(N_0) + f(N_0).$$

Da $f(N)$ endlich ist, erreichen wir so nach endlich vielen Schritten ein Netz $N_{f(N)}$ ohne Flächen, ohne Kanten, aber mit einem Punkt. Für dieses Netz gilt offensichtlich wie behauptet

$$e(N_{f(N)}) - k(N_{f(N)}) + f(N_{f(N)}) = 1 - 0 + 0 = 1,$$

so dass insgesamt die Euler'sche Polyederformel folgt. Die folgende Abbildung zeigt im Beispiel des Würfels eine Folge $N_0, N_1, \dots, N_5$ von Netzen wie im Beweis.



□

Es liegt nahe, dieses Ergebnis zur Klassifikation von Polytopen zu verwenden. In voller Allgemeinheit ist das allerdings sehr schwer, weshalb wir jetzt eine besonders einfache Unterklasse der Polytope einführen wollen.

Definition 1.51. (a) Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Ein nicht entartetes n -Eck $\Pi A_1 \dots A_n$ wie in Definition 1.22 heißt **regelmäßig**, wenn die folgenden Bedingungen gelten.

- $\Pi A_1 \dots A_n$ ist konvex.
- $\|A_i - A_j\| = \|A_1 - A_2\|$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \equiv j - 1 \pmod{n}$,
- $\angle A_i A_j A_k = \angle A_1 A_2 A_3$ für alle $1 \leq i, j, k \leq n$ mit $i \equiv j - 1 \equiv k - 2 \pmod{n}$.

Wir nennen dann $\|A_1 - A_2\|$ die **Kantenlänge** und $\angle A_1 A_2 A_3$ die **Innenwinkelgröße** des regelmäßigen n -Ecks $\Pi A_1 \dots A_n$.

(b) Ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **regulär** oder auch ein **Platonischer Körper**, wenn alle seine Randflächen regelmäßige n -Ecke mit selbem $n \geq 3$ sind und in jeder Ecke die gleiche Anzahl $g(P)$ von Kanten anliegt. Die Anzahl $n(P) := n$ heißt dann der **Grad** von P .

Proposition 1.52. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ ein reguläres Polytop vom Grad $n(P)$, bei dem in jeder Ecke $g(P)$ Kanten anliegen. Dann gilt

$$k(P) = \frac{1}{2}n(P)f(P) = \frac{1}{2}g(P)e(P),$$

$$f(P) = \frac{4g(P)}{2n(P) - g(P)n(P) + 2g(P)}.$$

Insbesondere sind die Anzahlen $e(P), k(P), f(P)$ durch $n(P), g(P)$ bereits eindeutig bestimmt.

Beweis. Von jeder der $e(P)$ Ecken gehen genau $g(P)$ Kanten aus. Da an jede Kante genau zwei Ecken angrenzen, folgt

$$2k(P) = g(P)e(P).$$

Analog wird jede Seitenfläche von genau $n(P)$ Kanten begrenzt. Da jede Kante an genau zwei Flächen angrenzt, folgt

$$2k(P) = n(P)f(P).$$

Mit der Euler'schen Polyederformel 1.50 erhalten wir

$$2 = e(P) - k(P) + f(P) = \frac{2k(P)}{g(P)} - k(P) + f(P).$$

Nach Multiplikation mit $2g(P)$ ergibt sich

$$4g(P) = 4k(P) - 2g(P)k(P) + 2f(P)g(P) = 2n(P)f(P) - n(P)f(P)g(P) + 2f(P)g(P).$$

Lösen wir dies nach $f(P)$ auf, erhalten wir die letzte zu zeigende Aussage. $\square$

Korollar 1.53. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ ein reguläres Polytop vom Grad $n(P)$, bei dem in jeder Ecke $g(P)$ Kanten anliegen. Dann gilt

$$(n(P), g(P)) \in \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)\}.$$

Beweis. Nach Proposition 1.52 gilt

$$\frac{1}{g(P)} = \frac{e(P)}{2k(P)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n(P)} = \frac{f(P)}{2k(P)}$$

und somit

$$\frac{1}{g(P)} + \frac{1}{n(P)} = \frac{e(P) + f(P)}{2k(P)} \stackrel{1.50}{=} \frac{2 + k(P)}{2k(P)} = \frac{1}{k(P)} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}.$$

Nun gilt $n(P) \geq 3$ nach Definition und $g(P) \geq 3$, da sonst einer jeden Ecke nur je eine Fläche anliegen dürfte und P kein nichtleeres Inneres hätte. Die einzigen ganzzahligen Lösungen der obigen Ungleichung sind daher

$$(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3).$$

□

Nach Korollar 1.53 gibt es höchstens fünf (n, g) -Klassen Platonischer Körper, nämlich

	$n(P)$	$g(P)$	$e(P)$	$k(P)$	$f(P)$
Tetraeder	3	3	4	6	4
Hexaeder	4	3	8	12	6
Oktaeder	3	4	6	12	8
Dodekaeder	5	3	20	30	12
Ikosaeder	3	5	12	30	20

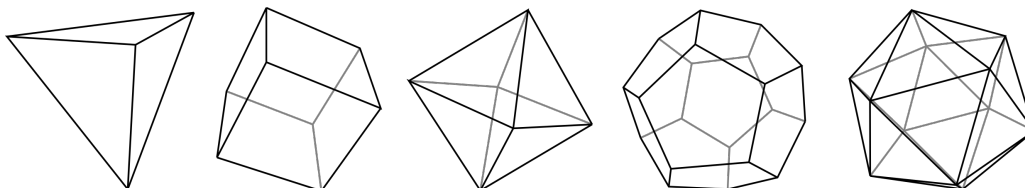
Die Anzahlen $e(P)$, $k(P)$ und $f(P)$ in der Tabelle ergeben sich mit den Formeln aus Proposition 1.52. Es stellt sich heraus, dass es eine anschauliche Interpretation der (n, g) -Klassen Platonischer Körper gibt.

Definition 1.54. Sei n eine natürliche Zahl.

- (a) Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt eine **Ähnlichkeitsabbildung**, wenn sie sich als Verkettung von Bewegungen und zentrischen Streckungen schreiben lässt.
- (b) Zwei Teilmengen $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen **ähnlich**, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(M_1) = M_2$ gibt. Man kann leicht zeigen, dass Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation auf der Potenzmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

Unser Ziel ist nun das folgende klassische Resultat.

Satz 1.55. Es gibt genau 5 Ähnlichkeitsklassen von Platonischen Körpern: die Tetraeder, die Hexaeder, die Oktaeder, die Dodekaeder und die Ikosaeder.

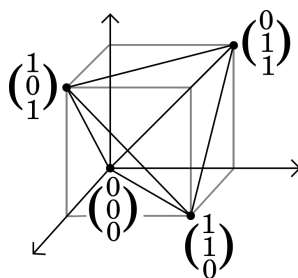


Beweis. Die Beweisstrategie ist zu zeigen, dass jede (n, g) -Klasse aus der Tabelle genau eine Ähnlichkeitsklasse von Polytopen enthält. Wir zeigen dies nur für die Tetraeder; die entsprechenden Aussagen für Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder zeigt man ähnlich.

Es lässt sich leicht überprüfen, dass die konvexe Hülle der Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ein Tetraeder ist.



Es verbleibt zu zeigen, dass sich ein beliebiges Tetraeder $\tilde{T}$ mit Ecken $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in \mathbb{R}^3$ durch Ähnlichkeitsabbildungen in ein beliebiges anderes Tetraeder T mit Ecken $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ überführen lässt. Wir verfahren wie folgt.

- Nach Anwendung der zentrischen Streckung mit Zentrum $\tilde{A}$ und Streckfaktor

$$\left\| \frac{B - A}{\tilde{B} - \tilde{A}} \right\|$$

dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, die Kantenlängen von $\tilde{T}$ und T stimmen überein.

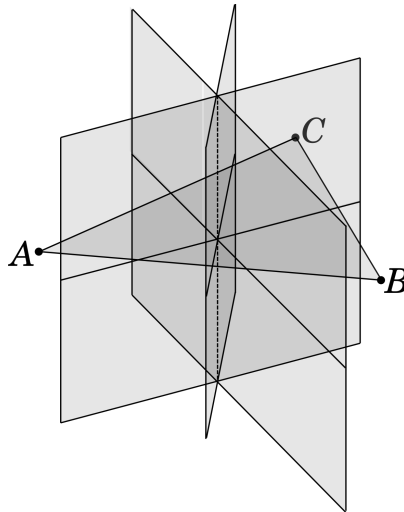
- Nach Anwendung der Translation um den Vektor $A - \tilde{A}$ dürfen wir ohne Einschränkung $\tilde{A} = A$ annehmen.
- Nach Anwendung einer geeigneten Drehung um A gilt ohne Einschränkung

$$\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}} = \overrightarrow{AB} \quad \text{und insbesondere} \quad \tilde{B} = B.$$

- Nach Anwendung einer geeigneten Drehung um die Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, $\tilde{C}$ liege in derselben Ebene wie A, B, C , und zwar auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ wie C . Es folgt $\tilde{C} = C$,

denn: Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck 1.42 beträgt die Innenwinkelgröße in jedem regelmäßigen Dreieck $\frac{\pi}{3}$. Das trifft insbesondere auf die Dreiecke $\triangle ABC\tilde{C}$ und $\triangle ABC$ zu. Die Behauptung folgt über eine kurze Rechnung, da die Kantenlängen $\|\tilde{C} - A\|$ und $\|C - A\|$ übereinstimmen und $\tilde{C}, C$ auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ liegen. #

- Nachdem wir gegebenenfalls an der Ebene durch A, B, C gespiegelt haben, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, $\tilde{D}$ liege auf derselben Seite dieser Ebene wie D . Wegen $\|\tilde{D} - A\| = \|\tilde{D} - B\|$ und $\|D - A\| = \|D - B\|$ liegen sowohl $\tilde{D}$ als auch D in der zu $\overleftrightarrow{AB}$ orthogonalen Ebene durch den Mittelpunkt M_{AB} .¹⁰ Analog zeigt man, dass $\tilde{D}$ und D beide in der zu $\overleftrightarrow{BC}$ orthogonalen Ebene durch M_{BC} und in der zu $\overleftrightarrow{CA}$ orthogonalen Ebene durch M_{CA} liegen. Nach dem Umkreissatz (diesen werden wir als Satz 3.70 in einem Setting zeigen, das insbesondere die affine Standardebene umfasst) ist der Durchschnitt dieser drei Ebenen die zur Ebene durch A, B, C orthogonale Gerade durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.



Aus Symmetriegründen liegt auf jeder Seite der Ebene durch A, B, C genau ein Punkt dieser Geraden, der zu den Punkten A, B, C jeweils die Kantenlänge von T als Abstand hat. Es folgt $\tilde{D} = D$ und damit die Behauptung.

□

1.5 Projektive Räume

Definition 1.56. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Die Menge

$$\mathbb{P}(V) := \{U \subseteq V \text{ Untervektorraum} \mid \dim_K(U) = 1\}$$

¹⁰Um dies einzusehen, ergänzt man $t_{AB} = B - A$ zu einer Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ und stellt das Problem in dieser Basis dar.

der **Ursprungsgeraden** in V nennen wir den zu V gehörigen **projektiven Raum**. Die Elemente von $\mathbb{P}(V)$ nennen wir die **Punkte** des projektiven Raums. Ist V endlichdimensional, so setzen wir

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim_K \mathbb{P}(V) := \dim_K(V) - 1$$

und nennen diese Zahl die **(projektive) Dimension** von $\mathbb{P}(V)$. Insbesondere gilt $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset$ und $\dim \emptyset = -1$. Für „Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\mathbb{P}(V)$ der zu V gehörige projektive Raum.“ schreiben wir künftig auch kurz „**(proj. Raum)**“.

Wir interessieren uns im Kontext projektiver Räume nur für endlichdimensionale Vektorräume und werden dies stets stillschweigend voraussetzen.

Beispiel 1.57. Der **projektive Standardraum** der Dimension n über dem Körper K ist gegeben durch

$$\mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1}).$$

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Zwei Vektoren $v, v' \in V \setminus \{0\}$ haben genau dann dasselbe Bild unter der kanonischen Abbildung

$$\kappa : \begin{cases} V \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{P}(V), \\ v & \mapsto \langle v \rangle_K, \end{cases}$$

wenn es ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $v' = \lambda v$ gibt. Ist speziell

$$v = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1} \setminus \{0\},$$

so nennen wir das $(n+1)$ -Tupel

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) := \kappa(v)$$

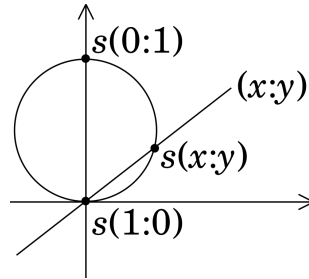
die **homogenen Koordinaten** des Punktes $\langle v \rangle_K \in \mathbb{P}^n(K)$. Wegen $v \neq 0$ ist hierbei stets mindestens eines der x_i von Null verschieden und es gilt

$$\begin{aligned} (x_0 : x_1 : \dots : x_n) &= (x'_0 : x'_1 : \dots : x'_n) \\ \iff \text{es gibt ein } \lambda \in K \setminus \{0\} \text{ mit } x'_i &= \lambda x_i \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Die homogenen Koordinaten sind also nur bis auf einen gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor festgelegt.

Beispiel 1.58. Wir wollen uns nun die projektiven Standardräume kleiner Dimension veranschaulichen.

- (a) Der projektive Standardraum $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ lässt sich leicht über eine stereographische Projektion $s : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ homöomorph auf eine Kreislinie in $\mathbb{R}^2$ abbilden. Das beweisen wir hier nicht, sondern verweisen auf den Beweis der Euler'schen Polyederformel 1.50, in dessen Schritt 2 wir einen ganz ähnlichen Beweis durchgeführt haben.



- (b) Eine entsprechende Einbettung von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ in $\mathbb{R}^3$ ist eine deutlich schwierigere Aufgabe, wenn man Singularitäten vermeiden möchte. Sie wurde 1901 von Werner Boy durch eine topologische Beschreibung (Boy'sche Fläche, siehe Abbildung 1.3) und 1986 von François Apéry durch Angabe der konkreten Parametrisierung

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2} \cos^2 v \cos(2u) + \cos u \sin(2v)}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)} \\ y = \frac{\sqrt{2} \cos^2 v \sin(2u) - \sin u \sin(2v)}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)} \\ z = \frac{3 \cos^2 v}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)} \end{cases} \quad \text{mit } u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ und } v \in [0, \pi]$$

gelöst.

Definition 1.59 (proj. Raum). Eine Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ heißt ein **projektiver Unterraum**, wenn

$$U_Z := \bigcup_{P \in Z} P$$

ein Untervektorraum von V ist.¹¹ Ist dies der Fall, so gilt

$$Z = \mathbb{P}(U_Z),$$

so dass Z die Struktur eines projektiven Raumes trägt. Als solcher hat Z eine Dimension. Speziell heißt ein projektiver Unterraum $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$

- eine (**projektive**) **Hyperebene** in $\mathbb{P}(V)$, wenn $\dim Z = \dim \mathbb{P}(V) - 1$ gilt,
- eine (**projektive**) **Ebene** in $\mathbb{P}(V)$, wenn $\dim Z = 2$ gilt,
- eine (**projektive**) **Gerade** in $\mathbb{P}(V)$, wenn $\dim Z = 1$ gilt.

Proposition 1.60 (proj. Raum). Sei $(Z_i)_{i \in I}$ eine Familie projektiver Unterräume von $\mathbb{P}(V)$. Dann gilt:

- (a) $Z := \bigcap_{i \in I} Z_i$ ist wieder ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$.
- (b) Der Durchschnitt aller projektiven Unterräume $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ mit $\bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq Z$ heißt der **Verbindungsraum** $\bigvee_{i \in I} Z_i$ und ist wieder ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$. Im Fall $I = \{1, 2, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir auch $\bigvee_{i \in I} Z_i = Z_1 \vee Z_2 \vee \dots \vee Z_n$; im Fall $I = \{1, 2\}$, $Z_1 = \{P_1\}$ und $Z_2 = \{P_2\}$ mit $P_1, P_2 \in \mathbb{P}(V)$ ist $Z_1 \vee Z_2$ offensichtlich eine Gerade, die **Verbindungsgerade** $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ von P_1 und P_2 .

¹¹Man bemerke, dass hier tatsächlich die Geraden $P \subseteq V$ vereinigt werden und nicht die Punkte $\{P\} \subseteq \mathbb{P}(V)$.



Abbildung 1.3: Modell einer Boy'schen Fläche vor dem Mathematischen Forschungszentrum in Oberwolfach, erstellt 1991 nach den Formeln von Apéry.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Boysche_Fl%C3%A4che?uselang=de#/media/File:Boyflaeche.JPG, abgerufen am 15. 1. 2019,

Lizenz: CC BY-SA 3.0: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>

Beweis. Sei $U_{Z_i} \subseteq V$ für jedes $i \in I$ ein Untervektorraum mit $Z_i = \mathbb{P}(U_{Z_i})$. Nach Definition 1.56 gilt nun einerseits

$$\bigcap_{i \in I} Z_i = \bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(U_{Z_i}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} U_{Z_i}\right)$$

und somit Behauptung (a), und andererseits

$$\bigcup_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} \mathbb{P}(U_{Z_i}) \subseteq \mathbb{P}(\langle \bigcup_{i \in I} U_{Z_i} \rangle_K).$$

Bei der Inklusion gilt hierbei zu beachten, dass der Spann $\langle \bigcup_{i \in I} U_{Z_i} \rangle_K$ nach Definition der Durchschnitt aller Untervektorräume W von V mit $\bigcup_{i \in I} U_{Z_i} \subseteq W$ ist. Mit der verlinkten Bemerkung aus der Linearen Algebra und der Definition des Verbindungsraums folgt daher

$$\bigvee_{i \in I} Z_i = \mathbb{P}(\langle \bigcup_{i \in I} U_{Z_i} \rangle_K) = \mathbb{P}\left(\sum_{i \in I} U_{Z_i}\right) \quad (1.21)$$

und also Behauptung (b). □

Wie im Affinen gibt es auch im Projektiven eine Dimensionsformel.

Satz 1.61 (Dimensionsformel für projektive Unterräume, **proj. Raum**). Für je zwei projektive Unterräume $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ gilt

$$\dim(Z_1 \vee Z_2) = \dim Z_1 + \dim Z_2 - \dim(Z_1 \cap Z_2).$$

Insbesondere ist $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, falls $\dim Z_1 + \dim Z_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$ gilt.¹²

Beweis. Sei $U_{Z_i} \subseteq V$ für $i \in \{1, 2\}$ ein Untervektorraum mit $Z_i = \mathbb{P}(U_{Z_i})$. Nach Proposition 1.60 mitsamt den Überlegungen aus ihrem Beweis und der verlinkten Dimensionsformel für Untervektorräume aus der Linearen Algebra gilt

$$\begin{aligned} \dim(Z_1 \vee Z_2) &= \dim(\mathbb{P}(U_{Z_1} + U_{Z_2})) = \dim(U_{Z_1} + U_{Z_2}) - 1 \\ &= \dim U_{Z_1} + \dim U_{Z_2} - \dim(U_{Z_1} \cap U_{Z_2}) - 1 \\ &= (\dim Z_1 + 1) + (\dim Z_2 + 1) - (\dim(Z_1 \cap Z_2) + 1) - 1 \\ &= \dim Z_1 + \dim Z_2 - \dim(Z_1 \cap Z_2) \end{aligned}$$

und somit der Satz. □

1.6 Projektive Abbildungen

Definition 1.62 (proj. Raum). Sei W ein Vektorraum über dem Körper K und $\mathbb{P}(W)$ der zu W gehörige projektive Raum. Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ heißt **projektive Abbildung**, wenn es eine injektive lineare Abbildung $\Phi : V \rightarrow W$ mit

$$\varphi(\langle v \rangle_K) = \langle \Phi(v) \rangle_K \quad \text{für alle } 0 \neq v \in V$$

gibt. Wir schreiben kurz $\varphi =: \mathbb{P}(\Phi)$. Eine bijektive projektive Abbildung heißt auch eine **Projektivität**.

¹²Ein Spezialfall hiervon ist, dass sich in einer projektiven Ebene je zwei verschiedene Geraden in einem Punkt schneiden.



Video



Video

In Definition 1.62 ist die Injektivität der linearen Abbildung Φ notwendig für die Wohldefiniertheit von φ ,

denn: Wäre Φ nicht injektiv, so gäbe es ein $0 \neq v \in V$ mit $\Phi(v) = 0$. Es gälte dann

$$\varphi(\langle v \rangle_K) = \langle \Phi(v) \rangle_K = 0 \notin \mathbb{P}(W).$$

#

Hieraus folgt sofort $\dim W \geq \dim V$ und somit auch

$$\dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1 \geq \dim V - 1 = \dim \mathbb{P}(V).$$

Dieses Phänomen ist gegenüber der Linearen Algebra und der affinen Theorie völlig neuartig und bedingt, dass sich beliebige Abbildungstypen wie etwa Projektionen des Raumes auf eine Ebene nicht ohne Weiteres ins Projektive übertragen lassen.

Proposition 1.63 (proj. Raum). Sei W ein Vektorraum über dem Körper K und $\mathbb{P}(W)$ der zu W gehörige projektive Raum. Für zwei injektive lineare Abbildungen $\Phi, \Psi : V \rightarrow W$ gilt

$$\mathbb{P}(\Phi) = \mathbb{P}(\Psi) \iff \text{es gibt ein } \lambda \in K \setminus \{0\} \text{ mit } \Psi = \lambda \cdot \Phi.$$

Beweis. Dass für alle $\lambda \in K \setminus \{0\}$ die Beziehung $\mathbb{P}(\lambda \cdot \Phi) = \mathbb{P}(\Phi)$ gilt, ist klar.

Nehmen wir also umgekehrt an, es gelte $\mathbb{P}(\Psi) = \mathbb{P}(\Phi)$. Dann gibt es zu jedem $v \in V$ ein

$$\lambda = \lambda(v) \in K \setminus \{0\} \quad \text{mit } \Psi(v) = \lambda \cdot \Phi(v).$$

Es gilt zu zeigen, dass wir zu jedem $v \in V$ dasselbe λ wählen können. Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir dafür ohne Einschränkung $\dim V > 1$ annehmen. Dann gibt es linear unabhängige $v, w \in V$. Wegen der Linearität von Φ und Ψ gilt dann

$$\begin{aligned} & (\lambda(v) - \lambda(v+w)) \cdot \Phi(v) + (\lambda(w) - \lambda(v+w)) \cdot \Phi(w) \\ &= \lambda(v) \cdot \Phi(v) + \lambda(w) \cdot \Phi(w) - \lambda(v+w) \cdot \Phi(v+w) \\ &= \Psi(v) + \Psi(w) - \Psi(v+w) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wegen der Injektivität von Φ sind auch $\Phi(v), \Phi(w) \in W$ linear unabhängig und es folgt

$$\lambda(v) = \lambda(w) = \lambda(v+w)$$

und somit die Behauptung. □

Beispiel 1.64. Sei K ein beliebiger Körper.

(a) Für $m \geq n$ ist

$$\Phi : \begin{cases} K^{n+1} & \rightarrow K^{m+1}, \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

offensichtlich eine injektive lineare Abbildung. Die zugehörige projektive Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}^n(K) & \rightarrow \mathbb{P}^m(K), \\ (x_0 : \dots : x_n) & \mapsto (x_0 : \dots : x_n : 0 : \dots : 0) \end{cases}$$

heißt die **kanonische Einbettung** von $\mathbb{P}^n(K)$ in $\mathbb{P}^m(K)$.

(b) Seien $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in K \setminus \{0\}$ nicht alle gleich¹³ und sei φ die durch

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}^2(K) & \rightarrow \mathbb{P}^2(K), \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto (\lambda_0 x_0 : \lambda_1 x_1 : \lambda_2 x_2) \end{cases}$$

gegebene Projektivität. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(1 : 0 : 0) &= (\lambda_0 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0), \\ \varphi(0 : 1 : 0) &= (0 : \lambda_1 : 0) = (0 : 1 : 0), \\ \varphi(0 : 0 : 1) &= (0 : 0 : \lambda_2) = (0 : 0 : 1), \\ \varphi(1 : 1 : 1) &= (\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2) \neq (1 : 1 : 1). \end{aligned}$$

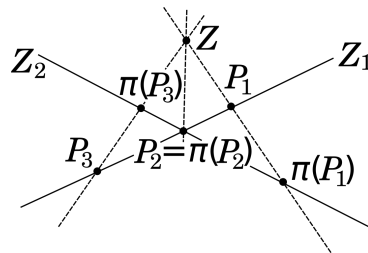
In der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(K)$ über einem beliebigen Körper K mit mindestens drei Elementen gibt es also eine von der Identität verschiedene Projektivität mit 3 Fixpunkten. Das ist ein Unterschied zum Affinen, denn nach Satz 1.28 gibt es in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2(K)$ keine von der Identität verschiedene Affinität mit 3 Fixpunkten.

Wir werden nun mit den Zentralprojektionen beispielhaft eine weitere Klasse projektiver Abbildungen einführen.

Definition 1.65 (proj. Raum). Seien $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ zwei projektive Unterräume gleicher Dimension. Eine Abbildung $\pi : Z_1 \rightarrow Z_2$ heißt eine **Zentralprojektion**, wenn es einen projektiven Unterraum $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ mit

- (i) $Z \vee Z_1 = Z \vee Z_2 = \mathbb{P}(V)$,
- (ii) $Z \cap Z_1 = Z \cap Z_2 = \emptyset$,
- (iii) Für alle $P \in Z_1$ gilt $\pi(P) = (Z \vee \{P\}) \cap Z_2$.

gibt. Der Unterraum Z heißt dann das **Zentrum** von π .



¹³Das ist natürlich nur in einem Körper mit mindestens 3 Elementen möglich.

Bemerkung 1.66 (proj. Raum). (a) Sind $U_Z, U_{Z_1}, U_{Z_2} \subseteq V$ Untervektorräume mit $Z = \mathbb{P}(U_Z)$, $Z_1 = \mathbb{P}(U_{Z_1})$ und $Z_2 = \mathbb{P}(U_{Z_2})$, so sind die Bedingungen (i) und (ii) aus Definition 1.65 äquivalent zu

$$V = U_Z \oplus U_{Z_1} = U_Z \oplus U_{Z_2}.$$

Sind speziell Z_1 und Z_2 Hyperebenen, so bedeutet dies, dass Z ein Punkt außerhalb von $Z_1 \cup Z_2$ ist.

(b) Durch Eigenschaft (iii) ist die Zentralprojektion wohldefiniert,

denn: Zu zeigen ist, dass für einen beliebigen Punkt $P \in Z_1$ die Menge $\pi(P) = (Z \vee \{P\}) \cap Z_2$ tatsächlich ein Punkt in Z_2 ist. Mit der Dimensionsformel 1.61 gilt zunächst

$$\dim(Z \vee \{P\}) = \dim Z + \dim \{P\} - \dim(Z \cap \{P\}) \stackrel{(ii)}{=} \dim Z + 1, \quad (1.22)$$

$$\dim(Z \vee Z_2) = \dim Z + \dim Z_2 - \dim(Z \cap Z_2) \stackrel{(ii)}{=} \dim Z + \dim Z_2 + 1. \quad (1.23)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{P}(V) &\stackrel{(i)}{=} \dim(Z \vee Z_2) = \dim((Z \vee \{P\}) \vee Z_2) \\ &\stackrel{1.61}{=} \dim(Z \vee \{P\}) + \dim Z_2 - \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) \\ &\stackrel{(1.22)}{=} (\dim Z + 1) + \dim Z_2 - \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) \\ &= (\dim Z + \dim Z_2 + 1) - \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) \\ &\stackrel{(1.23)}{=} \dim(Z \vee Z_2) - \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) \\ &\stackrel{(i)}{=} \dim \mathbb{P}(V) - \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) \end{aligned}$$

$$\text{und also } \dim \pi(P) = \dim((Z \vee \{P\}) \cap Z_2) = 0. \quad \#$$

Proposition 1.67 (proj. Raum). Jede Zentralprojektion ist eine Projektivität.

Beweis. Seien $U_Z, U_{Z_1}, U_{Z_2} \subseteq V$ Untervektorräume mit $Z = \mathbb{P}(U_Z)$, $Z_1 = \mathbb{P}(U_{Z_1})$ und $Z_2 = \mathbb{P}(U_{Z_2})$ und sei $\pi : Z_1 \rightarrow Z_2$ eine Zentralprojektion mit Zentrum Z . Nach Bemerkung 1.66 gilt dann $V = U_Z \oplus U_{Z_2}$, so dass wir ein beliebiges Element $v \in V$ eindeutig in der Form $v = w + w_2$ mit $w \in U_Z$ und $w_2 \in U_{Z_2}$ schreiben können. Es existiert dann eine Projektion

$$\Pi : \begin{cases} V & \rightarrow U_{Z_2}, \\ w + w_2 & \mapsto w_2. \end{cases}$$

Die Einschränkung von Π auf U_{Z_1} ist ein Isomorphismus,

denn: Zu $w_2 \in U_{Z_2}$ gibt es eindeutig bestimmte $w \in U_Z$ und $w_1 \in U_{Z_1}$ mit

$$w_2 = w + w_1 \quad \text{und} \quad w_1 = -w + w_2 \mapsto w_2.$$

Also hat w_2 mit w_1 genau ein Urbild und $\Pi|_{U_{Z_1}}$ ist bijektiv. #

Weiter gilt $\pi = \mathbb{P}(\Pi|_{U_{Z_1}})$,

denn: Für einen beliebigen eindimensionalen Untervektorraum $\langle w_1 \rangle_K \subseteq U_{Z_1}$ gilt nach Definition von $\Pi|_{U_{Z_1}}$

$$\Pi|_{U_{Z_1}}(\langle w_1 \rangle_K) = (U_Z \oplus \langle w_1 \rangle_K) \cap U_{Z_2}.$$

Es folgt für jeden Punkt $P_1 = \langle w_1 \rangle_K \in Z_1$

$$\mathbb{P}(\Pi|_{U_{Z_1}})(P_1) = \mathbb{P}((U_Z \oplus \langle w_1 \rangle_K) \cap U_{Z_2}) = (Z \vee \{P_1\}) \cap Z_2 = \pi(P_1).$$

#

Insgesamt folgt die Proposition. □

Offensichtlich bleibt bei einer Zentralprojektion $\pi : Z_1 \rightarrow Z_2$ der Durchschnitt $Z_1 \cap Z_2$ punktweise fest. Insbesondere ist nicht jede Projektivität bereits eine Zentralprojektion. In Übungsaufgabe 1.11 zeigen wir, dass aber jede Projektivität $\varphi : Z_1 \rightarrow Z_2$ mit $\varphi|_{Z_1 \cap Z_2} = \text{id}_{Z_1 \cap Z_2}$ eine Zentralprojektion ist.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen projektiven Räumen und affinen Räumen verstehen und untersuchen diesen im folgenden Satz:

Satz 1.68 (proj. Raum). Sei $H \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine Hyperebene. Dann kann man das Komplement

$$X := \mathbb{P}(V) \setminus H$$

so zu einem affinen Raum $(X, T(X), \tau)$ machen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Es gibt eine kanonische Bijektion

$$H \rightarrow X_\infty := \{g_\infty \mid g \subseteq X \text{ Gerade}\},$$

wobei $g_\infty := \{h \subseteq X \text{ Gerade} \mid g \parallel h\}$ das zu g gehörige **Parallelenbüschel** bezeichne.¹⁴ Man kann sich das Parallelenbüschel g_∞ als einen **unendlich fernen Punkt** (außerhalb von X) vorstellen, in dem sich die (in X parallelen) Geraden $h \in g_\infty$ schneiden. Die Menge X_∞ heißt dann die **unendlich ferne Hyperebene** von X .

(b) Für jeden projektiven Unterraum $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ mit $Z \not\subseteq H$ ist $Z \cap X$ ein affiner Unterraum von X mit

$$\dim(Z \cap X) = \dim Z \quad \text{und} \quad \dim(Z \cap H) = \dim Z - 1.$$

Die durch $Z \mapsto Z \cap X$ gegebene Zuordnung von der Menge der nicht in H enthaltenen projektiven Unterräume von $\mathbb{P}(V)$ in die Menge der nicht leeren affinen Unterräume von X ist bijektiv. Insbesondere gibt es zu jedem affinen Unterraum $Y \subseteq X$ einen eindeutig bestimmten (**projektiven**) **Abschluss**, also einen projektiven Unterraum $\bar{Y} \subseteq \mathbb{P}(V)$ mit $\bar{Y} \cap X = Y$.

¹⁴Offensichtlich ist Parallelität von Geraden in X eine Äquivalenzrelation und die Parallelenbüschel sind die zugehörigen Äquivalenzklassen.

- (c) Für jede Projektivität $\varphi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ mit $\varphi(H) = H$ ist $\varphi|_X : X \rightarrow X$ eine Affinität und die durch $\varphi \mapsto \varphi|_X$ gegebene Zuordnung ist eine Bijektion zwischen der Menge der Projektivitäten von $\mathbb{P}(V)$, die H in sich überführen, und der Menge der Affinitäten von X . Insbesondere gibt es zu jeder Affinität ψ von X eine eindeutig bestimmte Projektivität $\bar{\psi}$ von $\mathbb{P}(V)$ mit $\bar{\psi}|_X = \psi$ und $\bar{\psi}(H) = H$, die **(projektive) Fortsetzung** von ψ .

Beispiel 1.69. Sei $V = K^3$ und die Hyperebene $H = \mathbb{P}(U_H) \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ durch den Untervektorraum

$$U_H := \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^3 \mid x_0 = 0 \right\} \subseteq K^3$$

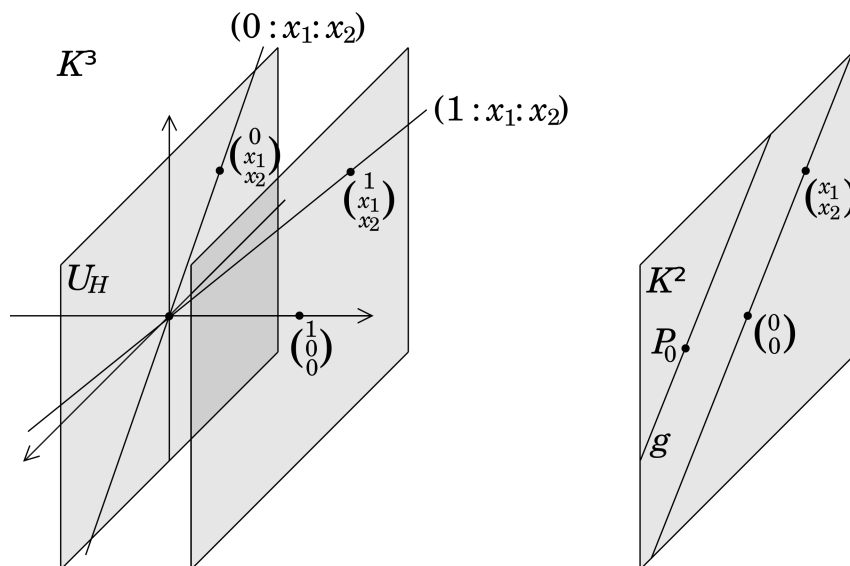
gegeben. Dann ist $X = \mathbb{P}^2(K) \setminus H$ gerade das Bild der kanonischen Einbettung

$$\iota : \begin{cases} K^2 & \rightarrow \mathbb{P}^2(K), \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto (1 : x_1 : x_2), \end{cases}$$

denn: Offenbar gilt $\iota(K^2) \cap H = \emptyset$ und also $\iota(K^2) \subseteq X$. Andererseits gilt auch $X \subseteq \iota(K^2)$, denn für ein beliebiges $(y_0 : y_1 : y_2) \in X$ ist $y_0 \neq 0$ und es gilt also

$$(y_0 : y_1 : y_2) = (1 : \frac{y_1}{y_0} : \frac{y_2}{y_0}) = \iota \left(\begin{pmatrix} \frac{y_1}{y_0} \\ \frac{y_2}{y_0} \end{pmatrix} \right) \in \iota(K^2).$$

#



Die Menge X steht also in Bijektion zum affinen Raum K^2 . Ist zudem $g = P_0 + \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle_K \subseteq K^2$ eine Gerade, so ist offensichtlich durch die Zuordnung $(0 : x_1 : x_2) \mapsto g_\infty$ eine Bijektion zwischen H und der unendlich fernen Hyperebene X_∞ gegeben.

Beweis von Satz 1.68. Sei $U_H \subseteq V$ der Untervektorraum mit $H = \mathbb{P}(U_H)$. Wir wählen nun ein $P_0 \in V \setminus U_H$ und betrachten den affinen Unterraum

$$X' := P_0 + U_H \subseteq V.$$

Für ein $P \in X'$ gilt $\langle P \rangle_K \not\subseteq U_H$ und also $\langle P \rangle_K \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U_H) = X$. Die so erhaltene Abbildung

$$\sigma : \begin{cases} X' & \rightarrow X, \\ P & \mapsto \langle P \rangle_K \end{cases}$$

ist bijektiv,

denn: Nach Bemerkung 1.13 schneidet jeder Untervektorraum U von V , der nicht in U_H enthalten ist, die Hyperebene $X' \subseteq V$. Ist U eindimensional, so gilt nach der Dimensionsformel für affine Unterräume 1.11

$$\dim V = \dim(U \vee X') = \dim U + \dim X' - \dim(U \cap X') = 1 + (\dim V - 1) - \dim(U \cap X')$$

und somit

$$\dim(U \cap X') = 0.$$

Jeder eindimensionale Untervektorraum von V , der nicht in U_H enthalten ist, schneidet X' daher in genau einem Punkt. #

Nun ist $T(X') = U_H$ und U_H operiert auf X' via

$$\tau'_t(P') = P' + t \quad \text{für alle } t \in U_H \text{ und } P' \in X'.$$

Diese Aktion können wir via

$$\tau_t(P) := (\sigma \circ \tau'_t \circ \sigma^{-1})(P) = \sigma(\sigma^{-1}(P) + t) \quad \text{für alle } t \in U_H \text{ und } P \in X$$

auf X übertragen. Setzen wir nun noch $T(X) := U_H$, so wird $(X, T(X), \tau)$ zu einem affinen Raum und σ zu einer Affinität mit $T(\sigma) = \text{id}_{U_H}$.

Wir zeigen nun Behauptung (a). Jeder Punkt in H lässt sich wegen $H = \mathbb{P}(U_H)$ eindeutig mit der von einem $w \in U_H \setminus \{0\}$ aufgespannten Geraden $K \cdot w \subseteq U_H$ schreiben. Andererseits gilt $T(X) = U_H$, so dass die Menge dieser Geraden in Bijektion mit der Menge der Translationsvektorräume der Geraden in X steht. Letztere lässt sich offensichtlich mit der Menge der Parallelenbüschel von Geraden in X und also der unendlich fernen Hyperebene X_∞ identifizieren.

Zum Beweis von Behauptung (b) benutzen wir die Affinität σ : Ist $Z = \mathbb{P}(U_Z)$ mit einem Untervektorraum $U_Z \subseteq V$, so ist $U_Z \cap X'$ als Durchschnitt zweier affiner Unterräume von V wieder ein solcher und wegen $U_Z \cap X' \subseteq X'$ sogar ein affiner Unterraum von X' . Folglich ist

$$\sigma(U_Z \cap X') = \sigma(U_Z) \cap \sigma(X') = Z \cap X \tag{1.24}$$

ein affiner Unterraum von X . Aus $\mathbb{P}(U_Z) = Z \not\subseteq H = \mathbb{P}(U_H)$ folgt $U_Z \not\subseteq U_H$. Nach der verlinkten Dimensionsformel für Untervektorräume aus der Linearen Algebra gilt dann

$$\dim V = \dim(U_Z \vee X')$$



Video

$$\begin{aligned}
&= \dim U_Z + \dim X' - \dim(U_Z \cap X') \\
&= \dim U_Z + (\dim V - 1) - \dim(U_Z \cap X').
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\dim(Z \cap X) = \dim \sigma(U_Z \cap X') = \dim(U_Z \cap X') = \dim U_Z - 1 = \dim Z \quad (1.25)$$

und somit die erste Teilbehauptung von (b). Aus $U_Z \not\subseteq U_H$ ergibt sich $U_H + U_Z = V$ und somit mit der Dimensionsformel für Untervektorräume

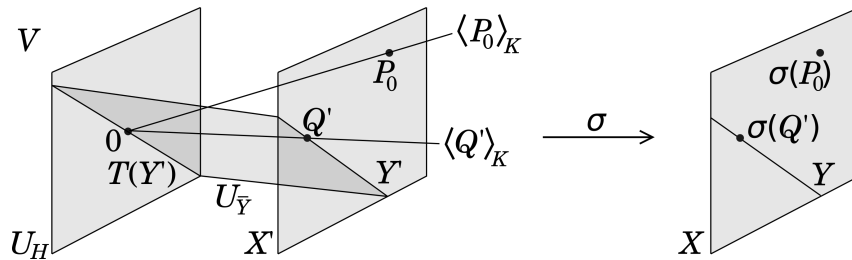
$$\dim(Z \cap H) + 1 = \dim(\mathbb{P}(U_H \cap U_Z)) + 1 = \dim(U_H \cap U_Z) = \dim U_Z - 1 = \dim Z$$

und somit die zweite Teilbehauptung von (b). Um nun die Abbildung $Z \mapsto Z \cap X$ umzukehren, müssen wir für jeden nichtleeren affinen Unterraum $Y \subseteq X$ einen projektiven Abschluss $\bar{Y} \subseteq \mathbb{P}(V)$ konstruieren. Dies geschieht wie folgt: Zum affinen Unterraum $Y' := \sigma^{-1}(Y) \subseteq X'$ gehört ein Translationsvektorraum

$$T(Y') \subseteq T(X') = U_H \quad \text{mit } Y' = Q' + T(Y') \text{ für ein } Q' \in Y'.$$

Wir setzen nun

$$\bar{Y} := \mathbb{P}(U_{\bar{Y}}) \quad \text{mit } U_{\bar{Y}} := \langle Q' \rangle_K \oplus T(Y').$$



In der Definition von $U_{\bar{Y}}$ ist die Summe tatsächlich direkt,

denn: Nach Voraussetzung gilt

$$Q' \in Y' \subseteq X' = P_0 + U_H \quad \text{mit } P_0 \in V \setminus U_H$$

und somit $Q' \notin U_H \supseteq T(Y')$. #

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
\overline{Z \cap X} &= Z \quad \text{für alle projektiven Unterräume } Z \subseteq \mathbb{P}(V) \text{ mit } Z \not\subseteq H, \\
\bar{Y} \cap X &= Y \quad \text{für alle affinen Unterräume } \emptyset \subsetneq Y \subseteq X,
\end{aligned}$$

denn: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\overline{Z \cap X} &\stackrel{(1.24)}{=} \overline{\sigma(U_Z \cap X')} \\
&= \mathbb{P}(\langle Q' \rangle_K \oplus T(U_Z \cap X')) \quad \text{mit } U_Z \cap X' = Q' + T(U_Z + X').
\end{aligned}$$

Der Vektorraum $\langle Q' \rangle_K \oplus T(U_Z \cap X')$ ist offensichtlich in U_Z enthalten und hat nach (1.25) Dimension $1 + (\dim U_Z - 1) = \dim U_Z$.¹⁵ Es folgt

$$\overline{Z} \cap \overline{X} = \mathbb{P}(U_Z) = Z$$

und somit die erste Teilbehauptung. Für die zweite Teilbehauptung berechnen wir

$$\begin{aligned} \overline{Y} \cap X &= \mathbb{P}(U_{\overline{Y}}) \cap (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U_H)) \\ &= \mathbb{P}(U_{\overline{Y}}) \setminus \mathbb{P}(U_H) \\ &\stackrel{Q' \notin U_H}{=} \mathbb{P}(\langle Q' \rangle_K \oplus T(Y')) \setminus \mathbb{P}(T(Y')) \\ &= \{ \langle P' \rangle_K \mid P' \in (Q' + T(Y')) \text{ oder } P' \in T(Y') \} \setminus \{ \langle P' \rangle_K \mid P' \in T(Y') \} \\ &= \sigma(Y') = Y. \end{aligned}$$

#

Damit ist gezeigt, dass die Zuordnung $Y \mapsto \overline{Y}$ die Abbildung $Z \mapsto Z \cap X$ umkehrt, und Behauptung (b) bewiesen.

Abschließend zeigen wir nun Behauptung (c). Um einzusehen, dass die Einschränkung $\varphi|_X$ eine Affinität ist, betrachten wir anstelle von X zunächst wieder X' . Ist $\varphi = \mathbb{P}(\Phi)$ für eine injektive lineare Abbildung Φ auf V , so folgt aus $\varphi(H) = H$ sofort $\Phi(U_H) = U_H$. Nach Proposition 1.63 ist Φ nur bis auf einen Vorfaktor aus K bestimmt, so dass wir ohne Einschränkung $\Phi(P_0) \in X'$ und insgesamt

$$\Phi(X') = X'$$

annehmen können. Die Einschränkung $\Phi|_{X'}$ ist eine Affinität mit $T(\Phi|_{X'}) := \Phi|_{U_H}$,

denn: Nach Konstruktion ist $\Phi|_{X'}$ bijektiv und es gilt

$$\langle T(\Phi|_{X'})(t_{AB}) \rangle_K = \langle \Phi|_{U_H}(t_{AB}) \rangle_K = \langle t_{\Phi|_{X'}(A)\Phi|_{X'}(B)} \rangle_K \quad \text{für alle } A, B \in X',$$

so dass $\Phi|_{X'}$ eine affine Abbildung ist.

#

Wegen $\varphi|_X = \sigma \circ \Phi|_{X'} \circ \sigma^{-1}$ ist auch $\varphi|_X$ eine Affinität mit $T(\varphi|_X) = \Phi|_{U_H}$. Das zeigt die erste Teilbehauptung von (c). Um zu zeigen, dass die Zuordnung $\varphi \mapsto \varphi|_X$ bijektiv ist, müssen wir jede Affinität ψ von X zu einer Projektivität $\overline{\psi}$ von $\mathbb{P}(V)$ fortsetzen. Dies können wir durch Angabe eines Automorphismus Ψ von V tun, indem wir

$$\overline{\psi} := \mathbb{P}(\Psi)$$

setzen. Wegen $V = U_H \oplus \langle P_0 \rangle_K$ ist ein solcher Automorphismus bereits eindeutig durch

$$\Psi|_{U_H} := T(\psi) \quad \text{und} \quad \Psi(P_0) := (\sigma^{-1} \circ \psi \circ \sigma)(P_0)$$

festgelegt. Aus der Konstruktion folgen sofort

$$\overline{\psi}|_X = \psi \quad \text{und} \quad \overline{\psi}(H) = H$$

sowie $\overline{\varphi|_X} = \varphi$ für jede unserer betrachteten Projektivitäten.

□

¹⁵Hier geht übrigens die Voraussetzung $Z \not\subseteq H$ ein.

1.7 Projektive Koordinaten

Definition 1.70 (proj. Raum). Sei $\dim \mathbb{P}(V) = n$ und $0 \leq r \leq n$. Ein $(r+1)$ -Tupel $(P_0, \dots, P_r)$ von Punkten in $\mathbb{P}(V)$ heißt **projektiv unabhängig**, wenn eine der folgenden äquivalenten¹⁶ Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Es gibt linear unabhängige Vektoren $v_0, \dots, v_r \in V$ mit $P_i = \langle v_i \rangle_K$ für alle $i \in \{0, \dots, r\}$.
- (ii) Jedes $(r+1)$ -Tupel $(v_0, \dots, v_r)$ von Vektoren aus V mit $P_i = \langle v_i \rangle_K$ für alle $i \in \{0, \dots, r\}$ ist linear unabhängig.
- (iii) $\dim \bigvee_{i=0}^r \{P_i\} = r$.

Ein $(n+2)$ -Tupel $(P_0, \dots, P_{n+1})$ von Punkten aus $\mathbb{P}(V)$ heißt eine **projektive Basis** von $\mathbb{P}(V)$, wenn je $n+1$ Punkte davon projektiv unabhängig sind.

Beispiel 1.71. Sei K ein Körper und sei n eine natürliche Zahl. Dann ist im projektiven Standardraum $\mathbb{P}^n(K)$ die **kanonische projektive Basis** durch

$$\begin{aligned} P_0 &= (1 : 0 : 0 : \dots : 0), \\ P_1 &= (0 : 1 : 0 : \dots : 0), \\ &\vdots \\ P_n &= (0 : 0 : 0 : \dots : 1), \\ P_{n+1} &= (1 : 1 : 1 : \dots : 1). \end{aligned}$$

gegeben.

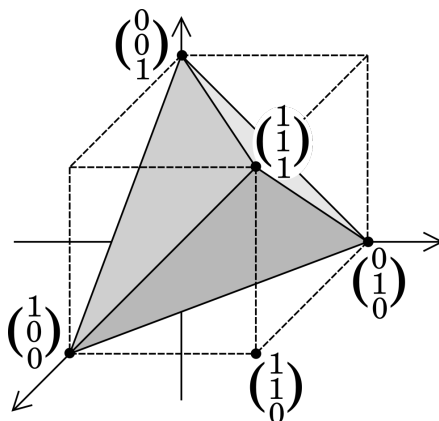


Abbildung 1.4: Man sieht hier auch sehr gut, dass der projektive Punkt $(1 : 1 : 0)$ auf der projektiven Verbindungsgeraden von $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 1 : 0)$ liegt, vgl. hierzu auch (1.21).

Man beachte, dass der Punkt P_{n+1} nur bezüglich seiner Koordinatendarstellung eine Sonderrolle einnimmt. Vom projektiv-geometrischen Standpunkt unterscheidet er sich nicht von den anderen Basispunkten.

¹⁶Mit der Dimensionsformel für projektive Unterräume 1.61 lässt sich diese Äquivalenz schnell einsehen.

Die Konstruktion der Standardbasis aus Beispiel 1.71 lässt sich auf beliebige projektive Räume übertragen.

Lemma 1.72 (proj. Raum). Ist $(P_0, \dots, P_{n+1})$ eine projektive Basis von $\mathbb{P}(V)$, so gibt es eine Basis $(v_0, \dots, v_n)$ von V mit

$$P_i = \langle v_i \rangle_K \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, n\} \quad \text{und} \quad P_{n+1} = \left\langle \sum_{i=0}^n v_i \right\rangle_K.$$

Beweis. Da $(P_0, \dots, P_n)$ projektiv unabhängig sind, gibt es nach Teil (i) von Definition 1.70 eine Basis $(v'_0, \dots, v'_n)$ mit

$$P_i = \langle v'_i \rangle_K \quad \text{für } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Wegen $\langle v'_0, \dots, v'_n \rangle_K = V$ gibt es $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$P_{n+1} = \left\langle \sum_{i=0}^n \lambda_i v'_i \right\rangle_K.$$

Gälte $\lambda_0 = 0$, so wären $v'_1, \dots, v'_n, \sum_{i=0}^n \lambda_i v'_i$ nicht linear unabhängig, was nach Teil (ii) von Definition 1.70 nicht sein kann. Es gilt also $\lambda_0 \neq 0$ und analog $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Es folgt, dass $(v_0, \dots, v_n)$ mit

$$v_i := \lambda_i v'_i \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, n\}$$

eine Basis vom gesuchten Typ ist. □

Satz 1.73 (proj. Raum). Sei W ein K -Vektorraum und $\mathbb{P}(W)$ der zu W gehörige projektive Raum. Gilt dann $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) =: n$ und ist $(P_0, \dots, P_{n+1})$ bzw. $(Q_0, \dots, Q_{n+1})$ eine projektive Basis von $\mathbb{P}(V)$ bzw. von $\mathbb{P}(W)$, so gibt es genau eine Projektivität $\varphi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ mit

$$\varphi(P_i) = Q_i \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, n+1\}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit von φ . Sei also $\varphi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ eine Projektivität wie im Satz. Dann gibt es einen Vektorraumisomorphismus Φ mit $\varphi = \mathbb{P}(\Phi)$. Sei nun $(v_0, \dots, v_n)$ bzw. $(w_0, \dots, w_n)$ eine wie in Lemma 1.72 gewählte Basis von V bzw. W bzgl. $(P_0, \dots, P_{n+1})$ bzw. $(Q_0, \dots, Q_{n+1})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \Phi(v_i) \rangle_K &= \varphi(\langle v_i \rangle_K) = \varphi(P_i) = Q_i = \langle w_i \rangle_K && \text{für alle } i \in \{0, \dots, n\}, \\ \langle \Phi\left(\sum_{i=0}^n v_i\right) \rangle_K &= \varphi\left(\left\langle \sum_{i=0}^n v_i \right\rangle_K\right) = \varphi(P_{n+1}) = Q_{n+1} = \left\langle \sum_{i=0}^n w_i \right\rangle_K, \end{aligned}$$

so dass es $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in K \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\begin{aligned} \Phi(v_i) &= \lambda_i w_i && \text{für alle } i \in \{0, \dots, n\}, \\ \Phi\left(\sum_{i=0}^n v_i\right) &= \lambda_{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n w_i. \end{aligned}$$

Hieraus und aus der Linearität von Φ folgt nach Koeffizientenvergleich sofort $\lambda_{n+1} = \lambda_i$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ und somit die Eindeutigkeit von Φ bis auf einen Vorfaktor. Die Eindeutigkeit von φ folgt mit Proposition 1.63.

Die Existenz haben wir gleich mitgezeigt, da wir φ über die gerade erhaltene lineare Abbildung Φ definieren können. $\square$

Definition 1.74 (proj. Raum). Sei $n := \dim(\mathbb{P}(V))$. Dann heißt eine beliebige Projektivität $\eta : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(K)$ ein **projektives Koordinatensystem** von $\mathbb{P}(V)$. Ist $(P_0, \dots, P_{n+1})$ eine projektive Basis von $\mathbb{P}(V)$, so gibt es nach Satz 1.73 genau ein projektives Koordinatensystem $\eta : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(K)$ mit

$$\begin{aligned}\eta(P_0) &= (1 : 0 : 0 : \dots : 0), \\ \eta(P_1) &= (0 : 1 : 0 : \dots : 0), \\ &\vdots \\ \eta(P_n) &= (0 : 0 : 0 : \dots : 1), \\ \eta(P_{n+1}) &= (1 : 1 : 1 : \dots : 1)\end{aligned}$$

und für jeden Punkt $P \in \mathbb{P}(V)$ heißt

$$\eta(P) =: (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$$

der **homogener Koordinatenvektor** von P bezüglich der projektiven Basis $(P_0, \dots, P_{n+1})$. Man beachte, dass dieser nur bis auf einen Vorfaktor $\lambda \in K \setminus \{0\}$ bestimmt ist.

Wie wir in Proposition 1.32 gesehen haben, erhalten Affinitäten Teilverhältnisse von jeweils drei Punkten. Schon bei Zentralprojektionen ist dies nicht mehr der Fall.

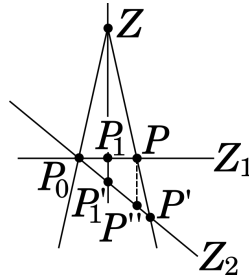


Abbildung 1.5: Einerseits gilt hier $\text{TV}(P_0, P_1, P) = 2$, andererseits sieht man mit dem Strahlensatz 1.33 leicht $\text{TV}(P_0, P'_1, P') > \text{TV}(P_0, P'_1, P'') = 2$ ein.

In Proposition 1.76 werden wir einsehen, dass Projektivitäten das sogenannte Doppelverhältnis von je vier Punkten fest lassen. Dieses führen wir nun zunächst ein.

Definition 1.75 (proj. Raum). Seien $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}(V)$ paarweise verschiedene, kollineare Punkte. Dann ist (P_0, P_1, P_2) eine projektive Basis der gemeinsamen Geraden g und wie in Definition 1.74 bemerkt gibt es genau ein projektives Koordinatensystem $\eta : g \rightarrow \mathbb{P}^1(K)$ mit

$$\eta(P_0) = (1 : 0), \quad \eta(P_1) = (0 : 1), \quad \eta(P_2) = (1 : 1).$$

Für einen beliebigen weiteren Punkt $P \in g$ definieren wir nun das **Doppelverhältnis** von P_0, P_1, P_2, P durch

$$\text{DV}(P_0, P_1, P_2, P) := \eta(P) \in \mathbb{P}^1(K).$$

Proposition 1.76 (proj. Raum). *Das Doppelverhältnis ist eine projektive Invariante. Genauer gilt für einen Vektorraum W über K , den zugehörigen projektiven Raum $\mathbb{P}(W)$, eine projektive Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ und paarweise verschiedene kollineare Punkte $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}(V)$ und einen weiteren Punkt $P \in \overrightarrow{P_0P_1}$*

$$\mathrm{DV}(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P)) = \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P).$$

Beweis. Wegen der Injektivität der zu φ gehörigen linearen Abbildung $\Phi : V \rightarrow W$ ist $\varphi(\overrightarrow{P_0P_1})$ eine Gerade in $\mathbb{P}(W)$ mit projektiver Basis $(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2))$ und

$$\varphi|_{\overrightarrow{P_0P_1}} : \overrightarrow{P_0P_1} \rightarrow \overrightarrow{\varphi(P_0)\varphi(P_1)}$$

eine Projektivität. Ist $\eta : \overrightarrow{P_0P_1} \rightarrow \mathbb{P}^1(K)$ das eindeutig bestimmte projektive Koordinatensystem mit

$$\eta(P_0) = (1 : 0), \quad \eta(P_1) = (0 : 1), \quad \eta(P_2) = (1 : 1),$$

so gilt nach Definition 1.75

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P) = \eta(P). \quad (1.26)$$

Definieren wir nun η' über $\eta' \circ \varphi|_{\overrightarrow{P_0P_1}} = \eta$, so ist $\eta' : \overrightarrow{\varphi(P_0)\varphi(P_1)} \rightarrow \mathbb{P}^1(K)$ eine Projektivität mit

$$\eta'(\varphi(P_0)) = (1 : 0), \quad \eta'(\varphi(P_1)) = (0 : 1), \quad \eta'(\varphi(P_2)) = (1 : 1).$$

Diese ist nach Satz 1.73 mit dieser Eigenschaft eindeutig und nach Definition 1.75 gilt

$$\mathrm{DV}(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P)) = \eta'(\varphi(P)) = \eta(P) \stackrel{(1.26)}{=} \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P)$$

wie behauptet. □

Ist ein projektives Koordinatensystem $\eta : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(K)$ gegeben, so liegen für die Punkte P_0, P_1, P_2, P homogene Koordinaten vor und nach Proposition 1.76 lässt sich das Doppelverhältnis aus diesen homogenen Koordinaten berechnen. Um die Notation nicht unnötig zu belasten, nehmen wir für die weiteren Betrachtungen $P_0, P_1, P_2, P \in \mathbb{P}^n(K)$ an.

Proposition 1.77. *Sei K ein Körper und seien*

$$P_k = (x_0^{(k)} : \dots : x_n^{(k)}) \quad \text{für } k \in \{0, 1, 2\}$$

drei paarweise verschiedene, kollineare Punkte in $\mathbb{P}^n(K)$ und $P = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$ ein weiterer Punkt auf dieser Geraden. Dann gibt es zwei verschiedene Indizes $i, j \in \{0, \dots, n\}$, für die

$$(x_i^{(0)} : x_j^{(0)}), (x_i^{(1)} : x_j^{(1)}), (x_i^{(2)} : x_j^{(2)}) \in \mathbb{P}^1(K)$$

definiert und paarweise verschieden sind, und es gilt

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P) = \left(\frac{\det \begin{pmatrix} x_i & x_i^{(1)} \\ x_j & x_j^{(1)} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_i & x_i^{(0)} \\ x_j & x_j^{(0)} \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(0)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(0)} \end{pmatrix}} \right).$$

Beweis. Indizes i, j wie in der Proposition existieren tatsächlich,

denn: Da P_0, P_1, P_2 paarweise verschieden und kollinear sind, gibt es $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in K \setminus \{0\}$ mit

$$\lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} x_0^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} x_0^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} x_0^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = 0.$$

Sind $k_0, k_1, k_2 \in \{0, 1, 2\}$ und gilt $x_i^{(k_0)} = 0$ für ein $i \in \{0, \dots, n\}$, so folgt daher

$$x_i^{(k_2)} = -\frac{\lambda_{k_1}}{\lambda_{k_2}} \cdot x_i^{(k_1)}.$$

Man sieht leicht ein, dass die Annahme, es gäbe keine Indizes i, j wie in der Proposition entgegen unserer Voraussetzung dazu führte, dass P_0, P_1, P_2 nicht paarweise verschieden sind. #

Sind nun i, j wie in der Proposition gegeben, so ist

$$((x_i^{(0)} : x_j^{(0)}), (x_i^{(1)} : x_j^{(1)}), (x_i^{(2)} : x_j^{(2)}))$$

eine projektive Basis von $\mathbb{P}^1(K)$ und somit die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \overleftarrow{P_0 P_1} & \rightarrow \mathbb{P}^1(K), \\ P = (x_0 : \dots : x_n) & \mapsto (x_i : x_j) \end{cases}$$

eine Projektivität. Nach Proposition 1.76 gilt dann

$$\text{DV}(P_0, P_1, P_2, P) = \text{DV}((x_i^{(0)} : x_j^{(0)}), (x_i^{(1)} : x_j^{(1)}), (x_i^{(2)} : x_j^{(2)}), (x_i : x_j)).$$

Nach Definition 1.62 gehört zum zur Berechnung des Doppelverhältnisses auf der rechten Seite benötigte Koordinatensystem $\eta : \mathbb{P}^1(K) \rightarrow \mathbb{P}^1(K)$ die injektive lineare Abbildung $H : K^2 \rightarrow K^2$ mit

$$\eta(\langle v \rangle_K) = \langle H(v) \rangle_K \quad \text{für alle } v \in K^2.$$

Letztere und somit auch η wird durch die Abbildungsmatrix $M_H \in \text{GL}_2(K)$ von H beschrieben. Genauer lassen sich die homogenen Koordinaten von

$$\text{DV}((x_i^{(0)} : x_j^{(0)}), (x_i^{(1)} : x_j^{(1)}), (x_i^{(2)} : x_j^{(2)}), (x_i : x_j)) = \eta(x_i : x_j)$$

aus dem Vektor $M_H \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}$ auslesen. Diesen bestimmen wir nun: Wegen

$$\eta(x_i^{(0)} : x_j^{(0)}) = (1 : 0) \quad \text{und} \quad \eta(x_i^{(1)} : x_j^{(1)}) = (0 : 1)$$

gilt

$$M_H^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda x_i^{(0)} & \mu x_i^{(1)} \\ \lambda x_j^{(0)} & \mu x_j^{(1)} \end{pmatrix}$$

mit zwei zunächst noch frei wählbaren Skalaren $\lambda, \mu \in K \setminus \{0\}$. Aus

$$\eta(x_i^{(2)} : x_j^{(2)}) = (1 : 1)$$

folgt zudem

$$\begin{aligned}\lambda x_i^{(0)} + \mu x_i^{(1)} &= \nu x_i^{(2)}, \\ \lambda x_j^{(0)} + \mu x_j^{(1)} &= \nu x_j^{(2)}\end{aligned}$$

mit einem weiteren Skalar $\nu \in K \setminus \{0\}$. Wählt man nun

$$\nu = \det \begin{pmatrix} x_i^{(0)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(0)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix},$$

so kann man λ und μ mit der Cramer'schen Regel aus der Linearen Algebra berechnen und erhält

$$M_H^{-1} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix} x_i^{(0)} & \det \begin{pmatrix} x_i^{(0)} & x_i^{(2)} \\ x_j^{(0)} & x_j^{(2)} \end{pmatrix} x_i^{(1)} \\ \det \begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix} x_j^{(0)} & \det \begin{pmatrix} x_i^{(0)} & x_i^{(2)} \\ x_j^{(0)} & x_j^{(2)} \end{pmatrix} x_j^{(1)} \end{pmatrix}$$

Die Proposition folgt nun durch direktes Ausrechnen. □

Bemerkung 1.78. Wir betrachten die zu Beispiel 1.69 analoge Einbettung

$$\iota : \begin{cases} K^n & \rightarrow \mathbb{P}^n(K), \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n). \end{cases}$$

Liegen in der Situation von Proposition 1.77 die Punkte P_0, P_1, P_2, P im affinen Teil $\iota(K^n)$ von $\mathbb{P}^n(K)$ und ist $i = 0$ eine mögliche Wahl, so sind

$$(1 : x_j^{(0)}), (1 : x_j^{(1)}), (1 : x_j^{(2)}) \in \mathbb{P}^1(K)$$

paarweise verschieden und für das Doppelverhältnis gilt

$$\text{DV}(P_0, P_1, P_2, P) = \left(\frac{x_j^{(1)} - x_j}{x_j^{(0)} - x_j} : \frac{x_j^{(1)} - x_j^{(2)}}{x_j^{(0)} - x_j^{(2)}} \right) \stackrel{1.31}{=} (\text{TV}(x_j, x_j^{(0)}, x_j^{(1)}) : \text{TV}(x_j^{(2)}, x_j^{(0)}, x_j^{(1)})).$$

Ist abweichend davon P_0 der unendlich ferne Punkt der Geraden durch P_0, P_1, P_2, P , so erhalten wir

$$\text{DV}(P_0, P_1, P_2, P) = \left(x_j^{(1)} - x_j : x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right) \stackrel{1.31}{=} (\text{TV}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_j) : 1).$$



Video

Wir zeigen nun mit dem Satz von Desargues einen klassischen Satz der projektiven Geometrie.

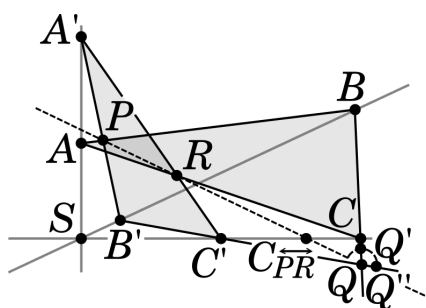
Satz 1.79 ((projektiver) Satz von Desargues, **proj. Raum**). Sei $E \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine Ebene und seien $A, B, C, A', B', C' \in E$ paarweise verschiedene Punkte mit paarweise verschiedenen Verbindungsgeraden $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$, die sich in einem gemeinsamen Punkt S schneiden. Dann sind die Schnittpunkte

P von $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{A'B'}$,

Q von $\overleftrightarrow{BC}$ und $\overleftrightarrow{B'C'}$,

R von $\overleftrightarrow{CA}$ und $\overleftrightarrow{C'A'}$

entweder paarweise verschieden und kollinear oder alle gleich.



Beweis. Nach der Dimensionsformel für projektive Unterräume 1.61 haben je zwei verschiedene Geraden in E einen eindeutigen Schnittpunkt. Da mit $\overleftrightarrow{AA'} \neq \overleftrightarrow{BB'}$ auch die Geraden $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{A'B'}$ verschieden sind, folgt die Eindeutigkeit von P und analog auch die von Q und R . Die Behauptung des Satzes ergibt also formal Sinn. Um sie zu beweisen, unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: A, B, C sind kollinear. Dann liegen nach Definition auch die Punkte P, Q, R auf $\overleftrightarrow{AC}$ und sind insbesondere kollinear. Nach Voraussetzung darf in dieser Situation keiner der Punkte A', B', C' auf $\overleftrightarrow{AC}$ liegen, da sonst auch $S \in \overleftrightarrow{AC}$ gälte und $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ nicht mehr paarweise verschieden wären. Sind nun zwei der drei Punkte P, Q, R identisch, ohne Einschränkung $P = Q$, so erhalten wir $P = Q \in \overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$. Wären nun A', B', C' nicht kollinear, so folgte $B' = P = Q \in \overleftrightarrow{AC}$, was wir gerade ausgeschlossen haben. Es müssen daher die Punkte A', B', C' auf einer – von $\overleftrightarrow{AC}$ verschiedenen – Geraden liegen. Deren Durchschnitt mit $\overleftrightarrow{AC}$ umfasst einerseits nach Definition die Punkte P, Q, R und ist andererseits nach der Dimensionsformel 1.61 einelementig. Das zeigt den Satz in diesem Fall.

Fall 2: A', B', C' sind kollinear. Das ist nach Umbenennung identisch mit Fall 1.

Fall 3: Weder A, B, C noch A', B', C' sind kollinear. Dann sind die drei Punkte P, Q, R paarweise verschieden,

denn: Gälte etwa $P = R$, so folgte nach Definition

$$P = R \in (\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CA}) \cap (\overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{C'A'}) = \{A\} \cap \{A'\} = \emptyset,$$

was offensichtlich nicht sein kann. Ebenso lassen sich die Annahmen $P = Q$ und $Q = R$ ad absurdum führen. #

Der Satz in diesem Fall folgt also, wenn wir $Q \in \overleftrightarrow{PR}$ zeigen können. Die Schnittpunkte

$$\begin{aligned} Q' &\text{ von } \overleftrightarrow{PR} \text{ und } \overleftrightarrow{BC}, \\ Q'' &\text{ von } \overleftrightarrow{PR} \text{ und } \overleftrightarrow{B'C'}, \\ C_{\overleftrightarrow{PR}} &\text{ von } \overleftrightarrow{PR} \text{ und } \overleftrightarrow{CC'}. \end{aligned}$$

sind eindeutig bestimmt,

denn: Gälte $\overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{BC}$, so folgte nach Definition $P \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Da nach Voraussetzung A, B, C nicht kollinear sind, gilt $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{B\}$ und wir erhielten $P = B$. Nach Definition bedeutete dies $B \in \overleftrightarrow{A'B'}$, folglich $A \in \overleftrightarrow{BB'}$ und somit entgegen unserer Voraussetzung auch $\overleftrightarrow{AA'} = \overleftrightarrow{BB'}$. Die Geraden $\overleftrightarrow{PR}$ und $\overleftrightarrow{BC}$ müssen also voneinander verschieden sein und nach der Dimensionsformel 1.61 einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt Q' haben.

Die entsprechende Behauptung zu Q'' zeigt man analog.

Gälte $\overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{CC'}$, so folgte nach Definition $R \in \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{CC'}$. Da nach Voraussetzung die Geraden $\overleftrightarrow{AA'}$ und $\overleftrightarrow{CC'}$ voneinander verschieden sind, gilt $A \notin \overleftrightarrow{CC'}$ und also $\overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{CC'} = \{C\}$. Somit gälte $R = C$ und insbesondere $C \in \overleftrightarrow{C'A'}$, was unseren Voraussetzungen widerspricht. #

Höchstens zwei der drei Punkte P, Q, R liegen in der Vereinigung $\overleftrightarrow{AA'} \cup \overleftrightarrow{BB'} \cup \overleftrightarrow{CC'}$,

denn: Wäre dies doch der Fall, so gälten

$$\begin{aligned} \{P\} &= \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{SC} = \overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{SC'}, \\ \{Q\} &= \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{SA} = \overleftrightarrow{B'C'} \cap \overleftrightarrow{SA'}, \\ \{R\} &= \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{C'A'} = \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{SB} = \overleftrightarrow{C'A'} \cap \overleftrightarrow{SB'}. \end{aligned}$$

Ausgehend von den vier paarweise verschiedenen Punkten P, Q, R, S gäbe es also mit $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ zwei Dreiecke, für die sich die Punkte P, Q, R als Durchschnitte der Dreiecksseiten $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}$ bzw. $\overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{B'C'}, \overleftrightarrow{C'A'}$ mit den Geraden $\overleftrightarrow{SP}, \overleftrightarrow{SQ}, \overleftrightarrow{SR}$ darstellen ließen. Wir wollen nun einsehen, dass hieraus zwangsläufig $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ folgte, und zeigen dafür, dass das Dreieck $\triangle ABC$ in unserer Situation durch die Punkte P, Q, R bereits eindeutig bestimmt wäre. Zunächst stellen wir hierfür fest, dass sich die Punkte B und C sofort aus der Position des Punktes A auf der Geraden $\overleftrightarrow{SQ}$ herleiten ließen, so dass das gesuchte Dreieck $\triangle ABC$ eindeutig durch einen Parameter aus dem Körper K bestimmt wäre. Dieser Parameter ließe sich durch Kollinearitätsbedingungen und insbesondere durch ein lineares Gleichungssystem beschreiben, dessen Lösungsmenge ein affiner Raum von Dimension 1 oder 0 wäre. Da A auf der Geraden $\overleftrightarrow{SQ}$ nicht beliebig gewählt werden könnte, wäre die Dimension 0 und $\triangle ABC$ wäre das einzige Dreieck zu den Punkten P, Q, R . #

Da offensichtlich keiner der Punkte P, Q, R mit S übereinstimmt, können wir daher nach möglicher Umbenennung annehmen, dass sie auch außerhalb von $\overleftrightarrow{CC'}$ liegen. Dann sind die drei

Punkte $P, R, C_{\overrightarrow{PR}}$ paarweise verschieden und die Doppelverhältnisse

$$DV(P, R, C_{\overrightarrow{PR}}, Q') \quad \text{und} \quad DV(P, R, C_{\overrightarrow{PR}}, Q'')$$

wohldefiniert. Der Satz in diesem Fall folgt nun, wenn wir ihre Gleichheit zeigen können, denn dann folgt $Q' = Q''$, also $Q = Q' = Q''$ und somit $Q \in \overrightarrow{PR}$.

Seien

$\pi_C : \overrightarrow{PR} \rightarrow \overrightarrow{AB}$ die Zentralprojektion mit Zentrum C ,

$\pi_S : \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{A'B'}$ die Zentralprojektion mit Zentrum S ,

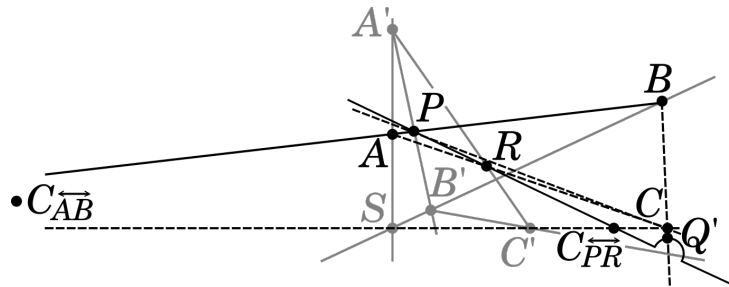
$\pi_{C'} : \overrightarrow{A'B'} \rightarrow \overrightarrow{PR}$ die Zentralprojektion mit Zentrum C'

und

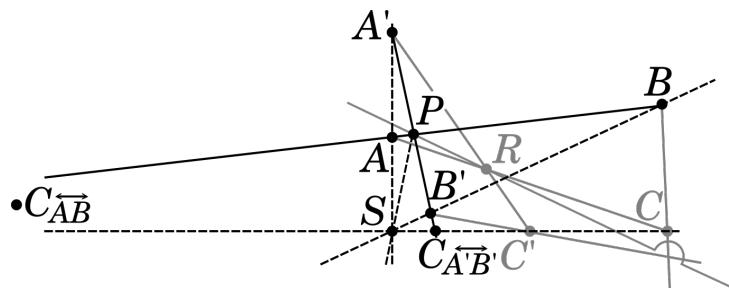
$C_{\overrightarrow{AB}}$ der offensichtlich eindeutig bestimmte Schnittpunkt von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CC'}$,

$C_{\overrightarrow{A'B'}}$ der offensichtlich eindeutig bestimmte Schnittpunkt von $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{CC'}$.

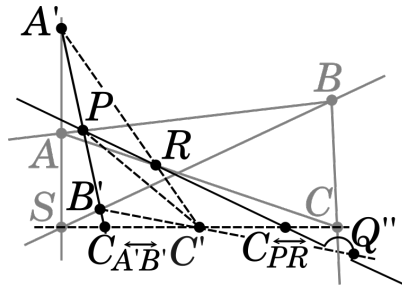
Nach Proposition 1.76 gilt dann



$$DV(P, R, C_{\overrightarrow{PR}}, Q') = DV(\pi_C(P), \pi_C(R), \pi_C(C_{\overrightarrow{PR}}), \pi_C(Q')) = DV(P, A, C_{\overrightarrow{AB}}, B)$$



$$= DV(\pi_S(P), \pi_S(A), \pi_S(C_{\overrightarrow{AB}}), \pi_S(B)) = DV(P, A', C_{\overrightarrow{A'B'}}, B')$$



$$= DV(\pi_{C'}(P), \pi_{C'}(A'), \pi_{C'}(C_{\overrightarrow{A'B'}}), \pi_{C'}(B')) = DV(P, R, C_{\overrightarrow{PR}}, Q'')$$

und somit der Satz in diesem Fall. $\square$

1.8 Computergraphik

Mit der Entwicklung der modernen Computer ist untrennbar die graphische Ausgabe am Bildschirm verbunden. Da das menschliche Begreifen so sehr auf seinen visuellen Sinn ausgerichtet ist, wird Computergraphik in vielen Wissenschaften erfolgreich eingesetzt. Abstrakte Modellvorstellungen, die früher nur mühsam vermittelt werden konnten und in den Köpfen verbleiben mussten, können heute so mit vergleichsweise geringem Aufwand graphisch präsentiert werden.

Wir werden uns in diesem Abschnitt (sehr skizzenhaft und auf von der konkreten Umsetzung gelöste Weise) mit der *generativen Computergraphik* befassen, also dem Erzeugen und Manipulieren künstlicher Bildwelten am Rechner, da hier die Methoden der analytischen Geometrie zum Einsatz kommen.

Ziel

Ein geeigneter Ausschnitt des $\mathbb{R}^3$ soll mittels einer geeigneten Projektion in einem gegebenen Fenster auf dem Bildschirm dargestellt werden. In vielen Anwendungen ist es sehr nützlich, ein dargestelltes Objekt auf geeignete Weise transformieren (drehen, verschieben, skalieren, ...) zu können. Die Darstellung im Fenster soll sich dann schnell und optisch plausibel verändern.

Transformationen

Wir betrachten Affinitäten $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Nach Definition 1.15 ist jedes solche φ bijektiv und geradentreu und nach Proposition 1.32 auch teilverhältnistreue. Hieraus ergeben sich sofort einige weitere wünschenswerte Eigenschaften:

- φ bildet Dreiecke auf Dreiecke ab.

- φ bildet Parallelen auf Parallelen ab.
- Nach Beispiel 1.19 gibt es ein $M \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ und ein $P \in \mathbb{R}^3$ mit $\varphi = \varphi_{M,P}$. Das Volumenverhältnis von Bild und Urbild ist dann durch $|\det M|$ gegeben.¹⁷

Die Berechnung des Bildpunktes eines gegebenen Punktes unter einer Affinität lässt sich problemlos am Computer durchführen. Zudem ist dieser Vorgang offensichtlich *parallelisierbar*, das heißt, für jeden Urbildpunkt lässt sich der zugehörige Bildpunkt auf die immer gleiche Weise und unabhängig von den Rechnungen an sämtlichen anderen Punkten bestimmen. Besonders schnell ist dies möglich, wenn die jeweils benötigten Rechenschritte bereits fest in der eingesetzten Hardware verbaut sind.

Um dies zu vereinfachen greifen wir zu einem Trick, mithilfe dessen wir auch bei Translationen auf Vektoradditionen verzichten können und nur noch Matrizenmultiplikationen durchführen müssen: Wir betten $\mathbb{R}^3$ analog zu Beispiel 1.69 über

$$\iota : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto (1 : x_1 : x_2 : x_3) \end{cases}$$

in seinen projektiven Abschluss $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ein. Die projektive Fortsetzung $\overline{\varphi_{M,P}}$ ist dann durch die zugehörige lineare Abbildung

$$\overline{\Phi_{M,P}} : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^4, \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline P & & M \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

gegeben,

denn: Offensichtlich gilt einerseits

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline P & & M \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_{M,P} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

und andererseits

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline P & & M \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

¹⁷Wie im verlinkten Zusatzmaterial ausgeführt wird, ist die beste Wahl für einen Volumenbegriff in $\mathbb{R}^3$ das Lebesgue-Maß, das wir so normieren, dass das Volumen des Einheitswürfels $[0,1]^3$ Eins ist. Letzterer lässt sich als das von den Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3 aufgespannte Parallelepiped ansehen und wird somit unter $\varphi_{M,P}$ auf das von den Spalten von M aufgespannte Parallelepiped abgebildet, dessen Volumen sich – analog zur Flächenberechnung des Parallelogramms in der Ebene – zu $|\det M|$ berechnet.



#

Insbesondere haben wir in (1.27) eingesehen, dass wir den Bildpunkt eines gegebenen Punktes unter einer Affinität von $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ stets durch die Multiplikation mit einer zur Affinität gehörigen Matrix aus $GL_4(\mathbb{R})$ berechnen können.

Projektionen

Wir wollen uns nun noch Gedanken darüber machen, wie man einen geeigneten Ausschnitt von $\mathbb{R}^3$ auswählt und wie man ihn auf das gegebene Bildschirmfenster projiziert.

- Definition 1.80.** (a) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene. Eine Gerade $n \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt eine **Normale** von E , wenn sie orthogonal zu allen Geraden in E ist. Aus Dimensionsgründen sind je zwei Normalen parallel.
- (b) Zwei Ebenen in $\mathbb{R}^3$ heißen zueinander **orthogonal**, wenn ihre Normalen orthogonal zueinander sind.
- (c) Ein Polytop, dessen Flächen ausschließlich in Ebenen liegen, die zueinander parallel oder orthogonal sind, heißt ein **Quader**.¹⁸

Die einfachste Idee ist nun, einen gegebenen Quader per Parallelprojektion (vgl. Proposition 1.20) längs der Normalen einer seiner Seitenflächen auf eben diese Seite zu projizieren, konkret: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader, $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, die eine Seitenfläche von Q enthält, und n eine Normale von E . Dann bildet die Parallelprojektion

$$\pi_{T(n)}^{\mathbb{R}^3, E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$$

den Quader Q auf seine in E gelegene Seitenfläche ab.

Ein Problem entsteht, wenn man ein Objekt in Q von E wegschiebt: Erreicht es die E gegenüberliegende Seitenfläche von Q , so wird es zunächst angeschnitten und verschwindet schließlich ganz.

Definition 1.81. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, $\Pi ABCD \subseteq E$ ein Rechteck, $n \subseteq \mathbb{R}^3$ die Normale von E durch den Diagonalschnittpunkt von $\Pi ABCD$ und $P_0 \in n \setminus E$ ein beliebiger Punkt. Dann heißt die Menge

$$X(\Pi ABCD, P_0) := \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P \in \overrightarrow{P_0 Q} \text{ für ein } Q \in \Pi ABCD\}$$

der **Rechteckkegel** aus P_0 durch $\Pi ABCD$ und für alle $0 < a < b$ die Menge

$$X_a^b(\Pi ABCD, P_0) := \{P \in X(\Pi ABCD, P_0) \mid a \leq \|P_0 - P\| \leq b\}$$

der **Rechteckkegelstumpf**, dessen Vorder- bzw. Rückseitenabstände zur Kegelspitze P_0 durch a bzw. b gegeben sind.

¹⁸Jeder Quader geht aus dem Einheitswürfel durch Anwendung einer Streckung der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \text{diag}(a, b, c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und anschließender Anwendung einer Bewegung hervor.

Ein gegebener Rechteckkegelstumpf X_a^b lässt sich über eine Zentralprojektion (vgl. Definition 1.65) mit Zentrum in der Kegelspitze auf seine Vorderseite projizieren. Verschiebt man nun Objekte in X_a^b von der Vorderseite weg, so werden sie nach und nach kleiner und verschwinden bei Erreichen der Rückseite.

1.9 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1 (aff. Raum). Für zwei verschiedene Punkte $A, B \in X$ ist der Verbindungsraum gegeben durch

$$\{A\} \vee \{B\} = \langle t_{AB} \rangle_K(A).$$

Aufgabe 1.2 (aff. Raum). Seien X, Y, Z affine Räume und $\varphi : X \rightarrow Y$ und $\psi : Y \rightarrow Z$ affine Abbildungen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $(\psi \circ \varphi) : X \rightarrow Z$ ist wieder affin und es gilt $T(\psi \circ \varphi) = T(\psi) \circ T(\varphi)$.
- (b) φ ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn $T(\varphi)$ die entsprechende Eigenschaft hat.
- (c) Ist φ bijektiv, so ist auch $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ affin mit $T(\varphi^{-1}) = T(\varphi)^{-1}$.

Aufgabe 1.3 (aff. Raum). Zeigen Sie in Verallgemeinerung von (1.9) die folgende Aussage: Sei $(Y, T(Y), \sigma)$ ein affiner Raum über dem Körper K , sei $\varphi : X \rightarrow Y$ eine affine Abbildung und seien $X_1, X_2 \subseteq X$ zwei affine Unterräume. Gilt dann $X_1 \parallel X_2$, so auch $\varphi(X_1) \parallel \varphi(X_2)$.

Aufgabe 1.4. Ein alternativer Zugang zur ebenen Geometrie ist die **Abbildungsgeometrie** des $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, bei der man das Verhalten bestimmter Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$ unter geeigneten bijektiven Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ untersucht. Hierbei interessiert man sich vor allem für Invarianten, also diejenigen Eigenschaften und Größen der jeweils betrachteten Teilmenge M , die sich unter der betrachteten Abbildung φ nicht ändern.

Sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Dann definieren wir die **Geradenspiegelung** σ_g an g durch

- $\sigma_g(P) = P$ für alle $P \in g$; jeder Punkt auf g ist also ein Fixpunkt unter σ_g .
 - Die Geraden $\overleftrightarrow{P\sigma_g(P)}$ und g sind orthogonal und schneiden sich im Mittelpunkt $M_{P\sigma_g(P)}$.
- (a) Zeigen Sie, dass Geradenspiegelungen uneigentliche Bewegungen von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ im Sinne von Beispiel 1.19 sind.
- (b) Beschreiben Sie die Hintereinanderausführung $\sigma_h \circ \sigma_g$ zweier Geradenspiegelungen geometrisch.

Hinweis: Unterscheiden Sie hierbei die Fälle $g \parallel h$ und $g \nparallel h$.

Man kann zeigen, dass jede Bewegung des $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ eine Verkettung von höchstens drei Geradenspiegelungen ist.

Aufgabe 1.5 (Tangenssatz). Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass in einem Dreieck $\triangle ABC$ im affinen Standardraum $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ mit Innenwinkelgrößen (α, β, γ) und Seitenlängen (a, b, c) die folgenden Gleichungen gelten.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(\frac{1}{2}(\alpha+\beta))}{\tan(\frac{1}{2}(\alpha-\beta))}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan(\frac{1}{2}(\beta+\gamma))}{\tan(\frac{1}{2}(\beta-\gamma))}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan(\frac{1}{2}(\gamma+\alpha))}{\tan(\frac{1}{2}(\gamma-\alpha))}.$$

Hierbei bezeichnet $\tan$ den auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definierten Tangens $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Aufgabe 1.6. Sei $n \geq 2$ und sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Innenwinkelgrößen (α, β, γ) und Seitenlängen (a, b, c) . Seien weiter $U = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe **Umfang** von $\triangle ABC$ sowie $F = \frac{1}{2}ab \cdot \sin(\gamma)$ der **Flächeninhalt** von $\triangle ABC$.

(a) Zeigen Sie die **Heron'sche Formel** $F^2 = U \cdot (U-a) \cdot (U-b) \cdot (U-c)$.

(b) Folgern Sie aus (a) die Abschätzung

$$F \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}(a+b+c)^2,$$

und zeigen Sie, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel verwenden.

Aufgabe 1.7. Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass es im affinen Standardraum $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ kein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ mit Eckpunkten $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$ gibt.

Hinweis: Zeigen Sie induktiv, dass ansonsten die quadrierten Seitenlängen durch eine beliebig große Potenz von 4 teilbar sein müssten.

Aufgabe 1.8. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck in der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, so dass $\angle BCA$ ein rechter Winkel ist. Sei weiter $A' := C + \lambda(A-C)$ mit einem $\lambda \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass dann $\|B-A'\| < \|B-A\|$ gilt.

Aufgabe 1.9. Seien A, B, C drei kollineare Punkte auf der Einheitssphäre $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $A \neq C$. Zeigen Sie, dass dann schon $B \in \{A, C\}$ gilt.

Aufgabe 1.10. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $g \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eine Gerade, so gibt es reelle Zahlen a_0, a_1, a_2 , nicht alle Null, mit

$$g = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}.$$

Der Punkt $P(g) := (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist dabei durch g eindeutig festgelegt.

(b) Zu zwei voneinander verschiedenen Geraden $g_1 \neq g_2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind auch die zugehörigen Punkte $P(g_1)$ und $P(g_2)$ voneinander verschieden.

(c) Haben die Geraden $g_1, g_2, g_3 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ einen gemeinsamen Schnittpunkt, so liegen die Punkte $P(g_1), P(g_2), P(g_3)$ auf einer gemeinsamen Geraden.

Aufgabe 1.11 (proj. Raum). Seien $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ projektive Unterräume gleicher Dimension und sei $\varphi : Z_1 \rightarrow Z_2$ eine Projektivität mit $\varphi|_{Z_1 \cap Z_2} = \text{id}_{Z_1 \cap Z_2}$. Zeigen Sie, dass dann φ bereits eine Zentralprojektion ist.

Aufgabe 1.12 (proj. Raum). Eine bijektive Abbildung einer projektiven Geraden, die Doppelverhältnisse unverändert lässt, ist eine Projektivität.

Aufgabe 1.13 ((projektiver) Satz von Pappos, proj. Raum). Seien $g \neq h$ zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}(V)$ mit Schnittpunkt S . Seien weiter $A, B, C \in g \setminus h$ und $A', B', C' \in h \setminus g$ paarweise verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass dann die Schnittpunkte

$$\begin{aligned} S_1 & \text{ von } \overleftrightarrow{AB'} \text{ und } \overleftrightarrow{BA'}, \\ S_2 & \text{ von } \overleftrightarrow{BC'} \text{ und } \overleftrightarrow{CB'}, \\ S_3 & \text{ von } \overleftrightarrow{CA'} \text{ und } \overleftrightarrow{AC'} \end{aligned}$$

paarweise verschieden und kollinear sind.

Inzidenzgeometrie

In diesem Kapitel und den Kapiteln 3 und 4 werden wir die ebene Geometrie nach Euklid in moderner Form streng axiomatisch einführen. In Abgrenzung zur Analytischen Geometrie aus Kapitel 1 spricht man hierbei von der *Synthetischen Geometrie*. Im Großen und Ganzen folgen wir der Darstellung aus den *Grundlagen der Geometrie* von Hilbert aus dem Jahr 1899. Die Ausformulierung der Axiome im Detail ist allerdings an keine bestimmte Quelle angelehnt, sondern von uns auf Übersichtlichkeit und gute Verständlichkeit hin optimiert. Um die hierbei verwendete Herangehensweise kennenzulernen und um besser Vergleiche zu Analytischen Geometrie anstellen zu können, studieren wir in diesem Kapitel zunächst deutlich allgemeiner Inzidenzebenen und affine Ebenen.

2.1 Inzidenzebenen

Um den Begriff der Inzidenzebene einzuführen gehen wir von einer zunächst beliebigen Menge $\mathbf{P}$ aus, deren Elemente wir im Folgenden *Punkte* nennen. Zusätzlich betrachten wir eine ebenfalls zunächst beliebige Menge $\mathbf{G}$ von Teilmengen von $\mathbf{P}$, deren Elemente *Geraden* heißen sollen. Für Elemente dieser Mengen führen wir nun die folgenden Sprechweisen ein.

- Wir sagen, ein Punkt $A \in \mathbf{P}$ *liege auf* einer Geraden $g \in \mathbf{G}$ oder g *gehe durch* A , falls $A \in g$ gilt.
- Ein Punkt $A \in \mathbf{P}$ heißt ein *Schnittpunkt* von zwei Geraden $g, h \in \mathbf{G}$, falls A im Mengendurchschnitt $g \cap h$ liegt.
- Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbf{P}$ mit mindestens 3 Elementen heißt *kollinear*, falls es eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ mit $M \subseteq g$ gibt.
- Wir sagen, drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ seien *in allgemeiner Lage*, falls $\{A, B, C\}$ nicht kollinear ist, es also kein $g \in \mathbf{G}$ mit $A, B, C \in g$ gibt.

- Zwei Geraden $g, h \in \mathbf{G}$ heißen **parallel**, in Zeichen $g \parallel h$, falls $g = h$ oder $g \cap h = \emptyset$ gilt.

Diese Festlegungen passen einerseits ganz gut zu unserer naiven Vorstellung von ebener Geometrie, andererseits ist aber das Konzept der Geraden hier noch sehr allgemein und umfasst zum Beispiel auch den ganzen Raum $\mathbf{P}$. Um Geometrie im engeren Sinne betreiben zu können, müssen wir noch einige Forderungen an Punkte- und Geradenmenge stellen.

Definition 2.1. Sei $\mathbf{P}$ eine beliebige Menge und $\mathbf{G}$ eine beliebige Menge von Teilmengen von $\mathbf{P}$. Das Paar $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ heißt eine **Inzidenzebene**, falls die folgenden **Inzidenzaxiome** erfüllt sind.

- (I_1) Durch je zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}$ existiert genau eine Gerade in $\mathbf{G}$. Diese heißt die **Verbindungsgerade** $\overleftrightarrow{AB}$ von A und B .
- (I_2) Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.
- (I_3) Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.

Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene.“ schreiben wir künftig auch kurz „(I)“.

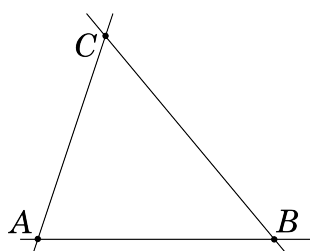
Die erste Frage, die wir uns nun stellen, ist, ob es ein **Modell** für eine Inzidenzebene gibt, also ein Paar $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$, das die Axiome (I_1), (I_2) und (I_3) erfüllt.

Beispiel 2.2. Wegen (I_3) enthält jede Inzidenzebene mindestens drei Punkten A, B, C . Das Paar

$$(\mathbf{P}, \mathbf{G}) = (\{A, B, C\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\})$$

erfüllt aber offensichtlich die Inzidenzaxiome. Für $\mathbf{P} = \{A, B, C\}$ gibt es keine andere Teilmenge $\mathbf{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{P})$, für die das stimmt,

denn: Nach (I_3) liegt $\{A, B, C\}$ nicht in $\mathbf{G}$. Deshalb sind nach (I_1) die Mengen $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$ in $\mathbf{G}$. Schließlich sind nach (I_2) die Mengen $\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}$ keine Geraden. #



Wir haben den Begriff der Inzidenzebene eingeführt und ein Modell dafür gefunden. Wir beweisen nun erste Eigenschaften von Inzidenzebenen und zeigen so, dass man bereits in dieser Allgemeinheit Geometrie betreiben kann.

Proposition 2.3 (I). Zwei nichtparallele Geraden g und h haben einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt, den wir ab sofort mit $g \wedge h$ bezeichnen wollen.

Beweis. Aus $g \not\parallel h$ folgt definitionsgemäß $g \cap h \neq \emptyset$. Lügen zwei verschiedene Punkte A, B in $g \cap h$, so folgte mit (I_1) die Gleichheit $g = \overleftrightarrow{AB} = h$, was im Widerspruch zu $g \not\parallel h$ steht. $\square$

Proposition 2.4 (I). Für je drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ mit $A \neq B$ und $A \neq C$ gilt die Äquivalenz

$$C \in \overleftrightarrow{AB} \iff \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}.$$

Beweis. Gilt $C \in \overleftrightarrow{AB}$, so geht die Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ durch die beiden Punkte A und C . Nach (I_1) folgt $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Ist umgekehrt $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$, so gilt offensichtlich $C \in \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AB}$. $\square$

Proposition 2.5 (I). (a) Für jede Gerade $g \in \mathbf{G}$ gibt es einen Punkt $A \in \mathbf{P}$ mit $A \notin g$.

(b) Für jeden Punkt $A \in \mathbf{P}$ gibt es eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ mit $A \notin g$.

Beweis. Gäbe es eine Gerade $g \in \mathbf{G}$, die durch alle Punkte in $\mathbf{P}$ geht, so gäbe es im Widerspruch zu (I_3) in $\mathbf{P}$ keine drei Punkte in allgemeiner Lage. Es gibt also für jede Gerade aus $\mathbf{G}$ mindestens einen Punkt $A \in \mathbf{P}$, durch den g nicht geht. Das ist Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) betrachten wir einen fest gewählten Punkt $A \in \mathbf{P}$. Nach (I_3) gibt es einen Punkt $B \in \mathbf{P} \setminus \{A\}$ und nach (I_1) auch die Verbindungsgerade $\overleftrightarrow{AB}$. Nach Teil (a) existiert weiter ein Punkt $C \in \mathbf{P} \setminus \overleftrightarrow{AB}$. Mit Proposition 2.4 folgt $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BC}$, was wieder mit Proposition 2.4 bedeutet, dass A nicht auf $\overleftrightarrow{BC}$ liegt. $\square$

Abschließend für diesen Abschnitt zeigen wir nun, dass die affine Standardebene $\mathbb{A}^2(K)$ über einem beliebigen Körper K aus Beispiel 1.3 die Struktur einer Inzidenzebene trägt. Die zu betrachtende Punktmenge ist hier offensichtlich durch K^2 gegeben, die Geradenmenge durch

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_K &:= \{g \text{ affine Gerade in } \mathbb{A}^2(K)\} \\ &\stackrel{1.5}{=} \{A + U \mid A \in K^2, U \subseteq K^2 \text{ Untervektorraum von Dimension 1}\} \\ &= \{g_{A,t} := A + \langle t \rangle_K \mid A, t \in K^2, t \neq 0\}. \end{aligned}$$

Satz 2.6. Für einen beliebigen Körper K ist $\mathbb{A}^2(K) = (K^2, \mathbf{G}_K)$ eine Inzidenzebene.

Beweis. Für je zwei Punkte $A \neq B \in K^2$ ist offensichtlich die Verbindungsgerade¹⁹ $\overleftrightarrow{AB} = g_{A,B-A} \in \mathbf{G}_K$ eine Gerade durch A und B . Zum Beweis von (I_1) müssen wir nun noch zeigen, dass jede Gerade $g \in \mathbf{G}_K$ durch A und B mit $g_{A,B-A}$ identisch ist. Nach Definition von $\mathbf{G}_K$ ist jede solche Gerade g von der Gestalt $g_{C,t}$ mit geeigneten $C, t \in K^2$ und $t \neq 0$. Wegen $A, B \in g$ gibt es $\lambda, \mu \in K$ mit $A = C + \lambda t$ und $B = C + \mu t$. Wegen $A \neq B$ ist dabei $\lambda \neq \mu$. Durch Einsetzen folgt

$$t = \frac{1}{\mu - \lambda} (B - A)$$

und somit

$$g = g_{C,t} = (A - \lambda t) + \langle t \rangle_K = A + \langle t \rangle_K = A + \left\langle \frac{1}{\mu - \lambda} (B - A) \right\rangle_K = A + \langle B - A \rangle_K = g_{A,B-A},$$

so dass wir das erste Inzidenzaxiom (I_1) nachgewiesen haben.

¹⁹Gemeint ist hier der Verbindungsraum der Punkte $A, B \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ wie in Proposition 1.9. Indem wir nun (I_1) nachweisen, zeigen wir, dass dieser gerade die Verbindungsgerade im Sinne von Definition 2.1 ist.

Zum Nachweis von (I_2) betrachten wir eine beliebige Gerade $g \in \mathbf{G}_K$. Dann gibt es $A, t \in K^2$ mit $t \neq 0$, so dass wir $g = g_{A,t}$ schreiben können. (I_2) folgt, da nach Konstruktion die voneinander verschiedenen Punkte A und $A + t$ auf g liegen.

Schließlich gilt auch (I_3) , da die Punkte $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in allgemeiner Lage sind. Dies erhalten wir, da offensichtlich der Punkt X nicht auf der Geraden $g_{O,Y-O} = \langle Y \rangle_K$ liegt. $\square$

Bemerkung 2.7. In der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(K)$ über einem beliebigen Körper K ist der Begriff der Parallelität von Geraden nun doppelt definiert: Einmal wie in Abschnitt 1.1 für affine Unterräume und einmal wie in diesem Abschnitt für Geraden in Inzidenzebenen. Diese Definitionen stimmen überein,

denn: Für zwei beliebige Geraden $g_{A,t}, g_{B,t'} \in \mathbf{G}_K$ gilt:

$$\begin{aligned} g_{A,t} \parallel g_{B,t'} &\iff g_{A,t} \cap g_{B,t'} = \emptyset \text{ oder } g_{A,t} = g_{B,t'} && \text{(nach Definition aus diesem Abschnitt)} \\ &\stackrel{1.13}{\iff} \langle t \rangle_K = T(g_{A,t}) = T(g_{B,t'}) = \langle t' \rangle_K \text{ oder } g_{A,t} = g_{B,t'} \\ &\iff g_{A,t} \parallel g_{B,t'}. && \text{(nach Definition aus Abschnitt 1.1)} \end{aligned}$$

#

Definition 2.8. Seien $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ und $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$ zwei Inzidenzebenen. Eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$ heißt **Isomorphismus** von Inzidenzebenen, wenn sie Geraden auf Geraden abbildet, wenn also

$$\varphi(g) \in \tilde{\mathbf{G}} \quad \text{für alle } g \in \mathbf{G}$$

gilt. Ist hierbei $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}}) = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$, so heißt φ ein **Automorphismus** von $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$. Die Menge der Automorphismen von $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ wird mit $\text{Aut}(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ bezeichnet.

Nach Übungsaufgabe 2.2 ist für beliebige Inzidenzebenen $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ und $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$ mit $\varphi : \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$ auch $\varphi^{-1} : \tilde{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbf{P}$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist für eine beliebige Inzidenzebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ die Menge $\text{Aut}(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ zusammen mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe.

Beispiel 2.9. Nach Satz 1.28 gibt es für jede affine Ebene X über einem gegebenen Körper K im Sinne von Abschnitt 1.1 eine Affinität $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^2(K)$. Nach Definition 1.15 ist diese bijektiv und bildet Geraden auf Geraden ab. Es folgt, dass X eine Inzidenzebene und φ ein Isomorphismus von Inzidenzebenen ist.

2.2 Affine Ebenen

Wie wir in Abschnitt 2.1 gesehen haben, können wir schon in Inzidenzebenen Geometrie betreiben. Wir beschränken nun die Anzahl möglicher Parallelen und studieren die Auswirkungen.

Definition 2.10. Sei $\mathbf{P}$ eine beliebige Menge und $\mathbf{G}$ eine beliebige Menge von Teilmengen von $\mathbf{P}$. Das **schwache Parallelaxiom** lautet

- (p) Ist $A \in \mathbf{P}$ ein Punkt und $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade, dann gibt es höchstens eine Gerade $h \in \mathbf{G}$ mit $h \parallel g$ und $A \in h$.

Das **starke Parallelenaxiom** lautet

- (P) Ist $A \in \mathbf{P}$ ein Punkt und $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade, dann gibt es genau eine Gerade $h \in \mathbf{G}$ mit $h \parallel g$ und $A \in h$.

In beiden Fällen bezeichnen wir die eindeutige Parallele zu g durch A als $p_g A$.

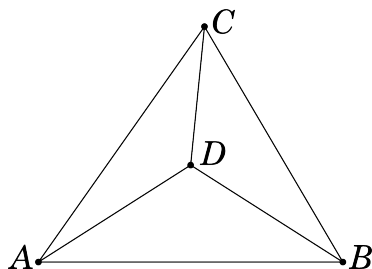
Definition 2.11. Eine Inzidenzebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$, die das starke Parallelenaxiom erfüllt, heißt eine **affine Ebene**. Für „Sei $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine affine Ebene.“ schreiben wir künftig auch kurz „(aff. Ebene)“.

Beispiel 2.12. (a) Die dreipunktige Inzidenzebene aus Beispiel 2.2 erfüllt (P) nicht, da in ihr keine zwei Geraden zueinander parallel sind. Jede affine Ebene hat also mindestens vier Punkte.

- (b) Es gibt eine vierelementige affine Ebene, nämlich das Paar

$$(\mathbf{P}, \mathbf{G}) = (\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}),$$

denn: Die Inzidenzaxiome sind schnell überprüft. Zum Beweis von (P) betrachten wir ein $P \in \mathbf{P}$ und ein $g \in \mathbf{G}$. Im Fall $P \in g$ ist nach Definition die Gerade g selbst die eindeutig bestimmte Parallele. Im Fall $P \notin g$ benötigen wir noch einen Punkt aus $\mathbf{P} \setminus (g \cup \{P\})$ auf der Parallelen, da diese nach (I_2) zwei verschiedene Punkte außerhalb von g enthalten muss. Offensichtlich ist in diesem Fall also $\mathbf{P} \setminus g$ die eindeutig bestimmte Parallele. #



- (c) Affine Ebenen im Sinne von Abschnitt 1.1 sind affine Ebenen im Sinne von Definition 2.11,

denn: Nach Beispiel 2.9 genügt es, das starke Parallelenaxiom (P) nachzuweisen. Mit derselben Argumentation wie dort reicht es sogar, dies im Fall der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(K)$ zu tun. Seien also $P \in K^2$ und $g_{A,t} \in \mathbf{G}_K$ beliebig. Nach Bemerkung 2.7 ist eine beliebige Parallele h zu $g_{A,t}$ dadurch charakterisiert, dass sie $\langle t \rangle_K$ als Translationsvektorraum hat, dass es also ein $B \in K^2$ gibt mit $h = g_{B,t}$. Genau dann gilt $P \in g_{B,t}$, wenn es ein $\lambda \in K$ gibt mit

$$P = B + \lambda t \quad \text{bzw.} \quad B = P - \lambda t.$$

Wegen $g_{P-\lambda t, t} = g_{P, t}$ ist somit $g_{P, t}$ die eindeutig bestimmte Parallele zu $g_{A, t}$ durch P . #

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

Eine Menge von Axiomen heißt **unabhängig**, wenn sich keines davon aus den anderen herleiten lässt. In unserer Situation gilt beispielsweise

- Die Axiome (I_1) , (I_2) , (I_3) und (p) sind unabhängig voneinander.

- Die Axiome (I_1) , (I_2) , (I_3) und (P) sind nicht unabhängig voneinander. Genauer folgt aus (I_1) , (I_3) und (P) bereits (I_2) .

Ein Beweis hierfür findet sich im verlinkten Zusatzmaterial. Natürlich ist die Überprüfung der Unabhängigkeit nach jedem Hinzufügen weiterer Axiome wieder interessant. Da dabei allerdings der Aufwand explodiert, werden wir diese Fragestellung nicht weiter verfolgen.



Video

Proposition 2.13 (aff. Ebene). *Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{G}$.*

Beweis. Da aus $g = h$ insbesondere $g \parallel h$ folgt, ist Parallelität reflexiv.

Weiterhin gilt für beliebige $g, h \in \mathbf{G}$

$$g \parallel h \iff (g = h \text{ oder } g \cap h = \emptyset) \iff (h = g \text{ oder } h \cap g = \emptyset) \iff h \parallel g,$$

so dass die Parallelität auch symmetrisch ist.

Zum Beweis der Transitivität der Parallelität betrachten wir drei Geraden $f, g, h \in \mathbf{G}$ mit $f \parallel g$ und $g \parallel h$. Zu zeigen ist $f \parallel h$. Da wir sonst schon fertig sind, können wir dabei ohne Einschränkung annehmen, es gebe einen Punkt $A \in f \cap h$. A liegt also auf zwei zu g parallelen Geraden, nämlich auf f und h . Wegen der Eindeutigkeitsaussage im starken Parallelenaxiom (P) müssen daher f und h übereinstimmen; insbesondere gilt wie verlangt $f \parallel h$. $\square$

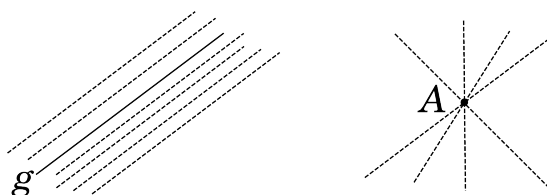
Definition 2.14 (aff. Ebene). *Für eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ heißt die Äquivalenzklasse*

$$[g] := \{h \in \mathbf{G} \mid h \parallel g\}$$

das **Parallelenbüschel** zu g ;²⁰ insbesondere ist so die Menge $\mathbf{G}$ eine disjunkte Vereinigung von Parallelenbüscheln. Für einen Punkt $A \in \mathbf{P}$ heißt die Menge

$$A^* := \{h \in \mathbf{G} \mid A \in h\}$$

das **Geradenbüschel** durch A .



Beispiel 2.15. *Sei K ein beliebiger Körper. Für eine beliebige Gerade $g_{A,t} \in \mathbf{G}_K$ ist*

$$[g_{A,t}] = \{h \in \mathbf{G}_K \mid h \parallel g_{A,t}\} \stackrel{2.7}{=} \{g_{B,t} \mid B \in K^2\}$$

das **Parallelenbüschel** von $g_{A,t}$ in $\mathbb{A}^2(K)$. Für einen Punkt $A \in K^2$ ist

$$A^* = \{h \in \mathbf{G}_K \mid A \in h\} = \{g_{A,t} \mid t \in K^2, t \neq 0\}$$

das **Geradenbüschel** durch A in $\mathbb{A}^2(K)$.

²⁰vgl. auch Satz 1.68

Definition 2.16. Ein Isomorphismus im Sinne von Definition 2.8 zwischen zwei affinen Ebenen heißt ein **affiner Isomorphismus**. Ein Automorphismus einer affinen Ebene heißt ein **affiner Automorphismus**. Die Menge der affinen Automorphismen einer gegebenen affinen Ebene $\mathbb{A}$ wird mit $\text{Aut}(\mathbb{A})$ bezeichnet.

Beispiel 2.17. $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$ ist eine affine Ebene mit den vier Punkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und ist mit einer beliebigen bijektiven Zuordnung von Punkten zur affinen Ebene aus Beispiel 2.12 (b) affin isomorph.

2.3 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1 (proj. Raum). Sei $\dim(V) = 3$ und bezeichne $\mathbf{G}_{\mathbb{P}(V)}$ die Menge der projektiven Geraden in $\mathbb{P}(V)$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{P}(V), \mathbf{G}_{\mathbb{P}(V)})$ eine Inzidenzebene ist und untersuchen Sie dort die Gültigkeit der Parallelenaxiome (p) und (P).

Aufgabe 2.2 (I). Sei $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$ eine Inzidenzebene und $\varphi : \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$ ein Isomorphismus von $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ nach $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$. Zeigen Sie, dass dann auch φ^{-1} ein Isomorphismus von Inzidenzebenen ist.

Aufgabe 2.3. Zeigen Sie, dass die beiden Inzidenzebenen in Beispiel 2.12 auch das schwache Parallelenaxiom erfüllen. Geben Sie eine Inzidenzebene mit fünf Punkten an, die das Axiom (p) nicht erfüllt.

Aufgabe 2.4 (aff. Ebene). Sei $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine affine Ebene. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Seien $g, h \in \mathbf{G}$ mit $g \nparallel h$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} [h] & \rightarrow g, \\ f & \mapsto f \wedge g \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv.

(b) Seien $g, h \in \mathbf{G}$ mit $g \neq h$. Dann gibt es eine Gerade $f \in \mathbf{G}$ mit $f \nparallel g$ und $f \nparallel h$.

(c) Für $g, h \in \mathbf{G}$ gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : g \rightarrow h$; g und h sind also als Mengen gleichmächtig.

Hinweis: Benutzen Sie (a) und (b).

Aufgabe 2.5 (aff. Ebene). Sei $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine affine Ebene. Nach Aufgabe 2.4 sind alle Geraden in $\mathbf{G}$ gleichmächtig. Diese Mächtigkeit heißt die **Ordnung** der affinen Ebene $\mathbb{A}$. Im Folgenden sei $\mathbb{A}$ eine affine Ebene von endlicher Ordnung n . Nach (I_2) gilt $n \geq 2$. Zeigen Sie:

(a) Jedes Geradenbüschel besteht aus $n + 1$ Geraden, durch jeden Punkt gehen also $n + 1$ Geraden.

(b) Es gibt $n + 1$ Parallelenbüschel.

(c) Jedes Parallelenbüschel besteht aus n Geraden, zu jeder Geraden gibt es also n Parallelen.

(d) Es gilt $|\mathbf{G}| = n(n + 1)$.

(e) Es gilt $|\mathbf{P}| = n^2$.

Aufgabe 2.6 (aff. Ebene). Seien $\tilde{\mathbb{A}} = (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$ eine affine Ebene und $\varphi : \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$ ein affiner Isomorphismus. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle $A \neq B \in \mathbf{P}$ gilt $\varphi(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$.
- (b) Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ sind genau dann kollinear, wenn $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \in \tilde{\mathbf{P}}$ kollinear sind.
- (c) $\varphi(\mathbf{G}) := \{\varphi(g) \mid g \in \mathbf{G}\} = \tilde{\mathbf{G}}$.
- (d) Für parallele Geraden $g \parallel h \in \mathbf{G}$ gilt $\varphi(g) \parallel \varphi(h)$.

Hilbertebenen

In diesem Kapitel führen wir zunächst ausgehend vom Begriff der Inzidenzebene aus Kapitel 2 mit den Anordnungsaxiomen und den Kongruenzaxiomen für Strecken und Winkel weitere Klassen von Axiomen ein. Auf diese Weise erhalten wir in Abschnitt 3.3 die sogenannten Hilbertebenen, in denen wir eine Reihe klassischer geometrischer Sätze synthetisch beweisen können. Es stellt sich jedoch heraus, dass manche Aussagen, darunter auch einige aus der Schulmathematik bekannte, im Kontext von Hilbertebenen nicht allgemein richtig sind. Wir werden diesen Missstand in Kapitel 4 durch Hinzunahme zweier weiterer Axiome beheben.

3.1 Die Anordnungsaxiome

In diesem Abschnitt wollen wir auf einer Inzidenzebene Axiome einführen, vermöge derer wir angeben können, wie gegebene kollineare Punkte auf ihrer gemeinsamen Verbindungsgeraden angeordnet sind. Hierfür benötigen wir eine Reihe von Sprechweisen.

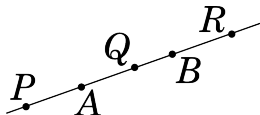
- Sei $M_\star$ eine fest gewählte Teilmenge von $\mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \mathbf{P}$, und seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei beliebige Punkte. Liegt das (angeordnete) Tripel (A, B, C) in $M_\star$, so sagen wir, der Punkt B *liege bezüglich der Anordnung $\star$ zwischen A und C* und schreiben $A \star B \star C$.
- Sei $g \in \mathbf{G}$ eine beliebige Gerade, und seien $A, B \in \mathbf{P} \setminus g$ zwei beliebige Punkte. Falls es einen Punkt auf g gibt, der zwischen A und B liegt, so sagen wir, A und B *liegen auf verschiedenen Seiten von g* , und schreiben $A \mid_g B$. Andernfalls sagen wir, A und B *liegen auf derselben Seite von g* , und schreiben $A \nmid_g B$.

Dieses Konzept einer Anordnung ist noch sehr allgemein gefasst; entgegen unserer naiven geometrischen Vorstellung ist es etwa möglich, dass von drei Punkten $A, B, C \in \mathbf{P}$ jeder zwischen den jeweils anderen beiden liegt. Wir fordern daher präzisierend die folgenden Axiome.

Definition 3.1 (I). *Das Tripel $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$ erfüllt die Anordnungsaxiome, falls gilt:*

(A₁) Sind $A, B, C \in \mathbf{P}$ mit $A \star B \star C$, dann sind A, B, C kollinear, paarweise verschieden und es gilt $C \star B \star A$.

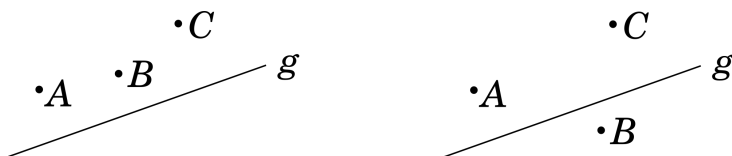
(A₂) Für je zwei Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}$ gibt es $P, Q, R \in \overleftrightarrow{AB}$ mit $P \star A \star B$, $A \star Q \star B$ und $A \star B \star R$.



(A₃) Sind $A, B, C \in \mathbf{P}$ paarweise verschieden und kollinear, so gibt es unter diesen drei Punkten genau einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

(A₄) Für jede Gerade $g \in \mathbf{G}$ und alle Punkte $A, B, C \in \mathbf{P} \setminus g$ gilt

- Aus $A \nmid_g B$ und $B \nmid_g C$ folgt $A \nmid_g C$.
- Aus $A \mid_g B$ und $B \mid_g C$ folgt $A \mid_g C$.



Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene, die zusammen mit der Anordnung $\star$ die Anordnungsaxiome erfüllt.“ schreiben wir künftig auch kurz „**(I + A)**“.

Die Anordnungsaxiome (A₁) und (A₃) sorgen dafür, dass wir uns Geraden in einer Inzidenzebene tatsächlich so vorstellen können wie wir das gerne täten. Axiom (A₂) ist eine Reichhaltigkeitsaussage, die erzwingt, dass es in jeder Inzidenzebene mit Anordnungsaxiomen unendlich viele Punkte gibt, vgl. Übungsaufgabe 3.2. Axiom (A₄) hat zur Folge, dass wir in der folgenden Proposition 3.2 das Konzept der Seiten einer Geraden sinnvoll einführen können.

Proposition 3.2 (I + A). Für eine beliebige Gerade $g \in \mathbf{G}$ ist $\mid_g$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{P} \setminus g$. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen $S_1(g)$ und $S_2(g)$, die **Seiten** von g oder die **von g begrenzten Halbebenen**. Insbesondere gilt

$$\mathbf{P} = g \cup S_1(g) \cup S_2(g).$$

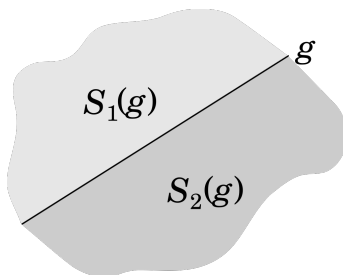


Abbildung 3.1: Nach (A₁) und (A₄) hat g Seiten, nach (A₂) und (A₄) genau zwei Stück.

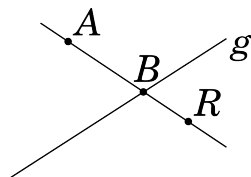
Beweis. Zum Beweis der Reflexivität von $\not\downarrow_g$ betrachten wir $A \in \mathbf{P} \setminus g$. Da für einen beliebigen Punkt $P \in g$ die drei Punkte A, P, A nicht paarweise verschieden sind, folgt mit (A_1) , dass es kein $P \in g$ mit $A \star P \star A$ gibt. Nach Definition gilt also $A \not\downarrow_g A$.

Um die Symmetrie von $\not\downarrow_g$ zu zeigen, betrachten wir zwei Punkte $A, B \in \mathbf{P} \setminus g$ mit $A \not\downarrow_g B$. Es gibt kein $P \in g$ mit $A \star P \star B$ und nach (A_1) also auch kein $P \in g$ mit $B \star P \star A$. Es folgt $B \not\downarrow_g A$.

Die Transitivität von $\not\downarrow_g$ ist schließlich gerade die erste Aussage von (A_4) .

Insgesamt wissen wir jetzt also, dass $\not\downarrow_g$ eine Äquivalenzrelation ist. Es gibt bezüglich $\not\downarrow_g$ genau zwei Äquivalenzklassen,

denn: Nach Proposition 2.5 bzw. (I_2) gibt es Punkte $A \in \mathbf{P} \setminus g$ bzw. $B \in g$. Nach (A_2) gibt es ein $R \in \overleftrightarrow{AB}$ mit $A \star B \star R$, so dass $A \not\downarrow_g R$ gilt und es mindestens zwei Seiten von g gibt.



Sei nun $P \in \mathbf{P} \setminus g$ von A und von R verschieden. Gilt $P \not\downarrow_g A$, so folgt mit der zweiten Aussage von (A_4) sofort $P \not\downarrow_g R$. Ein beliebiger Punkt P liegt also stets auf derselben Seite von g wie A oder wie R , so dass es nicht mehr als zwei Seiten von g gibt. #

□

Beispiel 3.3. Wie wir im Beweis von Satz 2.6 eingesehen haben, ist in der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ die Verbindungsgerade $\overleftrightarrow{AC}$ zweier voneinander verschiedener Punkte $A, C \in \mathbb{R}^2$ durch

$$\overleftrightarrow{AC} = g_{C, A-C} = C + \langle A - C \rangle_{\mathbb{R}} = \{ \lambda A + (1 - \lambda) C \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

gegeben. Davon motiviert definieren wir für je drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$

$$A \star B \star C \quad :\Longleftrightarrow \quad A \neq C \text{ und es gibt ein } \lambda \in (0, 1) \text{ mit } B = \lambda A + (1 - \lambda) C. \quad (3.1)$$

Wir geben nun eine Beschreibung der Seiten einer gegebenen Geraden $g_{P,t}$ mit $P, t \in \mathbb{R}^2$ und $t \neq 0$ an: Bezeichnet $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, so nennen wir jeden Vektor $n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\langle t \mid n \rangle = 0$ einen **Normalenvektor** von $g_{P,t}$. Da der Translationsvektorraum einer Geraden eindimensional ist, ist dieser Begriff wohldefiniert. Wie man schnell nachrechnet, gilt

$$\{ n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid \langle n \mid t \rangle = 0 \} = \langle t^\perp \rangle_{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \quad \text{mit } t^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t.$$

Mit $(t^\perp)^\perp = -t$ folgt

$$A \in g_{P,t} \quad \Longleftrightarrow \quad A - P \in \langle t \rangle_{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle A - P \mid t^\perp \rangle = 0,$$

so dass wir die Gerade $g_{P,t}$ in ihrer **Hesse'schen Normalform**

$$g_{P,t} = \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle A - P \mid t^\perp \rangle = 0\} = \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle A \mid t^\perp \rangle = \langle P \mid t^\perp \rangle\} \quad (3.2)$$

schreiben können. Für $A \neq B$ in $\mathbb{R}^2 \setminus g_{P,t}$ gilt nun

$$A \mid_{g_{P,t}} B \iff \text{Es gibt ein } Q \in g_{P,t} \text{ mit } A \star Q \star B.$$

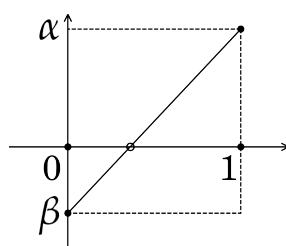
$$\stackrel{(3.1)}{\iff} \text{Es gibt ein } \lambda \in (0,1) \text{ mit } \lambda A + (1-\lambda) B \in g_{P,t}.$$

$$\stackrel{(3.2)}{\iff} \text{Es gibt ein } \lambda \in (0,1) \text{ mit } 0 = \langle (\lambda A + (1-\lambda) B) - P \mid t^\perp \rangle.$$

$$\iff \text{Es gibt ein } \lambda \in (0,1) \text{ mit } 0 = \lambda \cdot \underbrace{\langle A - P \mid t^\perp \rangle}_{=: \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} + (1-\lambda) \cdot \underbrace{\langle B - P \mid t^\perp \rangle}_{=: \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}.$$

$$\iff \text{Es gibt eine Nullstelle } \lambda \in (0,1) \text{ der Abbildung } \begin{cases} [0,1] & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \alpha x + \beta(1-x). \end{cases}$$

$$\iff \alpha \text{ und } \beta \text{ haben verschiedene Vorzeichen.}$$



Die zwei Seiten von $g_{P,t}$ sind somit

$$\{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle A - P \mid t^\perp \rangle > 0\} \quad \text{und} \quad \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle A - P \mid t^\perp \rangle < 0\}.$$

Wir nutzen nun diese Beschreibung, um zu zeigen, dass $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zusammen mit der Anordnung $\star$ die Anordnungsaxiome erfüllt; ein Beweis dafür findet sich im verlinkten Zusatzmaterial.



Video

In Beweisen kommt es oft vor, dass drei paarweise verschiedene, kollineare Punkte gegeben sind und man statt mit den Seiten einer noch zu konstruierenden Gerade lieber mit den Seiten des mittleren Punktes argumentieren möchte. Dieses Vorgehen wollen wir nun legitimieren.

Definition 3.4 (I + A). Seien $A, B, P \in \mathbf{P}$ paarweise verschieden und kollinear. Falls $A \star P \star B$ gilt, dann sagen wir, A und B liegen auf verschiedenen Seiten von P , und schreiben $A \mid_P B$. Ist dies nicht der Fall, dann sagen wir, A und B liegen auf derselben Seite von P , und schreiben $A \nmid_P B$.

Proposition 3.5 (I + A). Für drei paarweise verschiedene und kollineare Punkte $A, B, P \in \mathbf{P}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) A und B liegen auf verschiedenen Seiten von P .
- (ii) A und B liegen auf verschiedenen Seiten einer von $\overleftrightarrow{AB}$ verschiedenen Geraden durch P .

(iii) A und B liegen auf verschiedenen Seiten aller von $\overleftrightarrow{AB}$ verschiedenen Geraden durch P .

Beweis. Aus (iii) folgt (ii), da es nach (I_3) und (I_1) eine von $\overleftrightarrow{AB}$ verschiedene Gerade durch P gibt.

Gelte nun (ii), und sei h eine von $\overleftrightarrow{AB}$ verschiedene Gerade durch P mit $A \mid_h B$. Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt $Q \in h$ mit $A \star Q \star B$. Nach Konstruktion ist $Q = h \wedge \overleftrightarrow{AB} = P$. Es folgt $A \mid_P B$, also (i).

Gelte schließlich (i), also $A \star P \star B$. Sei h eine beliebige von $\overleftrightarrow{AB}$ verschiedene Gerade durch P . Wegen $P \in h$ gilt dann $A \mid_h B$. Wegen der freien Wahl von h haben wir somit (iii) gezeigt. $\square$

Korollar 3.6 (I + A). Sei $g \in \mathbf{G}$ eine beliebige Gerade. Für einen beliebigen Punkt $P \in g$ ist dann $\mid_P$ eine Äquivalenzrelation auf $g \setminus \{P\}$. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen $S_1(P)$ und $S_2(P)$, die Seiten von P auf g oder die von P begrenzten Halbgeraden. Insbesondere gilt

$$g = \{P\} \cup S_1(P) \cup S_2(P).$$

Beweis. Klar mit den Propositionen 3.2 und 3.5. $\square$

Definition 3.7 (I + A). Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Gilt $A_i \star A_j \star A_k$ für alle $1 \leq i < j < k \leq n$, so schreiben wir einfacher $A_1 \star \dots \star A_n$.

Proposition 3.8 (I + A). (a) Für beliebige vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbf{P}$ gilt

$$A \star B \star C \text{ und } A \star C \star D \iff B \star C \star D \text{ und } A \star B \star D.$$

(b) Für beliebige vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbf{P}$ gilt

$$A \star B \star C \text{ und } B \star C \star D \implies A \star B \star D \text{ und } A \star C \star D.$$

(c) Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl, und seien $A_1, \dots, A_n \in \mathbf{P}$. Dann gilt

$$A_i \star A_{i+1} \star A_{i+2} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n-2\} \iff A_1 \star \dots \star A_n.$$

Beweis. Die Beweise der drei Teilbehauptungen sind einander sehr ähnlich. Wir beweisen hier nur Aussage (b) und verweisen für den Rest auf Übungsaufgabe 3.1

Es gelten $A \star B \star C$ und $B \star C \star D$. Nach (A_1) sind dann die Punkte A, B, C und B, C, D jeweils kollinear, so dass dies auch auf die vier Punkte A, B, C, D zutrifft. Außerdem sind wieder nach (A_1) die Punkte A, B, C und B, C, D jeweils paarweise verschieden. Da aus $A = D$ sofort $A \star B \star C$ und $B \star C \star A$ folgte, was nach (A_3) nicht sein kann, sind die vier Punkte A, B, C, D auch paarweise verschieden.

Wegen unserer Voraussetzungen $A \star B \star C$ und $B \star C \star D$ gelten $A \mid_B C$ und $C \nmid_B D$. Mit Korollar 3.6 folgt $A \mid_B D$, also $A \star B \star D$. Wieder wegen unserer Voraussetzungen $A \star B \star C$ und $B \star C \star D$ gelten $A \nmid_C B$ und $B \mid_C D$. Mit Korollar 3.6 folgt $A \mid_C D$, also $A \star C \star D$. $\square$

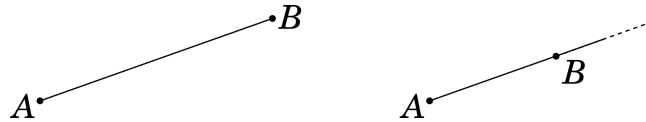
Bemerkung 3.9. Eine äquivalente Formulierung des zweiten Anordnungsaxioms (A_2) ist

(A'_2) Für je zwei Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}$ gibt es Punkte $P, Q, R \in \overleftrightarrow{AB}$ mit $P \star A \star Q \star B \star R$,

denn: (A'_2) folgt vermöge Teil (a) von Proposition 3.8 aus (A_2). Wir würden gerne analog (A_2) mit Teil (b) derselben Proposition aus (A'_2) folgern, haben aber im Beweis der dort mittelbar verwendeten Proposition 3.2 bereits (A_2) benutzt, um zu zeigen, dass es zu einer beliebigen Geraden $g \in \mathbf{G}$ Punkte gibt, die auf verschiedenen Seiten von g liegen. Es ist eine leichte Übungsaufgabe, dies unter Verwendung von (A'_2) statt (A_2) zu zeigen. #

Definition 3.10 (I + A). Seien $A \neq B \in \mathbf{P}$ zwei verschiedene Punkte. Dann heißen die Mengen

$$\begin{aligned} \overline{AB} &:= \{P \in \overleftrightarrow{AB} \mid A \star P \star B\} \cup \{A, B\} && \text{die Strecke } \overline{AB} \text{ mit den Endpunkten } A, B, \\ \overrightarrow{AB} &:= \{P \in \overleftrightarrow{AB} \mid A \star P \star B \vee A \star B \star P\} \cup \{A, B\} && \text{der Strahl } \overrightarrow{AB} \text{ mit dem Ausgangspunkt } A. \end{aligned}$$



Zwei Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ heißen **entgegengesetzt**, falls A zwischen B und C liegt. Wird im Folgenden eine der Notationen $\overline{AB}$ oder $\overrightarrow{AB}$ verwendet, ohne dass wir ausdrücklich $A \neq B$ voraussetzen, so ist dies an dieser Stelle als implizit angenommen zu verstehen.

Proposition 3.11 (I + A). Für je zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathbf{P}$ gilt:

$$\overline{AB} = \overline{BA} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus (A_1). Im Beweis der zweiten Aussage folgt die Inklusion $\supseteq$ unmittelbar aus Definition 3.10. Sei für die andere Inklusion P ein beliebiger Punkt aus $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Für $P \in \{A, B\}$ ist nichts zu zeigen, so dass wir annehmen können, P sei weder A noch B . Mit $P \in \overrightarrow{AB}$ gilt

$$A \star P \star B \quad \text{oder} \quad A \star B \star P,$$

so dass A, B, P kollinear und paarweise verschieden sind. Mit $P \in \overrightarrow{BA}$ gilt aber auch

$$B \star P \star A \quad \text{oder} \quad B \star A \star P.$$

Falls $A \star P \star B$ nicht gilt, kann nach (A_1) auch $B \star P \star A$ nicht gelten. Es folgt, dass dann sowohl $A \star B \star P$ als auch $B \star A \star P$ gelten müssten, was ein Widerspruch zu (A_3) wäre und deshalb nicht sein kann. Es folgt also $A \star P \star B$, also $P \in \overline{AB}$, was zu zeigen war. $\square$

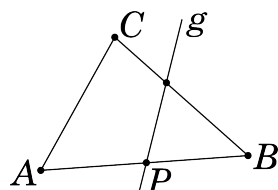
Proposition 3.12 (I + A). Für drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ mit $B \star A \star C$ gilt:

- (a) $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{AC}$,
- (b) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Sei dafür $P \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \overrightarrow{AB}$. Nach Definition 3.10 und (A_3) gilt dann $P \mid_A B$. Wir können ohne Einschränkung $P \neq C$ annehmen, da P sonst schon definitionsgemäß auf $\overrightarrow{AC}$ läge. Es sind dann A, P, C drei kollineare, paarweise verschiedene Punkte. Wegen $P \mid_A B$ und $B \mid_A C$ gilt $P \nmid_A C$. Es folgt $P \in \overrightarrow{AC}$.

Zum Beweis von Behauptung (b) betrachten wir einen Punkt $P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC}$. Dieser ist nach Definition entweder gleich A oder es gilt sowohl $P \nmid_A B$ als auch $P \nmid_A C$. Da letzteres aufgrund der Voraussetzung $B \star A \star C$ nicht möglich ist, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 3.13 (Satz von Pasch, **I + A**). *Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage und sei $g \in \mathbf{G}$ mit $g \cap \overrightarrow{AB} = \{P\}$ für ein $P \in \mathbf{P}$ mit $A \star P \star B$. Dann schneidet g eine der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Falls C nicht auf g liegt, schneidet g genau eine der beiden Strecken.*



Beweis. Da für $C \in g$ nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung $C \notin g$ annehmen. Wegen $A \star P \star B$ gilt $A \mid_g B$ und also entweder $C \nmid_g A$ oder $C \nmid_g B$. Da sich diese beiden Situationen durch eine Umbenennung von A in B und umgekehrt ineinander überführen lassen, können wir ohne Einschränkung annehmen, es gelte $C \nmid_g A$. Dann folgt $B \mid_g C$, so dass es also einen Punkt $Q \in g$ mit $B \star Q \star C$ gibt. Dieser Punkt Q liegt nach Konstruktion im Durchschnitt $g \cap \overline{BC}$, der somit nicht leer sein kann. Andererseits gilt $A \nmid_g C$, so dass es keinen Punkt $R \in g$ mit $A \star R \star C$ gibt, der Durchschnitt $g \cap \overline{AC}$ ist also leer. $\square$

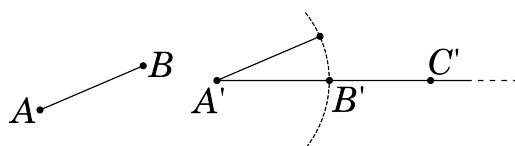
3.2 Die Kongruenzaxiome für Strecken

Wir haben im letzten Abschnitt den Begriff der Strecke eingeführt, haben bislang aber noch keine Möglichkeit, solche miteinander zu vergleichen. Wir führen daher den Begriff der **Kongruenz von Strecken** als Relation $\cong$ auf der Menge $\mathbf{S}$ aller Strecken in $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$ ein.

Definition 3.14 (**I + A**). *Das 4-Tupel $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$ erfüllt die Kongruenzaxiome für Strecken, wenn gilt:*

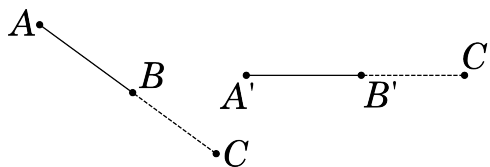
(K_1) $\cong$ ist auf $\mathbf{S}$ eine Äquivalenzrelation.

(K_2) Sind $A \neq B \in \mathbf{P}$ und $A' \neq C' \in \mathbf{P}$, so gibt es genau ein $B' \in \overrightarrow{A'C'}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.



Man sagt, eine beliebige Strecke lasse sich auf einen beliebigen Strahl **abtragen**.

(K₃) Sind $A, B, C, A', B', C' \in \mathbf{P}$ mit $A \star B \star C$, $A' \star B' \star C'$ und $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, so gilt auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.



Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene, die zusammen mit der Anordnung $\star$ die Anordnungsaxiome und zusammen mit der Relation $\cong$ auf $\mathbf{S}$ die Kongruenzaxiome für Strecken erfüllt.“ schreiben wir künftig auch kurz „**(I + A + K)**“.

Beispiel 3.15. In der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ definieren wir unseren Kongruenzbegriff für Strecken wie folgt: Für je vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ mit $A \neq B$ und $C \neq D$ setzen wir

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad :\Longleftrightarrow \quad d(A, B) = d(C, D),$$

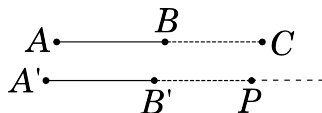
wobei für je zwei Punkte $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ die Zahl

$$d(A, B) = \|B - A\| = \sqrt{\langle B - A \mid B - A \rangle} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \in \mathbb{R}$$

den aus der Linearen Algebra bekannten **euklidischen Abstand** zwischen A und B bezeichne. Die affine Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zusammen mit diesem Kongruenzbegriff $\cong$ erfüllt die Kongruenzaxiome für Strecken; ein Beweis hierzu findet sich im verlinkten Zusatzmaterial.

Proposition 3.16 (I + A + K). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte mit $A \star B \star C$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ drei Punkte mit $C' \in \overrightarrow{A'B'}$. Gilt dann $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, so folgt $A' \star B' \star C'$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

Beweis. Nach Proposition 3.12 gibt es einen eindeutig bestimmten Strahl mit Ausgangspunkt B' , der dem Strahl $\overrightarrow{B'A'}$ entgegengesetzt ist. Sei P der nach (K₂) existente eindeutige Punkt auf diesem Strahl mit $\overline{B'P} \cong \overline{BC}$. Daraus und aus $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ folgern wir mit (K₃) die Kongruenz $\overline{A'P} \cong \overline{AC}$.



Nun liegen aber sowohl P als auch C' auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$, denn für C' ist das vorausgesetzt, und nach Konstruktion von P gilt $A' \star B' \star P$. Da nach Voraussetzung $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ gilt, folgt mit (K₁) unmittelbar $\overline{A'P} \cong \overline{A'C'}$ und mit der Eindeutigkeitsaussage in (K₂) schon $P = C'$. Das impliziert $A' \star B' \star C'$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, also die Behauptung. $\square$

Definition 3.17 (I + A + K). Seien $A, B, C, D \in \mathbf{P}$ vier Punkte mit $A \neq B$ und $C \neq D$. Gibt es ein $P \in \mathbf{P}$ mit $C \star P \star D$ und $\overline{AB} \cong \overline{CP}$, so sagen wir, die Strecke $\overline{AB}$ sei **kleiner** als die Strecke $\overline{CD}$, bzw. $\overline{CD}$ **größer** als $\overline{AB}$, und schreiben $\overline{AB} < \overline{CD}$ bzw. $\overline{CD} > \overline{AB}$.



Video

Proposition 3.18 (I + A + K). (a) Seien $A, B, C, D, A', B', C', D'$ Punkte in $\mathbf{P}$ mit $A \neq B, C \neq D, A' \neq B', C' \neq D'$ und $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{CD} \cong \overline{C'D'}$. Dann gilt

$$\overline{AB} < \overline{CD} \implies \overline{A'B'} < \overline{C'D'}.$$

(b) Sind A, B, C, D, E, F Punkte in $\mathbf{P}$ mit $A \neq B, C \neq D, E \neq F$, dann gilt

$$\overline{AB} < \overline{CD} \text{ und } \overline{CD} < \overline{EF} \implies \overline{AB} < \overline{EF}.$$

(c) Für beliebige A, B, C, D in $\mathbf{P}$ mit $A \neq B$ und $C \neq D$ gilt genau eine der folgenden Aussagen

$$\overline{AB} < \overline{CD}, \quad \overline{AB} \cong \overline{CD}, \quad \overline{AB} > \overline{CD}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Sei dafür $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, und gelte $\overline{AB} < \overline{CD}$. Dann existiert ein $P \in \mathbf{P}$ mit $C \star P \star D$ und $\overline{CP} \cong \overline{AB}$. Nach (K_2) existiert auf $\overline{C'D'}$ ein Punkt P' mit $\overline{C'P'} \cong \overline{CP} \cong \overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Aus Proposition 3.16 erhalten wir $C' \star P' \star D'$ und damit $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$.

Aufgrund von (a) und (K_2) können wir zum Nachweis von (b) von $\overline{AB} < \overline{AC}$ und $\overline{AC} < \overline{AD}$ mit B, C in $\overline{AD}$ ausgehen. Insbesondere existiert ein $C' \in \mathbf{P}$ mit $A \star C' \star D$ und $\overline{AC'} \cong \overline{AC}$. Aufgrund von (K_2) ist $C' = C$, es gilt also $A \star C \star D$. Analog ergibt sich $A \star B \star C$. Nach Proposition 3.8 gilt $A \star B \star D$ und somit $\overline{AB} < \overline{AD}$.

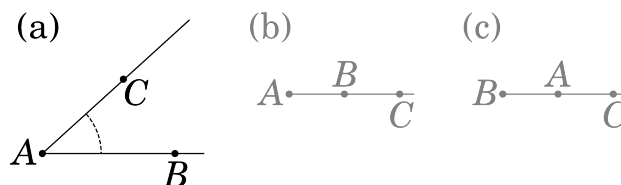
Zum Nachweis von (c) nehmen wir nach (a) und (K_2) ohne Einschränkung $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$ mit $C \in \overline{AB}$ an. Wir erhalten entweder $A \star C \star B$ oder $A \star B \star C$, was entweder $\overline{AC} < \overline{AB}$ oder $\overline{AB} < \overline{AC}$ zur Folge hat. $\square$

3.3 Die Kongruenzaxiome für Winkel

Definition 3.19 (I + A). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann heißt

$$\angle BAC := \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$$

der Winkel $\angle BAC$, A sein **Scheitel** und $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ seine **Schenkel**.



Abbildungung 3.2: Wir werden Winkel in Skizzen ab sofort mit einem Bogen wie in (a) darstellen. Dabei ist anzumerken, dass es für jeden Winkel zwei mögliche Wahlen eines solchen Bogens gibt, von denen wir in der Skizze jeweils einen auswählen müssen. Gemeint ist unabhängig von dieser Wahl stets der Winkel selbst. Man bemerke außerdem, dass die obige Definition den Nullwinkel (b) und den geraden Winkel (c) ausschließt.

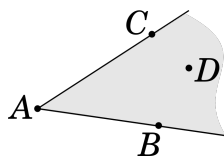
Proposition 3.20 (I + A). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- (i) $\angle BAC = \angle B'A'C'$,
- (ii) $A = A'$ und entweder $(B' \in \overrightarrow{AB} \text{ und } C' \in \overrightarrow{AC})$ oder $(B' \in \overrightarrow{AC} \text{ und } C' \in \overrightarrow{AB})$.

Insbesondere hat jeder Winkel einen eindeutig bestimmten Scheitel.

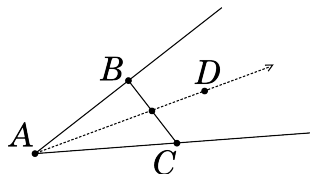
Beweis. Unmittelbar mit Definition 3.19 □

Definition 3.21 (I + A). Seien $A, B, C, D \in \mathbf{P}$, so dass A, B, C in allgemeiner Lage sind. Wir sagen, D **liege im Inneren** von $\angle BAC$ oder der Strahl $\overrightarrow{AD}$ **liege zwischen** den Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, falls $D \not\vdash_{\overrightarrow{AC}} B$ und $D \not\vdash_{\overrightarrow{AB}} C$ gilt.



Lemma 3.22 (I + A). (a) Sei $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade, und seien $A \in g$, $B \notin g$ und $P \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$. Dann gilt $P \not\vdash_g B$.

(b) Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage und $D \in \mathbf{P}$ im Inneren von $\angle BAC$. Dann schneidet der Strahl $\overrightarrow{AD}$ die Strecke $\overline{BC}$, und der Schnittpunkt ist ungleich B, C .



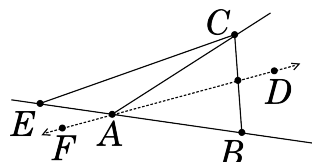
(c) Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage und $D \in \mathbf{P}$ ein weiterer Punkt. Dann sind äquivalent:

- (i) D liegt im Inneren von $\angle BAC$.
- (ii) $D \not\vdash_{\overrightarrow{AC}} B$ und $B \not\vdash_{\overrightarrow{AD}} C$.
- (iii) $D \not\vdash_{\overrightarrow{AB}} C$ und $B \not\vdash_{\overrightarrow{AD}} C$.

Beweis. Zum Beweis von Behauptung (a) dürfen wir ohne Einschränkung $P \neq B$ annehmen. Gälte $P \vdash_g B$, so gäbe es einen Punkt auf g zwischen ihnen. Dieser wäre insbesondere der Schnittpunkt der Geraden g und $\overleftrightarrow{PB}$ und somit gleich A . Es folgt $P \star A \star B$ im Widerspruch zu $P \in \overrightarrow{AB}$ und (A_3) . Es gilt also $P \not\vdash_g B$.

Nun zeigen wir Behauptung (b). B und C liegen nicht auf $\overrightarrow{AD}$, da sonst $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$ oder $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ gälte, D also nicht im Inneren von $\angle BAC$ läge. Nach (A_2) gibt es einen Punkt

$E \in \overleftrightarrow{AB}$ mit $B \star A \star E$. Die Punkte B, C, E sind offenbar in allgemeiner Lage, und wegen $D \notin \overleftrightarrow{AB}$ schneidet die Gerade $g := \overleftrightarrow{AD}$ die Strecke $\overline{BE}$ genau im Punkt A . Nach dem Satz von Pasch 3.13 schneidet also g eine der Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{EC}$. Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass g nicht $\overline{EC}$ schneidet. Nach Wahl von E gilt $E \not\downarrow_{\overleftrightarrow{AC}} B$. Mit (a) folgt, dass ganz $\overleftrightarrow{CE} \setminus \{C\}$ auf der nicht B enthaltenden Seite von $\overleftrightarrow{AC}$ liegt. Andererseits liegen nach Voraussetzung D und B auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AC}$, also wieder nach (a) auch B und ganz $\overleftrightarrow{AD} \setminus \{A\}$. Es folgt $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{CE} = \emptyset$. Sei nun $\overleftrightarrow{AF}$ der zu $\overleftrightarrow{AD}$ entgegengesetzte Strahl. Nach Voraussetzung liegen D und C auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$, also wieder nach (a) auch C und ganz $\overleftrightarrow{AD} \setminus \{A\}$. Es folgt, dass ganz $\overleftrightarrow{AF} \setminus \{A\}$ auf der anderen Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ liegen muss. Aber $\overleftrightarrow{EC} \setminus \{E\}$ liegt gänzlich auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ wie C , also gilt auch $\overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{EC} = \emptyset$ und insgesamt Behauptung (b).



Für Behauptung (c) langt es aus Symmetriegründen, die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen.

- Es gelte (i). Für (ii) genügt es dann $D \in \overleftrightarrow{AS}$ zu zeigen, wobei S den Schnittpunkt aus (b) bezeichne. Wäre dies aber nicht der Fall, so gälte $S \not\downarrow_{\overleftrightarrow{AC}} D$. Aufgrund von $B \star S \star C$ gilt aber $B \not\downarrow_{\overleftrightarrow{AC}} S$. Mit (A_4) folgte also $D \not\downarrow_{\overleftrightarrow{AC}} B$, was nach (i) nicht sein kann.
- Gelte umgekehrt (ii), und sei S der Schnittpunkt von $\overleftrightarrow{AD}$ und $\overleftrightarrow{BC}$. Diesen gibt es wegen $B \not\downarrow_{\overleftrightarrow{AD}} C$. Es gilt dann $B \star S \star C$, also liegt S im Inneren von $\angle BAC$, und es gilt $D \in \overleftrightarrow{AS}$, da $D \not\downarrow_{\overleftrightarrow{AC}} B$ gilt. Mit (a) gilt dann aber auch $D \not\downarrow_{\overleftrightarrow{AB}} C$.

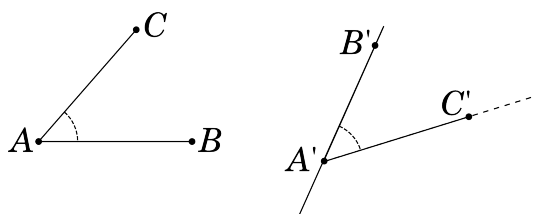
□

Wir führen nun den Begriff der *Kongruenz von Winkeln* als Relation $\simeq$ auf der Menge $\mathbf{W}$ aller Winkel in $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$ ein.

Definition 3.23 (I + A + K). Das 5-Tupel $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ erfüllt die *Kongruenzaxiome für Winkel*, wenn gilt:

(K_4) $\simeq$ ist auf $\mathbf{W}$ eine Äquivalenzrelation,

(K_5) Sind $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage und $A' \neq B' \in \mathbf{P}$, dann gibt es für jede Seite S von $\overleftrightarrow{A'B'}$ genau einen Strahl $\overleftrightarrow{A'C'}$ mit $\overleftrightarrow{A'C'} \subseteq S \cup \{A'\}$ und $\angle B'A'C' \simeq \angle BAC$.



Man sagt, ein beliebiger Winkel lasse sich auf einen beliebigen Strahl **abtragen**.

(K₆) Sind $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage mit

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C',$$

so gilt

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \angle ABC \simeq \angle A'B'C' \quad \text{und} \quad \angle ACB \simeq \angle A'C'B'.$$

In diesem Fall nennen wir das 5-Tupel $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ auch eine **Hilbertebene**. Wir werden, wenn wir im Folgenden eine Hilbertebene einführen und nichts anderes sagen, stets diese Notation annehmen. Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene.“ schreiben wir künftig auch kurz „(H)“.

Wir haben nun einen Begriff dafür, wann zwei Winkel „gleich groß“ sind – wenn sie nämlich kongruent sind. Mit dem Begriff des „Dazwischenliegens“ von Strahlen mit demselben Scheitel können wir auch angeben, wann ein Winkel „größer“ bzw. „kleiner“ als ein anderer ist.

Definition 3.24 (H). Seien A, B, C und A', B', C' je drei Punkte in $\mathbf{P}$ in allgemeiner Lage. Gibt es einen Strahl $\overrightarrow{A'P}$ zwischen $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{A'C'}$ mit $\angle BAC \simeq \angle PA'C'$, so sagen wir, $\angle BAC$ sei **kleiner** als $\angle B'A'C'$, bzw. $\angle B'A'C'$ **größer** als $\angle BAC$, und schreiben $\angle BAC < \angle B'A'C'$ bzw. $\angle B'A'C' > \angle BAC$.

In Übungsaufgabe 3.5 beweisen wir die folgende Entsprechung von Proposition 3.18.

Proposition 3.25 (H). (a) Sind $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbf{W}$ mit $\alpha \simeq \alpha'$ und $\beta \simeq \beta'$, so ist genau dann $\alpha < \beta$, wenn $\alpha' < \beta'$ gilt.

(b) Sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{W}$, so folgt aus $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$, dass auch $\alpha < \gamma$ gilt.

(c) Für zwei Winkel $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$ gilt genau eine der drei folgenden Aussagen

$$\alpha < \beta, \quad \alpha \simeq \beta, \quad \alpha > \beta.$$

Definition 3.26 (H). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann heißt das Tripel

$$\triangle ABC := (A, B, C)$$

das **Dreieck** mit den **Eckpunkten** A, B, C . Die Strecken $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ heißen die **Seiten** des Dreiecks $\triangle ABC$ und die Winkel $\angle ABC, \angle BCA, \angle CAB$ seine **Innenwinkel**.

Sind $A', B', C' \in \mathbf{P}$ weitere drei Punkte in allgemeiner Lage, so heißen die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ zueinander **kongruent**, in Zeichen $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, falls die jeweils entsprechenden Seiten und Innenwinkel jeweils kongruent zueinander sind, falls also gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \\ \angle BAC \simeq \angle B'A'C', \quad \angle ABC \simeq \angle A'B'C', \quad \angle ACB \simeq \angle A'C'B'. \end{aligned}$$

Wir sagen, ein $D \in \mathbf{P}$ liege im **Inneren** des Dreiecks $\triangle ABC$, wenn D im Inneren seiner drei Innenwinkel liegt.

Bemerkung 3.27 (H). (a)

- (b) *Rein formal sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BAC$ nicht zwangsläufig kongruent; vgl. auch Definition 3.53. In der Literatur findet sich daher oft die Definition des Dreiecks $\triangle ABC$ als die nicht geordnete Menge $\{A, B, C\}$. Eine solche Festlegung zieht jedoch einen merkbar aufwändigeren Kongruenzbegriff nach sich, während unsere Notation lediglich eine etwas größere Wachsamkeit erfordert.*
- (c) *Mit Definition 3.21 sehen wir sofort, dass ein Punkt $D \in \mathbf{P}$ im Inneren von $\triangle ABC$ liegt, wenn er im Inneren von zweien der drei Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ liegt.*

Wir können nun Axiom (K_6) umformulieren zum **SWS-Kriterium**

(K'_6) Sind $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage mit

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C',$$

so sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent.

Wir wollen nun ein Kriterium für die Gültigkeit des SWS-Kriteriums herleiten, und führen dafür zunächst ein paar neue Begriffe ein.

Definition 3.28. Fordert man für das Tupel $\Pi := (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ nicht die Gültigkeit von Axiomen, so nennt man es eine **ebene Geometrie**.²¹

Definition 3.29. Ein **Isomorphismus** zwischen zwei ebenen Geometrien

$$\Pi := (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq) \quad \text{und} \quad \tilde{\Pi} := (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\star}, \tilde{\cong}, \tilde{\simeq})$$

ist eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$ mit den folgenden Eigenschaften.

- (i) Für alle Teilmengen $g \subseteq \mathbf{P}$ gilt

$$g \in \mathbf{G} \iff \varphi(g) \in \tilde{\mathbf{G}}.$$

- (ii) Für je drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ gilt

$$A \star B \star C \iff \varphi(A) \tilde{\star} \varphi(B) \tilde{\star} \varphi(C).$$

- (iii) Für je vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbf{P}$ mit $A \neq B$ und $C \neq D$ gilt

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \iff \overline{\varphi(A)\varphi(B)} \tilde{\cong} \overline{\varphi(C)\varphi(D)}.$$

²¹Hierbei ist zu beachten, dass wir bei der Definition der bei der Definition der Relationen $\cong$ und $\simeq$ benötigten Begriffe „Strecke“ und „Winkel“ die Inzidenz- und Anordnungsaxiome vorausgesetzt haben. Rein formal ist dies jedoch nicht notwendig, so dass wir für den Begriff der „ebenen Geometrie“ tatsächlich auf sämtliche Axiome verzichten können. Sinnvolle Sätze lassen sich in einem derart allgemeinen Setting natürlich nicht zeigen, weshalb wir für alle auftretenden Anwendungen die Inzidenz- und Anordnungsaxiome voraussetzen werden.

- (iv) Für je sechs Punkte $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{P}$, so dass A, B, C und D, E, F jeweils in allgemeiner Lage sind, gilt

$$\angle ABC \simeq \angle DEF \iff \angle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C) \simeq \angle \varphi(D)\varphi(E)\varphi(F).$$

Ist hierbei $\tilde{\Pi} = \Pi$, so heißt φ ein **Automorphismus** von Π . Die Menge aller Automorphismen von Π bezeichnen wir mit $\text{Aut}(\Pi)$. Erfüllt ein Automorphismus φ von Π statt (iii) und (iv) die folgenden stärkeren Bedingungen (iii)' und (iv)', so nennen wir φ eine **Bewegung** in Π .

- (iii)' Für je zwei Punkte $A, B \in \mathbf{P}$ mit $A \neq B$ gilt

$$\overline{AB} \cong \overline{\varphi(A)\varphi(B)}.$$

- (iv)' Für je drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage gilt

$$\angle ABC \simeq \angle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C).$$

Die Menge aller Bewegungen in Π bezeichnen wir mit $\text{Bew}(\Pi)$.

Vereinfachend können wir sagen, dass Bewegungen gerade diejenigen bijektiven Abbildungen auf $\mathbf{P}$ sind, die die bislang von uns eingeführte Geometrie im Sinne der Kongruenz unverändert lassen. Fordern wir, dass $\cong$ und $\simeq$ transitiv sind, so wird $\text{Bew}(\Pi)$ zu einer Gruppe.

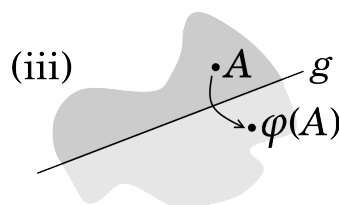
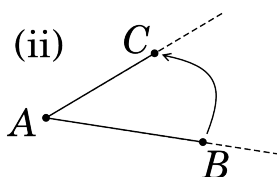
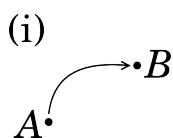
Beispiel 3.30. In Beispiel 3.33 werden wir in der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ einen Kongruenzbegriff $\simeq$ für Winkel einführen. Man kann zeigen, dass dann die Menge $\text{Bew}((\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq))$ aus den in Beispiel 1.19 eingeführten **Bewegungen** der analytischen Geometrie

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ P & \mapsto M \cdot P + A \end{cases} \quad \text{mit } M \in O_2(\mathbb{R}) \text{ und } A \in \mathbb{R}^2$$

besteht.

Definition 3.31. Sei $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine ebene Geometrie, die die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome erfüllt. Wir sagen, Π habe **genügend viele Bewegungen**, wenn gilt:

- (i) Für je zwei Punkte $A, B \in \mathbf{P}$ gibt es ein $\varphi \in \text{Bew}(\Pi)$ mit $\varphi(A) = B$.
- (ii) Für beliebige drei Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ mit $A \neq B$ und $A \neq C$ gibt es ein $\varphi \in \text{Bew}(\Pi)$ mit $\varphi(A) = A$ und $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$.
- (iii) Für jede Gerade $g \in \mathbf{G}$ gibt es ein $\varphi \in \text{Bew}(\Pi)$, so dass zum einen $\varphi(A) = A$ für alle $A \in g$ gilt und zum anderen $A \notin g$ $\varphi(A)$ für alle $A \in \mathbf{P} \setminus g$.



Video

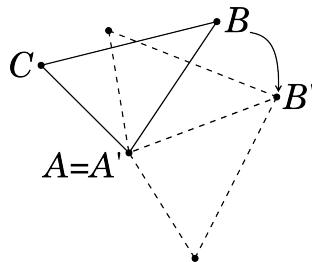
Satz 3.32. Sei $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine ebene Geometrie, die die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome sowie die Axiome $(K_1), (K_2), (K_4), (K_5)$ erfüllt. Hat dann Π genügend viele Bewegungen, so gilt in Π das SWS-Kriterium (K'_6) .

Beweis. Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage, und gelte

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C'. \quad (3.3)$$

Nach Definition 3.31 (i) gibt es ein $\varphi_1 \in \text{Bew}(\Pi)$ mit $\varphi_1(A) = A'$. Da andererseits φ_1 bijektiv ist und Anordnungen und Kongruenzen von Strecken und Winkeln erhält, können wir ohne Einschränkung $A = A'$ annehmen.

Nach Definition 3.31 (ii) gibt es ein $\varphi_2 \in \text{Bew}(\Pi)$ mit $\varphi_2(A) = A$ und $\varphi_2(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB'}$. Mit demselben Argument wie oben können wir daher ohne Einschränkung annehmen, dass neben $A = A'$ auch $B = B'$ gilt.



Schließlich gibt es nach Definition 3.31 (iii) ein $\varphi_3 \in \text{Bew}(\Pi)$, das die Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ punktweise festlässt, und für das $C \downarrow_{\overleftrightarrow{AB}} \varphi_3(C)$ gilt. Wieder ohne Einschränkung können wir annehmen, dass nicht nur $A = A'$ und $B = B'$ gelten, sondern auch $C \downarrow_{\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{A'B'}} \varphi_3(C')$. Unsere Voraussetzungen (3.3) lauten nun

- (i) $\angle BAC \simeq \angle BAC'$,
- (ii) $\overline{AC} \cong \overline{AC'}$,
- (iii) $C \downarrow_{\overleftrightarrow{AB}} C'$.

Mit (K_5) folgt aus (i) und (iii) sofort $\overline{AC} = \overline{AC'}$, mit (K_2) daraus und aus (ii) die Gleichheit $C = C'$. Insgesamt haben wir gezeigt, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen eine Bewegung in $\text{Bew}(\Pi)$ gibt, die das Dreieck $\triangle ABC$ auf das Dreieck $\triangle A'B'C'$ abbildet. Letztere sind also kongruent, was zu zeigen war. $\square$

Beispiel 3.33. Wir definieren nun in der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zusätzlich zu der bereits eingeführten Anordnung $\star$ und dem bereits eingeführten Kongruenzbegriff $\cong$ für Strecken einen Kongruenzbegriff $\simeq$ für Winkel. Dafür halten wir zunächst fest, dass der Begriff des Winkels aus Definition 3.19 im Fall der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit dem Winkelbegriff aus Definition 1.38 übereinstimmt, so dass wir auf die in (1.15) eingeführte Winkelgröße zurückgreifen können. Wir definieren jetzt, dass zwei Winkel in der affinen Standardebene genau dann kongruent sind, wenn sie die gleiche Winkelgröße haben. Genauer setzen wir für je zwei Winkel $\angle ABC$ und $\angle A'B'C'$

$$\angle ABC \simeq \angle A'B'C' \quad :\Longleftrightarrow \quad \angle(A - B, C - B) = \angle(A' - B', C' - B'). \quad (3.4)$$

Man kann nun zeigen, dass die affine Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zusammen mit dieser Kongruenz von Winkeln den Kongruenzaxiomen für Winkel genügt; einen Beweis hierfür findet sich im verlinkten Zusatzmaterial. Zusammen mit Satz 2.6 und den Beispielen 3.3 und 3.15 folgt daraus, dass $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ eine Hilbertebene ist.

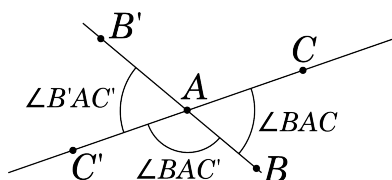


Video

3.4 Ergänzungswinkel, Gegenwinkel und rechte Winkel

In diesem Abschnitt wollen wir Winkel in Hilbertebenen noch etwas genauer studieren. Wir werden Ergänzungswinkel, Gegenwinkel und rechte Winkel definieren und in Satz 3.39 zeigen, dass je zwei rechte Winkel zueinander kongruent sind.

Definition 3.34 (H). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage. Seien weiter $B', C' \in \mathbf{P}$ mit $B' \star A \star B$ und $C' \star A \star C$. Dann heißen $\angle BAC'$ und $\angle B'AC$ **Ergänzungswinkel** zu $\angle BAC$. Der Winkel $\angle B'AC'$ heißt der **Gegenwinkel** oder auch der **Scheitelwinkel** von $\angle BAC$.



Proposition 3.35 (H). Für $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$ und Ergänzungswinkel α' bzw. β' zu α bzw. zu β gilt

$$\alpha \simeq \beta \implies \alpha' \simeq \beta';$$

Ergänzungswinkel kongruenter Winkel sind also kongruent. Insbesondere sind die Ergänzungswinkel eines gegebenen Winkels zueinander kongruent.

Beweis. Seien $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ Dreiecke mit $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle EDF$ und seien weiter $B', C', E', F' \in \mathbf{P}$ mit

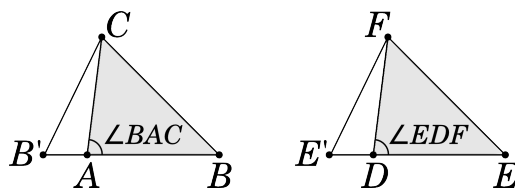
$$B' \star A \star B, \quad C' \star A \star C, \quad E' \star D \star E, \quad F' \star D \star F.$$

Die Menge der Ergänzungswinkel zu α ist dann durch $\{\angle BAC', \angle B'AC\}$ gegeben, die Menge der Ergänzungswinkel zu β durch $\{\angle EDF', \angle E'DF\}$. Wir werden nun zeigen, dass aus $\alpha \simeq \beta$ die Kongruenz $\angle B'AC \simeq \angle E'DF$ folgt; die anderen Fälle ergeben sich nach Umbenennung genauso.

Indem wir gegebenenfalls die Punkte E, E', F durch andere Punkte auf dem jeweils gleichen von D ausgehenden Strahl ersetzen, können wir vermöge (K_2) ohne Einschränkung

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \quad \overline{AC} \cong \overline{DF} \quad \text{und} \quad \overline{AB'} \cong \overline{DE'}$$

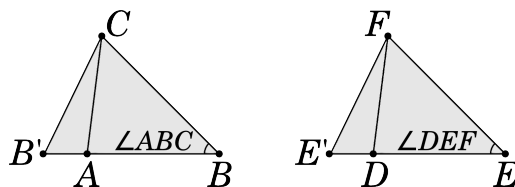
annehmen.



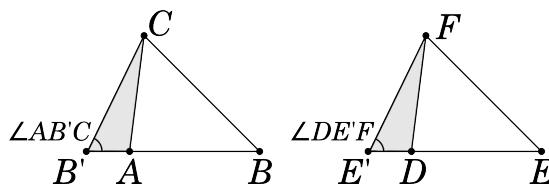
Mit dem SWS-Kriterium (K'_6) folgt aus $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ und $\angle BAC \cong \angle EDF$ die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ und insbesondere die Kongruenzen $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ und $\angle ABC \cong \angle DEF$. Weiter gelten

$$B' \star A \star B, \quad E' \star D \star E, \quad \overline{AB'} \cong \overline{DE'} \quad \text{und} \quad \overline{AB} \cong \overline{DE},$$

so dass nach (K_3) auch $\overline{BB'} \cong \overline{EE'}$ gilt.



Wir können also wieder das SWS-Kriterium anwenden und erhalten die Kongruenz der Dreiecke $\triangle BB'C$ und $\triangle EE'F$. Hieraus folgen sofort die Kongruenzen $\overline{B'C} \cong \overline{E'F}$ und $\angle AB'C \cong \angle DE'F$. Zu Beginn des Beweises hatten wir zudem ohne Einschränkung $\overline{AB'} \cong \overline{DE'}$ gesetzt.



Ein letztes Mal können wir das SWS-Kriterium (K'_6) anwenden und erhalten die Kongruenz der Dreiecke $\triangle AB'C$ und $\triangle DE'F$, was insbesondere die Proposition beweist. $\square$

Korollar 3.36 (H). Ein beliebiger Winkel $\alpha \in \mathbf{W}$ ist zu seinem Gegenwinkel α' kongruent.

Beweis. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $\alpha = \angle BAC$, und seien weiter $B', C' \in \mathbf{P}$ Punkte mit $B' \star A \star B$ und $C' \star A \star C$, so dass $\alpha' = \angle B'AC'$ gilt. Dann sind $\angle BAC$ und $\angle B'AC'$ beide Ergänzungswinkel zu $\angle B'AC$, also kongruent nach Proposition 3.35. $\square$

Definition 3.37 (H). Ein Winkel $\alpha \in \mathbf{W}$ heißt ein **rechter Winkel**, wenn er zu einem und somit allen seiner Ergänzungswinkel kongruent ist.

Proposition 3.38 (H). Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$ zwei Winkel. Dann gilt: Ist α ein rechter Winkel, und sind α und β kongruent, so ist auch β rechter Winkel. Insbesondere ist jeder Ergänzungswinkel eines rechten Winkels wieder ein rechter Winkel.

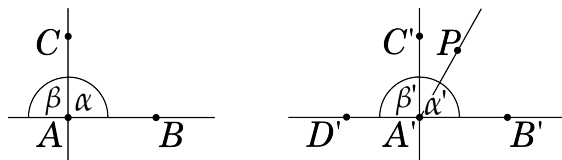
Beweis. Sei α' bzw. β' ein Ergänzungswinkel zu α bzw. β . Aus $\alpha \simeq \beta$ folgt mit Proposition 3.35, dass auch α' und β' zueinander kongruent sind. Da α ein rechter Winkel ist, folgt

$$\beta \simeq \alpha \simeq \alpha' \simeq \beta'$$

und somit die Behauptung. $\square$

Satz 3.39 (H). *Je zwei rechte Winkel sind zueinander kongruent.*

Beweis. Sind $\alpha = \angle BAC$ und $\alpha' = \angle B'A'C'$ zwei nichtkongruente rechte Winkel, so gilt $\alpha < \alpha'$ oder $\alpha' < \alpha$; ohne Einschränkung ersteres. Nach Proposition 3.25 gibt es dann einen Punkt P im Inneren von $\angle B'A'C'$ mit $\angle PA'B' \simeq \alpha$.



Sei nun $\beta' = \angle C'A'D'$ ein Ergänzungswinkel zu α' . Da P im Inneren von $\angle C'A'B'$ liegt, gelten $P \nmid_{\overrightarrow{A'B'}} \overrightarrow{A'D'}$ und $P \nmid_{\overrightarrow{A'C'}} \overrightarrow{B'}$. Es folgt $P \mid_{\overrightarrow{A'C'}} \overrightarrow{D'}$. Nach Lemma 3.22 ist dann C' im Inneren von $\angle PA'D'$. Daraus folgt sofort $\beta' < \angle PA'D'$. Weiter ist $\angle PA'D'$ Ergänzungswinkel zu $\angle PA'B' \simeq \alpha$, so dass nach Proposition 3.35 jeder Ergänzungswinkel β von α kongruent zu $\angle PA'D'$ ist. Es folgt $\beta' < \beta$. Andererseits folgt aus der Rechtwinkligkeit von α und α'

$$\beta \simeq \alpha < \alpha' \simeq \beta',$$

also $\beta < \beta'$, was nicht sein kann. $\square$

Korollar 3.40 (H). *Die rechten Winkel bilden eine Kongruenzklasse in $\mathbf{W}$.*

3.5 Orthogonalität und Parallelität

Unsere naive Vorstellung sagt uns, dass wir mit dem Begriff des rechten Winkels ein Kriterium für Parallelität angeben können sollten. Dies soll in diesem Abschnitt untersucht werden.

Definition 3.41 (H). *Zwei Geraden $g, h \in \mathbf{G}$ heißen **orthogonal**, in Zeichen $g \perp h$, wenn sie sich in genau einem Punkt schneiden (also $g \nparallel h$) und einer der gebildeten Winkel ein rechter Winkel ist.*

Nach den Überlegungen des letzten Abschnitts sind zwei nicht-parallele Geraden genau dann orthogonal, wenn alle gebildeten Winkel rechte Winkel sind.

Satz 3.42 (H). *Für beliebige $g \in \mathbf{G}$ und $A \in \mathbf{P}$ gibt es eine Gerade durch A , die orthogonal auf g ist.*

Beweis. Fall 1: $A \notin g$. Nach (I_2) gibt es zwei Punkte $B \neq C \in g$. Weiter gibt es nach (K_5) auf der Seite von g , auf der A nicht liegt, genau einen Strahl $\overrightarrow{BP}$ mit $\angle PBC \simeq \angle ABC$. Nach (K_2) gibt

es einen eindeutig bestimmten Punkt Q auf $\overrightarrow{BP}$ mit $\overline{BQ} \cong \overline{BA}$. Da A und Q nach Konstruktion auf verschiedenen Seiten von g liegen, gibt es einen Punkt $R \in g$ mit $A \star R \star Q$.

Wir zeigen nun, dass $\angle ARC$ kongruent zu seinem Ergänzungswinkel $\angle QRC$ ist. Nach Definition ist er dann ein rechter Winkel und mit $\overleftrightarrow{AQ}$ ist eine auf g orthogonale Gerade gefunden. Im Fall $R = B$ gilt einfach $\angle QRC = \angle PBC \simeq \angle ABC = \angle ARC$. Sind andererseits R und B verschieden, so erhalten wir mit dem SWS-Kriterium (K'_6) die Kongruenz $\triangle ABR \cong \triangle QBR$,

denn: Nach Konstruktion gelten $\overline{BA} \cong \overline{BQ}$ und $\overline{BR} \cong \overline{BR}$. Es bleibt $\angle ABR \simeq \angle QBR$ zu zeigen. Im Fall $B \star R \star C$ folgt dies direkt aus $\angle ABR = \angle ABC \simeq \angle PBC = \angle QBR$. Im Fall $R \star B \star C$ gilt zu beachten, dass $\angle ABC$ und $\angle ABR$ bzw. $\angle QBC$ und $\angle QBR$ Ergänzungswinkel sind. Aus $\angle ABC \simeq \angle QBC$ folgt somit nach Proposition 3.35, dass auch $\angle ABR$ und $\angle QBR$ kongruent sind. Der Fall $B \star C \star R$ geht natürlich analog. #

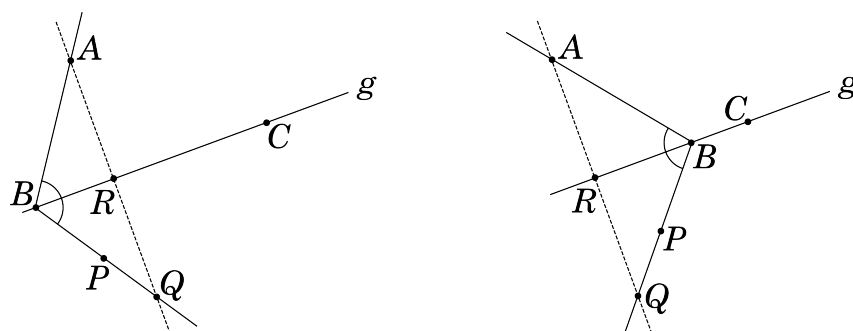
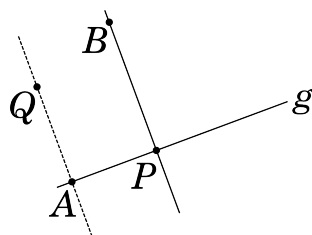


Abbildung 3.3: Die beiden interessanten Fälle $B \star R \star C$ und $R \star B \star C$.

Hieraus folgt direkt $\angle ARB \simeq \angle QRB$ und mit Korollar 3.36 auch $\angle ARC \simeq \angle QRC$.

Fall 2: $A \in g$. Nach (I_3) gibt es ein $B \in \mathbf{P} \setminus g$, und nach Fall 1 dann auch eine Gerade h durch B , die orthogonal auf g steht. Sei P der Geradenschnittpunkt $g \wedge h$.



Falls bereits $P = A$ gilt, sind wir fertig. Ansonsten ist nach Konstruktion $\angle BPA$ ein rechter Winkel. Andererseits gibt es nach (K_5) auf derselben Seite von g wie B einen Strahl $\overrightarrow{AQ}$ mit $\angle BPA \simeq \angle QAP$. Da die rechten Winkel eine Kongruenzklasse bilden, ist also $\angle QAP$ ein rechter Winkel und $\overleftrightarrow{AQ}$ die gesuchte orthogonale Gerade. $\square$

Definition 3.43 (H). Eine Gerade $t \in \mathbf{G}$ heißt eine **Transversale** zu gegebenen Geraden $g, h \in \mathbf{G}$, falls sie g und h jeweils genau einmal schneidet und diese Schnittpunkte voneinander verschieden sind.

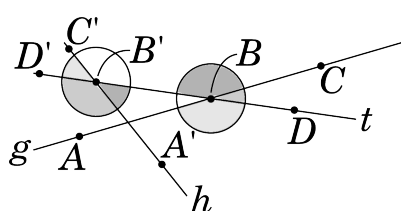
Setzen wir nun $B := g \wedge t$ und $B' := h \wedge t$, und wählen wir Punkte $A, C \in g$ und $A', C' \in h$ mit $A \star B \star C$ und $A' \star B' \star C'$, so dass A und A' auf derselben Seite von t liegen, und Punkte $D, D' \in t$ mit $D \star B \star B' \star D'$. Dann heißen

$$(\angle ABB', \angle C'B'B), (\angle ABD, \angle C'B'D'), (\angle CBD, \angle A'B'D') \text{ und } (\angle CBB', \angle A'B'B)$$

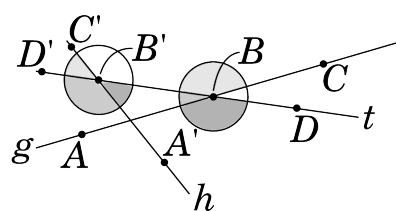
Paare von **Wechselwinkeln** bezüglich der Geraden g, h und der Transversalen t und

$$(\angle CBD, \angle C'B'B), (\angle CBB', \angle C'B'D'), (\angle ABB', \angle A'B'D') \text{ und } (\angle ABD, \angle A'B'B)$$

Paare von **Stufenwinkeln** bezüglich der Geraden g, h und der Transversalen t .



Wechselwinkel



Stufenwinkel

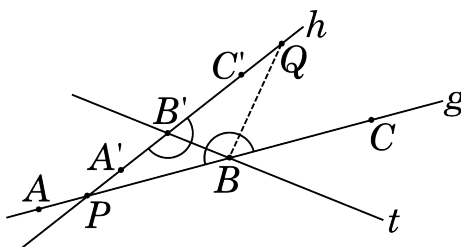
Statt „ (α, β) ist ein Paar von Wechselwinkeln bzw. Stufenwinkeln“ werden wir künftig auch einfacher „ α und β sind Wechselwinkel bzw. Stufenwinkel“ schreiben.

Bemerkung 3.44. Offensichtlich ist stets der Gegenwinkel eines Wechselwinkels ein Stufenwinkel und der Gegenwinkel eines Stufenwinkels ein Wechselwinkel.

Satz 3.45 (H). Es gelten die beiden äquivalenten Aussagen.

- (i) **Schwacher Wechselwinkelsatz:** Haben zwei von einer Transversalen geschnittene Geraden ein Paar kongruenter Wechselwinkel, so sind sie parallel.
- (ii) **Schwacher Stufenwinkelsatz:** Haben zwei von einer Transversalen geschnittene Geraden ein Paar kongruenter Stufenwinkel, so sind sie parallel.

Beweis. Nach Bemerkung 3.44 sind die beiden Aussagen zueinander äquivalent. Wir zeigen den schwachen Wechselwinkelsatz und benutzen dabei die Notation aus Definition 3.43. Nach Annahme und Proposition 3.35 gelten dann $\angle A'B'B \simeq \angle CBB'$ und $\angle C'B'B \simeq \angle ABB'$.



Wir nehmen nun an, g und h wären nicht parallel und schnitten sich also in genau einem Punkt $P \in \mathbf{P}$. Ohne Einschränkung läge dann P auf derselben Seite von t wie A und A' ; sonst ersetzte man $\angle A'B'B$ und $\angle CBB'$ durch ihre Ergänzungswinkel.

Nach (K_2) gäbe es auf dem Strahl $\overrightarrow{B'C'}$ einen eindeutigen Punkt Q mit $\overline{B'Q} \cong \overline{BP}$. Nach dem SWS-Kriterium (K'_6) gälte dann $\triangle B'BP \cong \triangle BB'Q$ und insbesondere $\angle CBB' \simeq \angle A'B'B \simeq \angle QBB'$.

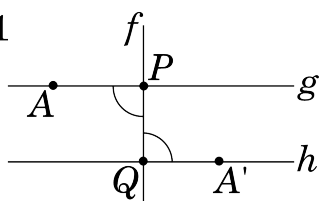
Nach Konstruktion gälte $Q \notin C$. Mit (K_5) folgte $Q \in \overrightarrow{BC} \subseteq g$, was ein Widerspruch dazu ist, dass P der einzige Schnittpunkt von g und h ist. Die beiden Geraden sind also parallel. $\square$

Korollar 3.46 (H). Seien $f, g, h \in \mathbf{G}$ mit $g \perp f$ und $h \perp f$. Dann gilt $g \parallel h$.

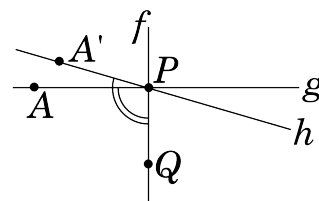
Beweis. Fall 1: f ist transversal zu g und h . Sei $P := f \wedge g$ und $Q := f \wedge h$. Seien außerdem $A \in g$ und $A' \in h$ auf verschiedenen Seiten von f . Dann sind die Winkel $\angle APQ$ und $\angle PQA'$ Wechselwinkel. Wegen $g \perp f$ und $h \perp f$ sind sie aber auch rechte Winkel und somit nach Satz 3.39 zueinander kongruent. Die Behauptung folgt mit dem schwachen Wechselwinkelsatz 3.45.

Fall 2: f, g, h haben einen gemeinsamen Schnittpunkt P . Seien $A \in g$ und $A' \in h$ auf derselben Seite von f und $Q \neq P$ ein weiterer Punkt auf f . Dann sind die Winkel $\angle APQ$ und $\angle A'PQ$ beide rechte Winkel und somit nach Satz 3.39 kongruent. Nach (K_5) liegt also A' auf $\overrightarrow{PA}$, so dass $h = \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PA} = g$ und insbesondere $g \parallel h$ folgt. $\square$

Fall 1



Fall 2



Korollar 3.47 (H). Seien $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade und $A \in \mathbf{P}$ ein Punkt. Dann gibt es genau eine Gerade $\ell_g A$ durch A , die orthogonal zu g ist. Diese heißt das **Lot** von A auf g und ihr Schnittpunkt $L_g A := \ell_g A \wedge g$ mit g heißt der **Lotfußpunkt** von A auf g .

Beweis. Die Existenz des Lots haben wir bereits in Satz 3.42 gezeigt. Zum Nachweis der Eindeutigkeit betrachten wir zwei Geraden $\ell_g A, \ell'_g A \in \mathbf{G}$, die beide durch A gehen und beide orthogonal auf g stehen. Mit Korollar 3.46 folgt $\ell_g A \parallel \ell'_g A$, was wegen $A \in \ell_g A \cap \ell'_g A$ sofort $\ell_g A = \ell'_g A$ impliziert. $\square$

Korollar 3.48 (H). Seien $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade und $A \in \mathbf{P}$ ein Punkt. Dann gibt es eine (nicht notwendigerweise eindeutige) Gerade $h \in \mathbf{G}$ durch A mit $g \parallel h$.

Beweis. Es gilt $\ell_g A \perp g$ und $\ell_{(\ell_g A)} A \perp \ell_g A$ und somit $\ell_{(\ell_g A)} A \parallel g$ nach Korollar 3.46. $\square$

Man kann sich nun fragen, ob die Umkehrung des schwachen Wechselwinkelsatzes auch gilt, dass also Wechselwinkel an parallelen Geraden kongruent sein müssen. Wie wir nun zeigen werden, ist dies genau dann richtig, wenn die betrachtete Hilbertebene affin ist.

Satz 3.49 (H). Folgende Aussagen sind äquivalent.

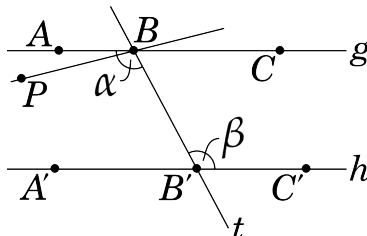
- (i) Es gilt das schwache Parallelenaxiom (p) .

- (ii) Es gilt das starke Parallelenaxiom (P).
- (iii) Es gilt der **starke Wechselwinkelsatz**: Je zwei parallele Geraden haben bezüglich einer beliebigen Transversalen vier Paare kongruenter Wechselwinkel.
- (iv) Es gilt der **starke Stufenwinkelsatz**: Je zwei parallele Geraden haben bezüglich einer beliebigen Transversalen vier Paare kongruenter Stufenwinkel.

Beweis. Nach Bemerkung 3.44 sind offenbar der starke Wechselwinkelsatz und der starke Stufenwinkelsatz äquivalent, so dass zum Beweis des Satzes genügt, die Äquivalenz der Aussagen (i), (ii) und (iii) zu zeigen.

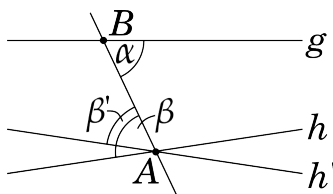
Wir nehmen zunächst an, es gelte das schwache Parallelenaxiom (p), es gebe also zu je einem Punkt $A \in \mathbf{P}$ und einer Gerade $g \in \mathbf{G}$ nie mehr als eine Parallele zu g durch A . Da es aber nach Korollar 3.48 stets mindestens eine solche Parallele gibt, folgt das starke Parallelenaxiom (P).

Wir zeigen nun, dass aus dem starken Parallelenaxiom (P) der starke Wechselwinkelsatz folgt. Sei dazu $t \in \mathbf{G}$ eine Transversale zu zwei gegebenen parallelen Geraden $g \parallel h \in \mathbf{G}$. Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung $g \neq h$ annehmen. Wir nennen die Schnittpunkte $B := t \cap g$ und $B' := t \cap h$ und wählen Punkte $A, C \in g$ mit $A \star B \star C$ und Punkte $A', C' \in h$ mit $A' \star B' \star C'$ und $A \nmid_t A'$. Der starke Wechselwinkelsatz ist gezeigt, wenn wir die Kongruenz $\alpha := \angle ABB' \simeq \angle C'B'B =: \beta$ zeigen können, da daraus mit Proposition 3.35 und Korollar 3.36 die übrigen Kongruenzen folgen.



Nehmen wir dafür im Gegenteil an, es gälte $\alpha \neq \beta$, ohne Einschränkung $\alpha > \beta$. Dann gäbe es einen Punkt P im Inneren von α mit $\angle PBB' \simeq \beta$ und nach dem schwachen Wechselwinkelsatz 3.45 wären die Geraden $\overleftrightarrow{BP}$ und h parallel. Andererseits ist nach Voraussetzung auch g eine Parallele zu h durch B . Nach (P) gälte daher $\overleftrightarrow{BP} = g$, was nicht sein kann, da P ein Punkt im Inneren von α ist.

Es verbleibt das schwache Parallelenaxiom (p) aus dem starken Wechselwinkelsatz herzuleiten. Seien dafür $g \in \mathbf{G}$ und $A \in \mathbf{P}$ gegeben. Im Fall $A \in g$ ist g selbst offenbar die einzige Parallele zu g durch A . Im Folgenden können wir daher ohne Einschränkung $A \notin g$ annehmen. Seien $h, h' \in \mathbf{G}$ zwei zu g parallele Geraden durch A und sei $B \in g$ beliebig.



Die Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ ist eine Transversale zu g und h . Nach dem starken Wechselwinkelsatz haben also g, h bzgl. $\overleftrightarrow{AB}$ ein Paar kongruenter Wechselwinkel $\alpha \simeq \beta$. Andererseits ist $\overleftrightarrow{AB}$ auch eine Transversale zu g und h' . Wieder nach dem starken Wechselwinkelsatz ist der Wechselwinkel β' zu α zwischen $\overleftrightarrow{AB}$ und h' zu α kongruent. Es folgt $\beta \simeq \beta'$, und mit (K_5) die Gleichheit der Geraden h und h' . $\square$

Bemerkung 3.50. Wir nehmen Satz 3.49 zum Anlass, in Hilbertebenen nicht weiter zwischen schwachem und starkem Parallelenaxiom zu unterscheiden und nur noch vom Parallelenaxiom (P) zu reden. Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene, in der das Parallelenaxiom (P) gilt.“ schreiben wir künftig auch kurz „ $(\mathbf{H} + \mathbf{P})$ “.

3.6 Der Kongruenzsatz für Dreiecke

Der Kongruenzsatz fasst mehrere Kongruenzkriterien für Dreiecke zusammen. Wir werden ihn benutzen, um in Abschnitt 3.7 zu einer gegebenen Strecke einen Mittelpunkt zu konstruieren. Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Propositionen.

Proposition 3.51 (H). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage und $A' \neq B' \in \mathbf{P}$ zwei verschiedene Punkte mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Dann gibt es auf jeder Seite von $\overleftrightarrow{A'B'}$ genau einen Punkt C' mit $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Beweis. Nach (K_5) gibt es auf jeder fest ausgewählten Seite von $\overleftrightarrow{A'B'}$ genau einen Strahl $\overrightarrow{A'P}$ mit $\angle CAB \simeq \angle PA'B'$. Weiter gibt es nach (K_2) genau einen Punkt C' auf diesem Strahl mit $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. Nach dem SWS-Kriterium (K'_6) sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent. $\square$

Definition 3.52 (H). Genau dann heißt ein Dreieck **gleichschenkelig**, wenn zwei seiner Seiten zueinander kongruent sind. Diese beiden Seiten heißen dann die **Schenkel** des gleichschenkligen Dreiecks, die verbleibende Strecke die **Basis**.

Proposition 3.53 (H). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann gilt die Äquivalenz

$$\overline{AB} \cong \overline{AC} \iff \angle ABC \simeq \angle ACB.$$

Ein Dreieck ist also genau dann gleichschenkelig, wenn zwei seiner Winkel zueinander kongruent sind. Diese Winkel heißen dann die **Basiswinkel** des gleichschenkligen Dreiecks.

Beweis. Dass aus der Kongruenz der Strecken die Kongruenz der Winkel folgt, sehen wir sofort durch Anwenden des SWS-Kriteriums (K'_6) auf die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACB$.

Gelte nun umgekehrt $\angle ABC \simeq \angle ACB$. Angenommen, es gälte $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$, ohne Einschränkung $\overline{AB} > \overline{AC}$. Dann gäbe es ein $D \in \overline{AB}$ mit $\overline{DB} \cong \overline{AC}$ und insbesondere $A \star D \star B$. Nach Konstruktion liegt daher D im Inneren des Winkels $\angle BCA$. Da D auf $\overline{AB}$ liegt, gilt aber andererseits $\angle ABC = \angle DBC$. Mit dem SWS-Kriterium (K'_6) folgt $\triangle DBC \cong \triangle ACB$ und insbesondere $\angle DCB \simeq \angle ACB$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass D im Inneren von $\angle ACB$ liegt. $\square$

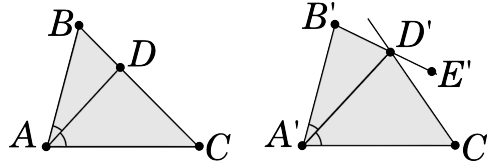
Proposition 3.54 (H). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ bzw. $A', B', C' \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage, und sei D bzw. D' ein Punkt im Inneren von $\angle BAC$ bzw. $\angle B'A'C'$. Dann folgt aus je zwei der Kongruenzen

$$\angle BAD \simeq \angle B'A'D', \quad \angle DAC \simeq \angle D'A'C', \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C'$$

die jeweils dritte.

Beweis. Der Beweis zerfällt offensichtlich in drei Fälle.

Fall 1: $(\angle BAD \simeq \angle B'A'D') \wedge (\angle DAC \simeq \angle D'A'C') \implies (\angle BAC \simeq \angle B'A'C')$. Nach Lemma 3.22 schneidet der Strahl $\overrightarrow{AD}$ die Strecke $\overline{BC}$. Indem wir gegebenenfalls D durch diesen Schnittpunkt ersetzen, können wir daher ohne Einschränkung $B \star D \star C$ annehmen. Weiter können wir nach (K_2) die Punkte B', C', D' jeweils derart durch Punkte auf demselben Strahl aus A' ersetzen, dass $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$, $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$ und $\overline{A'D'} \cong \overline{AD}$ gelten. Nach Annahme gelten außerdem $\angle B'A'D' \simeq \angle BAD$ und $\angle D'A'C' \simeq \angle DAC$. Nach dem SWS-Kriterium (K'_6) sind dann die Dreiecke $\triangle BAD$ und $\triangle B'A'D'$ bzw. $\triangle DAC$ und $\triangle D'A'C'$ kongruent.



Sei nun E' ein Punkt auf der Geraden $\overleftrightarrow{B'D'}$ mit $B' \star D' \star E'$; so etwas gibt es nach (A_2) . Dann ist $\angle A'D'E'$ ein Ergänzungswinkel zu $\angle A'D'B' \simeq \angle ADB$. Andererseits ist $\angle ADC$ ein Ergänzungswinkel zu $\angle ADB$, so dass mit Proposition 3.35 die Kongruenz $\angle A'D'E' \simeq \angle ADC \simeq \angle A'D'C'$ folgt.

Da C' und B' auf verschiedenen Seiten von $\overleftrightarrow{A'D'}$ liegen und B' und E' ebenso, liegen nach (A_4) die Punkte C' und E' auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{A'D'}$. Nach (K_5) sind daher die Winkel $\angle A'D'E'$ und $\angle A'D'C'$ sogar identisch. Insbesondere gilt $B' \star D' \star C'$.

Da wir mit der Kongruenz der Dreiecke schon vorhin $\overline{B'D'} \cong \overline{BD}$ und $\overline{D'C'} \cong \overline{DC}$ eingesehen hatten, folgt mit (K_3) die Kongruenz $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$. Weiter hatten wir schon $\angle A'C'B' \simeq \angle A'C'D' \simeq \angle ACD \simeq \angle ACB$ erkannt und $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$ vorausgesetzt. Mit dem SWS-Kriterium (K'_6) folgt somit die Kongruenz der Dreiecke $\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$ und insbesondere die Behauptung.

Fall 2: $(\angle BAD \simeq \angle B'A'D') \wedge (\angle BAC \simeq \angle B'A'C') \implies (\angle DAC \simeq \angle D'A'C')$. Nach (K_5) existiert ein C'' , das auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{A'D'}$ liegt wie C' und das $\angle D'A'C'' \simeq \angle DAC$ erfüllt. Wenn wir C' durch C'' ersetzen, haben wir also die Voraussetzungen für Fall 1 erfüllt und erhalten so $\angle B'A'C'' \simeq \angle BAC$. Das impliziert

$$\angle B'A'C' \simeq \angle BAC \simeq \angle B'A'C''$$

und somit $C'' \in \overleftrightarrow{A'C'}$. Daraus ergibt sich

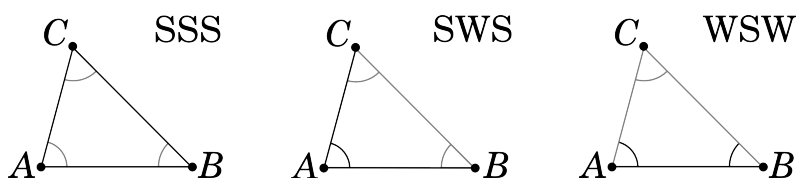
$$\angle DAC \simeq \angle D'A'C'' \simeq \angle D'A'C'$$

und also die Behauptung.

Fall 3: $(\angle BAC \simeq \angle B'A'C') \wedge (\angle DAC \simeq \angle D'A'C') \implies (\angle BAD \simeq \angle B'A'D')$. Dieser Fall ist nach Umbenennung mit Fall 2 identisch. $\square$

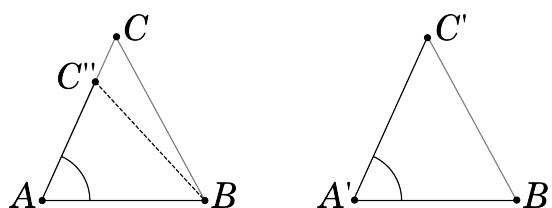
Satz 3.55 (Kongruenzsatz für Dreiecke, H). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,
- (ii) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ (SSS)
- (iii) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \simeq \angle B'A'C'$, (SWS)
- (iv) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \simeq \angle B'A'C'$ und $\angle ABC \simeq \angle A'B'C'$. (WSW)



Beweis. Dass aus (i) die anderen drei Aussagen folgen, ist klar. Dass aus (iii) Aussage (i) folgt, gilt mit dem SWS-Kriterium (K'_6) und somit nach Definition der Hilbertebene.

Wir wollen nun das WSW-Kriterium zeigen, das besagt, dass aus (iv) Aussage (i) folgt. Nehmen wir dafür an, es gelten die Kongruenzen aus (iv). Mit (K_2) wählen wir auf dem Strahl $\overrightarrow{AC}$ einen Punkt C'' mit $\overline{AC''} \cong \overline{A'C'}$. Da nach Voraussetzung $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\angle BAC'' = \angle BAC \simeq \angle B'A'C'$ gelten, können wir das SWS-Kriterium auf die Dreiecke $\triangle ABC''$ und $\triangle A'B'C'$ anwenden und erhalten deren Kongruenz.



Daraus und wieder aus (iv) folgt

$$\angle ABC'' \simeq \angle A'B'C' \simeq \angle ABC. \quad (3.5)$$

Nach Konstruktion liegen C und C'' auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$, so dass wegen (3.5) und (K_5) bereits die Identität der Strahlen $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BC''}$ gilt. Es folgt

$$C'' = \overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AC} = C$$

und insbesondere $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. Wir dürfen also das SWS-Kriterium auf die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ anwenden und zeigen so (i).

Am aufwändigsten ist der Beweis des SSS-Kriteriums, dessentwegen wir die Propositionen 3.51, 3.53 und 3.54 gezeigt haben. Nehmen wir dafür an, es gelten die Kongruenzen aus (ii). Nach Proposition 3.51 gibt es auf der B' gegenüberliegenden Seite von $\overleftrightarrow{A'C'}$ genau einen Punkt B'' mit $\triangle A'B''C' \cong \triangle ABC$. Wir setzen $P := \overleftrightarrow{A'C'} \cap \overleftrightarrow{B'B''}$. In Abhängigkeit von der Lage von P auf der Geraden $\overleftrightarrow{A'C'}$ ergeben sich verschiedene Fälle.

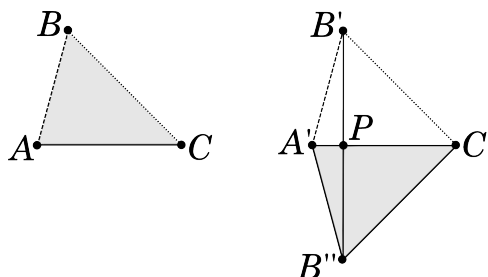
Fall 1: $P = A'$. In diesem Fall sind die Punkte A', B', B'' kollinear. Da sonst die Punkte A', B', C' kollinear wären, sind deswegen C', B', B'' in allgemeiner Lage. Wegen der Kongruenz $\overline{B'C'} \cong \overline{BC} \cong \overline{B''C'}$ ist das Dreieck $\triangle C'B'B''$ gleichschenkelig und hat kongruente Basiswinkel $\angle C'B'B'' = \angle A'B'C'$ und $\angle C'B''B' = \angle A'B''C'$ nach Proposition 3.53. Das reicht, um mit dem SWS-Kriterium die Kongruenz von Dreiecken $\triangle ABC \cong \triangle A'B''C' \cong \triangle A'B'C'$ folgern zu können.

Fall 2: $P = C'$. Dieser Fall ist nach Umbenennung mit Fall 1 identisch.

Fall 3: A', C', P paarweise verschieden. Analog zu Fall 1 sind die Dreiecke $\triangle C'B'B''$ und $\triangle A'B'B''$ gleichschenkelig, woraus mit 3.53 die Kongruenzen

$$\angle C'B'P \simeq \angle C'B''P \quad \text{und} \quad \angle A'B'P \simeq \angle A'B''P$$

der jeweiligen Basiswinkel folgen. Mit Proposition 3.54 erhalten wir $\angle C'B'A' \simeq \angle C'B''A'$, was mithilfe des SWS-Kriteriums die Behauptung zeigt.



□

3.7 Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass jede gegebene Strecke eine eindeutige Mittelsenkrechte besitzt und jeder gegebene Winkel eine eindeutige Winkelhalbierende. Für beide Ziele wird es sich als vorteilhaft erweisen, zu einer gegebenen Strecke einen Mittelpunkt konstruieren zu können. Damit wollen wir beginnen.

Definition 3.56 (H). Gegeben seien drei paarweise verschiedene kollineare Punkte $A, B, M \in \mathbf{P}$. Genau dann heißt M ein **Mittelpunkt** der Strecke $\overline{AB}$, wenn $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ gilt.

Lemma 3.57 (H). Seien $A, B, M \in \mathbf{P}$ paarweise verschieden und kollinear. Ist M ein Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, so gilt $A \star M \star B$.

Beweis. Gälte $M \star A \star B$, so folgte nach Definition $\overline{AM} = \overline{MA} < \overline{MB}$. Dies stünde nach Proposition 3.18 im Widerspruch zur Annahme $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ und kann daher nicht sein. Gälte $A \star B \star M$, so folgte nach Definition $\overline{AM} > \overline{BM} = \overline{MB}$. Dies stünde genauso im Widerspruch zur Annahme $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ und kann daher ebenfalls nicht sein. Nach (A_3) liegt aber genau einer der Punkte A, B, M zwischen den anderen beiden, so dass wir das Lemma gezeigt haben. $\square$

Satz 3.58 (H). Für zwei beliebige Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}$ hat die Strecke $\overline{AB}$ genau einen Mittelpunkt.

Beweis. Wir wollen zunächst die Existenz zeigen. Wie in Proposition 3.2 gilt für $g := \overleftrightarrow{AB}$ die Aufteilung

$$\mathbf{P} = g \cup S_1(g) \cup S_2(g)$$

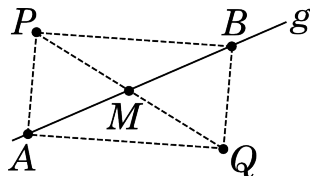
von $\mathbf{P}$ in g und die durch g begrenzten Halbebenen. Für einen beliebigen Punkt $P \in S_1(g)$ gibt es nach Proposition 3.51 genau einen Punkt $Q \in S_2(g)$ mit $\triangle ABP \cong \triangle BAQ$ und insbesondere

$$\overline{AP} \cong \overline{BQ} \quad \text{und} \quad \overline{PB} \cong \overline{QA}. \quad (3.6)$$

Die Punkte A, P, Q sind in allgemeiner Lage,

denn: Nach Konstruktion ist g eine Transversale der beiden Geraden $\overleftrightarrow{BP}$ und $\overleftrightarrow{AQ}$ mit kongruenten Wechselwinkeln $\angle PBA \simeq \angle QAB$. Nach dem schwachen Wechselwinkelsatz 3.45 sind somit die Geraden $\overleftrightarrow{BP}$ und $\overleftrightarrow{AQ}$ parallel. Da sie wegen $A \neq B$ zudem voneinander verschieden sind, folgt die Behauptung. $\#$

Analog zeigt man, dass auch die Punkte B, Q, P in allgemeiner Lage sind.



Insgesamt können wir das SSS-Kriterium 3.55 auf die Dreiecke $\triangle APQ$ und $\triangle BQP$ anwenden und erhalten wegen $\overline{PQ} \cong \overline{QP}$ und (3.6) deren Kongruenz. Insbesondere gelten die Kongruenzen von Winkeln

$$\angle APQ \simeq \angle BQP \quad \text{und} \quad \angle AQP \simeq \angle BPQ. \quad (3.7)$$

Wegen $P \mid_g Q$ schneidet g die Strecke $\overline{PQ}$ in einem Punkt M . Für diesen gilt $A \star M \star B$,

denn: Da die Punkte A, P, Q bzw. B, Q, P in allgemeiner Lage sind, liegen weder A noch B auf der Verbindungsgeraden $\overleftrightarrow{PQ}$; es ist also $M \notin \{A, B\}$. Weiter gilt nicht $M \star A \star B$, denn sonst läge A jeweils im Inneren der Winkel $\angle BPM$ und $\angle BQM$ und es folgte

$$\begin{aligned} \angle APQ &= \angle APM < \angle BPM = \angle BPQ \\ &\stackrel{(3.7)}{\simeq} \angle AQP = \angle AQM < \angle BQM = \angle BQP \end{aligned}$$

$$\stackrel{(3.7)}{\cong} \angle APQ,$$

was offensichtlich nicht sein kann. Analog zeigt man, dass auch $A \star B \star M$ nicht sein kann, so dass die Behauptung mit Proposition 3.25 folgt. #

Es gilt nun

$$\angle MAP = \angle BAP \simeq \angle ABQ = \angle MBQ, \quad (A \star M \star B, \triangle ABP \cong \triangle BAQ)$$

$$\overline{AP} \stackrel{(3.6)}{\cong} \overline{BQ},$$

$$\angle APM = \angle APQ \stackrel{(3.7)}{\simeq} \angle BQP = \angle BQM \quad (P \star M \star Q)$$

und also mit dem WSW-Kriterium 3.55 die Kongruenz der Dreiecke $\triangle AMP$ und $\triangle BMQ$. Insbesondere folgt die Kongruenz von Strecken $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ und somit, dass M ein Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist.

Es verbleibt die Eindeutigkeit des Streckenmittelpunkts zu zeigen. Sei dafür M' ein von M verschiedener Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Wir können ohne Einschränkung $\overline{AM} < \overline{AM'}$ annehmen, insbesondere also $A \star M \star M'$. Aufgrund von $A \star M' \star B$ folgt mit 3.8 die Anordnung $M \star M' \star B$ und deshalb $\overline{BM'} < \overline{BM}$. Insgesamt erhalten wir aber mit den Mittelpunktseigenschaften von M und M' die Ungleichungskette

$$\overline{AM} < \overline{AM'} \cong \overline{M'B} < \overline{MB} \cong \overline{AM}$$

und somit nach Proposition 3.18 einen Widerspruch. $\square$

Die Existenz eines eindeutigen Streckenmittelpunkts bedingt die Existenz einer eindeutigen Mittelsenkrechten und einer eindeutigen Winkelhalbierenden wie folgt.

Definition 3.59 (H). Seien $A \neq B \in \mathbf{P}$ zwei verschiedene Punkte. Das Lot des Mittelpunkts von $\overline{AB}$ auf $\overleftrightarrow{AB}$ nennen wir die **Mittelsenkrechte** m_{AB} von $\overline{AB}$.

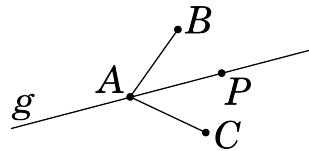
Proposition 3.60 (H). Für zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}$ gilt

$$m_{AB} = \{P \in \mathbf{P} \mid \overline{AP} \cong \overline{BP}\}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für ein beliebiges $P \in m_{AB}$ die Bedingung $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ gilt. Da dies für den Streckenmittelpunkt M von $\overline{AB}$ definitionsgemäß richtig ist, können wir dabei ohne Einschränkung $P \in m_{AB} \setminus \{M\}$ annehmen. Nach dem SWS-Kriterium sind dann die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle AMP$ und $\triangle BMP$ kongruent, insbesondere gilt $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.

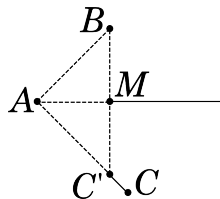
Sei nun umgekehrt $P \in \mathbf{P}$ mit $\overline{AP} \cong \overline{BP}$. Im Fall $P = M$ liegt P trivialerweise auf m_{AB} . Im Fall $P \neq M$ ist das Dreieck $\triangle PAB$ gleichschenkelig, woraus $\angle PAM \simeq \angle PBM$ folgt. Mithilfe des SWS-Kriteriums erhalten wir $\triangle PAM \cong \triangle PBM$, was $\angle PMA \simeq \angle PMB$ zur Folge hat. Diese Winkel sind Ergänzungswinkel, weshalb $\angle PMA$ ein rechter Winkel ist. Aus der Eindeutigkeit des Lotes folgt wie verlangt $P \in m_{AB}$. $\square$

Definition 3.61 (H). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage und g eine Gerade durch A . Genau dann heißt g eine **Winkelhalbierende** von $\angle BAC$, wenn B und C auf verschiedenen Seiten von g liegen und für ein (und damit alle) $P \in g \setminus \{A\}$ die Kongruenz $\angle PAB \simeq \angle PAC$ gilt.



Proposition 3.62 (H). Zu je drei Punkten $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage gibt es genau eine Winkelhalbierende $w_{\angle CAB}$ des Winkels $\angle CAB$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz. Nach (K_2) gibt es einen eindeutigen Punkt $C' \in \overrightarrow{AC}$ mit $\overline{AC'} \cong \overline{AB}$. Nach Satz 3.58 hat die Strecke $\overline{BC'}$ einen Mittelpunkt M , der definitionsgemäß $\overline{BM} \cong \overline{MC'}$ erfüllt.



Damit können wir das SSS-Kriterium auf die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle AC'M$ anwenden und erhalten deren Kongruenz. Insbesondere gilt dann auch $\angle BAM \simeq \angle C'AM$, so dass durch die Gerade $\overleftrightarrow{AM}$ eine Winkelhalbierende des Winkels $\angle C'AB = \angle CAB$ gegeben ist.

Die Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden zeigt man analog zur Eindeutigkeit des Streckenmittelpunkts im Beweis von Satz 3.58. $\square$

3.8 Innen- und Außenwinkel im Dreieck

In diesem Abschnitt führen wir die Begriffe von Innen- und Außenwinkeln eines Dreiecks ein und zeigen zwei Aussagen über das Verhältnis von Innen- und Außenwinkeln einerseits und Innenwinkeln und Dreiecksseiten andererseits. Daraus folgern wir noch ein weiteres Kongruenzkriterium für Dreiecke.

Definition 3.63 (H). Ein beliebiger Ergänzungswinkel eines Innenwinkels eines gegebenen Dreiecks heißt ein **Außenwinkel** dieses Dreiecks.

Die folgenden beiden Resultate sind jeweils eine Abschwächung des in euklidischen Ebenen gültigen Satzes 1.42 von der Innenwinkelsumme im Dreieck.

Proposition 3.64 (H + P). Seien α, β, γ die Innenwinkel eines Dreiecks $\triangle$ und seien α', β', γ' die Innenwinkel eines weiteren Dreiecks $\triangle'$. Dann gilt

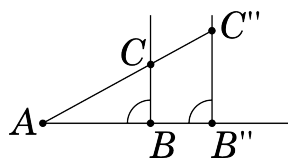
$$\left(\alpha \simeq \alpha' \quad \text{und} \quad \beta \simeq \beta' \right) \implies \gamma \simeq \gamma'.$$

Beweis. Wir schreiben $\triangle = \triangle ABC$ und $\triangle' = \triangle A'B'C'$ und setzen

$$\begin{aligned} \alpha &:= \angle CAB, & \beta &:= \angle ABC & \text{und} & \gamma &:= \angle BCA, \\ \alpha' &:= \angle C'A'B', & \beta' &:= \angle A'B'C' & \text{und} & \gamma' &:= \angle B'C'A'. \end{aligned}$$

Nach (K_2) gibt es auf dem Strahl $\overrightarrow{AB}$ einen eindeutigen Punkt B'' mit $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$. Ohne Einschränkung können wir $B'' \neq B$ annehmen, da sonst nach dem WSW-Kriterium die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent und somit nichts zu zeigen wäre. Nach Proposition 3.51 gibt es dann genau einen Punkt C'' mit

$$C'' \not\stackrel{\overrightarrow{AB}}{\sim} C \quad \text{und} \quad \triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'. \quad (3.8)$$



Insbesondere gilt

$$\angle ABC = \beta \simeq \beta' = \angle A'B'C' \stackrel{(3.8)}{\simeq} \angle AB''C'',$$

so dass die beiden Geraden $\overleftrightarrow{BC}$ und $\overleftrightarrow{B''C''}$ bezüglich der Transversalen $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB''}$ kongruente Stufenwinkel haben. Nach dem schwachen Stufenwinkelsatz 3.45 gilt somit $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B''C''}$.

Andererseits gilt die Kongruenz

$$\angle CAB = \alpha \simeq \alpha' = \angle C'A'B' \stackrel{(3.8)}{\simeq} \angle C''AB'' = \angle C''AB.$$

Wegen $C'' \not\stackrel{\overrightarrow{AB}}{\sim} C$ stimmen folglich nach (K_5) die Strahlen $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AC''}$ überein. Wir können daher den starken Stufenwinkelsatz 3.49 auf die Transversale $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AC''}$ der parallelen Geraden $\overleftrightarrow{BC}$ und $\overleftrightarrow{B''C''}$ anwenden und erhalten wie verlangt die Kongruenz der Winkel

$$\gamma = \angle BCA \simeq \angle B''C''A \stackrel{(3.8)}{\simeq} \angle B'C'A' = \gamma'.$$

□

Satz 3.65 (Außenwinkelsatz, H). Sind α, β, γ die Innenwinkel eines Dreiecks und ist γ' ein Ergänzungswinkel zu γ , so gilt

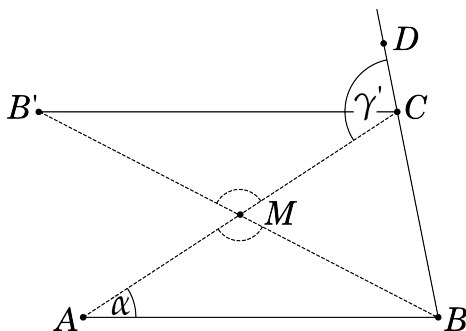
$$\alpha < \gamma' \quad \text{und} \quad \beta < \gamma'.$$

Beweis. Wir schreiben $\triangle ABC$ für das Dreieck und setzen

$$\alpha := \angle CAB, \quad \beta := \angle ABC \quad \text{und} \quad \gamma := \angle BCA.$$

Da nach Proposition 3.35 beide Wahlen für den Außenwinkel γ' kongruent sind, dürfen wir zudem ohne Einschränkung einen Punkt $D \in \overleftrightarrow{BC}$ mit $B \star C \star D$ wählen und $\gamma' := \angle ACD$ setzen.

Da die Behauptungen $\alpha < \gamma'$ und $\beta < \gamma'$ unter Umbenennung zueinander äquivalent sind, genügt es, die erste der beiden zu zeigen. Sei dafür M der nach Satz 3.58 existierende eindeutige Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Für diesen gilt definitionsgemäß $\overline{AM} \cong \overline{CM}$. Wir wählen nun auf $\overline{BM}$ einen Punkt B' mit $B \star M \star B'$ und $\overline{BM} \cong \overline{MB'}$.



Da die Winkel $\angle AMB$ und $\angle CMB'$ als Gegenwinkel kongruent sind, können wir dann das SWS-Kriterium auf die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle CB'M$ anwenden und erhalten deren Kongruenz. Insbesondere folgt die Kongruenz der Winkel α und $\angle MCB' = \angle ACB'$. Andererseits liegt B' im Inneren des Winkels $\angle ACD = \gamma'$,

denn: Nach Konstruktion gilt $B \mid_{\overline{AC}} B'$ und B, C, B' sind in allgemeiner Lage. Folglich liegt der Punkt A im Inneren des Winkels $\angle BCB'$. Nach Lemma 3.22 bedeutet dies $A \nmid_{\overline{B'C}} B$ und $B \mid_{\overline{AC}} B'$. Wegen $B \star C \star D$ ist dies äquivalent zu $A \mid_{\overline{B'D}} D$ und $B' \nmid_{\overline{AC}} D$. Wieder nach Lemma 3.22 ist dies gleichbedeutend dazu, dass B' im Inneren von $\angle DCA = \angle ACD$ liegt. #

□

Aus dem Außenwinkelsatz 3.65 folgern wir einen Zusammenhang zwischen Innenwinkeln eines Dreiecks und den jeweils gegenüberliegenden Seiten. Dieser Zusammenhang wird für euklidische Ebenen mit dem Sinussatz 1.43 präzisiert.

Satz 3.66 (H). In einem Dreieck $\triangle ABC$ gilt

$$\overline{AB} > \overline{BC} \iff \angle BCA > \angle CAB.$$

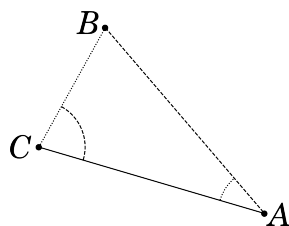
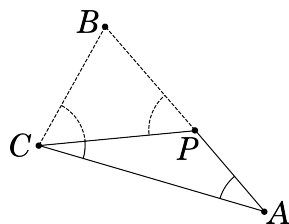


Abbildung 3.4: Der größeren Dreiecksseite liegt stets der größere Innenwinkel gegenüber.

Beweis. Unter der Annahme $\overline{AB} > \overline{BC}$ gibt es einen Punkt P zwischen A und B mit $\overline{BP} \cong \overline{BC}$. Da $\angle CPB$ ein Außenwinkel des Dreiecks $\triangle CPA$ ist, ist er nach dem Außenwinkelsatz 3.65 größer als der Innenwinkel $\angle CAP = \angle CAB$. Da P im Inneren des Winkels $\angle BCA$ liegt, ist zudem letzterer größer als $\angle BCP$. Da das Dreieck $\triangle BCP$ nach Konstruktion gleichschenkelig ist, sind schließlich seine Basiswinkel $\angle BCP$ und $\angle CPB$ kongruent. Insgesamt haben wir

$$\angle BCA > \angle BCP \cong \angle CPB > \angle CAB$$

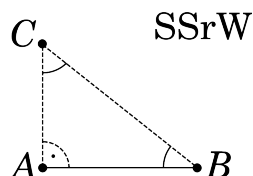
gezeigt und somit die erste Implikation.



Gelte nun umgekehrt $\angle BCA > \angle CAB$. Da die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks stets kongruent sind, kann dann nicht $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ gelten. Gälte $\overline{AB} < \overline{BC}$, so folgte $\angle BCA < \angle CAB$ nach dem bereits Gezeigten, was nicht sein kann. Der Satz folgt im Ausschlussprinzip nach Proposition 3.25. $\square$

Satz 3.67 (H). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ und $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage und seien $\angle BAC$ und $\angle B'A'C'$ rechte Winkel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

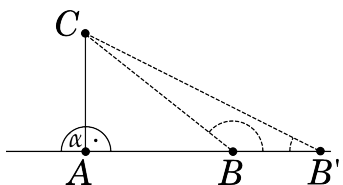
- (i) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,
- (ii) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. (SSrW)



Beweis. Dass (ii) aus (i) folgt, ist trivial. Gelte also umgekehrt (ii). Auf $\overrightarrow{AB}$ gibt es einen eindeutigen Punkt B'' mit $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$. Für diesen gilt nach dem SWS-Kriterium die Kongruenz von

Dreiecken $\triangle AB''C \cong \triangle A'B'C'$ und insbesondere die Streckenkongruenz $\overline{B''C} \cong \overline{B'C'} \cong \overline{BC}$. Wir unterscheiden drei Fälle für die Lage der drei Punkte A, B, B'' zueinander.

Fall 1: $B'' = B$. Es gilt $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und mit (ii) und dem SSS-Kriterium folgt die gewünschte Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$.



Fall 2: $A \star B \star B''$. Sei α ein Ergänzungswinkel zu $\angle CAB$. Wenden wir den Außenwinkelsatz 3.65 auf die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AB''C$ an, so folgen $\angle ABC < \alpha$ und $\angle AB''C < \alpha$. Zum einen gilt $\angle AB''C = \angle BB''C$ nach Voraussetzung, zum anderen ist nach Voraussetzung $\angle CBB''$ ein Ergänzungswinkel zu $\angle ABC$ und mit der Rechtwinkligkeit von α folgt $\alpha < \angle CBB''$. Insgesamt haben wir also $\angle BB''C < \angle CBB''$ gezeigt. Wenden wir Satz 3.66 auf das Dreieck $\triangle BB''C$ an, so folgt $\overline{BC} < \overline{B''C}$, was im Widerspruch zu der oben gezeigten Kongruenz $\overline{BC} \cong \overline{B''C}$ steht.

Fall 3: $A \star B'' \star B$. Das ist nach Umbenennung gerade Fall 2.

□

3.9 In- und Umkreis

Wir haben gesehen, dass sich in Hilbertebenen gut Geometrie betreiben lässt. Da die klassische Geometrie ohne Kreise nicht vorstellbar ist, wollen wir diese nun einführen.

Definition 3.68 (H). Seien $M \neq A \in \mathbf{P}$ zwei verschiedene Punkte. Dann heißt

$$K(M, A) := \{P \in \mathbf{P} \mid \overline{MA} \cong \overline{MP}\}$$

der **Kreis** mit **Mittelpunkt** M und **Radius** $\overline{MA}$.

Proposition 3.69 (H). Sei $K \subseteq \mathbf{P}$ ein Kreis. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- (a) Der Kreis K ist nichtleer.
- (b) Jede Gerade durch einen Mittelpunkt von K schneidet K in genau zwei Punkten.
- (c) Der Kreis K hat genau einen Mittelpunkt.

Beweis. Aussage (a) ist trivialerweise richtig, da definitionsgemäß $A \in K$ gilt.

Ist $K = K(M, A)$, so können wir auf jedem Strahl aus M eindeutig den Radius abtragen. Aussage (b) folgt, da sich eine beliebige Gerade g durch M als Vereinigung von genau zwei solcher Strahlen schreiben lässt und deren Durchschnitt gerade aus dem Punkt M besteht.

Es verbleibt Aussage (c) zu zeigen. Nach (a) gibt es einen Punkt $A \in K$. Nehmen wir nun an, K hätte zwei Mittelpunkte $M \neq M'$. Dann könnten wir $K = K(M, A) = K(M', A)$ schreiben. Nach (b) schnitte die Gerade $\overleftrightarrow{MM'}$ den Kreis K dann in genau zwei Punkten, die wir B und C nennen wollen. Diese erfüllten einerseits $B \star M \star C$ und $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ und andererseits $B \star M' \star C$ und $\overline{BM'} \cong \overline{M'C}$. Da der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ nach Satz 3.58 eindeutig ist, folgte $M = M'$, was wir ausgeschlossen hatten. Der Mittelpunkt eines Kreises ist also stets eindeutig bestimmt und Aussage (c) bewiesen. $\square$

Unter zusätzlicher Voraussetzung des Parallelenaxioms (P) können wir nun mithilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 3.7 noch zwei bekannte Sätze über Kreise herleiten.

Satz 3.70 (Umkreissatz, H + P). *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Dann schneiden sich die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ in einem gemeinsamen Punkt U . Der Kreis $K(U, A)$ enthält die Punkte A, B, C und ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt. Wir nennen $K(U, A)$ den **Umkreis** und U den **Umkreismittelpunkt** von $\triangle ABC$.²²*

Beweis. Die drei Mittelsenkrechten sind paarweise nicht parallel,

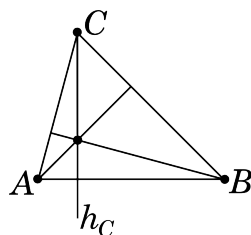
denn: Nach Definition gelten $m_{AB} \perp \overleftrightarrow{AB}$ und $m_{AC} \perp \overleftrightarrow{AC}$. Gälte $m_{AB} \parallel m_{AC}$, so folgte $m_{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ mit dem starken Wechselwinkelsatz 3.49, was nach Korollar 3.46 sofort die Unmöglichkeit $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ implizierte. $\#$

Je zwei Mittelsenkrechte des Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich also in genau einem Punkt. Sei U der Schnittpunkt von m_{AB} und m_{AC} . Nach Proposition 3.60 gilt dann $\overline{BU} \cong \overline{AU} \cong \overline{CU}$, was wieder nach 3.60 zur Folge hat, dass U in m_{BC} liegt. Es schneiden sich also die drei Mittelsenkrechten von $\triangle ABC$ in genau einem Punkt, nämlich in U .

Nach Konstruktion ist dann $K(U, A)$ ein Kreis, der die Punkte A, B, C enthält. Sei K' ein weiterer Kreis, der A, B, C enthält, und sei U' der – nach Proposition 3.69 eindeutige – Mittelpunkt von K' . Dann gilt insbesondere $\overline{BU'} \cong \overline{AU'} \cong \overline{CU'}$, und aus Proposition 3.60 folgt $U' = m_{AB} \cap m_{AC} = U$. Es folgt also $K' = K(U', A) = K(U, A)$. $\square$

Bemerkung 3.71. *Mit dem Umkreissatz haben wir insbesondere gezeigt, dass je drei Punkte in allgemeiner Lage einen eindeutigen Kreis bestimmen.*

Definition 3.72 (H). *Für ein Dreieck $\triangle ABC$ heißt das Lot von C auf die Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ die **Höhe** von $\triangle ABC$ **durch** C und wird mit h_C bezeichnet. Der Schnittpunkt $h_C \cap \overleftrightarrow{AB}$ heißt dabei der **Fußpunkt** der Höhe h_C . Analog werden auch die Höhen h_A und h_B und ihre Fußpunkte definiert.*



²²Diese Namensgebung erhält ihren tieferen Sinn erst dann, wenn man zeigt, dass mit Ausnahme der Eckpunkte A, B, C alle Punkte des Umkreises „außerhalb“ von $\triangle ABC$ liegen, was wir allerdings nicht tun werden.

Satz 3.73 (Höhensatz, **H + P**). Die Höhen h_A, h_B, h_C eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt H .

Beweis. Seien

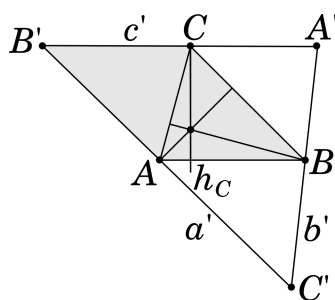
a' die Parallele zu $\overleftrightarrow{BC}$ durch A ,

b' die Parallele zu $\overleftrightarrow{CA}$ durch B ,

c' die Parallele zu $\overleftrightarrow{AB}$ durch C .

Per Widerspruchsbeweis sieht man schnell ein, dass diese Geraden paarweise nicht parallel sind. Seien also weiter

$$A' := b' \cap c', \quad B' := c' \cap a', \quad C' := a' \cap b'.$$



Nach Übungsaufgabe 3.10 gilt nun

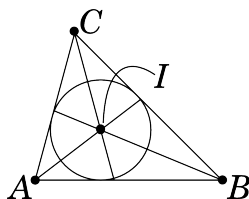
$$M_{A'B'} = C, \quad M_{B'C'} = A, \quad M_{C'A'} = B.$$

Wegen $h_A \perp \overleftrightarrow{BC} \parallel a'$ folgt daraus $h_A = m_{B'C'}$ und analog $h_B = m_{C'A'}$ und $h_C = m_{A'B'}$. Der Satz folgt mit dem Umkreissatz 3.70 angewandt auf das Dreieck $\triangle A'B'C'$. $\square$

Satz 3.74 (Inkreissatz, **H + P**). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Dann schneiden sich die Winkelhalbierenden der Innenwinkel $\alpha := \angle CAB$, $\beta := \angle ABC$ und $\gamma := \angle BCA$ in einem gemeinsamen Punkt I . Der Kreis $K(I, L_{\overleftrightarrow{AB}}I)$ enthält die Lotfußpunkte

$$L_a := L_{\overleftrightarrow{BC}}I, \quad L_b := L_{\overleftrightarrow{CA}}I \quad \text{und} \quad L_c := L_{\overleftrightarrow{AB}}I$$

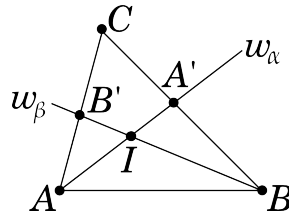
und ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt. Wir nennen $K(I, L_{\overleftrightarrow{AB}}I)$ den **Inkreis** und I den **Inkreismittelpunkt** von $\triangle ABC$.²³



²³Diese Namensgebung erhält ihren tieferen Sinn erst dann, wenn man zeigt, dass mit Ausnahme der Lotfußpunkte L_a, L_b, L_c alle Punkte des Umkreises „innerhalb“ von $\triangle ABC$ liegen, was wir allerdings nicht tun werden.

Beweis. Die drei Winkelhalbierenden sind paarweise nichtparallel,

denn: Es langt zu zeigen, dass sich die Winkelhalbierenden w_α und w_β schneiden; die anderen beiden Fälle ergeben sich analog. Wegen $B \notin w_\alpha$ und $B \in w_\beta$ sind w_α und w_β verschieden. Wegen $B \mid_{w_\alpha} C$ gibt es einen Schnittpunkt A' von w_α und $\overline{BC}$. Nach Konstruktion gilt $C \star A' \star B$, so dass $A' \nmid_{w_\beta} C$ gilt. Andererseits gilt nach Definition der Winkelhalbierenden $A \mid_{w_\beta} C$, und mit (A_4) erhalten wir $A \mid_{w_\beta} A'$. Es muss daher einen Schnittpunkt von w_β und $\overline{AA'} \subseteq w_\alpha$ geben. #

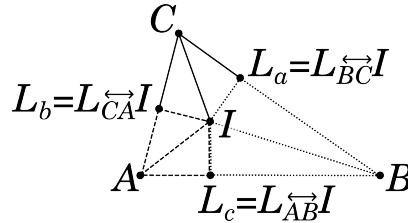


Den eindeutig bestimmten Geradenschnittpunkt $w_\alpha \wedge w_\beta$ bezeichnen wir im Folgenden als I . Füllen wir sein Lot auf die drei Seiten des Dreiecks und schreiben

$$L_a := L_{\overleftrightarrow{BC}}I, \quad L_b := L_{\overleftrightarrow{CA}}I \quad \text{und} \quad L_c := L_{\overleftrightarrow{AB}}I,$$

so erhalten wir kongruente Dreiecke $\triangle AIL_c \cong \triangle AIL_b$ und $\triangle BIL_c \cong \triangle BIL_a$,

denn: Da w_α Winkelhalbierende ist, gilt $\angle IAL_b \simeq \angle IAL_c$. Andererseits sind nach Konstruktion $\angle IL_cA$ und $\angle IL_bA$ rechte Winkel und nach Satz 3.39 somit ebenfalls kongruent. Nach Proposition 3.64 sind daher auch $\angle AIL_c$ und $\angle AIL_b$ kongruent. Da die beiden Dreiecke außerdem die Seite $\overline{AI}$ gemeinsam haben, folgt die erste der gesuchten Kongruenzen mit dem WSW-Kriterium. Die andere Kongruenz zeigt man analog. #



Aus dem gerade Gezeigten folgt insbesondere $\overline{IL_c} \cong \overline{IL_a} \cong \overline{IL_b}$, so dass $K(I, L_c)$ der, nach dem Umkreissatz 3.70 eindeutige, Kreis durch die Lotfußpunkte L_a , L_b und L_c ist.

Wir haben den Inkreissatz bewiesen, wenn wir noch $\overleftrightarrow{CI} = w_\gamma$ zeigen können. Wegen $\overline{IL_a} \cong \overline{IL_b}$ und da $\angle IL_bC, \angle IL_aC$ nach Konstruktion rechte Winkel sind, gilt nach dem SSrW-Kriterium 3.67 die Kongruenz von Dreiecken $\triangle IL_bC \cong \triangle IL_aC$ und insbesondere

$$\angle ACI = \angle L_bCI \simeq \angle L_aCI = \angle BCI.$$

Es verbleibt also zu zeigen, dass die Punkte A und B auf verschiedenen Seiten von $\overleftrightarrow{CI}$ liegen. Nach Lemma 3.22 genügt es dafür zu zeigen, dass I im Inneren des Winkels γ liegt. Dem ist aber so,

denn: Die Punkte A und C liegen nach Definition der Winkelhalbierenden auf verschiedenen Seiten von w_β und I liegt nach Konstruktion auf der Strecke $\overline{AA'}$, weshalb I und A auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{BC}$ liegen. Nach Lemma 3.22 liegt I also im Inneren des Winkels β . Dass I auch im Inneren des Winkels α liegt, zeigt man analog. Die Behauptung folgt mit Teil (b) von Bemerkung 3.27. #

□

3.10 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1 (I + A). Beweisen Sie die Aussagen (a) und (c) von Proposition 3.8.

Aufgabe 3.2 (I + A). Zeigen Sie, dass $\mathbf{P}$ unendlich viele Elemente hat.

Aufgabe 3.3 (I + A). Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Seien $A \neq B \in \mathbf{P}$ Punkte und $\overline{AB}$ die sie verbindende Strecke. Dann gibt es in $\overline{AB}$ keine Punkte C, D mit $C \star A \star D$. Die Endpunkte von $\overline{AB}$ sind also bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt.
- (b) Seien $A \neq B \in \mathbf{P}$ Punkte und $\overrightarrow{AB}$ der Strahl von A durch B . Dann gibt es in $\overrightarrow{AB}$ keinen Punkt C mit $C \star A \star B$. Der Ausgangspunkt eines Strahls ist also eindeutig bestimmt. Ist C ein beliebiger, von A verschiedener Punkt auf $\overrightarrow{AB}$, dann ist $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.
- (c) Seien $A \neq B \in \mathbf{P}$ Punkte und $\overrightarrow{AB}$ der Strahl von A durch B . Dann gibt es ein $C \in \mathbf{P}$, so dass die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ einander entgegengesetzt sind, und der Strahl $\overrightarrow{AC}$ ist mit dieser Eigenschaft eindeutig. Zu jedem Strahl gibt es also genau einen entgegengesetzten Strahl.

Aufgabe 3.4. Zeigen Sie, dass die Definition der Anordnung auf $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ wie in (3.1) äquivalent zu folgender Definition ist.

Es gilt $A \star B \star C$, wenn $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ paarweise verschieden und kollinear sind und mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$a_1 < b_1 < c_1, \quad a_2 < b_2 < c_2, \quad a_1 > b_1 > c_1 \quad \text{oder} \quad a_2 > b_2 > c_2.$$

Aufgabe 3.5 (H). Beweisen Sie Proposition 3.25.

Aufgabe 3.6 (I + A). Seien $A, B, C, B', C' \in \mathbf{P}$ derart gegeben, dass A, B, C und A, B', C' jeweils in allgemeiner Lage sind. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

- (i) $\angle BAC = \angle B'AC'$,
- (ii) Ein Punkt $P \in \mathbf{P}$ liegt genau im Inneren von $\angle BAC$, wenn er im Inneren von $\angle B'AC'$ liegt.

Aufgabe 3.7 (I + A). Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbf{P}$ heißt **konvex**, falls für alle $A \neq B \in S$ auch die gesamte Strecke $\overline{AB}$ in S enthalten ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Beliebige Durchschnitte konvexer Mengen sind wieder konvex. Die Vereinigung zweier konvexer Mengen ist jedoch nicht notwendig konvex.

(b) Für eine beliebige Gerade $g \in \mathbf{G}$ sind die durch g begrenzten Halbebenen $S_1(g)$ und $S_2(g)$ konvex.

(c) Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage. Dann sind die Mengen

$$I_{\angle BAC} := \{P \in \mathbf{P} \mid P \text{ liegt im Inneren des Winkels } \angle BAC\},$$

$$I_{\triangle ABC} := \{P \in \mathbf{P} \mid P \text{ liegt im Inneren des Dreiecks } \triangle ABC\}$$

konvex.

Aufgabe 3.8 (H). Zeigen Sie, dass es einen Winkel gibt, der kein rechter Winkel ist.

Aufgabe 3.9 (H). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt das Kongruenzkriterium (SSW) für Dreiecke, also

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \iff (\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \text{ und } \angle BAC \simeq \angle B'A'C').$$

(b) Es gilt das Kongruenzkriterium (WWS) für Dreiecke, also

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \iff (\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \angle BAC \simeq \angle B'A'C' \text{ und } \angle ACB \simeq \angle A'C'B').$$

Aufgabe 3.10 (H + P). Seien $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbf{P}$ paarweise verschiedene Punkte, so dass je drei von ihnen nicht kollinear sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2}$ und $\overleftrightarrow{A_1D_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2D_2}$.

(ii) $\overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2}$, $\overline{A_1B_1} \cong \overline{A_2B_2}$ und die Punkte B_1, B_2 liegen auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{A_1D_1}$.

Ist dies der Fall, so heißt das 4-Tupel $\Pi A_1A_2A_3A_4 := (A_1, A_2, A_3, A_4)$ ein **Parallelogramm**.

Aufgabe 3.11 (H + P). Seien A_1, A_2 zwei Punkte auf einer Geraden g , und seien B_1, C_1, B_2, C_2 Punkte auf derselben Seite von g , so dass A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 jeweils in allgemeiner Lage sind. Dann gilt

$$\overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2} \text{ und } \overleftrightarrow{A_1C_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2} \implies \angle B_1A_1C_1 \simeq \angle B_2A_2C_2.$$

Aufgabe 3.12 (H). Sei $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade. Die **Geradenspiegelung** σ_g an g ist dann die Abbildung $\sigma_g : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$, die die Gerade g punktweise festlässt und einen beliebigen Punkt $A \notin g$ auf den eindeutigen Punkt $A' \in \ell_g A$ mit

$$A \star L_g A \star A' \text{ und } \overline{B L_g A} \cong \overline{A L_g A}$$

schickt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung σ_g ist bijektiv, genauer gilt $\sigma_g \circ \sigma_g = \text{id}_{\mathbf{P}}$.

(b) Für $A \neq B \in \mathbf{P}$ gilt $\overline{AB} \cong \overline{\sigma_g(A)\sigma_g(B)}$.

Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit von der Lage der Punkte A, B zur Geraden g .

(c) Für $A, B \in \mathbf{P}$ gibt es eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ mit $\sigma_g(A) = B$.

- (d) Für $A, B, C \in \mathbf{P}$ mit $A \neq B$ und $A \neq C$ gibt es eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ mit $\sigma_g(A) = A$ und $\sigma_g(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$.

Aufgabe 3.13 (H). Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ drei Punkte in allgemeiner Lage, und sei $P \in \mathbf{P}$ mit $A \star P \star B$.

- (a) Zeigen Sie, dass im Fall, dass $\angle BAC$ ein rechter Winkel ist, die Abschätzung

$$\overline{AC} < \overline{PC} < \overline{BC}$$

gilt. Insbesondere ist $\overline{BC}$ die längste Seite des Dreiecks $\triangle ABC$.

- (b) Folgern Sie aus (a), dass ganz allgemein stets $\overline{PC} < \overline{AC}$ oder $\overline{PC} < \overline{BC}$ gilt.

- (c) Sei $K = K(M, A) \subseteq \mathbf{P}$ ein Kreis. Das **Innere** I_K von K sei die Menge

$$I_K := \{P \in \mathbf{P} \mid P = M \text{ oder } \overline{MP} < \overline{MA}\}.$$

Zeigen Sie, dass $I_K \cup K$ konvex im Sinne von Übungsaufgabe 3.7 ist.

- (d) Wir nehmen nun an, dass in $\mathbb{H}$ zusätzlich (P) gilt. Seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ in allgemeiner Lage und K der Umkreis von $\triangle ABC$. Folgern Sie dann aus (c), dass alle von A, B, C verschiedenen Punkte auf den Seiten von $\triangle ABC$ in I_K liegen.

Aufgabe 3.14 (Höhenformel). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit Winkelgrößen (α, β, γ) und Seitenlängen (a, b, c) , und seien A', B', C' die Fußpunkte der Höhen h_A, h_B, h_C . Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten.

$$\|A - A'\| = c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma,$$

$$\|B - B'\| = a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha,$$

$$\|C - C'\| = b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta.$$

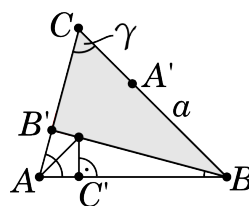


Abbildung 3.5: Zum Ablesen markiert: $\|B - B'\| = a \cdot \sin \gamma$.

Euklidische Geometrie

Im Kontext von Hilbertebenen haben wir bereits eine Vielzahl klassischer geometrischer Sätze gezeigt. Es stellt sich jedoch heraus, dass einige klassische Aussagen in beliebigen Hilbertebenen nicht korrekt sind. So werden wir in Kapitel 5 eine Hilbertebene konstruieren, in der das Parallelenaxiom und damit auch der starke Wechselwinkelsatz 3.49 nicht gelten. Offensichtlich müssen wir also unserem Axiomensatz noch weitere Axiome hinzufügen. So kommen wir zum Begriff der *euklidischen Ebene*, in der uns alle Objekte und Schlussweisen zur Verfügung stehen, die in Euklids Elementen eine Rolle spielen. Über den Hauptsatz für euklidische Ebenen 4.8 sehen wir ein, dass sich alle euklidischen Ebenen in geeigneter Weise identifizieren lassen, so dass es genügt, die Geometrie in einem Standardmodell zu untersuchen.

4.1 Das Vollständigkeitsaxiom

Für die Identifikation einer gegebenen Hilbertebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ mit der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$ konstruiert man ein Koordinatensystem, das eine gegebene Gerade bijektiv auf die x -Achse abbildet. Damit dies möglich ist, muss die zugrundeliegende Hilbertebene bestimmte Vollständigkeitseigenschaften erfüllen. Wir erinnern zunächst an das aus der Analysis bekannte

Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen Sei (S, T) ein Dedekindschnitt von $\mathbb{R}$, d. h. ein Paar (S, T) nichtleerer Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $S \cup T = \mathbb{R}$ und $p < q$ für alle $p \in S$ und alle $q \in T$. Dann gibt es genau ein $r \in \mathbb{R}$ mit $p \leq r \leq q$ für alle $p \in S$ und alle $q \in T$. Insbesondere ist dann

$$\begin{array}{ll} \text{entweder} & S = (-\infty, r) \text{ und } T = [r, \infty) \\ \text{oder} & S = (-\infty, r] \text{ und } T = (r, \infty). \end{array}$$

Wir bemerken, dass die Ungleichung $p < q$ für alle $p \in S$ und alle $q \in T$ aus der obigen Definition eines Dedekindschnitts von $\mathbb{R}$ insbesondere impliziert, dass kein Punkt aus S zwischen zwei Punkten aus T liegt und kein Punkt aus T zwischen zwei Punkten aus S . Die nachfolgende Übertragung des Begriffs des Dedekindschnitts in unsere Situation ist daher naheliegend.

Definition 4.1 (I + A). Ein *Dedekindschnitt* einer Geraden $g \in \mathbf{G}$ ist ein Paar (s, t) nichtleerer Teilmengen von g mit

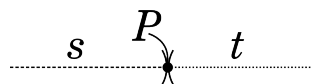
- $s \cup t = g$.
- Kein Punkt von t liegt zwischen zwei Punkten aus s , für beliebige $P \neq Q \in s$ gilt also $\overline{PQ} \subseteq s$.
- Kein Punkt von s liegt zwischen zwei Punkten aus t , für beliebige $P \neq Q \in t$ gilt also $\overline{PQ} \subseteq t$.

Definition 4.2 (H). Die Hilbertebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ erfüllt das **Vollständigkeitsaxiom**, wenn gilt:

(V) Für jede Gerade $g \in \mathbf{G}$ und jeden Dedekindschnitt (s, t) von g gibt es genau einen Punkt $P \in \mathbf{P}$, so dass für alle $A \in s, B \in t$ genau eine der folgenden drei Aussagen gilt.

$$P = A, \quad P = B \quad \text{oder} \quad A \star P \star B.$$

Insbesondere ist dann entweder s ein Strahl auf g und t ist das Komplement von s , oder t ist ein Strahl auf g und s ist das Komplement von t .



Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene, in der das Vollständigkeitsaxiom (V) gilt.“ schreiben wir künftig auch kurz „(H + V)“.

Beispiel 4.3. (a) $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ erfüllt das Vollständigkeitsaxiom (V),

denn: Sei $g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ eine Gerade, und sei (s, t) ein Dedekindschnitt von g . Für beliebige aber feste $A \neq B \in g$ schreiben wir

$$g = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

und setzen

$$S := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda A + (1 - \lambda)B \in s\} \quad \text{und} \quad T := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda A + (1 - \lambda)B \in t\}.$$

Wegen $g = s \cup t$ gilt hierbei $\mathbb{R} = S \cup T$. Nun sind entweder alle $p \in S$ kleiner als alle $q \in T$ oder umgekehrt, da es sonst $p_1, p_2 \in S$ und $q_1, q_2 \in T$ gäbe mit $p_1 > q_1$ und $p_2 < q_2$. Zwangsläufig läge für diese Punkte einer der folgenden drei Fälle vor.

Fall 1: $q_1 > p_2$. Dann gälte $p_1 > q_1 > p_2$, und es folgte schnell die Existenz eines Punktes in t , der zwischen zwei Punkten von s liegt.

Fall 2: $q_1 = p_2$. Unter dieser Voraussetzung wären S und T und damit auch s und t nicht disjunkt.

Fall 3: $q_1 < p_2$. Hier ergäbe sich $q_1 < p_2 < q_2$, und es folgte schnell die Existenz eines Punktes in s , der zwischen zwei Punkten von t liegt.

Da alle drei Möglichkeiten zu einem Widerspruch führen, müssen tatsächlich alle $p \in S$ kleiner als alle $q \in T$ sein oder umgekehrt. Nehmen wir ohne Einschränkung an, für alle $p \in S$ und $q \in T$ gelte $p < q$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen gibt es genau ein $r \in \mathbb{R}$ mit

$p \leq r \leq q$ für alle $p \in S$ und alle $q \in T$. Dies ist äquivalent dazu, dass genau ein $P \in g$ existiert, so dass für alle $A \in s$ und alle $B \in t$ genau eine der folgenden Aussagen gilt.

$$P = A, \quad P = B \quad \text{oder} \quad A \star P \star B.$$

Damit ist die Gültigkeit von (V) nachgewiesen. #

(b) $\mathbb{A}^2(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})$ erfüllt das Vollständigkeitsaxiom (V) nicht,

denn: Dort lässt sich die x -Achse als die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$s = \{(x, 0) \in (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})^2 \mid x < \pi\} \quad \text{und} \quad t = \{(x, 0) \in (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})^2 \mid x > \pi\}$$

schreiben. Offenbar ist (s, t) ein Dedekindschnitt der x -Achse. Ein Punkt P wie in (V) gefordert existiert aber nicht, da π transzendent ist und somit nicht in $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ liegt. #

Satz 4.4 (Archimedisches Axiom, **H + V**). Es seien $A \neq B$ sowie $A' \neq B'$ Punkte aus **P**. Seien induktiv für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Punkte A'_k auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ durch folgende Vorschrift eindeutig bestimmt.

- $A'_0 := A'$,
- A'_1 ist der eindeutige Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ mit $\overline{A'_0 A'_1} \cong \overline{AB}$,
- für alle natürlichen Zahlen $k \geq 2$ ist A'_k der eindeutig bestimmte Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ mit $\overline{A'_{k-2} \star A'_{k-1} \star A'_k} \cong \overline{AB}$.

Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit $A' \star B' \star A'_n$.

Beweis. Sei $g := \overleftarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{A'C'}$ der zu $\overrightarrow{A'B'}$ entgegengesetzte Strahl. Wir setzen

$$s := \{P \in g \mid \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } A' \star P \star A'_n\} \cup \overrightarrow{A'C'},$$

$$t := g \setminus s.$$

Im Falle $t = \emptyset$ ist $s = g$, und insbesondere liegt der Punkt B' in s . Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A' \star B' \star A'_n$. Wir nehmen daher im Folgenden $t \neq \emptyset$ an. Dann ist (s, t) ein Dedekindschnitt von g ,

denn: Offenbar ist g die disjunkte Vereinigung der beiden nichtleeren Teilmengen s und t . Darüber hinaus liegt kein Punkt von s zwischen zwei Punkten von t . Sind nämlich $P, P' \in t$ und $Q \in s$ mit $P \star Q \star P'$, dann liegt mit P und P' auch der Punkt Q auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$. Nach Konstruktion von s gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A' \star Q \star A'_n$. Nach Konstruktion gilt nun entweder $A' \star P \star Q \star P'$ oder $A' \star P' \star Q \star P$, woraus sich entweder $A' \star P \star Q \star A'_n$ oder $A' \star P' \star Q \star A'_n$ ergibt, also entweder $A' \star P \star A'_n$ oder $A' \star P' \star A'_n$, im Widerspruch zu $P, P' \in t$. Analog zeigt man, dass kein Punkt von t zwischen zwei Punkten von s liegt. #

Aufgrund des Vollständigkeitsaxioms existiert ein Punkt $U \in g$, so dass für alle $P \in s$ und alle $Q \in t$ eine der drei Möglichkeiten $U = P$, $U = Q$ oder $P \star U \star Q$ gilt.

Der Punkt U liegt nicht in s ,

denn: Nehmen wir an, U läge in s . Wegen $A' \in s$ und $t \subseteq \overrightarrow{A'B'}$ folgte aus der obigen Eigenschaft $U \in \overrightarrow{A'B'}$. Nach Konstruktion von s gäbe es somit ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A' \star U \star A'_n$. Sei nun Q ein Punkt aus der Menge t . Dieser ist insbesondere verschieden von den Punkten A', A'_n , und es gälte offenbar $A' \star A'_n \star Q$, denn sowohl $Q \star A' \star A'_n$ als auch $A' \star Q \star A'_n$ führten sofort zum Widerspruch. Wir erhielten $A' \star U \star A'_n \star Q$ und insbesondere $U \star A'_n \star Q$, was wegen $A'_n \in s$ und $Q \in t$ im Widerspruch zur charakterisierenden Eigenschaft von U steht. #

Der Punkt U liegt auch nicht in t ,

denn: Nehmen wir an, U läge in t und V wäre der eindeutig bestimmte Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{UC'}$ mit $\overline{UV} \cong \overline{AB}$. Im Fall $V \in t$ läge V auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$. Das lieferte $A' \star V \star U$, was wegen $A' \in s$ im Widerspruch zur Konstruktion von U steht. Also müsste V in der Menge s liegen. Läge V speziell auf dem Strahl $\overrightarrow{A'C'}$, so folgte $V \star A' \star U$, also $\overline{A'U} < \overline{VU} \cong \overline{A'A'_1}$, so dass im Widerspruch zu $U \in t$ die Anordnung $V \star A' \star U \star A'_1$ gälte. V läge somit nicht auf dem Strahl $\overrightarrow{A'C'}$, und es gäbe eine natürliche Zahl n mit $A' \star V \star A'_n$. Wegen $U \in t$ gälte weiterhin $A' \star A'_n \star U$ und somit $A' \star V \star A'_n \star U$. Es folgte $\overline{A'_n U} < \overline{UV}$, was wegen $\overline{UV} \cong \overline{A'_n A'_{n+1}}$ mittels 3.18 zu $\overline{A'_n U} < \overline{A'_n A'_{n+1}}$ führte. Das wiederum implizierte $A'_n \star U \star A'_{n+1}$. Insgesamt erhielten wir $A' \star V \star A'_n \star U \star A'_{n+1}$ und deshalb $A' \star U \star A'_{n+1}$. Weil die Punkte A' und A'_{n+1} in s lägen, läge auch der Punkt U in s , was ein Widerspruch ist. #

Unsere Annahme $t \neq \emptyset$ ist damit nicht haltbar. $\square$

4.2 Euklidische Ebenen

Wir wollen nun den bereits in der Einleitung dieses Kapitels beschriebenen Begriff der euklidischen Ebene in einer Definition festhalten.

Definition 4.5. Eine Hilbertebene, die das Vollständigkeitsaxiom (V) und das Parallelenaxiom (P) erfüllt, heißt **euklidische Ebene**.

Für „Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine euklidische Ebene.“ schreiben wir künftig auch kurz „(E)“.

Definition 4.6. Ein Isomorphismus im Sinne von Definition 3.29 zwischen zwei euklidischen Ebenen heißt ein **Isomorphismus euklidischer Ebenen**. Ein Isomorphismus von einer euklidischen Ebene $\tilde{\mathbb{E}}$ auf sich selbst heißt ein **Automorphismus** von $\tilde{\mathbb{E}}$. Die Menge der Automorphismen von $\tilde{\mathbb{E}}$ wird mit $\text{Aut}(\tilde{\mathbb{E}})$ bezeichnet.

Beispiel 4.7. Nach den Beispielen 2.12, 3.33 und 4.3 ist die reelle affine Standardebene $\mathbb{E} := \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq)$ eine euklidische Ebene. Wir nennen sie das kartesische Modell der **euklidischen Standardebene**.

Das zentrale Resultat in der Theorie der euklidischen Ebenen ist der folgende Satz.

Satz 4.8 (Hauptsatz für euklidische Ebenen). Jede euklidische Ebene ist isomorph zu $\mathbb{E}$.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr aufwändig und wird hier nicht durchgeführt. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in den Abschnitten 4.3 bis 4.8 unseres Lehrbuchs „Grundlagen der ebenen Geometrie“.

Eine Folgerung ist, dass wir den Beweis einer behaupteten Aussage in einer beliebigen euklidischen Ebene stets in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$ führen dürfen und dabei sowohl analytische als auch synthetische Methoden heranziehen können. Für „Sei $\mathbb{E}$ die euklidische Standardebene.“ schreiben wir künftig auch kurz $(\mathbb{E})$.

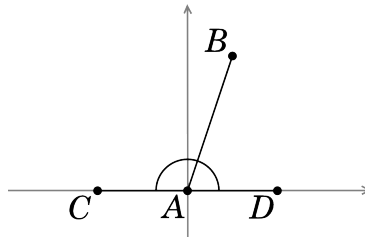
Als ein erstes Beispiel wollen wir die synthetisch eingeführten Begriffe des Ergänzungswinkels und des Inneren eines Winkels mit dem in Abschnitt 1.3 eingeführten analytischen Winkelmaß quantitativ untersuchen:

Proposition 4.9 $(\mathbb{E})$. Seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ vier Punkte, so dass sowohl A, B, C als auch A, B, D in allgemeiner Lage sind. Dann gilt

- (a) Sind $\angle CAB, \angle BAD$ Ergänzungswinkel, dann gilt $\angle CAB + \angle BAD = \pi$. Insbesondere ist $\angle CAB$ genau dann ein rechter Winkel, wenn $\angle CAB = \frac{\pi}{2}$ ist.
- (b) Liegt der Punkt D im Inneren von $\angle BAC$, so gilt $\angle BAD + \angle DAC = \angle BAC$.

Beweis. Wir beweisen zunächst (a). Seien also $\angle CAB$ und $\angle BAD$ Ergänzungswinkel. Dann gilt $C \star A \star D$, so dass es eine Bewegung gibt, die A auf den Ursprung und C, D auf Punkte auf der x -Achse abbildet, die auf verschiedenen Seiten von A liegen. Da Bewegungen Winkelgrößen unverändert lassen, können wir ohne Einschränkung von dieser Situation ausgehen. Weiter können wir C und D durch beliebige Punkte ihres jeweiligen von A ausgehenden Strahls ersetzen. Insgesamt können wir daher für geeignete $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ohne Einschränkung annehmen, es gelte

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Mit (1.14) folgt

$$\cos \angle CAB = \frac{\langle C | B \rangle}{\|C\| \cdot \|B\|} = \frac{-b_1}{\|B\|} = -\frac{\langle B | D \rangle}{\|B\| \cdot \|D\|} = -\cos \angle BAD.$$

Da beide Winkelmaße im Intervall $(0, \pi)$ liegen, haben wir damit (a) gezeigt.

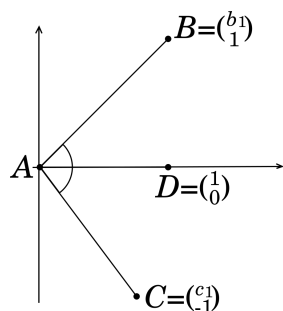
Beim Beweis von (b) können wir ohne Einschränkung von

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ausgehen. Da D im Inneren des Winkels $\angle BAC$ liegt, liegen B und C nach Lemma 3.22 auf verschiedenen Seiten der Geraden $\overleftrightarrow{AD}$, also der x -Achse. Ohne Einschränkung liege B in der

oberen und C in der unteren Halbebene. Weil wir weiter B und C durch beliebige Punkte ihres jeweiligen von A ausgehenden Strahls ersetzen können, dürfen wir sogar annehmen, es gelte

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Wegen $C \nmid_{\overrightarrow{AB}} D$ folgt mit den Überlegungen aus Beispiel 3.3

$$\begin{aligned} -\operatorname{sgn}(c_1 + b_1) &= \operatorname{sgn}\left(\left\langle \begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right\rangle\right) = \operatorname{sgn}(\langle C \mid B^\perp \rangle) \\ &= \operatorname{sgn}(\langle D \mid B^\perp \rangle) = \operatorname{sgn}\left(\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right\rangle\right) = -\operatorname{sgn}(1) \end{aligned}$$

und somit $b_1 + c_1 > 0$. Mit (1.18) erhalten wir

$$\sin \angle BAD = \frac{|\det(B \ D)|}{\|B\| \cdot \|D\|} = \frac{1}{\|B\|} \quad \text{und} \quad \sin \angle DAC = \frac{|\det(D \ C)|}{\|D\| \cdot \|C\|} = \frac{1}{\|C\|}.$$

Mit den Additionstheoremen von Sinus und Kosinus folgt nun

$$\begin{aligned} \sin(\angle BAD + \angle DAC) &= \sin \angle BAD \cos \angle DAC + \cos \angle BAD \sin \angle DAC \\ &= \frac{1}{\|B\|} \frac{c_1}{\|C\|} + \frac{b_1}{\|B\|} \frac{1}{\|C\|} = \frac{c_1 + b_1}{\|B\| \|C\|} > 0, \\ \cos(\angle BAD + \angle DAC) &= \cos \angle BAD \cos \angle DAC - \sin \angle BAD \sin \angle DAC \\ &= \frac{b_1}{\|B\|} \frac{c_1}{\|C\|} - \frac{1}{\|B\|} \frac{1}{\|C\|} = \frac{b_1 c_1 - 1}{\|B\| \|C\|} = \frac{\langle B \mid C \rangle}{\|B\| \|C\|} = \cos \angle BAC. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich schließlich wie verlangt $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$. □

4.3 Kreise

Kreise als geometrische Figuren haben wir bereits in Abschnitt 3.9 eingeführt. Da wir nun auch analytisch argumentieren dürfen, bietet sich aber eine etwas eingängigere Notation an. Von nun an schreiben wir für alle $M \in \mathbb{R}^2$ und alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$K_r(M) := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - M\| = r\}$$

Wir hatten schon in Proposition 3.69 festgestellt, dass ein Kreis mit einer Geraden durch seinen Mittelpunkt immer genau zwei Schnittpunkte hat. Wir wollen nun den Durchschnitt eines Kreises mit einer beliebigen Geraden studieren.

(a) Genau dann besteht $K \cap g$ aus zwei Punkten, wenn

$$\|P - M\|^2 < r^2 + \langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|} \rangle^2$$

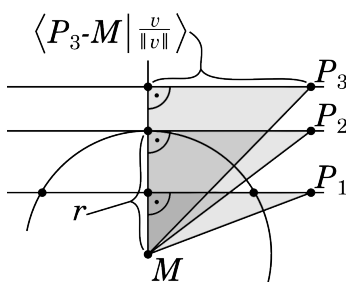
(b) Genau dann besteht $K \cap g$ aus einem Punkt, wenn

$$\|P - M\|^2 = r^2 + \langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|} \rangle^2$$

(c) Genau dann ist $K \cap g$ leer, wenn

$$\|P - M\|^2 > r^2 + \langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|} \rangle^2$$

In den Fällen (b) und (c) besitzt g keine Punkte im Inneren von K .



Beweis. Sei $Q = P + \lambda v \in \mathfrak{g}$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & Q \in K_r(M) \\ \iff & r = \|Q - M\| \\ \iff & r^2 = \|Q - M\|^2 = \langle Q - M \mid Q - M \rangle = \langle P + \lambda v - M \mid P + \lambda v - M \rangle \\ & \quad = \|P - M\|^2 + 2\lambda \langle P - M \mid v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2 \\ \iff & 0 = \|v\|^2 \cdot \lambda^2 + 2\langle P - M \mid v \rangle \cdot \lambda + (\|P - M\|^2 - r^2) \end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Gleichung in λ , deren Lösungsmenge in Abhängigkeit vom Vorzeichen $\in \{+, 0, -\}$ ihrer Diskriminante

$$\begin{aligned} \text{Disk} &= (2\langle P - M \mid v \rangle)^2 - 4 \cdot \|v\|^2 \cdot (\|P - M\|^2 - r^2) \\ &= -4\|v\|^2 \cdot (\|P - M\|^2 - r^2 - \langle P - M \mid \frac{v}{\|v\|} \rangle^2) \end{aligned}$$

zweielementig, einelementig oder leer ist. In den Fällen (b) und (c) gilt wegen $Q \in g = g_{Q,v}$

$$\|Q - M\|^2 \geq r^2 + \langle Q - M \mid \frac{v}{\|v\|} \rangle^2 \geq r^2,$$

so dass g keinen Punkt im Inneren von K besitzt. $\square$

Korollar 4.11 ($\mathbb{E}$). Sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $g = g_{P,v}$ eine Gerade in $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ mit $P, v \in \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0$. Sei weiter Q ein Element im Durchschnitt $K \cap g$. Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

- (i) g ist Tangente an K ,
- (ii) $\angle(Q - M, v) = \frac{\pi}{2}$.

Beweis. Ohne Einschränkung setzen wir $P = Q$. Nach Proposition 4.10 gilt dann

$$g \text{ Tangente an } K \iff \|Q - M\|^2 = r^2 + \langle Q - M \mid \frac{v}{\|v\|} \rangle^2.$$

Da wir Q als Element des Kreises angenommen hatten, ist $\|Q - M\| = r$, und wir haben

$$\begin{aligned} g \text{ Tangente an } K &\iff \langle Q - M \mid \frac{v}{\|v\|} \rangle^2 = 0 \\ &\iff (Q - M) \perp v \\ &\iff \angle(Q - M, v) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Wir wissen jetzt, wie viele Schnittpunkte eine gegebene Gerade mit einem gegebenen Kreis hat, und wollen noch etwas über die Lage dieser Schnittpunkte in Erfahrung bringen. Zunächst führen wir dazu eine Hilfsgröße ein.

Definition 4.12 ($\mathbb{E}$). Sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt. Dann heißt

$$\kappa_K(P) := \|P - M\|^2 - r^2$$

die **Potenz** von P in Bezug auf K .

Offensichtlich gibt das Vorzeichen der Potenz Auskunft darüber, ob der Punkt P in K , auf K oder außerhalb von K liegt. Der Betrag der Potenz liefert dafür Informationen über die (relative) Lage der Schnittpunkte von Sekanten oder Tangenten von K in P .

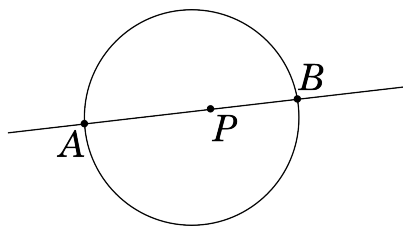


Abbildung 4.2: Eine *Sehne* eines Kreises K ist die Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten einer gegebenen Sekante von K .

Satz 4.13 (Zwei-Sehnen-Satz, $\mathbb{E}$). Sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $P \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ ein Punkt. Sei weiter g eine Sekante von K durch P mit $g \cap K = \{A, B\}$. Dann gilt

$$\|P - A\| \cdot \|P - B\| = |\kappa_K(P)|,$$

für alle durch P verlaufenden Sekanten von K ist also das Produkt der sogenannten *Sehnenabschnitte* gleich.

Beweis. Sei $g_{P,v}$ eine Sekante durch P mit $\|v\| = 1$. Genau dann liegt $Q := P + \lambda v$ im Durchschnitt $g_{P,v} \cap K$, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \|v\|^2 \cdot \lambda^2 + 2\langle P - M | v \rangle \cdot \lambda + (\|P - M\|^2 - r^2) \\ &= \lambda^2 + 2\langle P - M | v \rangle \cdot \lambda + \kappa_K(P) \end{aligned}$$

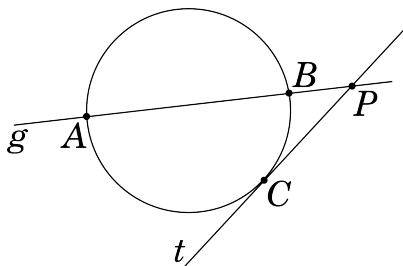
gilt; das ist genau wie im Beweis von Proposition 4.10. Da $g_{P,v}$ eine Sekante von K ist, hat diese quadratische Gleichung in λ zwei reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es gilt also $\kappa_K(P) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ und ohne Einschränkung $A = P + \lambda_1 v$ und $B = P + \lambda_2 v$. Es folgt die Behauptung

$$\|P - A\| \cdot \|P - B\| = \|\lambda_1 v\| \cdot \|\lambda_2 v\| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2| = |\kappa_K(P)|.$$

□

Satz 4.14 (Sehnen-Tangenten-Satz, $\mathbb{E}$). Sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt außerhalb von K . Seien weiter g eine Sekante von K durch P mit $g \cap K =: \{A, B\}$ und t eine Tangente an K durch P mit $t \cap K =: \{C\}$. Dann gilt

$$\|P - A\| \cdot \|P - B\| = \|P - C\|^2 = |\kappa_K(P)|.$$



Beweis. Nach dem Zwei-Sehnen-Satz 4.13 ist nur das zweite Gleichheitszeichen zu zeigen. Des-
sen Beweis erfolgt analog, außer, dass es statt zwei verschiedenen Nullstellen λ_1, λ_2 der qua-
dratischen Gleichung nurmehr eine doppelte Nullstelle μ gibt. $\square$

Wir wollen uns jetzt dem Problem des Durchschnitts zweier Kreise widmen und betrachten da-
zu die Menge der Punkte, die bezüglich zweier verschiedener Kreise die gleiche Potenz haben.
Es stellt sich heraus, dass diese eine Gerade ist, deren Durchschnitte mit je einem der betei-
ligten Kreise mit dem Durchschnitt der Kreise untereinander übereinstimmen. So lässt sich die
Frage des Durchschnitts zweier Kreise auf die bereits behandelte Frage des Durchschnitts eines
Kreises mit einer Geraden zurückführen.

Proposition 4.15 ($\mathbb{E}$). Für je zwei Kreise $K_1 = K_r(M)$ und $K_2 = K_s(N)$ mit $M \neq N \in \mathbb{R}^2$ und
 $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

- (a) $p_{K_1, K_2} := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \kappa_{K_1}(P) = \kappa_{K_2}(P)\}$ ist eine Gerade in $\mathbb{E}$, die sogenannte **Potenzgerade** von
 K_1 und K_2 .
- (b) $p_{K_1, K_2} \perp \overleftrightarrow{MN}$,
- (c) $K_1 \cap K_2 = K_1 \cap p_{K_1, K_2} = K_2 \cap p_{K_1, K_2}$.

Insbesondere schneiden sich zwei verschiedene Kreise in höchstens zwei Punkten.

Beweis. Zum Nachweis von (a) sei $P \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P \in p_{K_1, K_2} &\iff \kappa_{K_1}(P) = \kappa_{K_2}(P) \\ &\iff \|P - M\|^2 - r^2 = \|P - N\|^2 - s^2 \\ &\iff \|P\|^2 - 2\langle P, M \rangle + \|M\|^2 - r^2 = \|P\|^2 - 2\langle P, N \rangle + \|N\|^2 - s^2 \\ &\iff \langle P, N - M \rangle = \frac{1}{2}(r^2 - s^2 + \|N\|^2 - \|M\|^2). \end{aligned}$$

Aufgrund von $M \neq N$ ist p_{K_1, K_2} insbesondere nichtleer. Ist nun $A \in p_{K_1, K_2}$ fixiert, so ergibt sich

$$P \in p_{K_1, K_2} \iff \langle P, N - M \rangle = \langle A, N - M \rangle \iff \langle P - A, N - M \rangle = 0.$$

Die obige Gleichung beschreibt genau die Hesse'sche Normalform der Geraden $g_{A, (N-M)^\perp}$,
was neben (a) auch (b) impliziert. Die erste Gleichung in (c) ergibt sich nun direkt aus der
Äquivalenz

$$\begin{aligned} P \in K_1 \cap K_2 &\iff \kappa_{K_1}(P) = 0 \text{ und } \kappa_{K_2}(P) = 0 \\ &\iff \kappa_{K_1}(P) = 0 \text{ und } \kappa_{K_1}(P) = \kappa_{K_2}(P) \\ &\iff P \in K \cap p_{K_1, K_2}, \end{aligned}$$

und die zweite Gleichung folgt aus Symmetriegründen. $\square$

Nachdem wir nun wissen, dass der Durchschnitt zweier verschiedener Kreise höchstens zwei
Elemente hat, wollen wir nun herausfinden, unter welchen Voraussetzungen es keinen, einen
oder zwei Schnittpunkte gibt. Dabei hilft uns das folgende Lemma.

Lemma 4.16 ($\mathbb{E}$). Sei φ eine Bewegung der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$, und sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt

$$\varphi(K_r(M)) = K_r(\varphi(M)),$$

insbesondere bilden also Bewegungen Kreise auf Kreise ab.

Beweis. Sei zunächst $P \in K_r(M)$ ein Punkt. Dann gilt mit den bekannten Bewegungseigenschaften $\|\varphi(M) - \varphi(P)\| = \|M - P\| = r$, so dass $\varphi(P)$ in $K_r(\varphi(M))$ liegt. Es folgt

$$\varphi(K_r(M)) \subseteq K_r(\varphi(M)).$$

Da nach Beispiel 3.30 mit φ auch φ^{-1} eine Bewegung ist, gilt analog

$$\varphi^{-1}(K_r(\varphi(M))) \subseteq K_r(\varphi^{-1} \circ \varphi(M)) = K_r(M).$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$K_r(M) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(K_r(M)) = \varphi^{-1}(\varphi(K_r(M))) \subseteq \varphi^{-1}(K_r(\varphi(M))) \subseteq K_r(M),$$

so dass in allen Teilmengenbeziehungen Gleichheit gelten muss, was das Lemma zeigt. $\square$

Satz 4.17 (Kreis-Kreis-Schnitt-Eigenschaft, $\mathbb{E}$). Für zwei Kreise $K_1 = K_r(M)$ und $K_2 = K_s(N)$ mit $M, N \in \mathbb{R}^2$ und $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- (i) K_1 besitzt einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb von K_2 .²⁴
- (ii) $|K_1 \cap K_2| = 2$.

Beweis. Da im Fall $M = N$ stets sowohl Aussage (i) als auch Aussage (ii) falsch ist, können wir für den Rest des Beweises ohne Einschränkung $M \neq N$ annehmen, und da die Fragestellung unter Bewegungen invariant ist, sogar

$$K_1 = K_r\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad K_2 = K_s(N) \quad \text{mit} \quad N = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } n > 0.$$

Für einen Schnittpunkt $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} S \in K_1 \cap K_2 &\implies \|S - M\| = r \text{ und } \|S - N\| = s \\ &\implies x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } (x - n)^2 + y^2 = s^2 \\ &\implies 2xn - n^2 = x^2 - (x - n)^2 = r^2 - s^2 \\ &\implies x = \frac{r^2 - s^2 + n^2}{2n}. \end{aligned}$$

Die x -Koordinate eines Schnittpunkts ist also eindeutig. Da jeder Schnittpunkt insbesondere auf K_1 liegen muss, folgt daher

$$|K_1 \cap K_2| = 2 \iff y^2 = r^2 - \left(\frac{r^2 - s^2 + n^2}{2n}\right)^2 \text{ hat zwei Lösungen}$$

²⁴Aus Symmetriegründen besitzt dann auch K_2 einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb von K_1 .

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -r < \frac{r^2 - s^2 + n^2}{2n} < r \\
&\stackrel{n>0}{\Leftrightarrow} -2nr < r^2 - s^2 + n^2 < 2nr \\
&\Leftrightarrow (n-r)^2 < s^2 < (n+r)^2 \\
&\Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 < s^2 < \left\| \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ liegt innerhalb von } K_2 \text{ und } \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ liegt außerhalb von } K_2.
\end{aligned}$$

Es verbleibt zu zeigen, dass dies äquivalent dazu ist, dass es auf K_1 je irgendeinen Punkt innerhalb beziehungsweise außerhalb von K_2 gibt. Dem ist aber so,

denn: Aus der Analysis wissen wir, dass sich ein beliebiger Punkt $P \in K_1$ in der Form

$$P = P(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit einem } t \in \mathbb{R}$$

schreiben lässt. Durch den Abstand

$$\|P(t) - N\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + (n - r \cos t)^2} = \sqrt{r^2 - 2nr \cos t + n^2}$$

ist offenbar eine stetige Funktion in der Variablen $t \in \mathbb{R}$ gegeben. Wegen $n > 0$ nimmt diese ihre (globalen) Minima in $t \in 2\mathbb{Z}\pi$ und ihre (globalen) Maxima in $t \in (2\mathbb{Z} + 1)\pi$ an. Es ist also $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ derjenige Punkt von K_1 , der den kleinsten Abstand zu N hat, und $\begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}$ der Punkt von K_1 mit dem größten Abstand. Gibt es nun irgendwelche Punkte $A, B \in K_1$, so dass A innerhalb und B außerhalb von K_2 liegt, dann folgt mit dem soeben Bewiesenen

$$s > \|A - N\| \geq \left\| \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} - N \right\| \quad \text{und} \quad s < \|B - N\| \leq \left\| \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} - N \right\|.$$

Es liegt also auch $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ innerhalb und $\begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}$ außerhalb von K_2 . Da die andere Schlussrichtung trivial ist, folgt hieraus die Behauptung. #

□

Die gerade nachgewiesene Kreis-Kreis-Schnitt-Eigenschaft ist nicht besonders gut dafür geeignet, für zwei gegebene euklidische Kreise tatsächlich nachzuprüfen, ob sie sich schneiden. Das folgende, angenehmere Kriterium ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis von Satz 4.17 und macht auch eine Aussage, wenn zwei gegebene Kreise nur einen oder gar keinen Punkt gemeinsam haben.

Korollar 4.18 (E). Für $K_1 = K_r(M)$ und $K_2 = K_s(N)$ mit $M, N \in \mathbb{R}^2$ und $r \geq s \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\begin{aligned}
|||M - N|| - r| < s &\Leftrightarrow |K_1 \cap K_2| = 2, \\
|||M - N|| - r| = s &\Leftrightarrow |K_1 \cap K_2| = 1, \\
|||M - N|| - r| > s &\Leftrightarrow |K_1 \cap K_2| = 0.
\end{aligned}$$

Wir wollen im Rest dieses Abschnitts Kreise dazu verwenden, Dreiecke genauer zu studieren.

Satz 4.19 (Peripheriewinkelsatz, $\mathbb{E}$). Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ Punkte auf dem Kreis $K_r(U)$ um einen Punkt $U \in \mathbb{R}^2$ mit einem Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Seien weiter die Seiten der Gerade $\overleftrightarrow{AB}$ mit S_1 und S_2 bezeichnet. Dann gilt für einen von A und B verschiedenen Punkt $C \in K_r(U) \cap S_1$

$$\angle ACB = \begin{cases} \frac{1}{2}\angle AUB & \text{für } U \in S_1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } U \in \overleftrightarrow{AB}, \\ \pi - \frac{1}{2}\angle AUB & \text{für } U \in S_2. \end{cases}$$

Insbesondere ist die Winkelgröße $\angle ACB$ nicht von der Wahl des Punkts $C \in K_r(U) \cap S_1$ abhängig.

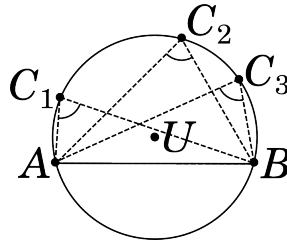


Abbildung 4.3: U und die drei Punkte C_1, C_2, C_3 liegen auf derselben Seite der Geraden zwischen A und B . Die markierten drei Winkel sind also kongruent.

Beweis. Sei $C \in K_r(U) \cap S_1$ ein beliebiger aber fest gewählter Punkt. Dann unterteilt das Dreieck $\triangle ABC$ das Innere des Kreises in vier durch die Lage auf den verschiedenen Seiten von $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ und $\overleftrightarrow{BC}$ definierte Teile und die drei Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ selbst. So ergeben sich für den Beweis des Satzes sieben Fälle, von denen wir hier allerdings nur einen behandeln wollen. Die übrigen Fälle werden in Übungsaufgabe 4.4 behandelt.

Liege dafür U im Sinne von Definition 3.26 im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$. Nach dem Satz von der Winkelsumme 1.42 für das Dreieck $\triangle AUB$ gilt

$$\angle AUB = \pi - \angle UAB - \angle UBA.$$

Da U insbesondere im Inneren der Winkel $\angle CAB$ und $\angle CBA$ liegt, gelten nach Proposition 4.9

$$\angle UAB = \angle CAB - \angle CAU \quad \text{und} \quad \angle UBA = \angle CBA - \angle CBU.$$

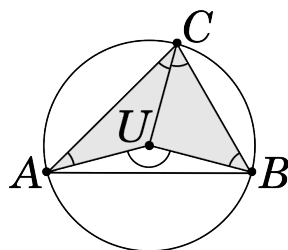
Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} \angle AUB &= \pi - (\angle CAB - \angle CAU) - (\angle CBA - \angle CBU) \\ &= (\pi - \angle CAB - \angle CBA) + (\angle CAU + \angle CBU). \end{aligned}$$

Mit dem Satz von der Winkelsumme 1.42 für das Dreieck $\triangle ABC$ folgt

$$\angle AUB = \angle ACB + (\angle CAU + \angle CBU).$$

Nun ist U auch der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$, so dass $\|U - A\| = \|U - B\| = \|U - C\|$ gilt und also die Dreiecke $\triangle AUC$ und $\triangle BUC$ gleichschenkelig sind.



Insbesondere gilt nach Proposition 3.53

$$\angle CAU \simeq \angle ACU \quad \text{und} \quad \angle CBU \simeq \angle UCB.$$

Setzen wir dies ein, erhalten wir

$$\angle AUB = \angle ACB + (\angle ACU + \angle UCB) = 2\angle ACB,$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen verwendet haben, dass U auch im Inneren des Winkels $\angle ACB$ liegt. Damit ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen. $\square$

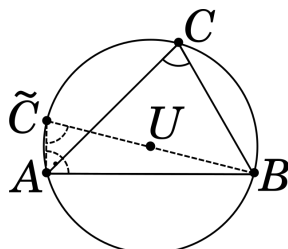
Korollar 4.20 (Satz des Thales, $\mathbb{E}$). Seien $A, U, B \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte mit $A \star U \star B$ und $\|U - A\| = \|U - B\|$. Ist dann $C \in \mathbb{R}^2$ ein dritter Punkt auf dem Kreis $K(U, A)$, so ist der Winkel $\angle ACB$ ein rechter.

Beweis. Das ist gerade der Peripheriewinkelsatz für $U \in \overleftrightarrow{AB}$. $\square$

Satz 4.21 (Verschärfung des Sinussatzes, $\mathbb{E}$). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Winkelgrößen (α, β, γ) , Seitenlängen (a, b, c) und Umkreis $K_r(U)$. Dann gilt

$$2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung liege U auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ wie C .²⁵ Nach dem bereits gezeigten Sinussatz 1.43 genügt es für den Beweis des Satzes $\sin \gamma = \frac{c}{2r}$ zu zeigen. Da U und C auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{AB}$ liegen, liegt der zweite Schnittpunkt $\tilde{C}$ der Geraden $\overleftrightarrow{BU}$ mit dem Kreis $K_r(U)$ auch auf derselben Seite wie C .



²⁵Ist dies nicht der Fall, so liegt U zwangsläufig auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{BC}$ wie A , und wir können nach einer Umbenennung der Punkte A, B, C denselben Beweis führen. Das schließt ausdrücklich auch den Fall mit ein, dass U auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

Nach dem Peripheriewinkelsatz 4.19 gilt also weiterhin $\angle A\tilde{C}B = \gamma$. Andererseits ist aber $\tilde{a} := \|\tilde{C} - B\| = 2r$ leicht zu berechnen, und nach dem Satz des Thales 4.20 ist $\angle \tilde{C}AB$ ein rechter Winkel. Da nach Korollar 1.44 der Sinus eines Winkels in rechtwinkligen Dreiecken als Quotient der Längen von Gegenkathete und Hypotenuse ausgedrückt werden kann, gilt die zu beweisende Beziehung

$$\sin \gamma = \frac{c}{\tilde{a}} = \frac{c}{2r}.$$

□

Satz 4.22 (Eulergleichung, $\mathbb{E}$). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Schwerpunkt S , Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U . Dann gilt die **Eulergleichung**

$$3S = H + 2U.$$

Beweis. Nach Definition gilt für den Schwerpunkt $3S = A + B + C$. Es folgt

$$\langle 3S \mid B - A \rangle = \langle A + B + C \mid B - A \rangle = \langle A + B \mid B - A \rangle + \langle C \mid B - A \rangle.$$

Nach Definition ist $B - A$ ein Normalenvektor der Geraden h_C bzw. m_{AB} . Die jeweiligen Hesse'schen Normalformen (vgl. Beispiel 3.3) lauten also

$$\begin{aligned} h_C &= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \langle P \mid B - A \rangle = \langle C \mid B - A \rangle\}, \\ m_{AB} &= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \langle P \mid B - A \rangle = \langle \frac{1}{2}(A + B) \mid B - A \rangle\}. \end{aligned}$$

Mit $H \in h_C$ und $U \in m_{AB}$ folgt

$$\begin{aligned} \langle H \mid B - A \rangle &= \langle C \mid B - A \rangle, \\ \langle 2U \mid B - A \rangle &= \langle A + B \mid B - A \rangle. \end{aligned}$$

Zusammengenommen ergibt sich

$$\langle 3S \mid B - A \rangle = \langle 2U \mid B - A \rangle + \langle H \mid B - A \rangle$$

und somit

$$\langle 3S - 2U - H \mid B - A \rangle = 0.$$

Analog kann man $\langle 3S - 2U - H \mid C - A \rangle = 0$ zeigen. Nun sind aber die Punkte A, B, C in allgemeiner Lage, so dass insbesondere $B - A$ und $C - A$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden. Da das Skalarprodukt in der euklidischen Standardebene nicht ausgeartet ist, folgt $3S - 2U - H = 0$ und somit der Satz. □

In Übungsaufgabe 4.6 zeigen wir, dass Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt genau dann paarweise verschieden sind, wenn das zugehörige Dreieck nicht gleichseitig ist. In diesem Fall gilt noch folgende erstaunliche Folgerung.

Korollar 4.23 ($\mathbb{E}$). Sei $\triangle ABC$ ein nicht gleichseitiges Dreieck mit Schwerpunkt S , Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U . Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

(a) $H \star S \star U$, insbesondere sind die Punkte H, S, U kollinear.

(b) $\frac{\|H-S\|}{\|U-S\|} = 2$.

Die Gerade $\overleftrightarrow{HU}$ heißt die **Eulergerade** von $\triangle ABC$.

Beweis. Aus $3S = H + 2U$ folgt $S = \frac{1}{3}H + \frac{2}{3}U$. Da nach Übungsaufgabe 4.6 in einem nicht gleichseitigen Dreieck der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt verschieden sind, folgt daraus $H \star S \star U$ sowie

$$\|H - S\| = \left\| \frac{2}{3}H - \frac{2}{3}U \right\| = 2 \cdot \left\| \frac{1}{3}H - \frac{1}{3}U \right\| = 2 \cdot \|S - U\| = 2 \cdot \|U - S\|.$$

□

4.4 Die Inversion am Kreis

Mit den Methoden von Abschnitt 4.3 studieren wir nun mit den Kreisspiegelungen eine neue Klasse von Abbildungen in der euklidischen Standardebene. Diese werden wir in Abschnitt 5.1 dazu benutzen, ein Modell einer Hilbertebene ohne Parallelenaxiom zu konstruieren. Wir werden in diesem Abschnitt nicht alle Resultate beweisen. Die fehlenden Beweise können in Abschnitt 5.3 unseres Lehrbuchs „Grundlagen der ebenen Geometrie“ nachgeschlagen werden.

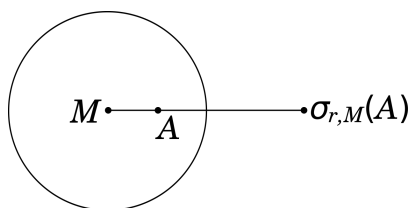
Definition 4.24 (E). Zu einem gegebenen Kreis $K_r(M)$ definieren wir die Abbildung

$$\sigma_{r,M} : \mathbb{R}^2 \setminus \{M\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{M\},$$

indem wir jedem $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ den eindeutig bestimmten Punkt $\sigma_{r,M}(A)$ auf dem Strahl $\overrightarrow{MA}$ mit

$$\|M - A\| \cdot \|M - \sigma_{r,M}(A)\| = r^2$$

zuordnen. Die Abbildung $\sigma_{r,M}$ heißt die **Inversion** oder auch **Spiegelung** am Kreis $K_r(M)$, und $\sigma_{r,M}(A)$ heißt das bezüglich $K_r(M)$ zu A **Inverse**.



Wir fixieren für den Rest dieses Abschnitts einen Kreis $K := K_r(M)$ und schreiben kurz σ für $\sigma_{r,M}$. Unmittelbar aus Definition 4.24 folgt

Proposition 4.25 (E). (a) $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$. Insbesondere ist σ bijektiv und zu sich selbst invers.

- (b) σ bildet Punkte im Inneren von K auf Punkte außerhalb von K ab und umgekehrt. Punkte auf K werden auf sich selbst abgebildet.

Ab sofort verwenden wir für einen beliebigen Punkt $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ die abkürzende Schreibweise $A' := \sigma(A)$. Wir geben nun im Fall, dass A innerhalb von K liegt, eine geometrische Konstruktion für A' an.

Proposition 4.26 (E). Sei $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ ein Punkt im Inneren von K . Seien weiter P und Q die Schnittpunkte der Lotgeraden $\ell_{\overrightarrow{AM}}A$ mit K und t_KP bzw. t_KQ die Tangenten an K in P bzw. Q . Dann schneiden sich die drei Geraden t_KP , t_KQ und $\overleftarrow{AM}$ im Punkt A' .

Beweis. Die drei Geraden t_KP , t_KQ und $\overleftarrow{AM}$ haben einen gemeinsamen Schnittpunkt S ,

denn: Der Schnittpunkt von $\overleftarrow{AM}$ mit t_KP heiße S_P , der mit t_KQ entsprechend S_Q . Wegen $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$ ist das Dreieck $\triangle MPQ$ gleichschenkelig. Nach dem SSrW-Kriterium 3.67 sind daher die Dreiecke $\triangle MAP$ und $\triangle MAQ$ kongruent, insbesondere gilt $\angle PMA \simeq \angle QMA$. Nach dem WSW-Kriterium 3.55 sind schließlich auch die Dreiecke $\triangle MPS_P$ und $\triangle MQS_Q$ kongruent, insbesondere gilt $\overline{MS_P} \cong \overline{MS_Q}$ und somit die Behauptung. #

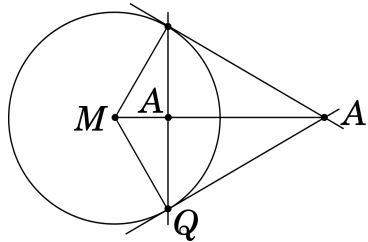
Die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\triangle MAP$ und $\triangle MPS$ haben dieselbe Winkelgre bei M . Mit Korollar 1.44 folgt

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - P\|} = \frac{\|M - P\|}{\|M - S\|},$$

also

$$\|M - A\| \cdot \|M - S\| = \|M - P\|^2 = r^2.$$

Da A' der einzige Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{MA}$ mit dieser Eigenschaft ist, gilt $S = A'$.



□

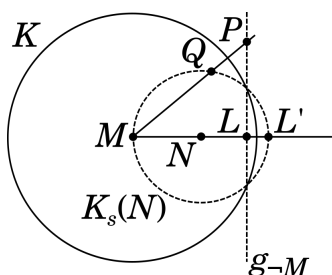
Proposition 4.27 (E). Sei $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$, $g_M \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ eine Gerade mit $M \in g_M$, $g_{-M} \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ eine Gerade mit $M \notin g_{-M}$ und $K_s(N)$ ein Kreis durch M . Dann gilt:

- (a) $\sigma(\overrightarrow{MA} \setminus \{M\}) = \overrightarrow{MA'} \setminus \{M\}$,
- (b) $\sigma(g_M \setminus \{M\}) = g_M \setminus \{M\}$.
- (c) $\sigma(g_{-M})$ ist ein Kreis durch M , bei dem der Punkt M entfernt ist.
- (d) $\sigma(K_s(N) \setminus \{M\})$ ist eine Gerade, die nicht durch M geht.

Beweis. Behauptung (a) folgt unmittelbar aus der Definition von σ und aus $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$, und Behauptung (b) folgt direkt aus (a).

Zum Beweis von Behauptung (c) betrachten wir nun $L := L_{g_{-M}}M$, seinen Spiegelpunkt L' und den Kreis

$$K_s(N) \quad \text{mit } N := \frac{1}{2}(M + L') \text{ und } s := \|L' - N\|.$$



Wir zeigen $\sigma(g_{-M}) = K_s(N) \setminus \{M\}$. Sei dafür zunächst $P \in g_{-M}$ beliebig. Dann hat die Gerade $\overleftrightarrow{MP}$ außer M noch einen zweiten Schnittpunkt Q mit dem Kreis $K_s(N)$,

denn: Sonst wäre $\overleftrightarrow{MP}$ die Tangente an $K_s(N)$ in M und stünde somit senkrecht auf $\overleftrightarrow{MN} = \ell_{g_{-M}}M$. Dann wären g_{-M} und $\overleftrightarrow{MP}$ parallele Geraden durch P , also identisch. Das kann nicht sein, da dann M auf g_{-M} läge. #

Nach dem Satz von Thales 4.20 ist $\angle MQL'$ ein rechter Winkel. Andererseits ist nach Konstruktion $\angle MLP$ ebenfalls ein rechter Winkel, so dass mit Korollar 1.44

$$\frac{\|M - Q\|}{\|M - L'\|} = \frac{\|M - L\|}{\|M - P\|}$$

folgt. Mit Definition 4.24 erhalten wir

$$\|M - P\| \cdot \|M - Q\| = \|M - L\| \cdot \|M - L'\| = r^2$$

und somit $P' = Q \in K_s(N) \setminus \{M\}$.

Für einen beliebigen Punkt $Q \in K_s(N) \setminus \{M\}$ sind umgekehrt die Geraden $\overleftrightarrow{MQ}$ und g_{-M} nichtparallel,

denn: Sonst stünde $\overleftrightarrow{MQ}$ orthogonal auf $\overleftrightarrow{MN}$ und wäre somit eine Tangente an $K_s(N)$, was nicht sein kann, da $\overleftrightarrow{MQ}$ ja zwei voneinander verschiedene Schnittpunkte mit $K_s(N)$ hat. #

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von $\overleftrightarrow{MQ}$ und g_{-M} mit P , dann sind wieder $\angle MQL'$ und $\angle MLP$ rechte Winkel, und mit derselben Argumentation wie gerade eben folgt $Q = P' \in \sigma(g_{-M})$. Insgesamt haben wir somit Behauptung (c) gezeigt.

Behauptung (d) zeigt man analog zu Behauptung (c). □

Auch wenn wir das σ -Bild eines Kreises, der nicht durch M geht, noch nicht kennen, legt Proposition 4.27 nahe, im Kontext der Inversion am Kreis Geraden und Kreise in einem gemeinsamen Oberbegriff zusammenzufassen.

Definition 4.28 (E). Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die eine Gerade oder ein Kreis ist, nennen wir auch eine *verallgemeinerte Gerade*. Für eine beliebige verallgemeinerte Gerade g und ein beliebiges $P \in g$ heißt

$$t_g P := \begin{cases} g & \text{für } g \text{ eine Gerade,} \\ \text{die Tangente an } g \text{ in } P & \text{für } g \text{ ein Kreis} \end{cases}$$

die *Tangente* an die verallgemeinerte Gerade g im Punkt P .

Proposition 4.29 (E). Für eine verallgemeinerte Gerade g mit $g \cap K = \{P, Q\}$ gilt:

- (a) $t_K P \perp t_g P \implies t_g P = \overleftrightarrow{MP}$.
- (b) $t_K P \perp t_g P \iff t_K Q \perp t_g Q$. Im Orthogonalitätsfall heißen K und g zueinander *orthogonal*.

Beweis. Es gelte $t_K P \perp t_g P$. Nach Korollar 4.11 folgt daraus

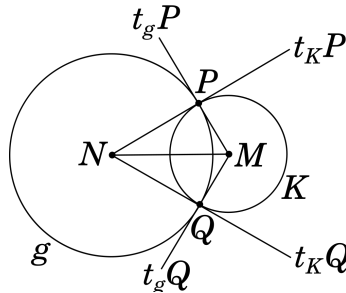
$$\overleftrightarrow{MP} \perp t_K P \perp t_g P$$

und also $t_g P \parallel \overleftrightarrow{MP}$. Mit $P \in t_g P \cap \overleftrightarrow{MP}$ erhalten wir $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$ und somit Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) genügt es offenbar, eine der behaupteten Implikationen zu zeigen. Gelte also ohne Einschränkung $t_K P \perp t_g P$. Nach Teil (a) gilt dann $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$.

Fall 1: g ist eine Gerade. Nach Voraussetzung gilt $Q \in g = t_g P = \overleftrightarrow{MP}$, also $g = \overleftrightarrow{MQ}$. Nach Korollar 4.11 folgt $t_K Q \perp \overleftrightarrow{MQ} = g = t_g Q$ und somit Behauptung (b) in diesem Fall.

Fall 2: g ist ein Kreis. Schreiben wir $g = K_s(N)$, so gilt nach dem SSS-Kriterium 3.55 die Kongruenz von Dreiecken $\triangle MPN \cong \triangle MQN$ und insbesondere die Kongruenz von Winkeln $\angle MPN \simeq \angle MQN$. Analog zu $t_g P = \overleftrightarrow{MP}$ zeigt man $t_K P = \overleftrightarrow{NP}$, so dass wegen $t_K P \perp t_g P$ der Winkel $\angle MPN \simeq \angle MQN$ ein rechter Winkel ist. Es folgt $\overleftrightarrow{MQ} \perp \overleftrightarrow{NQ}$ und mit Korollar 4.11 weiter $t_K Q = \overleftrightarrow{NQ}$ und $t_g Q = \overleftrightarrow{MQ}$. Das zeigt Behauptung (b) auch in diesem Fall.



□

Proposition 4.30 (E). Für einen Kreis $K_s(N)$ gelten die folgenden Aussagen.

- (a) Ist $K_s(N)$ orthogonal zu K , so gilt $\sigma(K_s(N)) = K_s(N)$ und $M \notin K_s(N)$.
- (b) Gibt es ein $A \in K_s(N) \setminus K$ mit $A' \in K_s(N)$, so ist $K_s(N)$ orthogonal zu K .

Beweis. Sei $K_s(N)$ orthogonal zu K mit Schnittpunkten P und Q . Nach Teil (a) von Proposition 4.29 gilt dann $t_{K_s(N)}P = \overrightarrow{MP}$ und $t_{K_s(N)}Q = \overrightarrow{MQ}$. Für einen beliebigen Punkt $A \in K_s(N) \setminus \{P, Q\}$ schneidet die Gerade $\overleftrightarrow{AM}$ den Kreis $K_s(N)$ in einem weiteren Punkt B ,

denn: Hätte die Gerade $\overleftrightarrow{AM}$ keinen weiteren Schnittpunkt mit $K_s(N)$, so gälte $\overleftrightarrow{AM} = t_{K_s(N)}A$. Mit $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{MP}$ und $\overleftrightarrow{MQ}$ gäbe es also drei paarweise verschiedene Tangenten an $K_s(N)$ durch M . Das kann aber nicht sein, denn nach Korollar 4.11 wären dann $\angle MAN$, $\angle MPN$ und $\angle MQN$ allesamt rechte Winkel, so dass nach dem Satz des Thales 4.20 die drei paarweise verschiedenen Punkte A, P, Q im Durchschnitt von $K_s(N)$ mit dem „Thaleskreis“ $K(\frac{1}{2}(M+N), N)$ lägen. Da sich nach Proposition 4.10 eine Gerade und ein Kreis in höchstens zwei Punkten schneiden, wären die drei Punkte A, P, Q in allgemeiner Lage. Nach dem Umkreissatz 3.70 stimmten daher die Kreise $K_s(N)$ und $K(\frac{1}{2}(M+N), N)$ jeweils mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle APQ$ und damit auch miteinander überein. Wegen $N \in K(\frac{1}{2}(M+N), N)$ und $N \notin K_s(N)$ kann das aber nicht sein. #

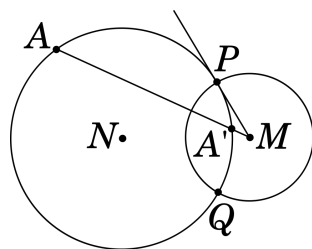
Nach dem Sehnen-Tangenten-Satz 4.14 gilt jetzt

$$\|M - A\| \cdot \|M - B\| = \|M - P\|^2 = r^2.$$

Nach Definition 4.24 ist also $B = A' \in K_s(N)$. Da A in $K_s(N) \setminus \{P, Q\}$ beliebig gewählt war und mit

$$P' = P \in K_s(N) \quad \text{und} \quad Q' = Q \in K_s(N)$$

folgt die Inklusion $\sigma(K_s(N)) \subseteq K_s(N)$. Mit $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$ erhalten wir auch die umgekehrte Inklusion und insgesamt $\sigma(K_s(N)) = K_s(N)$.



Wäre schließlich $M \in K_s(N)$, so lägen nach der gerade erfolgten Diskussion für ein beliebiges $A \in K_s(N) \setminus \{P, Q\}$ die drei kollinearen Punkte M, A, A' allesamt auf dem Kreis $K_s(N)$, was nicht sein kann, da sich nach Proposition 4.10 eine Gerade und ein Kreis in höchstens zwei Punkten schneiden. Zusammengefasst haben wir also Behauptung (a) gezeigt.

Wir zeigen nun Behauptung (b). Da $K_s(N)$ mit A und A' je einen Punkt innerhalb und außerhalb von K enthält, schneiden sich K und $K_s(N)$ nach Satz 4.17 in genau zwei Punkten P und

Q. Nach Definition 4.24 gilt

$$\|M - A\| \cdot \|M - A'\| = r^2 = \|M - P\|^2.$$

Mit der Umkehrung des Sehnens-Tangenten-Satzes 4.14²⁶ folgt $\overleftrightarrow{MP} = t_{K_s(N)}P$. Durch zweifache Anwendung von Korollar 4.11 erhalten wir daraus

$$\overleftrightarrow{MP} = t_{K_s(N)}P \perp \overleftrightarrow{NP} = t_KP.$$

Nach Teil (b) von Proposition 4.29 sind also K und $K_s(N)$ orthogonal zueinander, und Behauptung (b) ist gezeigt. $\square$

Teil (a) von Proposition 4.30 lässt sich durch Verwendung einer zentrischen Streckung zu Proposition 4.31 verallgemeinern:

Proposition 4.31 ($\mathbb{E}$). *Für einen Kreis $K_s(N)$ mit $M \notin K_s(N)$ ist $\sigma(K_s(N))$ wieder ein Kreis.*

Aufgrund der Bijektivität von σ gilt für je zwei beliebige Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$

$$\sigma(A \cap B) = \sigma(A) \cap \sigma(B). \quad (4.1)$$

Wir spezialisieren diese Aussage, indem wir für A und B jeweils verallgemeinerte Geraden einsetzen, um unter Verwendung der Propositionen 4.27 und 4.31 das σ -Bild ihrer Schnittpunkte zu studieren. Hierbei bedienen wir uns eines Tricks und führen einen zusätzlichen Punkt ∞ ein. Durch Proposition 4.27 motiviert setzen wir dann die Inversion σ durch

$$\hat{\sigma}(P) := \begin{cases} P' & \text{für } P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}, \\ \infty & \text{für } P = M, \\ M & \text{für } P = \infty \end{cases}$$

auf eine Bijektion der Menge $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ fort und setzen für eine beliebige verallgemeinerte Gerade g

$$\hat{g} := \begin{cases} g \cup \{\infty\} & \text{für } g \text{ eine Gerade,} \\ g & \text{für } g \text{ ein Kreis.} \end{cases}$$

Mit (4.1) folgt dann für je zwei verallgemeinerte Geraden g, h sofort

$$\hat{\sigma}(\hat{g} \cap \hat{h}) = \hat{\sigma}(\hat{g}) \cap \hat{\sigma}(\hat{h}). \quad (4.2)$$

Wir wollen nun aus (4.2) eine Aussage über verallgemeinerte Geraden herleiten und stellen dafür zunächst fest, dass nach den Propositionen 4.27 und 4.31 durch die für den Rest dieses Abschnitts fixierte Zuordnung

$$g \mapsto \hat{\sigma}(\hat{g}) \cap \mathbb{R}^2 =: g' \quad (4.3)$$

²⁶Die Korrektheit dieser Umkehrung sieht man ein, wenn man sich den Beweis des Zwei-Sehnens-Satzes 4.13 und des Sehnens-Tangenten-Satzes 4.14 anschaut.

verallgemeinerte Geraden auf verallgemeinerte Geraden abgebildet werden. Für je zwei verallgemeinerte Geraden g, h gilt nun

$$g' \cap h' = \hat{\sigma}(\hat{g} \cap \hat{h}) \cap \mathbb{R}^2,$$

insbesondere gilt die folgende Spezialisierung dieser Aussage.

Lemma 4.32 ($\mathbb{E}$). Seien g, h zwei verallgemeinerte Geraden, so dass nicht g und h beide Geraden sind. Besteht der Durchschnitt von g und h aus genau einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$, so gilt

$$g' \cap h' = \begin{cases} \{P'\} & \text{für } P \neq M, \\ \emptyset & \text{für } P = M. \end{cases}$$

Mit einigem Aufwand lässt sich nun der folgende Zusammenhang zwischen den Tangenten $t_{g'}P'$ und t_gP beschreiben:

Proposition 4.33 ($\mathbb{E}$). Sei g eine verallgemeinerte Gerade. Für ein beliebiges $P \in g \setminus \{M\}$ gilt:

$$t_{g'}P' = \begin{cases} \sigma_{m_{PP'}}(t_gP) & \text{für } P \in g \setminus (K \cup \{M\}), \\ \sigma_{t_KP}(t_gP) & \text{für } P \in g \cap K. \end{cases}$$

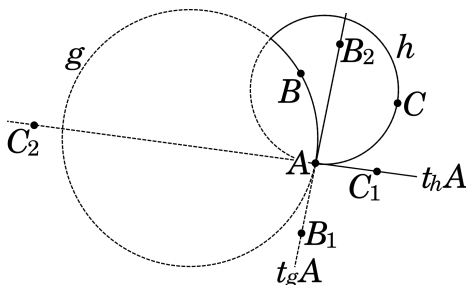
Definition 4.34 ($\mathbb{E}$). Seien g, h verallgemeinerte Geraden, und sei $A \in g \cap h$ ein Punkt mit $t_gA \neq t_hA$. Seien weiter $B \in g \setminus h$ und $C \in h \setminus g$.

(a) Sind g und h Kreise, so gibt es Punkte $B_1, B_2 \in t_gA$ und $C_1, C_2 \in t_hA$ mit

$$|\overrightarrow{AB_1} \cap h| = 1, \quad |\overrightarrow{AB_2} \cap h| = 2, \quad |\overrightarrow{AC_1} \cap g| = 1 \quad \text{und} \quad |\overrightarrow{AC_2} \cap g| = 2,$$

und wir setzen

$$\tilde{B} := \begin{cases} B_1 & \text{für } B \text{ außerhalb von } h, \\ B_2 & \text{für } B \text{ innerhalb von } h \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{C} := \begin{cases} C_1 & \text{für } C \text{ außerhalb von } g, \\ C_2 & \text{für } C \text{ innerhalb von } g. \end{cases}$$

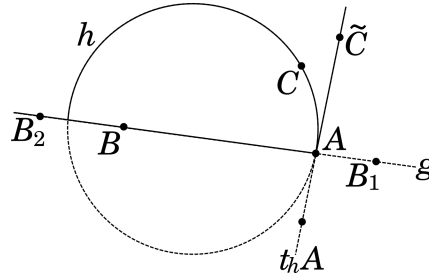


(b) Ist g eine Gerade und h ein Kreis, so gibt es Punkte $B_1, B_2 \in t_gA$ und $\tilde{C} \in t_hA$ mit

$$|\overrightarrow{AB_1} \cap h| = 1, \quad |\overrightarrow{AB_2} \cap h| = 2 \quad \text{und} \quad \tilde{C} \nmid_g C,$$

und wir setzen

$$\tilde{B} := \begin{cases} B_1 & \text{für } B \text{ außerhalb von } h, \\ B_2 & \text{für } B \text{ innerhalb von } h. \end{cases}$$



Den Fall, dass g ein Kreis und h eine Gerade ist, erhält man natürlich genauso.

(c) Sind g und h Geraden, so setzen wir $\tilde{B} := B$ und $\tilde{C} := C$.

In allen Fällen definieren wir die **verallgemeinerte Winkelgröße** $\angle_{(g,h)} BAC$ bezüglich g und h durch

$$\angle_{(g,h)} BAC := \angle \tilde{B} A \tilde{C}.$$

Mit einigem Aufwand ließe sich nun zeigen, dass Inversionen am Kreis verallgemeinerte Winkelgrößen in folgendem Sinne erhalten:

Satz 4.35 (E). Für je zwei verallgemeinerte Geraden g, h und drei von M verschiedene Punkte $A \in g \cap h$ mit $t_g A \neq t_h A$, $B \in g \setminus h$ und $C \in h \setminus g$ gilt

$$\angle_{(g',h')} B' A' C' = \angle_{(g,h)} BAC.$$

Definition 4.36 (E). Seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ vier paarweise verschiedene Punkte. Dann heißt

$$DV(A, B, C, D) := \frac{\|A - C\|}{\|A - D\|} \cdot \frac{\|B - D\|}{\|B - C\|}$$

das **Doppelverhältnis** der Punkte A, B, C, D .

Proposition 4.37 (E). Das Doppelverhältnis je vier paarweise verschiedener Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ ist invariant unter σ , es gilt also:

$$DV(A', B', C', D') = DV(A, B, C, D).$$

Beweis. Nach Definition der Inversion gilt

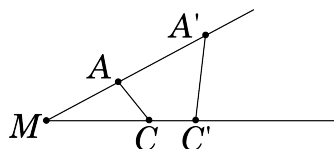
$$\begin{aligned} \frac{\|M - A\|}{\|M - C\|} &= \frac{\|M - A\| \cdot \|M - A'\|}{\|M - C\| \cdot \|M - A'\|} = \frac{r^2}{\|M - C\| \cdot \|M - A'\|} \\ &= \frac{\|M - C\| \cdot \|M - C'\|}{\|M - C\| \cdot \|M - A'\|} = \frac{\|M - C'\|}{\|M - A'\|}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} = \frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|}, \quad (4.5)$$

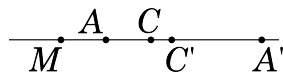
denn: Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall 1: M, A, C sind in allgemeiner Lage. Da M, A, A' bzw. M, C, C' kollinear sind, haben die Dreiecke $\triangle MAC$ und $\triangle MC'A'$ dieselbe Winkelgröße bei M , es gilt also $\angle AMC = \angle A'MC'$. Nach Definition 1.54, dem SWS-Kriterium 3.55 und (4.4) sind dann die Dreiecke $\triangle MAC$ und $\triangle MC'A'$ ähnlich, insbesondere gilt (4.5).



Fall 2: M, A, C sind kollinear. Hier gibt es in Abhängigkeit von der Anordnung der drei Punkte M, A, C drei Unterfälle. Diese lassen sich alle sehr ähnlich beweisen, und wir führen nur den Fall $M \star A \star C$ vor. Hier folgt nach der Definition der Inversion am Kreis $M \star C' \star A'$ und also

$$\|A - C\| = \|M - C\| - \|M - A\| \quad \text{und} \quad \|A' - C'\| = \|M - A'\| - \|M - C'\|.$$



Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|} &= \frac{\|M - C\| - \|M - A\|}{\|M - A'\| - \|M - C'\|} \stackrel{(4.4)}{=} \frac{\|M - A\| \cdot \|M - A'\| \cdot \|M - C'\|^{-1} - \|M - A\|}{\|M - C\| \cdot \|M - C'\| \cdot \|M - A\|^{-1} - \|M - C'\|} \\ &= \frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} \cdot \frac{\|M - A'\| \cdot \|M - C'\|^{-1} - 1}{\|M - C\| \cdot \|M - A\|^{-1} - 1} \stackrel{(4.4)}{=} \frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} \end{aligned}$$

und also (4.5). #

Ersetzt man im gesamten bisherigen Beweis C und C' durch D und D' , so erhält man

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - D'\|} = \frac{\|A - D\|}{\|A' - D'\|}.$$

Kombiniert gilt

$$\frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|} \cdot \frac{\|A' - D'\|}{\|A - D\|} = \frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} \cdot \frac{\|M - D'\|}{\|M - A\|} = \frac{\|M - D'\|}{\|M - C'\|}.$$

Ersetzt man im gesamten bisherigen Beweis A und A' durch B und B' , so erhält man

$$\frac{\|B - C\|}{\|B' - C'\|} \cdot \frac{\|B' - D'\|}{\|B - D\|} = \frac{\|M - D'\|}{\|M - C'\|}.$$

Zusammengefügt ergibt sich

$$\frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|} \cdot \frac{\|A' - D'\|}{\|A - D\|} = \frac{\|B - C\|}{\|B' - C'\|} \cdot \frac{\|B' - D'\|}{\|B - D\|},$$

was sich leicht in die Behauptung $DV(A', B', C', D') = DV(A, B, C, D)$ umformen lässt. $\square$

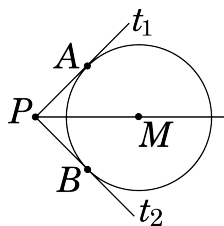
4.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1 ($\mathbb{E}$). Seien A ein Punkt auf einem Kreis K , t die Tangente an K in A und s eine Sekante von K durch A . Sei weiter r derjenige Teilstrahl von s mit Ausgangspunkt A , der nicht den zweiten Schnittpunkt von s mit K enthält. Dann liegen $r \setminus \{A\}$ und $K \setminus \{A\}$ auf verschiedenen Seiten von t .

Hinweis: Ohne Einschränkung können Sie für den Beweis annehmen, der Mittelpunkt des Kreises sei der Ursprung und A liege auf der positiven x -Achse. Bestimmen Sie eine Geradengleichung von s aus einer geeigneten Parameterdarstellung des zweiten Schnittpunktes.

Aufgabe 4.2 ($\mathbb{E}$). Sei $K = K_r(M)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt außerhalb von K . Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

- (a) Es gibt genau zwei Tangenten t_1, t_2 an K durch P .
- (b) Ist $t_1 \cap K =: \{A\}$ und $t_2 \cap K =: \{B\}$, so ist $\overleftrightarrow{MP}$ die Winkelhalbierende von $\angle APB$.



Aufgabe 4.3 (Satz von Monge, $\mathbb{E}$). Es seien $M, M', M'' \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden sowie $r, r', r'' \in \mathbb{R}_{>0}$. Für die drei Kreise $K := K_r(M), K' := K_{r'}(M'), K'' := K_{r''}(M'')$ gilt

- (a) Die Punkte M, M', M'' sind genau dann kollinear, wenn die Potenzgeraden $p_{K,K'}, p_{K,K''}, p_{K',K''}$ alle parallel zueinander sind.
- (b) Die Punkte M, M', M'' sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn sich die drei Potenzgeraden $p_{K,K'}, p_{K,K''}, p_{K',K''}$ in genau einem Punkt schneiden.

Aufgabe 4.4 ($\mathbb{E}$). Zeigen Sie die übrigen Fälle im Beweis des Peripheriewinkelsatzes 4.19.

Aufgabe 4.5 ($\mathbb{E}$). In der Situation von Proposition 4.26 ist der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks $\triangle PQ\sigma_{r,M}(A)$ durch den Schnittpunkt des Strahls $\overrightarrow{MA}$ mit dem Kreis $K_r(M)$ gegeben.

Aufgabe 4.6 (E). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Schwerpunkt S , Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) Zwei der drei Punkte S, H, U stimmen überein.
- (ii) $S = H = U$.
- (iii) $\triangle ABC$ ist **gleichseitig**, es gilt also $\|A - B\| = \|B - C\| = \|C - A\|$.

Nichteuklidische Geometrie

Schon seit Euklid war die Notwendigkeit des Parallelenaxioms in der euklidischen Geometrie umstritten. Jedoch konnte diese Frage erst im 19. Jahrhundert endgültig geklärt werden. Dies gelang durch Angabe eines Modells einer Geometrie, die mit Ausnahme des Parallelenaxioms allen von Euklid geforderten Eigenschaften genügt, in unserer Sprache also durch Angabe eines Modells einer Hilbertebene, die das Vollständigkeitsaxiom (V) aber nicht das Parallelenaxiom (P) erfüllt. Wir werden in Abschnitt 5.1 mit dem Poincaré'schen Kreismodell ein solches Modell einführen und in Abschnitt 5.2 die Geometrie darin studieren.

5.1 Das Poincaré'sche Kreismodell

Definition 5.1. Eine Hilbertebene, die das Vollständigkeitsaxiom (V) und das *hyperbolische Axiom*

(H) Ist A ein Punkt und g eine Gerade, die nicht durch A geht, dann gibt es unendlich viele zu g parallele Geraden durch A .

erfüllt, heißt *hyperbolische Ebene*.

Wir fixieren für den Rest dieses Abschnitts

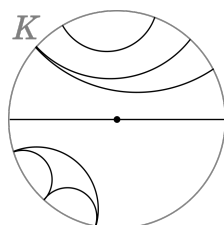
- den Ursprung $O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der euklidischen Standardebene,
- den Einheitskreis $K := K_1(O)$ in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$,
- die Inversion $\sigma := \sigma_{1,O}$ an K .

Dann heißt das Paar $\mathbb{H}_k := (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k)$ mit

$$\mathbf{P}_k := \{A \in \mathbb{R}^2 \mid A \text{ liegt im Inneren von } K\},$$

$$\mathbf{G}_k := \{g \cap \mathbf{P}_k \mid g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}} \text{ orth. zu } K\} \cup \{K_r(M) \cap \mathbf{P}_k \mid K_r(M) \text{ zu } K \text{ orth. Kreis}\}$$

das *Poincaré'sche Kreismodell*. Die Elemente von $\mathbf{P}_k$ nennen wir hierbei *k-Punkte*, die Elemente von $\mathbf{G}_k$ heißen *k-Geraden*. Die k-Geraden, die von euklidischen Geraden herkommen, nennen wir auch k-Geraden *vom ersten Typ*, diejenigen, die von euklidischen Kreisen herkommen, k-Geraden *vom zweiten Typ*.



Zur besseren Unterscheidbarkeit von den Konstruktionen in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$ werden wir die entsprechenden Konstruktionen in $\mathbb{H}_k$ künftig immer mit einem Index „k“ kennzeichnen. So bezeichnen wir beispielsweise die k-Verbindungsgerade zweier k-Punkte $A, B \in \mathbf{P}_k$ mit $\overleftrightarrow{AB}^k$.

Definition 5.2 ($\mathbb{E}$). Die zu einer beliebigen k-Geraden vom ersten Typ gehörige euklidische Gerade und der zu einer beliebigen k-Geraden vom zweiten Typ gehörige euklidische Kreis haben jeweils genau zwei Schnittpunkte mit K . Diese Schnittpunkte nennen wir die **Endpunkte** der k-Geraden.

Wir weisen nun schrittweise nach, dass $\mathbb{H}_k$ ausgestattet mit geeigneten Anordnungs- und Kongruenzbegriffen eine hyperbolische Ebene im Sinne von Definition 5.1 ist.

Proposition 5.3 ($\mathbb{E}$). Das Poincaré'sche Kreismodell $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k)$ ist eine Inzidenzebene.

Beweis. Als erstes zeigen wir das Inzidenzaxiom (I_1), dass also durch je zwei k-Punkte genau eine k-Gerade geht. Seien dafür zwei k-Punkte $A \neq B \in \mathbf{P}_k$ gegeben.

Fall 1: A, B, O sind kollinear in $\mathbb{E}$. Dann ist $\overleftrightarrow{AB} \cap \mathbf{P}_k$ eine k-Gerade durch A und B . In $\mathbb{E}$ gilt (I_1), so dass jede weitere k-Gerade durch A und B vom zweiten Typ wäre, also ein Durchschnitt eines zu K orthogonalen Kreises $K_r(M)$ durch A, B mit $\mathbf{P}_k$. So etwas gibt es aber nicht,

denn: Nach Teil (a) von Proposition 4.30 lägen dann mit A, B auch A', B' auf $K_r(M)$. Wegen

$$\overleftrightarrow{AA'} = \overleftrightarrow{AO} = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{OB} = \overleftrightarrow{B'B}$$

enthielte also $K_r(M)$ vier kollineare Punkte, was nach Proposition 4.10 nicht sein kann. #

Fall 2: A, B, O sind in $\mathbb{E}$ in allgemeiner Lage. Offensichtlich geht dann keine k-Gerade vom ersten Typ durch A, B . Andererseits enthält nach Teil (a) von Proposition 4.30 jeder zu K orthogonale Kreis $K_r(M) \subseteq \mathbb{E}$ durch A, B auch den Punkt A' . Die Punkte A, A', B sind in allgemeiner Lage, da sonst mit O, A, A' auch O, A, B kollinear wären. Nach dem Umkreissatz 3.70 gibt es also einen eindeutig bestimmten Kreis $K_r(M) \subseteq \mathbb{E}$ durch A, A', B . Nach Teil (b) von Proposition 4.30 sind wegen $A, A' \in K_r(M)$ die Kreise K und $K_r(M)$ orthogonal zueinander, so dass $K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$ die eindeutig bestimmte k-Gerade durch A, B ist.

Für (I_2) müssen wir zeigen, dass auf jeder k -Geraden mindestens zwei k -Punkte liegen. Für eine k -Gerade vom ersten Typ ist dies einfach, denn diese ist der Durchschnitt einer Geraden $g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ durch O mit dem Inneren des Kreises K . Für einen beliebigen Schnittpunkt P von g mit K ist dann beispielsweise $\frac{1}{2}(O + P)$ neben O ein zweiter k -Punkt. Eine k -Gerade vom zweiten Typ ist der Durchschnitt eines zu K orthogonalen Kreises $K_r(M)$ mit dem Inneren von K . Der Mittelpunkt M von $K_r(M)$ liegt dabei außerhalb von K ,

denn: Ist P einer der Schnittpunkte von K und $K_r(M)$, so hat das Dreieck $\triangle OPM$ nach Definition der Orthogonalität einen rechten Winkel $\angle OPM$. Mit dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck 1.42 und Satz 3.66 gilt dann $\overline{OP} < \overline{OM}$. #

Seien P, Q die Endpunkte von $K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$. Dann liegen zwischen den Strahlen $\overrightarrow{MP}$ und $\overrightarrow{MQ}$ unendlich viele euklidische Strahlen aus M , die paarweise verschiedene Schnittpunkte mit $K_r(M)$ aufweisen. Unendlich viele solcher Schnittpunkte S liegen im Inneren von K ,

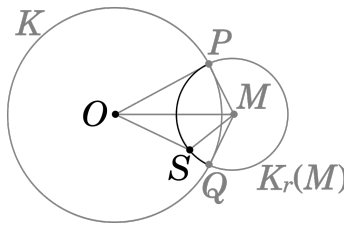
denn: Ohne Einschränkung seien S, O, M nicht kollinear und das Dreieck $\triangle OSM$ somit wohldefiniert. Nach Anwendung des Kosinussatzes 1.40 auf $\triangle OSM$ und des Satzes von Pythagoras 1.41 auf $\triangle OPM$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|O - S\|^2 &= \|O - M\|^2 + \|S - M\|^2 - 2 \cdot \|O - M\| \cdot \|S - M\| \cdot \cos \angle SMO \\ &= (1 + r^2) + r^2 - 2r \cdot \sqrt{1 + r^2} \cdot \cos \angle SMO. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Aus Symmetriegründen und da nach Konstruktion der Strahl $\overrightarrow{MS}$ zwischen den Strahlen $\overrightarrow{MP}$ und $\overrightarrow{MQ}$ liegt, gilt mit Korollar 1.44

$$\cos \angle SMO > \cos \angle PMO = \cos \angle QMO = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

Eingesetzt in (5.1) erhalten wir $\|O - S\|^2 < 1$ und somit die Behauptung. #



Es folgt, dass unendlich viele solcher Schnittpunkte S k -Punkte auf der gegebenen k -Geraden vom zweiten Typ sind, so dass wir (I_2) auch in diesem Fall nachgewiesen haben.

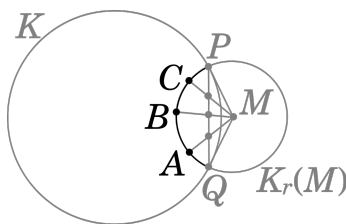
Zuletzt zeigen wir (I_3) , dass es also drei k -Punkte in k -allgemeiner Lage gibt. Seien dafür $A, B \in \mathbf{P}_k$ zwei k -Punkte, so dass A, B, O in $\mathbb{E}$ in allgemeiner Lage sind. Dann ist $\overleftrightarrow{AB}^k$ der Durchschnitt eines zu K orthogonalen Kreises $K_r(M)$ durch A, B mit $\mathbf{P}_k$. Nach Teil (a) von Proposition 4.30 liegt O nicht auf $\overleftrightarrow{AB}^k$, so dass A, B, O auch in $\mathbb{H}_k$ in k -allgemeiner Lage sind. $\square$

Um $\mathbb{H}_k$ zu einer Hilbertebene zu machen, müssen wir als nächstes eine **Anordnung** $\star_k$ einführen. Hierzu definieren wir für drei k -kollineare k -Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}_k$:

- Liegen A, B, C auf einer k -Geraden vom ersten Typ, so setzen wir

$$A \star_k B \star_k C : \Longleftrightarrow A \star B \star C.$$

- Liegen A, B, C auf einer k -Geraden $g_k \in \mathbf{G}_k$ vom zweiten Typ, so gibt es einen zu K orthogonalen Kreis $K_r(M)$ mit $g_k = K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$. Wie schon im Beweis von Proposition 5.3 eingesehen liegt der Mittelpunkt M von $K_r(M)$ außerhalb von K .



Wir bezeichnen die Endpunkte von g_k mit P und Q , die nach Teil (b) von Lemma 3.22 existenten Schnittpunkte der Strahlen aus M durch A, B, C mit der Strecke $\overline{PQ}$ mit

$$\{\hat{A}\} := \overrightarrow{MA} \cap \overline{PQ}, \quad \{\hat{B}\} := \overrightarrow{MB} \cap \overline{PQ} \quad \text{und} \quad \{\hat{C}\} := \overrightarrow{MC} \cap \overline{PQ} \quad (5.2)$$

und setzen

$$\begin{aligned} A \star_k B \star_k C &: \Longleftrightarrow \hat{A} \star \hat{B} \star \hat{C} \\ &\Longleftrightarrow \hat{B} \text{ liegt im Inneren des (euklidischen) Winkels } \angle \hat{A} M \hat{C} \\ &\Longleftrightarrow B \text{ liegt im Inneren des (euklidischen) Winkels } \angle A M C. \end{aligned}$$

Proposition 5.4 ($\mathbb{E}$). Das Poincaré'sche Kreismodell $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k)$ erfüllt die Anordnungsaxiome $(A_1) - (A_4)$.²⁷

Einen Beweis für diese Proposition führen wir nicht durch.

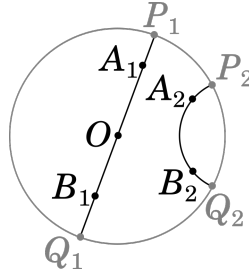
Als nächstes wollen wir nun auf $\mathbb{H}_k$ einen *Kongruenzbegriff* $\cong_k$ für *k -Strecken* einführen. Seien dafür $A \neq B$ zwei k -Punkte und seien P, Q die Endpunkte der k -Gerade $\overleftrightarrow{AB}^k$. Wir definieren dann zunächst den *hyperbolischen Abstand* $d_k(A, B)$ der k -Punkte A, B durch

$$d_k(A, B) := \begin{cases} |\log DV(A, B, P, Q)| = \left| \log \left(\frac{\|A-P\|}{\|A-Q\|} \cdot \frac{\|B-Q\|}{\|B-P\|} \right) \right| & \text{für } A \neq B, \\ 0 & \text{für } A = B. \end{cases} \quad (5.3)$$

Dies gibt eine wohldefinierte Abbildung $d_k : \mathbf{P}_k \times \mathbf{P}_k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften.

- (a) $d_k(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$,
- (b) $d_k(A, B) = d_k(B, A)$ für alle $A, B \in \mathbf{P}_k$.

²⁷Obwohl wir das Poincaré'sche Kreismodell $\mathbb{H}_k$ nur als das Paar $(\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k)$ definiert haben, nennen wir auch das Tripel $(\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k)$ das Poincaré'sche Kreismodell und schreiben auch hier $\mathbb{H}_k$. Ähnliches gilt später, wenn wir die weiteren Strukturen einer Hilbertebene hinzufügen.



Ein Beweis findet sich im verlinkten Zusatzmaterial. Tatsächlich erfüllt d_k auch die Dreiecksungleichung und ist somit eine Metrik auf $\mathbf{P}_k$. Unter Verwendung von d_k können wir folgende sehr nützliche Charakterisierung von $\star_k$ angeben.

Lemma 5.5 (E). Für drei k -Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}_k$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- (i) $A \star_k B \star_k C$,
- (ii) A, B, C sind paarweise verschieden, k -kollinear und es gilt

$$d_k(A, C) = d_k(A, B) + d_k(B, C).$$

Ein Beweis von Lemma 5.5 findet sich im verlinkten Zusatzmaterial. Für zwei Paare verschiedener k -Punkte $A_1 \neq B_1$ und $A_2 \neq B_2$ setzen wir

$$\overline{A_1 B_1}^k \cong_k \overline{A_2 B_2}^k : \Longleftrightarrow d_k(A_1, B_1) = d_k(A_2, B_2). \quad (5.4)$$

Proposition 5.6 (E). Das Poincaré'sche Kreismodell $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k, \cong_k)$ erfüllt die Kongruenzaxiome für Strecken $(K_1) - (K_3)$.

Einen Beweis für diese Proposition führen wir nicht durch.

Einen **Kongruenzbegriff** $\simeq_k$ für k -Winkel führen wir über die verallgemeinerte Winkelgröße aus Abschnitt 4.4 ein: Für je drei k -Punkte A, B, C in k -allgemeiner Lage ist der k -Winkel $\angle_k BAC$ als Vereinigung

$$\angle_k BAC = \overrightarrow{AB}^k \cup \overrightarrow{AC}^k$$

definiert. Die k -Strahlen $\overrightarrow{AB}^k$ und $\overrightarrow{AC}^k$ liegen auf zwei eindeutig bestimmten k -Geraden $\overleftarrow{AB}^k \neq \overleftarrow{AC}^k$ und es gibt eindeutig bestimmte zu K orthogonale verallgemeinerte Geraden $g \neq h$ mit

$$\overleftarrow{AB}^k = g \cap \mathbf{P}_k \quad \text{und} \quad \overleftarrow{AC}^k = h \cap \mathbf{P}_k.$$

Nun gilt zum Einen $t_g A \neq t_h A$,

denn: Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1: g, h sind beide Geraden. Dann gilt $t_g A = g \neq h = t_h A$.

Fall 2: g ist eine Gerade und h ein Kreis. Wegen $A \in \mathbf{P}_k$ folgt wie im Beweis von Proposition 4.30, dass die Gerade $g = \overleftrightarrow{OA}$ den Kreis h in zwei Punkten schneidet. Mit Proposition 4.10 folgt $g = t_g A \neq t_h A$.

Fall 3: g, h sind beide Kreise. Nach Voraussetzung ist $A = \overleftrightarrow{AB}^k \wedge_k \overleftrightarrow{AC}^k$. Da g und h unter σ jeweils auf sich selbst abgebildet werden, ist A' ein Schnittpunkt von g und h außerhalb von K ; insbesondere gilt $|g \cap h| = 2$. Gälte nun $t_g A = t_h A$, so lägen nach Korollar 4.11 der Punkt A und die Mittelpunkte von g und h auf einer gemeinsamen Geraden, die senkrecht auf $t_g A$ stünde. Wegen $\kappa_g(A) = 0 = \kappa_h(A)$ läge A zudem auf der Potenzgeraden $p_{g,h}$. Nach Teil (b) von Proposition 4.15 gälte also $t_g A = p_{g,h}$, und nach Teil (c) derselben Proposition folgte daraus

$$g \cap h = g \cap p_{g,h} = g \cap t_g A = \{A\}.$$

Das steht im Widerspruch zu $|g \cap h| = 2$ und kann also nicht sein. #

Zum Anderen lässt sich dem k -Winkel $\angle_k BAC$ wegen der Eindeutigkeit von g bzw. h wohldefiniert die in Definition 4.34 eingeführte verallgemeinerte Winkelgröße $\angle_{(g,h)} BAC$ zuordnen. Wir schreiben

$$\angle_k BAC := \angle_{(g,h)} BAC$$

und nennen diesen Wert das **k -Bogenmaß** bzw. die **k -Winkelgröße** des k -Winkels $\angle_k BAC$. Für weitere drei k -Punkte D, E, F in k -allgemeiner Lage definieren wir so

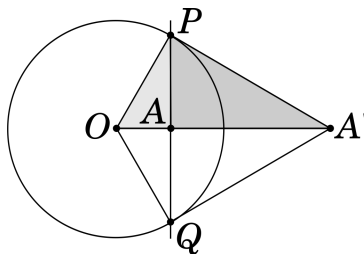
$$\angle_k BAC \simeq_k \angle_k EDF : \Longleftrightarrow \angle_k BAC = \angle_k EDF.$$

Proposition 5.7 (E). *Das Poincaré'sche Kreismodell $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k, \cong_k, \simeq_k)$ erfüllt die Kongruenzaxiome für Winkel $(K_4) - (K_6)$.*

Einen Beweis für diese Proposition führen wir nicht durch. Wir wollen aber nun nachweisen, dass $\mathbb{H}_k$ das Vollständigkeitsaxiom erfüllt. Dafür müssen wir zunächst etwas ausholen.

Proposition 5.8 (E). *Für $A \in \mathbf{P}_k$ beliebig gibt es eine k -Bewegung φ mit $\varphi(A) = O$ und $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbf{P}_k}$.*

Beweis. Wir erinnern an die Konstruktion des Spiegelpunkts A' im Beweis von Proposition 4.26: Sind P, Q die Schnittpunkte der Lotgeraden $\ell_{\overrightarrow{OA}} A$ mit K , so ist A' der Schnittpunkt der Tangenten an K in P und Q mit dem Strahl $\overrightarrow{OA}$.



Wegen $\angle PA'O \simeq \angle PA'A$ und dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck 1.42 sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle A'PO$ und $\triangle A'AP$ ähnlich zueinander. Es folgt

$$\frac{\|A' - A\|}{\|A' - P\|} = \frac{\|A' - P\|}{\|A' - O\|}$$

und also

$$\|A' - P\|^2 = \|A' - A\| \|A' - O\|.$$

Aus $O \star A \star A'$ folgt zudem $O \in \overrightarrow{A'A}$. Der Punkt O ist also das Bild von A unter der Kreisspiegelung $\sigma_{\|A'-P\|, A'}$. Unter Verwendung von Satz 4.35 kann man zeigen, dass Einschränkungen euklidischer Kreisspiegelungen auf $\mathbf{P}_k$ k -Bewegungen sind. Die Proposition folgt also, wenn wir $\varphi := \sigma_{\|A'-P\|, A'}|_{\mathbf{P}_k}$ setzen. $\square$

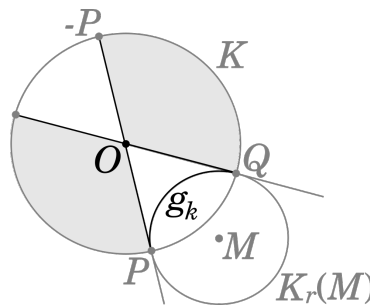
Proposition 5.9 (E). *Das Poincaré'sche Kreismodell $\mathbb{H}_k$ erfüllt das Vollständigkeitsaxiom (V).*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass es zu jeder k -Gerade g_k und jedem k -Dedekindschnitt (s, t) von g_k genau einen k -Punkt P gibt, so dass für alle k -Punkte $A \in s, B \in t$ genau eine der drei Aussagen $P = A, P = B$ oder $A \star_k P \star_k B$ gilt. Wählen wir einen k -Punkt $Q \in g_k$ aus. Nach Proposition 5.8 gibt es eine k -Bewegung, die Q auf den Ursprung O abbildet und somit g_k wegen $Q \in g_k$ auf eine k -Gerade vom ersten Typ. Es genügt daher, das Vollständigkeitsaxiom (V) für eine k -Gerade g_k vom ersten Typ nachzuweisen. Da die hyperbolische Anordnung $\star_k$ auf k -Geraden vom ersten Typ durch die euklidische Anordnung erklärt ist, folgt dies unmittelbar aus der Gültigkeit desselben in der euklidischen Standardebene $\mathbb{E}$. $\square$

Proposition 5.10 (E). *Das Poincaré'sche Kreismodell $\mathbb{H}_k$ erfüllt das hyperbolische Axiom (H).*

Beweis. Zu zeigen ist, dass es zu jedem k -Punkt A und jeder k -Geraden g_k , die nicht durch A geht, unendlich viele k -Geraden durch A gibt, die g_k nicht schneiden. Nach Proposition 5.8 gibt es eine k -Bewegung, die A auf den Ursprung O abbildet und g_k wegen $A \notin g_k$ auf eine k -Gerade vom zweiten Typ. Es langt also zu zeigen, dass es zu jeder k -Geraden g_k vom zweiten Typ unendlich viele k -Geraden vom ersten Typ gibt, die g_k nicht schneiden.

Sei also g_k eine fest gewählte Gerade vom zweiten Typ, sei $K_r(M)$ der zu K orthogonale Kreis mit $g_k = K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$, und seien P, Q die Endpunkte von g_k .



Die Geraden $\overleftrightarrow{OP}$ und $\overleftrightarrow{OQ}$ sind die beiden Tangenten des Kreises $K_r(M)$, die durch O gehen. Es folgt, dass alle Punkte in $K_r(M) \setminus \{P\}$ auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{OP}$ liegen wie M ,

denn: Läge ein $B \in K_r(M)$ auf der M entgegengesetzten Seite von $\overleftrightarrow{OP}$, so gäbe es ein $S \in \overleftrightarrow{MB} \cap \overleftrightarrow{OP}$ mit $M \star S \star B$. Es gälte dann $\|M - S\| < \|M - B\| = r$, so dass S ein innerer Punkt von $K_r(M)$ wäre. Da $\overleftrightarrow{OP}$ eine Tangente an $K_r(M)$ ist und Tangenten nach Proposition 4.10 keine Punkte im Inneren des zugehörigen Kreises besitzen, kann es ein solches B nicht geben. $\#$

Wegen $Q \in K_r(M) \setminus \{P\}$ folgt, dass alle Punkte in $K_r(M) \setminus \{P\}$ auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{OP}$ liegen wie Q . Analog zeigt man, dass alle Punkte in $K_r(M) \setminus \{Q\}$ auf derselben Seite von $\overleftrightarrow{OQ}$ liegen wie P . Mit Ausnahme von P, Q liegen also alle Punkte von $K_r(M)$ im Inneren des Winkels $\angle POQ$. Es folgt, dass ein Strahl aus O höchstens dann einen Schnittpunkt mit $K_r(M)$ hat, wenn er im Inneren von $\angle POQ$ verläuft oder mit einem der Strahlen $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ übereinstimmt.

Der von P verschiedene Schnittpunkt von $\overleftrightarrow{OP}$ und K ist $-P$. Es ist $\angle QO(-P)$ ein Ergänzungswinkel von $\angle POQ$, und für jeden Punkt A im Inneren von $\angle QO(-P)$ ist die Gerade $\overleftrightarrow{OA}$ die Vereinigung zweier Strahlen, die mit Ausnahme des Punktes O jeweils im Inneren eines Ergänzungswinkels zu $\angle POQ$ liegen. Für jeden Punkt A im Inneren von $\angle QO(-P)$ hat also die Gerade $\overleftrightarrow{OA}$ keinen Schnittpunkt mit $K_r(M)$. Auf der Strecke $\overline{Q(-P)}$ liegen wegen (A_2) unendlich viele Punkte, von denen bis auf Q und $-P$ alle im Inneren des Winkels $\angle QO(-P)$ liegen. Da die Verbindungsgeraden durch O und jeweils einen Punkt von $\overline{Q(-P)} \setminus \{Q, -P\}$ paarweise verschieden sind, erhalten wir durch Schneiden derselben mit P_k unendlich viele k -Geraden vom ersten Typ, die $K_r(M)$ und insbesondere g_k nicht schneiden. $\square$

Zusammengefasst erhalten wir

Satz 5.11 ($\mathbb{E}$). *Das Poincaré'sche Kreismodell $\mathbb{H}_k$ ist eine hyperbolische Ebene.*

5.2 Hyperbolische Geometrie

In diesem Abschnitt werden wir exemplarisch einige wichtige Aussagen der hyperbolischen ebenen Geometrie im Poincaré'schen Kreismodell $\mathbb{H}_k$ beweisen. Wir schreiben dabei kurz $(\mathbb{H}_k)$ für „Sei $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k, \cong_k, \simeq_k)$ das in Abschnitt 5.1 eingeführte Poincaré'sche Kreismodell.“

Zunächst erinnern wir aber an die aus der Analysis bekannten Hyperbelfunktionen

$$\sinh : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \end{cases} \quad \cosh : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \end{cases} \quad \tanh : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{cases}$$

Folgende leicht zu überprüfende Rechenregeln für diese werden wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts noch benötigen.

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Lemma 5.12 ($\mathbb{H}_k$). *Für einen beliebigen k -Punkt A gilt $d_k(O, A) = \log \frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|}$.*

Beweis. Sind P, Q die Endpunkte der k -Gerade $\overleftrightarrow{OA}^k$, so ergibt sich unabhängig von der Wahl ihrer Anordnung aus der Definition von d_k

$$d_k(O, A) = |\log DV(O, A, P, Q)| = \left| \log \frac{\|O - P\| \|A - Q\|}{\|O - Q\| \|A - P\|} \right| = \left| \log \frac{1 \pm \|A\|}{1 \mp \|A\|} \right| = \log \frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|}.$$

$\square$

Lemma 5.13 ($\mathbb{H}_k$). Für einen beliebigen k -Punkt A gilt

$$\sinh d_k(O, A) = \frac{2\|A\|}{1 - \|A\|^2} \quad \text{und} \quad \cosh d_k(O, A) = \frac{1 + \|A\|^2}{1 - \|A\|^2}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \sinh d_k(O, A) &= \frac{e^{d_k(O, A)} - e^{-d_k(O, A)}}{2} \stackrel{5.12}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|} - \frac{1 - \|A\|}{1 + \|A\|} \right) = \frac{2\|A\|}{1 - \|A\|^2}, \\ \cosh d_k(O, A) &= \frac{e^{d_k(O, A)} + e^{-d_k(O, A)}}{2} \stackrel{5.12}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|} + \frac{1 - \|A\|}{1 + \|A\|} \right) = \frac{1 + \|A\|^2}{1 - \|A\|^2}. \end{aligned}$$

□

Lemma 5.14 ($\mathbb{H}_k$). Sei g_k eine k -Gerade vom zweiten Typ mit Endpunkten P, Q , und sei $K_r(M)$ der zu K orthogonale Kreis mit $g_k = K_r(M) \cap \mathbf{P}_k$. Für jeden k -Punkt $A \in g_k$ gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $\hat{A}$ mit

$$\{\hat{A}\} = \overline{PQ} \cap \overline{OA}.$$

Für diesen gilt

$$\|\hat{A}\| = \tanh d_k(O, A) = \frac{2\|A\|}{1 + \|A\|^2}.$$

Beweis. Der k -Strahl $\overrightarrow{OA}^k$ liegt im k -Inneren von $\angle_k POQ$ und somit der Strahl $\overrightarrow{OA}$ im Inneren von $\angle POQ$. Nach Teil (b) von Lemma 3.22 gibt es dann einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt $\hat{A}$ von $\overrightarrow{OA}$ und $\overline{PQ}$.

Im Beweis von Proposition 4.30 haben wir bereits gesehen, dass A' der von A verschiedene zweite Schnittpunkt von $\overleftrightarrow{OA}$ mit $K_r(M)$ ist. Weiter gilt

$$\sigma(\hat{A}) = \frac{1}{2} (A + A') =: M_{AA'},$$

denn: Im Spezialfall $\hat{A} = \frac{1}{2} (P + Q)$ geht die Gerade $\overleftrightarrow{OA} = \overleftrightarrow{OA}$ durch den Kreismittelpunkt M . Insbesondere sind A, A', M kollinear, und es gilt $M_{AA'} = M$. Da die Kreise K und $K_r(M)$ orthogonal zueinander sind, ist daher $M_{AA'}$ der Schnittpunkt der Geraden $\overleftrightarrow{OA}$ mit den Tangenten an K in P und in Q . Mit Proposition 4.26 folgt die Behauptung in diesem Fall.

Im Folgenden sei $\hat{A} \neq \frac{1}{2} (P + Q) =: M_{PQ}$. Da M als Mittelpunkt von $K_r(M)$ auf der Mittelsenkrechten $m_{\overline{AA'}} = \ell_{\overleftrightarrow{OM_{AA'}}} M_{AA'}$ liegt, ist $\angle MM_{AA'}O$ genau wie $\angle \hat{A} M_{PQ} O$ ein rechter Winkel. Da zudem die Winkel $\angle \hat{A} O M_{PQ}$ und $\angle M O M_{AA'}$ übereinstimmen, sind nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck 1.42 die Dreiecke $\triangle O \hat{A} M_{PQ}$ und $\triangle O M M_{AA'}$ ähnlich zueinander. Insbesondere gilt

$$\frac{\|\hat{A}\|}{\|M_{PQ}\|} = \frac{\|M\|}{\|M_{AA'}\|}$$

und also

$$\|\hat{A}\| \cdot \|M_{AA'}\| = \|M_{PQ}\| \cdot \|M\| = 1,$$

wobei sich die letzte Gleichung aus dem vorher betrachteten Spezialfall ergibt. #

Wir erhalten

$$\|\hat{A}\| = \frac{1}{\|M_{AA'}\|} = \frac{2}{\|A\| + \|A'\|} = \frac{2}{\|A\| + \frac{1}{\|A\|}} = \frac{2\|A\|}{1 + \|A\|^2} = \tanh d_k(O, A).$$

□

Satz 5.15 ($\mathbb{H}_k$). Sei $\triangle_k ABC$ ein rechtwinkliges k -Dreieck mit k -Seitenlängen (a, b, c) und k -Winkelgrößen $(\alpha, \beta, \frac{\pi}{2})$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

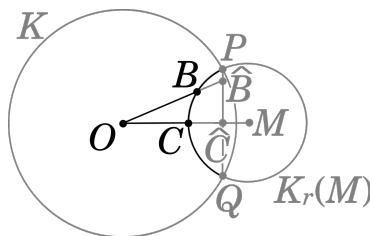
$$(a) \quad \sin \alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{\sinh b}{\sinh c},$$

$$(b) \quad \cos \alpha = \frac{\tanh b}{\tanh c} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\tanh a}{\tanh c},$$

$$(c) \quad \cosh a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \quad \text{und} \quad \cosh b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},$$

$$(d) \quad \cosh c = \cosh a \cdot \cosh b = \cot \alpha \cdot \cot \beta.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst Aussage (b). Nach Proposition 5.8 gibt es eine k -Bewegung, die A auf den Ursprung O abbildet, so dass wir ohne Einschränkung $A = O$ annehmen können. Die k -Gerade $\overleftrightarrow{BC}^k$ ist dann vom zweiten Typ, so dass es einen eindeutig bestimmten zu K orthogonalen Kreis $K_r(M)$ mit $K_r(M) \cap \mathbf{P}_k = \overleftrightarrow{BC}^k$ gibt. Der Punkt C liegt auf dem Strahl $\overrightarrow{OM}$, denn: Nach Voraussetzung ist $\angle_k OCB$ ein rechter k -Winkel, weshalb die Tangente $t_{K_r(M)}C$ orthogonal zur Geraden $\overleftrightarrow{OC}$ ist. Andererseits ist $t_{K_r(M)}C$ auch orthogonal zu $\overleftrightarrow{MC}$, so dass wir $\overleftrightarrow{OC} \parallel \overleftrightarrow{MC}$ und also $\overleftrightarrow{OC} = \overleftrightarrow{MC}$ erhalten. Es folgt $C \in \overrightarrow{OM}$. Da O außerhalb von $K_r(M)$ liegt, gilt zudem $r = \|M - C\| < \|O - M\|$, so dass $C \star O \star M$ ausgeschlossen ist. #



Sind P, Q die Endpunkte von $\overleftrightarrow{BC}^k$ und $\hat{B} := \overleftrightarrow{OB} \wedge \overleftrightarrow{PQ}$, $\hat{C} := \overleftrightarrow{OC} \wedge \overleftrightarrow{PQ}$, so hat daher das Dreieck $\triangle O\hat{C}\hat{B}$ einen rechten Winkel bei $\hat{C}$, vgl. Teil (b) von Proposition 4.15. Mit Korollar 1.44 folgt dann

$$\cos \alpha = \frac{\|\hat{C}\|}{\|\hat{B}\|} \stackrel{5.14}{=} \frac{\tanh b}{\tanh c},$$

Für den Nachweis von Behauptung (d) bemerken wir zunächst

$$\begin{aligned}\sinh^2 c &= \sinh^2 c (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \stackrel{(a),(b)}{=} \sinh^2 c \cdot \left(\frac{\sinh^2 a}{\sinh^2 c} + \frac{\tanh^2 b}{\tanh^2 c} \right) \\ &= \sinh^2 a + \cosh^2 c \cdot \tanh^2 b.\end{aligned}$$

Mit (5.6) folgt daraus

$$\cosh^2 c = 1 + \sinh^2 c = \cosh^2 a + \cosh^2 c \cdot \tanh^2 b$$

und somit

$$\cosh^2 c \cdot \cosh^2 b = \cosh^2 a \cdot \cosh^2 b + \cosh^2 c \cdot \sinh^2 b.$$

Erneutes Anwenden von (5.6) liefert

$$\cosh^2 c = \cosh^2 c (\cosh^2 b - \sinh^2 b) = \cosh^2 a \cdot \cosh^2 b.$$

Mit der Positivität von $\cosh$ folgt hieraus das erste Gleichheitszeichen in (d) und also

$$\begin{aligned}\cosh a &= \frac{\cosh c}{\cosh b} = \frac{\sinh c}{\sinh b} \cdot \frac{\tanh b}{\tanh c} \stackrel{(a),(b)}{=} \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \\ \cosh b &= \frac{\cosh c}{\cosh a} = \frac{\sinh c}{\sinh a} \cdot \frac{\tanh a}{\tanh c} \stackrel{(a),(b)}{=} \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},\end{aligned}$$

und somit Behauptung (c). Hieraus ergibt sich schließlich mit

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \cot \alpha \cdot \cot \beta$$

auch das zweite Gleichheitszeichen in (d). □

Satz 5.16 ($\mathbb{H}_k$). Sei $\triangle_k ABC$ ein k -Dreieck mit k -Seitenlängen (a, b, c) und k -Winkelgrößen (α, β, γ) . Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) Der *hyperbolische Seitenkosinussatz*

$$\begin{aligned}\cosh a &= \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos \alpha, \\ \cosh b &= \cosh c \cdot \cosh a - \sinh c \cdot \sinh a \cdot \cos \beta, \\ \cosh c &= \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos \gamma.\end{aligned}$$

(b) Der *hyperbolische Winkelkosinussatz*

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cosh a \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \beta \cdot \cos \gamma, \\ \cos \beta &= \cosh b \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \alpha, \\ \cos \gamma &= \cosh c \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta.\end{aligned}$$

(c) Der *hyperbolische Sinussatz*

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin \alpha \cdot \sinh c \cdot \sinh a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \\
&\stackrel{5.15(a)}{=} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sinh^2 h}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \\
&= \frac{\cos(\beta_1 + \beta_2) + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 (1 + \sinh^2 h)}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \\
&\stackrel{(5.7),(5.6)}{=} \frac{\cos \beta + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \cosh^2 h}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \\
&\stackrel{5.15(c)}{=} \frac{\cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}.
\end{aligned}$$

Zum Beweis des hyperbolischen Sinussatzes (c) berechnen wir

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} \stackrel{5.15(a)}{=} \frac{1}{\sinh a} \cdot \frac{\sinh h}{\sinh c} \stackrel{5.15(a)}{=} \frac{\sin \gamma}{\sinh c},$$

die andere Gleichung ergibt sich analog. $\square$

Satz 5.17 (Winkelsumme im Dreieck (hyperbolisch), $\mathbb{H}_k$). Für ein beliebiges k -Dreieck $\triangle_k ABC$ mit k -Winkelgrößen (α, β, γ) gilt

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi,$$

die Summe der k -Innenwinkelgrößen eines k -Dreiecks ist also stets kleiner als π .

Beweis. Sei $D \in \overleftrightarrow{AC}^k$ ein k -Punkt mit $A \star_k C \star_k D$. Nach dem Außenwinkelsatz 3.65 gilt dann

$$\angle_k CBA < \angle_k BCD.$$

Nach Proposition 5.8 gibt es eine selbstinverse k -Bewegung, die den Scheitel eines gegebenen k -Winkels auf den Ursprung abbildet. Aus den entsprechenden Überlegungen in der euklidischen Standardebene folgt daher zum Einen, dass ein k -Winkel genau dann kleiner als ein anderer k -Winkel ist, wenn dieselbe Relation zwischen den zugehörigen k -Winkelgrößen gilt, und zum Anderen, dass sich die k -Winkelgrößen eines gegebenen k -Winkels und eines seiner k -Ergänzungswinkel zu π aufaddieren. Es folgt daher

$$\beta = \angle_k CBA < \angle_k BCD = \pi - \angle_k BCA = \pi - \gamma. \quad (5.8)$$

Nach dem hyperbolischen Winkelkosinussatz 5.16 gilt

$$\cos \alpha = \cosh a \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

Nach (5.6) ist $\cosh^2 a = 1 + \sinh^2 a > 1$. Mit $\cosh a > 0$ folgt daraus $\cosh a > 1$ und somit

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &> 1 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \beta \cdot \cos \gamma \\
&= -(\cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \beta \cdot \sin \gamma) \\
&= -\cos(\beta + \gamma) \\
&= \cos(\pi - (\beta + \gamma)).
\end{aligned}$$

Da α und nach (5.8) auch $\pi - (\beta + \gamma)$ im Intervall $(0, \pi)$ liegen und da der Kosinus dort streng monoton fällt, folgt wie behauptet

$$\alpha < \pi - (\beta + \gamma).$$

□

5.3 Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1 (E). Sei g_k eine k -Gerade vom ersten Typ, und sei g eine zu K orthogonale Gerade mit $g_k = g \cap \mathbf{P}_k$. Zeigen Sie, dass dann die Einschränkung auf $\mathbf{P}_k$ der Spiegelung an g eine Bewegung im Poincaré'schen Kreismodell $\mathbb{H}_k$ ist.

Aufgabe 5.2 (E). In dieser Aufgabe führen wir mit der Poincaré-Halbebene $\mathbb{H}_h$ ein weiteres Modell einer hyperbolischen Ebene ein. Das Paar $\mathbb{H}_h := (\mathbf{P}_h, \mathbf{G}_h)$ mit

$$\mathbf{P}_h := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

$$\mathbf{G}_h := \{g \cap \mathbf{P}_h \mid g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}} \text{ orth. zu } \mathbb{R}\} \cup \{K' \cap \mathbf{P}_h \mid K' \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ zu } \mathbb{R} \text{ orth. Kreis}\}$$

heißt die **Poincaré-Halbebene**. Hierbei (und im Weiteren) identifizieren wir wie üblich die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der x -Achse darin. Die Elemente von $\mathbf{P}_h$ nennen wir **h -Punkte**, die Elemente von $\mathbf{G}_h$ heißen **h -Geraden**. Zeigen Sie:

(a) Die **Cayley-Abbildung**

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}, \\ z & \mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{cases}$$

ist eine Bijektion.

(b) Die Einschränkung von ϕ auf $\mathbb{R}$ liefert eine Bijektion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\} \setminus \{1\}$.

(c) Die Einschränkung von ϕ auf $\mathbf{P}_h$ liefert eine Bijektion $\phi : \mathbf{P}_h \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\} \cong \mathbf{P}_k$.

(d) Es gilt $\phi|_{\mathbf{P}_h}(z) = -i \cdot \overline{\sigma_{\sqrt{2}, -i}(z)}$.

(e) Für alle $g_h \in \mathbf{G}_h$ gilt $\phi(g_h) \in \mathbf{G}_k$, und für alle $g_k \in \mathbf{G}_k$ gilt $\phi^{-1}(g_k) \in \mathbf{G}_h$.

Offensichtlich wird $\mathbb{H}_h$ zu einer hyperbolischen Ebene, wenn die Anordnung und die Kongruenzbegriffe für Strecken und Winkel dadurch erklärt werden, dass die Cayley-Abbildung ϕ die entsprechenden Verträglichkeiten eines Isomorphismus wie in Definition 3.29 erfüllen soll.

Aufgabe 5.3 ($\mathbb{H}_k$). Seien $A, B, P, Q \in \mathbf{P}_k$ mit $A \neq P$ und $B \neq Q$, und seien $R, S \in K$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es existieren genau zwei k -Bewegungen ϕ mit $\phi(A) = A$ und $\phi(\overrightarrow{AP}^k) = \overrightarrow{AP}^k$.

(b) Es existieren genau zwei k -Bewegungen ϕ mit $\phi(A) = B$ und $\phi(\overrightarrow{AP}^k) = \overrightarrow{BQ}^k$.

(c) Es existieren genau zwei k -Bewegungen ϕ mit $\phi(A) = B$ und $\phi(\overrightarrow{AR}^k) = \overrightarrow{BS}^k$.

Aufgabe 5.4 ($\mathbb{H}_k$). Zeigen Sie, dass sich jede k -Bewegung als Komposition von höchstens vier k -Geradenspiegelungen schreiben lässt.