Analytische Zahlentheorie

Wintersemester 2022 / 23

Dr. Hendrik Kasten

22. Februar 2023

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Zahlentheoretische Funktionen

Eine gegebene, zahlentheoretisch interessante Folge komplexer Zahlen lässt sich als zahlentheoretische Funktion, also als Abbildung auf $\mathbb{N}$ mit Werten in $\mathbb{C}$, kodieren. Wir widmen uns in diesem Kapitel einer kurzen Einführung und Wiederholung wichtiger Tatsachen über zahlentheoretische Funktionen.

1.1 Der Ring der zahlentheoretischen Funktionen

Eine zahlentheoretische Funktion ist streng genommen zunächst nichts anderes als eine Folge mit Werten in den komplexen Zahlen. Erst wenn eine arithmetische Komponente, wie etwa das Abzählen von Teilern, hinzukommt, wirkt der Begriff umfänglich motiviert. Diese subjektive Begriffsbildung kann mathematisch nicht umgesetzt werden, so dass wir uns damit begnügen, die arithmetische Komponente durch die später aufgezeigten Ringstrukturen zu erklären.

Definition 1.1. *Eine beliebige Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nennen wir eine **zahlentheoretische Funktion**.*

Wir geben sogleich einige Beispiele wichtiger zahlentheoretischer Funktionen:

Beispiel 1.2. (a) *Wir schreiben ι für die durch $\iota(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegebene Identität. Für ein beliebiges $s \in \mathbb{C}$ nennen wir die durch $\iota^s(n) := n^s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte zahlentheoretische Funktion die **s-te Potenzfunktion**. Neben der Identität selbst ist die konstante Einsfunktion ι^0 ein wichtiger Spezialfall.*

(b) *Für ein festes $s \in \mathbb{C}$ definieren wir die **s-te Teilersummenfunktion** $\sigma_s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ durch*

$$\sigma_s(n) := \sum_{d|n} d^s.$$

Wir werden in den Abschnitten 1.3 und 1.6 Eigenschaften der Teilersummenfunktionen untersuchen.

(c) *Wir definieren die* **EULER'sche φ-Funktion**[1] $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *durch*

$$\varphi(n) := \left|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right| = |\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n \text{ und } \operatorname{ggT}(k,n) = 1\}|,$$

wobei $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ *die multiplikative Gruppe der primen Restklassen modulo n bezeichnet. Die φ-Funktion wurde zuerst* 1763 *von Euler studiert. Die heute übliche Bezeichnung mit dem griechischen Buchstaben φ stammt von Gauß, der sie* 1801 *in seinen* Disquisitiones *einführte. Wir werden die φ-Funktion in Abschnitt 1.4 genauer studieren.*

(d) *Wir definieren die* **Möbius-Funktion** $\mu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *durch*

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^k, & \text{für } n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } p_1, \ldots, p_k \\ & \text{paarweise verschiedene Primzahlen,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung bis auf Reihenfolge ist dies wohldefiniert. Es ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} &\mu(1) = (-1)^0 = 1, \\ &\mu(p) = (-1)^1 = -1 && \text{für jede Primzahl } p, \\ &\mu(pq) = (-1)^2 = 1, && \text{für Primzahlen } p \neq q, \\ &\mu(p^2) = 0, && \text{für jede Primzahl } p. \end{aligned}$$

Die Möbius-Funktion wurde zuerst 1832 *von Möbius studiert und spielt eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der multiplikativen Struktur der Menge der zahlentheoretischen Funktionen, vergleiche auch Abschnitte 1.2 und 1.5.*

(e) *In Abschnitt 3.2 werden wir mit den* DIRICHLET-*Charakteren*[2] *eine Klasse von Funktionen* $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *einführen, deren Einschränkungen auf die natürlichen Zahlen weitere interessante zahlentheoretische Funktionen liefern.*

Wir können die Gesamtheit aller zahlentheoretischen Funktionen zur Menge

$$\mathcal{A} := \{a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$$

zusammenschließen. Offenbar besitzt diese durch komponentenweise Addition die Struktur einer abelschen Gruppe und wird ferner durch skalare Multiplikation zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wir wollen $\mathcal{A}$ durch eine zusätzliche multiplikative Verknüpfung noch mehr Struktur verschaffen:

Definition 1.3. *Die Vorschrift*

$$*\colon \begin{cases} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \to \mathcal{A}, \\ (a,b) & \mapsto a * b \end{cases}$$

[1] Leonhard Euler (1707-1783)
[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

mit

$$(a * b)\colon \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{C}, \\ n & \mapsto (a * b)(n) := \sum_{d|n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right) \end{cases}$$

*wird auch als die **Dirichlet-Faltung** der zahlentheoretischen Funktionen a und b bezeichnet. Summiert wird hierbei selbstverständlich nur über alle natürlichen Teiler d von n und nicht etwa auch über deren negative Gegenstücke in den ganzen Zahlen, was wir in diesem Kontext ohne weitere Erwähnung stets so handhaben wollen.*

Beispiel 1.4. *Für ein beliebiges $s \in \mathbb{C}$ gilt offenbar $\iota^0 * \iota^s = \sigma_s$.*

Satz 1.5. *Es ist $(\mathcal{A}, +, *)$ mit komponentenweiser Addition $+$ und Dirichlet-Faltung $*$ ein kommutativer Ring mit Eins*

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(n) := \begin{cases} 1, & \text{für } n = 1, \\ 0, & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

Die Einheitengruppe ist gegeben durch

$$\mathcal{A}^\times = \{a \in \mathcal{A} : a(1) \neq 0\}.$$

Beweis. Die erste Behauptung lässt sich direkt nachrechnen und ist eine *Übung*. Wir zeigen aber die zweite Behauptung:

Sei zunächst a in der Einheitengruppe. Dann gibt es eine zahlentheoretische Funktion $b \in \mathcal{A}$ mit $a * b = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ und also

$$1 = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(1) = (a * b)(1) = a(1)b(1).$$

Insbesondere kann $a(1)$ nicht Null sein.

Sei nun umgekehrt a eine zahlentheoretische Funktion mit $a(1) \neq 0$. Wir definieren induktiv eine zahlentheoretische Funktion b wie folgt: Zuerst setzen wir

$$b(1) := a(1)^{-1}.$$

Sind nun für ein beliebiges $n > 1$ die Werte $b(1), \ldots, b(n-1)$ bereits definiert, so setzen wir

$$b(n) := -a(1)^{-1} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} b(d) a\left(\frac{n}{d}\right).$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Funktion b mit

$$\begin{aligned} (b * a)(1) &= b(1)a(1) = 1 = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(1), \\ (b * a)(n) &= b(n)a(1) + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} b(d) a\left(\frac{n}{d}\right) = 0 = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(n) \quad \text{für } n > 1 \end{aligned}$$

und also $b = a^{-1}$. Es folgt, dass a in der Einheitengruppe liegt. $\square$

1.2 Multiplikativität

Wir benötigen nun den in der Zahlentheorie sehr zentralen Begriff der Multiplikativität zahlentheoretischer Funktionen. Wir unterscheiden hierbei zwischen zwei Varianten:

Definition 1.6. *Es sei a eine zahlentheoretische Funktion.*

(a) *Wir bezeichnen a als* ***schwach multiplikativ****, falls $a(1) \neq 0$ ist und für alle zueinander teilerfremden natürlichen n und m die Beziehung $a(nm) = a(n)a(m)$ gilt.*

(b) *Wir bezeichnen a als* ***stark multiplikativ****, falls $a(1) \neq 0$ ist und für alle natürlichen n und m die Beziehung $a(nm) = a(n)a(m)$ gilt.*

Lemma 1.7. *Jede schwach multiplikative und somit auch jede stark multiplikative zahlentheoretische Funktion a erfüllt $a(1) = 1$.*

Beweis. Wegen $\mathrm{ggT}(1, 1) = 1$ gilt mit der schwachen Multiplikativität $a(1) = a(1 \cdot 1) = a(1) \cdot a(1)$. Mit $a(1) \neq 0$ folgt $a(1) = 1$ und also die Behauptung. □

Stark multiplikative Funktionen lassen sich leicht handhaben. Für die Zahlentheorie interessante Funktionen sind aber oft nur schwach multiplikativ:

Beispiel 1.8. *Die Möbius-Funktion μ aus Beispiel 1.2 (d) ist schwach multiplikativ, aber nicht stark multiplikativ,*

denn: Wegen

$$\mu(4) = 0 \neq 1 = (-1)^2 = \mu(2)\mu(2)$$

ist μ offenbar nicht stark multiplikativ. Wir zeigen nun die schwache Multiplikativität: Zunächst gilt $\mu(1) = 1 \neq 0$. Nun betrachten wir $\mu(nm)$ für teilerfremde $n, m \in \mathbb{N}$ und unterscheiden hierbei die folgenden (nicht disjunkten) drei Fälle:

***Fall** 1: $\mu(n) = 0$. Dann gibt es eine Primzahl p mit $p^2 \mid n$. Es folgt unmittelbar $p^2 \mid nm$ und somit*

$$\mu(nm) = 0 = \mu(n)\mu(m).$$

***Fall** 2: $\mu(m) = 0$. Analog zu Fall 1.*

***Fall** 3: $\mu(n) \neq 0 \neq \mu(m)$. Dann gibt es $k_n, k_m \in \mathbb{N}_0$, so dass n, m und wegen der Teilerfremdheit auch nm Produkte von k_n, k_m bzw. $k_n + k_m$ paarweise verschiedenen Primzahlen sind, und es gilt*

$$\mu(nm) = (-1)^{k_n+k_m} = (-1)^{k_n}(-1)^{k_m} = \mu(n)\mu(m).$$

#

Eine Anleitung zur Handhabung schwach multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen liefert das folgende Lemma:

Lemma 1.9. *Für eine beliebige zahlentheoretische Funktion a sind äquivalent:*

(i) *a ist schwach multiplikativ.*

(ii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegung $n = \prod_{j=1}^{k_n} p_j^{\nu_{p_j}(n)}$ gilt*

$$a(n) = \prod_{j=1}^{k_n} a\left(p_j^{\nu_{p_j}(n)}\right).$$

Beweis. Gelte zunächst Aussage (i), sei also a schwach multiplikativ. Zum Beweis von Aussage (ii) führen wir eine Induktion nach k_n durch, wobei der Fall $k_n = 0$ mit Lemma 1.7 folgt und der Fall $k_n = 1$ trivial ist. Sei also $k_n > 1$ und nehmen wir an, Aussage (ii) sei für $k_n - 1$ bereits bewiesen. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung gilt

$$\operatorname{ggT}\left(p_1^{\nu_{p_1}(n)}, \prod_{j=2}^{k_n} p_j^{\nu_{p_j}(n)}\right) = 1$$

und wegen der schwachen Multiplikativität somit

$$a(n) = a\left(p_1^{\nu_{p_1}(n)}\right) \cdot a\left(\prod_{j=2}^{k_n} p_j^{\nu_{p_j}(n)}\right) \overset{\text{Ind.vorauss.}}{=} \prod_{j=1}^{k_n} a\left(p_j^{\nu_{p_j}(n)}\right).$$

Es folgt Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt (ii). Für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(n, m) = 1$ und kanonischen Primfaktorzerlegungen

$$n = \prod_{j=1}^{k_n} p_j^{\nu_{p_j}(n)} \quad \text{und} \quad m = \prod_{k=1}^{k_m} q_k^{\nu_{q_k}(m)}$$

gilt

$$a(nm) = a\left(\prod_{j=1}^{k_n} p_j^{\nu_{p_j}(n)} \cdot \prod_{k=1}^{k_m} q_k^{\nu_{q_k}(m)}\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \prod_{j=1}^{k_n} a\left(p_j^{\nu_{p_j}(n)}\right) \cdot \prod_{k=1}^{k_m} a\left(q_k^{\nu_{q_k}(m)}\right) = a(n)a(m)$$

und somit die schwache Multiplikativität (i). □

Hieraus folgt unmittelbar:

Korollar 1.10. *Stimmen zwei schwach multiplikative zahlentheoretische Funktionen auf allen Primpotenzen überein, so sind sie bereits als Funktionen identisch.*

Nach Definition 1.6 und Satz 1.5 besitzt jede schwach multiplikative Funktion ein Inverses in $\mathcal{A}$. Es gilt sogar noch mehr:

Satz 1.11. *Die Teilmenge*

$$\mathcal{A}^* := \{a \in \mathcal{A} : a \text{ ist schwach multiplikativ}\} \subseteq \mathcal{A}^\times$$

ist eine Untergruppe von $\mathcal{A}^\times$.

Beweis. Wir weisen das Untergruppenkriterium nach. Da $\mathbb{1}_\mathcal{A}$ offenkundig schwach multiplikativ ist, ist die Teilmenge $\mathcal{A}^*$ nicht leer. Weiterhin gilt

$$(a * b) \in \mathcal{A}^* \quad \text{für je zwei zahlentheoretische Funktionen } a, b \in \mathcal{A}^*, \tag{1.1}$$

denn: Da a und b beide bei 1 nicht verschwinden, ist

$$(a * b)(1) \quad = a(1)b(1) \neq 0.$$

Außerdem gilt nach Voraussetzung für alle zueinander teilerfremden natürlichen Zahlen n, m

$$\begin{aligned}(a * b)(nm) &= \sum_{d|nm} a(d) b\left(\frac{nm}{d}\right) \\ &= \sum_{d_n|n} \sum_{d_m|m} a(d_n d_m) b\left(\frac{n}{d_n}\frac{m}{d_m}\right) \\ &= \sum_{d_n|n} a(d_n) b\left(\frac{n}{d_n}\right) \sum_{d_m|m} a(d_m) b\left(\frac{m}{d_m}\right) \\ &= (a * b)(n)\,(a * b)(m).\end{aligned}$$

#

Schließlich gilt auch

$$a^{-1} \in \mathcal{A}^* \quad \text{für jede zahlentheoretische Funktion } a \in \mathcal{A}^*,$$

denn: Wir zeigen die Behauptung, indem wir eine schwach multiplikative zahlentheoretische Funktion $b \in \mathcal{A}$ konstruieren und nachweisen, dass diese mit a^{-1} übereinstimmt. Hierfür definieren wir

$$b(p^j) := a^{-1}(p^j) \quad \text{für alle Primzahlen } p \text{ und alle } j \in \mathbb{N}_0$$

und setzen dies (schwach) multiplikativ auf ganz $\mathbb{N}$ fort. Die Funktion b ist nach Konstruktion schwach multiplikativ, so dass wir den ersten Schritt unseres Beweises bereits bewältigt haben. Da nach Voraussetzung auch a schwach multiplikativ ist, gilt dies nach (1.1) auch für $a * b$. Da auch $\mathbb{1}_\mathcal{A}$ schwach multiplikativ ist, genügt es zum Beweis unserer Behauptung

$$(a * b)(p^j) = \mathbb{1}_\mathcal{A}(p^j) \quad \text{für alle Primzahlen } p \text{ und alle } j \in \mathbb{N}_0$$

zu zeigen. Tatsächlich gilt

$$(a * b)(p^j) = \sum_{0 \le k \le j} a(p^k) b(p^{j-k})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{0 \le k \le j} a(p^k) a^{-1}(p^{j-k}) \\
&= (a * a^{-1})(p^j) = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(p^j),
\end{aligned}
$$

wobei wir für die zweite Gleichheit ausgenutzt haben, dass nach Konstruktion von b die Funktionen b und a^{-1} auf Primpotenzen übereinstimmen. #

□

1.3 Die Teilersummenfunktionen

Indem wir die in Abschnitt 1.2 hergeleiteten Resultate auf die in Beispiel 1.2 (b) eingeführten Teilersummenfunktionen σ_s für $s \in \mathbb{C}$ anwenden, können wir deren schwache Multiplikativität nachweisen und dann mithilfe von Lemma 1.9 eine geschlossene Formel für ihre Werte herleiten:

Satz 1.12. *Für jedes beliebige $s \in \mathbb{C}$ ist die Teilersummenfunktion σ_s aus Beispiel 1.2 (b) schwach multiplikativ, aber nicht stark multiplikativ.*

Beweis. Nach Beispiel 1.4 lässt sich für ein beliebiges $s \in \mathbb{C}$ die Teilersummenfunktion σ_s als Faltung

$$\iota^0 * \iota^s = \sigma_s.$$

zweier offensichtlich stark multiplikativer und also insbesondere schwach multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen schreiben. Nach (1.1) ist damit auch σ_s schwach multiplikativ.

Dass σ_s für kein $s \in \mathbb{C}$ stark multiplikativ ist, sieht man an

$$\sigma_s(4) = 1 + 2^s + 4^s \neq 1 + 2 \cdot 2^s + 4^s = (1 + 2^s)(1 + 2^s) = \sigma_s(2)\sigma_s(2).$$

Insbesondere haben wir gezeigt, dass die Faltung zweier stark multiplikativer Funktionen nicht wieder stark multiplikativ sein muss, dass es also kein Äquivalent zu (1.1) für stark multiplikative zahlentheoretische Funktionen gibt. □

Korollar 1.13. *Für jedes $s \in \mathbb{C}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegung $n = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \mid n}} p^{\nu_p(n)}$ gilt*

$$\sigma_s(n) = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \mid n}} \frac{p^{s(\nu_p(n)+1)} - 1}{p^s - 1}.$$

Beweis. Mit der endlichen geometrischen Summenformel gilt für jede Primzahl p und jedes $j \in \mathbb{N}$

$$\sigma_s(p^j) = \sum_{d \mid p^j} d^s = \sum_{k=0}^{j} p^{ks} = \sum_{k=0}^{j} (p^s)^k = \frac{(p^s)^{j+1} - 1}{p^s - 1}.$$

Das Korollar folgt mit Lemma 1.9 und Satz 1.12. □

1.4 Die Euler'sche φ-Funktion

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die in Beispiel 1.2 (c) eingeführte Euler'sche φ-Funktion schwach multiplikativ ist und geben eine geschlossene Formel für ihre Funktionswerte an. In Hinsicht auf Lemma 1.9 bestimmen wir dafür zunächst die Werte auf den Primpotenzen:

Proposition 1.14. *Für eine Primzahl p und $j \in \mathbb{N}$ beliebig gilt:*

$$\varphi(p^j) = p^{j-1}(p-1).$$

Beweis. Es gibt genau p^{j-1} Zahlen a mit $0 \leq a < p^j$, die *nicht* teilerfremd zu p^j sind, nämlich: $0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p, \ldots, (p^{j-1}-1) \cdot p$. Wir erhalten $\varphi(p^j) = p^j - p^{j-1} = p^{j-1}(p-1)$. □

Unser nächstes Ziel ist der Nachweis der schwachen Multiplikativität von φ. Zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen hierzu machen wir die von Gauß in seinen 1801 erschienenen *Disquisitiones* gegebene

Satz 1.15 (Teilersummenformel)**.**

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Für einen beliebigen natürlichen Teiler $d \mid n$ setzen wir

$$\begin{aligned} G_d(n) &:= \{k \in \mathbb{N} : k \leq n \text{ und } \operatorname{ggT}(n,k) = d\} \\ &= \{k \in \mathbb{N} : \text{es gibt ein } c \in \mathbb{N} \text{ mit } k = cd,\ 1 \leq cd \leq n \text{ und } \operatorname{ggT}(n, cd) = d\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich liegt dann jede Zahl $1 \leq k \leq n$ in genau einer der Mengen $G_d(n)$ mit $d \mid n$, nämlich in $G_{\operatorname{ggT}(n,k)}(n)$, und es folgt

$$n = |\{1, \ldots, n\}| = \left| \bigcup_{d|n} G_d(n) \right| = \sum_{d|n} |G_d(n)|. \tag{1.2}$$

Wir bestimmen nun die einzelnen Summanden rechts genauer. Es gilt

$$\operatorname{ggT}(n, cd) = d \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{ggT}\left(\frac{n}{d}, c\right) = 1 \qquad \text{für alle } d \mid n \text{ und alle } c \in \mathbb{N},$$

denn: Gelte $\operatorname{ggT}(n, cd) = d$. Nach dem Erweiterten Euklid'schen Algorithmus gibt es dann $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $un + vcd = d$ und also mit $u\,\frac{n}{d} + vc = 1$. #

Es folgt

$$\begin{aligned} |G_d(n)| &= \left| \{k \in \mathbb{N} : \exists c \in \mathbb{N} \text{ mit } k = cd,\ 1 \leq c \leq \frac{n}{d} \text{ und } \operatorname{ggT}\left(\frac{n}{d}, c\right) = 1\} \right| \\ &= \varphi\left(\frac{n}{d}\right). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$n \overset{(1.2)}{=} \sum_{d|n} |G_d(n)| = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

□

Beispiel 1.16. *Für $n = 12$ besagt die Teilersummenformel 1.15*

$$\begin{aligned}\sum_{d|12} \varphi(d) &= \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 \\ &= 12.\end{aligned}$$

Mit der Teilersummenformel 1.15 erhalten wir nun die schwache Multiplikativität von φ:

Satz 1.17. *Die Euler'sche φ-Funktion ist schwach multiplikativ.*

Beweis. Wir zeigen den Satz per Indukion nach $k \in \mathbb{N}$. In jedem Schritt zeigen wir dabei, dass sich jede Zerlegung $k = nm$ mit teilerfremden $n, m \in \mathbb{N}$ als

$$\varphi(nm) = \varphi(k) = \varphi(n)\varphi(m)$$

in die Werte der φ-Funktion übersetzt. Der Induktionsanfang für $k = 1$ ist hierbei klar. Sei nun also $k > 1$ und sei die Behauptung für alle $1 \leq \tilde{k} < k$ bereits gezeigt. Für eine Zerlegung $k = nm$ mit teilerfremden $n, m \in \mathbb{N}$ gilt mit der Teilersummenformel 1.15 und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d_n|n \\ d_m|m}} \varphi(d_n)\varphi(d_m) &= \left(\sum_{d_n|n} \varphi(d_n)\right) \cdot \left(\sum_{d_m|m} \varphi(d_m)\right) \overset{1.15}{=} nm \\ &\overset{1.15}{=} \sum_{d|nm} \varphi(d) = \sum_{\substack{d_n|n \\ d_m|m}} \varphi(d_n d_m).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Wir fixieren nun positive Teiler $d_n \mid n$ und $d_m \mid m$. Außer im Fall $(d_n = n) \wedge (d_m = m)$ gilt dann

$$\tilde{k} := d_n d_m < nm = k$$

und nach Induktionsvoraussetzung somit

$$\varphi(d_n)\varphi(d_m) = \varphi(d_n d_m).$$

Setzen wir dies in (1.3) ein, so folgt die Multiplikativität auch für den Summanden zu $d_n = n$ und $d_m = m$ und also

$$\varphi(k) = \varphi(n)\varphi(m).$$

Insgesamt haben wir die schwache Multiplikativität der Euler'schen φ-Funktion gezeigt. □

Aus Proposition 1.14 und Satz 1.17 ergibt sich nun unmittelbar eine geschlossene Formel für die Werte der Euler'schen φ-Funktion:

Korollar 1.18. *Die Euler'sche φ-Funktion erfüllt*

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegung

$$n = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} p^{\nu_p(n)}$$

folgt mit Lemma 1.9 und der schwachen Multiplikativität 1.17 der Euler'schen φ-Funktion

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} \varphi(p^{\nu_p(n)}) \overset{1.14}{=} \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} p^{\nu_p(n)-1}(p-1) \\ &= \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} p^{\nu_p(n)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

und somit die geschlossene Formel für φ. □

Beispiel 1.19. *In der Praxis berechnet man Werte der Euler'schen φ-Funktion meist nicht mit der Formel aus Korollar 1.18 sondern einfacher direkt mit schwacher Multiplikativität und Proposition 1.14:*

$$\varphi(140) = \varphi(4 \cdot 5 \cdot 7) = \varphi(4) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot (5-1) \cdot (7-1) = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48.$$

1.5 Der Möbius'sche Umkehrsatz

Die in Abschnitt 1.4 gezeigte Teilersummenformel 1.15 der Euler'schen φ-Funktion ist eine spezielle Instanz eines allgemeineren Konzepts, das wir in diesem Abschnitt einführen, um damit im Möbius'schen Umkehrsatz 1.26 das multiplikative Inverse der Möbius-Funktion zu bestimmen:

Definition 1.20. *Sei a eine zahlentheoretische Funktion. Unter der* ***summatorischen Funktion von*** *a versteht man die zahlentheoretische Funktion A, die durch*

$$A(n) := \sum_{d|n} a(d) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

definiert ist.

Beispiel 1.21. (a) *Die summatorische Funktion der s-ten Potenzfunktion ι^s für ein festes $s \in \mathbb{C}$ ist offensichtlich die Teilersummenfunktion*

$$\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s = \sum_{d|n} \iota^s(d) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) *Nach der Teilersummenformel 1.15 ist die summatorische Funktion der Euler'schen φ-Funktion die Identität ι^1.*

Lemma 1.22. *Sei a eine schwach multiplikative zahlentheoretische Funktion und A die summatorische Funktion von a. Dann ist auch A schwach multiplikativ.*

Beweis. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} A(nm) &= \sum_{d|nm} a(d) \\ &= \sum_{d_n|n} \sum_{d_m|m} a(d_n)a(d_m) \\ &= \left(\sum_{d_n|n} a(d_n) \right) \left(\sum_{d_m|m} a(d_m) \right) \\ &= A(n)A(m). \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.23. *Für ein festes $s \in \mathbb{C}$ ist die s-te Potenzfunktion ι^s offensichtlich stark und insbesondere auch schwach multiplikativ. Nach Beispiel 1.21 (a) und Lemma 1.22 ist daher auch die Teilersummenfunktion σ_s schwach multiplikativ, was einen neuen Beweis für Satz 1.12 liefert.*

Proposition 1.24. *Die summatorische Funktion der Möbius-Funktion μ ist die Einsfunktion $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ im Ring der zahlentheoretischen Funktionen.*

Beweis. Sei die summatorische Funktion der Möbius-Funktion μ zunächst mit M bezeichnet. Nach Lemma 1.22 ist M als summatorische Funktion der nach Beispiel 1.8 schwach multiplikativen Möbius-Funktion selbst wieder schwach multiplikativ. Zum Beweis der Proposition genügt es nach Korollar 1.10 also

$$M(p^j) = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(p^j) \quad \text{für alle primen } p \text{ und alle } j \in \mathbb{N}_0$$

zu zeigen. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} M(p^0) &= M(1) \overset{1.7}{=} 1 = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(1) = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(p^0), \\ M(p^j) &= \sum_{k=0}^{j} \mu(p^k) = \mu(1) + \mu(p) = 1 - 1 = 0 = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(p^j) \qquad \text{für alle } j \geq 1. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.25. *Sei a eine zahlentheoretische Funktion und A die summatorische Funktion von a. Dann gilt $A = a * \iota^0$.*

Beweis. Nach Definition von Dirichlet-Faltung und summatorischer Funktion gilt

$$(a * \iota^0)(n) = \sum_{d|n} a(d) = A(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

□

Wir haben nun alle Vorüberlegungen angestellt, um den folgenden, 1832 von Möbius bewiesenen Satz zu beweisen:

Satz 1.26 (Möbius'scher Umkehrsatz). *Für zwei zahlentheoretische Funktionen a und b gilt*

$$a(n) = \sum_{d|n} b(d) \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$

genau dann, wenn

$$b(n) = \sum_{d|n} a(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} a\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d) \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist.

Beweis. Aus Proposition 1.24 und Lemma 1.25 folgt sofort

$$\mu * \iota^0 = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}. \tag{1.4}$$

Hiermit gilt

$$a = a * \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \overset{(1.4)}{=} a * (\mu * \iota^0) = (a * \mu) * \iota^0$$

und wegen der durch (1.4) gegebenen Invertierbarkeit der Funktion ι^0 im Ring $\mathcal{A}$

$$a = b * \iota^0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = a * \mu,$$

also der Satz. □

Der Möbius'sche Umkehrsatz 1.26 ermöglicht eine unmittelbare Bestimmung von Relation zwischen zahlentheoretischen Funktionen:

Beispiel 1.27. (a) *Aus der Teilersummenformel 1.15 der Euler'schen φ-Funktion folgt*

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N},$$

bzw. in anderer Schreibweise

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) *Für die Teilersummenfunktion σ_s für ein $s \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sigma_s(d) = n^s \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

1.6 Eine Rekursionsformel für die Teilersummenfunktionen

Zum Abschluss dieses Kapitels verwenden wir die bisherigen Resultate, um in Lemma 1.29 eine Rekursionsformel herzuleiten, die für ein gegebenes $s \in \mathbb{C}$ die Werte der Teilersummenfunktion σ_{s+1} durch die der Teilersummenfunktionen σ_s und σ_{s-1} ausdrückt.

In einem ersten Schritt stellen wir die Teilersummenfunktion σ_{s-1} durch Werte der Funktion σ_s dar:

Lemma 1.28. *Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt*

$$n\sigma_{s-1}(n) = \sum_{d|n} \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right) \varphi(d) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Definitionsgemäß gelten

$$n\sigma_{s-1}(n) = \sum_{d|n} d^s \frac{n}{d} = \left(\iota^1 * \iota^s\right)(n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{d|n} \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right) \varphi(d) = (\sigma_s * \varphi)(n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Behauptung des Lemmas ist also äquivalent zu

$$\sigma_s * \varphi = \iota^1 * \iota^s \overset{(1.4)}{=} \iota^1 * \mu * \iota^0 * \iota^s \overset{1.4}{=} \iota^1 * \mu * \sigma_s.$$

Wegen der Kommutativität des Rings $\mathcal{A}$ und der Invertierbarkeit von $\sigma_s \in \mathcal{A}^* \overset{1.11}{\subseteq} \mathcal{A}^\times$ ist dies wiederum äquivalent zu

$$\varphi = \iota^1 * \mu \overset{1.21(b),1.25}{=} \varphi * \iota^0 * \mu \overset{(1.4)}{=} \varphi$$

und also korrekt. □

Hieraus folgern wir nun eine Beschreibung der Teilersummenfunktion σ_{s+1} durch Werte der Funktionen σ_s und σ_{s-1}:

Lemma 1.29. *Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$\sigma_{s+1}(n) = n\sigma_{s-1}(n) + \sum_{d|n} \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right)(d^s - 1)\varphi(d) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Nach Lemma 1.28 lässt sich die rechte Seite der Behauptung des Lemmas für alle $n \in \mathbb{N}$ umformulieren zu

$$\begin{aligned} n\sigma_{s-1}(n) + \sum_{d|n} \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right)(d^s-1)\varphi(d) &= \sum_{d|n} \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right)\varphi(d) + \sum_{d|n} \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right)(d^s-1)\varphi(d) \\ &= \sum_{d|n} \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right) d^s \varphi(d) \\ &= \left(\sigma_s * (\iota^s \cdot \varphi)\right)(n), \end{aligned}$$

wobei $\iota^s \cdot \varphi$ die punktweise Multiplikation der schwach multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen ι^s und φ bezeichnet und so offensichtlich selbst ebenfalls eine schwach multiplikative zahlentheoretische Funktion ist. Die Behauptung des Lemmas ist daher äquivalent zu

$$\sigma_{s+1} = \sigma_s * (\iota^s \cdot \varphi)$$

und nach Beispiel 1.4 sowie der im Möbius'schen Umkehrsatz 1.26 gezeigten Invertierbarkeit von ι^0 somit zu

$$\iota^{s+1} = \iota^s * (\iota^s \cdot \varphi).$$

Nach Satz 1.11 ist $\iota^s * (\iota^s \cdot \varphi)$ als Dirichlet-Faltung zweier schwach multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen wieder schwach multiplikativ. Nach Satz 1.12 trifft dies auch auf σ_{s+1} zu, so dass es zum Beweis des Lemmas nach Korollar 1.10 genügt

$$p^{j(s+1)} = \sum_{k=0}^{j} p^{ks}\left(p^{(j-k)s}\varphi(p^{j-k})\right) \quad \text{für alle primen } p \text{ und alle } j \in \mathbb{N}$$

zu zeigen. Da aber für solche p und j tatsächlich

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{j} p^{ks}\left(p^{(j-k)s}\varphi(p^{j-k})\right) &= \sum_{k=0}^{j} p^{js}\varphi(p^{j-k}) \\ &= p^{js}\sum_{k=0}^{j}\varphi(p^{j-k}) \\ &\overset{1.15}{=} p^{js}p^j \end{aligned}$$

gilt, folgt das Lemma. □

1.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. *Sei $a \in \mathcal{A}^*$ eine schwach multiplikative zahlentheoretische Funktion. Zeigen Sie, dass dann*

$$a(n)a(m) = a\left(\mathrm{ggT}(n,m)\right) a\left(\frac{nm}{\mathrm{ggT}(n,m)}\right) \quad \textit{für alle } n,m \in \mathbb{N}$$

gilt.

Aufgabe 1.2. *Bestimmen Sie alle $a \in \mathcal{A}$ mit $a * a = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$.*

Aufgabe 1.3. *Schreiben wir $e(z) := e^{2\pi i z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist durch*

$$c_r(n) := \sum_{\substack{j=1 \\ \operatorname{ggT}(j,r)=1}}^{r} e\left(\frac{nj}{r}\right) \quad \text{für alle } r, n \in \mathbb{N}$$

eine Funktion in zwei natürlichen Variablen definiert, die 1916 von RAMANUJAN[3] *eingeführte* ***Ramanujan-Summe****. In dieser Aufgabe fixieren wir ein $n \in \mathbb{N}$ und betrachten $c_r(n)$ als zahlentheoretische Funktion in der Variablen r. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:*

(a) *Es gilt* $\left(c_{\cdot}(n) * \iota^0\right)(r) = \sum_{j=0}^{r} e\left(\frac{nj}{r}\right) = \begin{cases} r & \text{für } r \mid n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) *Es gilt* $c_r(n) = \sum_{d \mid \operatorname{ggT}(r,n)} d\mu\left(\frac{r}{d}\right)$.

Insbesondere nimmt $c_r(n)$ stets reelle Werte an, ist als zahlentheoretische Funktion in r schwach multiplikativ und es gilt $c_r(n) = c_r\left(\operatorname{ggT}(r,n)\right)$.

(c) *Es gilt* $c_r(n) = \varphi(r) \cdot \dfrac{\mu\left(\frac{r}{\operatorname{ggT}(r,n)}\right)}{\varphi\left(\frac{r}{\operatorname{ggT}(r,n)}\right)}$.

[3] Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

KAPITEL 2

Fourier-Analysis

Grundlegendes Anliegen der FOURIER-Analysis[4] ist es, eine Funktion f in ihr Spektrum zu zerlegen. Dabei deutet das Wort „zerlegen" an, dass f aus etwas aufgebaut ist, dessen Bestandteile bei der anschließenden Zerlegung offenkundig werden. Die Ursprünge der Fourier-Analysis liegen im 18. Jahrhundert; benannt ist sie nach Jean Baptiste Joseph Fourier, der im Jahr 1822 in seiner *Théorie analytique de la chaleur* Fourier-Reihen untersuchte.

2.1 Fourier-Reihen

Definition 2.1. *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt* ***periodisch*** *mit Periode $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wenn*

$$f(x+r) = f(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Beispiel 2.2. *Aus der reellen Analysis wissen wir, dass die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus Periode 2π haben.*

Bemerkung 2.3. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch mit Periode $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann hat die Funktion*

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{C}, \\ x & \mapsto f(xr) \end{cases}$$

Periode 1, denn es gilt

$$g(x+1) = f((x+1)r) = f(xr+r) = f(xr) = g(x).$$

In diesem Abschnitt beschränken wir uns daher auf die Untersuchung 1-periodischer Funktionen.

[4] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Definition 2.4. *Zu einer stetigen, 1-periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieren wir den **n-ten Fourier-Koeffizienten** durch*

$$a_n(f) := \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ixn}\,\mathrm{d}x.$$

*Die **Fourier-Reihe** von f ist definiert[5] durch*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f)e^{2\pi inx}.$$

Zu beachten ist der formale Charakter dieser Definition. Während die Koeffizienten $a_n(f)$ wegen der von f geforderten Stetigkeit stets existieren, muss dies auf die Fourier-Reihe keinesfalls zutreffen. Sie kann jedoch abseits jeglicher analytischer Überlegungen als formales Objekt betrachtet werden. So ist etwa im Verband aller Fourier-Reihen eine Addition und mit der Faltung auch eine Multiplikation definiert, ohne dass wir Konvergenz an irgendeiner Stelle voraussetzen müssen – das ist analog zu den Verknüpfungen im Ring der formalen Potenz- oder Laurent-Reihen in der Algebra. Da wir uns nichtsdestotrotz für die analytischen Eigenschaften einiger periodischer Funktionen interessieren, werden wir Kriterien ausarbeiten, die uns garantieren, dass sich die in Definition 2.4 betrachtete Funktion f in die dort angegebene Fourier-Reihe entwickeln lässt. Ein erster Schritt hierzu ist der folgende Satz:

Satz 2.5. *Erfüllt eine stetige, 1-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Bedingung*

$$a_n(f) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

so gilt bereits $f \equiv 0$.

Beweis. Wir nehmen an, f wäre nicht die Nullfunktion, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Wir betrachten zunächst den Fall, dass f seine Werte in den reellen Zahlen annimmt. Ohne Einschränkung könnten wir dann annehmen, dass f auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ definiert ist und $f(0) > 0$ erfüllt,

denn: Nach Voraussetzung wäre f nicht die Nullfunktion und nähme somit auf einem $x_0 \in \mathbb{R}$ einen reellen Wert ungleich Null an. Durch Verschieben der Integrationsvariablen um x_0

[5] Analog zum Vorgehen bei den LAURENT-Reihen[6] in der Funktionentheorie verstehen wir unter einer ***unendlichen Reihe*** der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ das Paar

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\right).$$

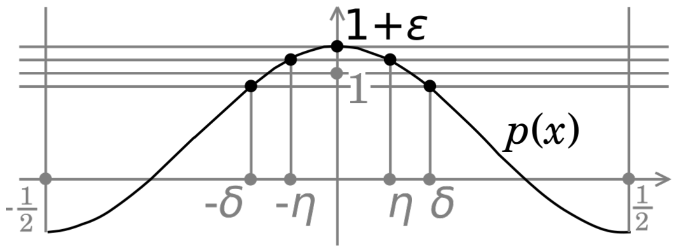
Eine solche Reihe heißt ***konvergent***, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ beide konvergieren; in diesem Fall heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ der ***Grenzwert*** von $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$, und wir schreiben

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}.$$

Im selben Sinn verwenden wir die Begriffe ***absoluter Konvergenz*** und ***gleichmäßiger Konvergenz*** bei obigen Reihen.

[6] Pierre Alphonse Laurent (1813-1854)

änderten sich die Werte der Fourier-Koeffizienten nur um einen Vorfaktor ungleich Null und f erfüllte nach eventuellem Multiplizieren mit -1 die gewünschten Eigenschaften. #



Wegen der Stetigkeit von f im Punkt 0 gäbe es daher ein $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$ mit

$$f(x) > \frac{f(0)}{2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \delta$$

und wir könnten

$$p(x) := \cos(2\pi x) + \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq \frac{1}{2},$$

$$p_k(x) := p(x)^k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq \frac{1}{2}$$

setzen, wobei $\varepsilon > 0$ passend zu δ so klein gewählt wäre, dass

$$|p(x)| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}$$

gälte. Weiter gäbe es natürlich auch ein $\eta \in (0, \delta)$ mit

$$p(x) \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \eta.$$

Dann gälte einerseits

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) p_k(x) \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

denn: Nach Konstruktion wären die Funktionen p_k für alle $k \in \mathbb{N}$ Polynome in der Variablen $\cos(2\pi x)$ und also insbesondere Polynome in den Variablen $e^{2\pi i x}$ und $e^{-2\pi i x}$. Die Behauptung folgte somit aus der Linearität des Integrals, der 1-Periodizität des Integranden und da wir $a_n(f) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt haben. #

Andererseits gälte aber auch

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) p_k(x) \,\mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\to} \infty, \tag{2.2}$$

denn: Als stetige Funktion ist f auf dem Kompaktum $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ betragsmäßig durch ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ beschränkt, es gilt also $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \frac{1}{2}$. Über die Standardabschätzung erhielten wir so

$$\left| \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} f(x) p_k(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq M \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k .$$

Ferner wären nach unserer Wahl von δ die Werte $f(x)$ und $p_k(x)$ für $|x| < \delta$ nichtnegativ und es folgte

$$\int_{\eta \leq |x| < \delta} f(x) p_k(x) \, \mathrm{d}x \geq 0.$$

Schließlich hätten wir über die Standardabschätzung nach unten

$$\int_{-\eta}^{\eta} f(x) p_k(x) \, \mathrm{d}x \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k .$$

Durch Aufsummieren dieser drei Ausdrücke erhielten wir eine Abschätzung des zu untersuchenden Integrals, die offensichtlich im Grenzübergang $k \to \infty$ gegen unendlich ginge. #

Offensichtlich stehen die beiden von uns hergeleiteten Aussagen (2.1) und (2.2) im Widerspruch zueinander, so dass unsere Annahme, die Funktion f sei nicht die Nullfunktion im Falle, dass f nur reelle Werte annimmt, nicht wahr sein kann.

Für den Fall, dass f komplexwertig ist, definieren wir die reellwertigen Funktionen

$$u(x) := \frac{f(x) + \overline{f}(x)}{2}, \qquad v(x) := \frac{f(x) - \overline{f}(x)}{2i}$$

und erhalten $f = u + iv$. Aus $a_n(\overline{f}) = \overline{a_{-n}(f)}$ folgt, dass die Fourier-Koeffizienten von u und v allesamt verschwinden, und wir können unsere oberen Überlegungen anwenden. Damit ist alles bewiesen. □

Aus Satz 2.5 ergeben sich zwei wichtige Korollare:

Korollar 2.6 (Identitätssatz für Fourier-Reihen)**.** *Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zwei stetige, 1-periodische Funktionen mit*

$$a_n(f) = a_n(g) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Dann gilt bereits $f \equiv g$.

Beweis. Das folgt unmittelbar durch Anwenden von Satz 2.5 auf die stetige, 1-periodische Funktion $f - g$. □

Korollar 2.7 (Darstellungssatz für Fourier-Reihen)**.** *Konvergiert die Fourier-Reihe einer stetigen, 1-periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gleichmäßig, so konvergiert sie gegen f.*

Beweis. Mit den nach Voraussetzung gegebenen Fourier-Koeffizienten $a_n(f)$ definieren wir die Funktion

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f)e^{2\pi inx} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n(f)e^{2\pi inx} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Diese ist nach Voraussetzung wohldefiniert, als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen selbst wieder stetig und natürlich 1-periodisch; ihre Fourier-Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_n(g) = \int_0^1 g(x)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(f) \int_0^1 e^{2\pi i(m-n)x}\,\mathrm{d}x = a_n(f).$$

Nach dem Identitätssatz für Fourier-Reihen 2.6 gilt damit bereits $f \equiv g$, und die Fourier-Reihe von f konvergiert gleichmäßig gegen f. □

Für den Fall, dass die betrachtete Funktion mehrfach differenzierbar ist, lässt sich damit schließlich die absolut gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe gegen die zugehörige Funktion zeigen:

Satz 2.8. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare, 1-periodische Funktion. Dann konvergiert die zu f gehörige Fourier-Reihe absolut gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Mit zweifacher partieller Integration folgt für die Fourier-Koeffizienten mit der 1-Periodizität der Funktionen

$$x \mapsto f(x)e^{-2\pi inx} \quad \text{und} \quad x \mapsto f'(x)e^{-2\pi inx}$$

die Asymptotik

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ixn}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{f(x)e^{-2\pi inx}}{2\pi in}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi in}\int_0^1 f'(x)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{f'(x)e^{-2\pi inx}}{(2\pi in)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{(2\pi in)^2}\int_0^1 f''(x)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{für } |n| \to \infty.
\end{aligned}$$

Es folgt die absolut gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe von f und zwar gegen f, wie der Darstellungssatz für Fourier-Reihen 2.7 besagt. □

Die Idee der Fourier-Reihen lässt sich auf gewisse Funktionen auf offenen Teilmengen in $\mathbb{C}$ übersetzen, wobei in Hinsicht auf Satz 2.8 der Fokus auf holomorphe Funktionen besonders vielversprechend erscheint. Wir müssen hierfür zunächst den Begriff der Periodizität geeignet anpassen:

Definition 2.9. *Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **periodisch** mit Periode $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wenn*

$$\{z+\omega : z \in D\} \subseteq D \quad \text{und} \quad f(z+\omega) = f(z) \text{ für alle } z \in D.$$

gilt.

Beispiel 2.10. *Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass die komplexen trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus Periode 2π haben und die komplexe Exponentialfunktion Periode $2\pi i$.*

Mit demselben Argument wie in Bemerkung 2.3 können wir uns auch jetzt wieder auf die Untersuchung 1-periodischer Funktionen beschränken.

Betrachten wir nun speziell für $-\infty \leq a < b \leq \infty$ den Horizontalstreifen

$$D_{a,b} := \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im}(z) < b\}, \tag{2.3}$$

so wird dieser offensichtlich durch die Abbildung

$$e\colon \begin{cases} D_{a,b} & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto q := e^{2\pi i z} \end{cases}$$

auf das Ringgebiet

$$D_{e^{-2\pi b}}^{e^{-2\pi a}} := \{q \in \mathbb{C} : e^{-2\pi b} < |q| < e^{-2\pi a}\}$$

in der komplexen q-Ebene abgebildet, wobei wir die Identifikationen $e^{-2\pi\infty} = 0$ und $e^{-2\pi(-\infty)} = \infty$ verwenden. Daraus motiviert sich der folgende Satz:

Satz 2.11 (Fourier-Entwicklung periodischer holomorpher Funktionen)**.** *Für gegebene $-\infty \leq a < b \leq \infty$ definiert die Zuordnung*[7]

$$\left(q \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n\right) \mapsto \left(z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}\right),$$

einen Isomorphismus zwischen dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{O}(D_{e^{-2\pi b}}^{e^{-2\pi a}})$ der holomorphen Funktionen auf dem Ringgebiet $D_{e^{-2\pi b}}^{e^{-2\pi a}}$ und dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{O}_{\mathrm{per},1}(D_{a,b})$ der 1-periodischen, holomorphen Funktionen auf dem Horizontalstreifen $D_{a,b}$.

[7] Wir werden im Folgenden oft diese Identifikation ausnutzen und abkürzend

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) q^n$$

für die Fourier-Entwicklung einer 1-periodischen Funktion f schreiben. Wir setzen dann also stillschweigend $q := e^{2\pi i z}$.

Insbesondere hat jede 1-periodische, holomorphe Funktion $f\colon D_{a,b} \to \mathbb{C}$ eine ***Fourier-Entwicklung***

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) q^n =: f_{i\infty}(q) \quad \text{für alle } z \in D_{a,b}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_n(f) \in \mathbb{C}$. Die Reihe ist gleichmäßig absolut konvergent auf Teilmengen $\overline{D_{c,d}} \subseteq D_{a,b}$ mit $a < c < d < b$ und es gilt unabhängig für alle $z_0 \in D_{a,b}$ die Formel

$$a_n(f) = \int_0^1 f(z_0 + t) e^{-2\pi i n (z_0 + t)} \, \mathrm{d}t \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

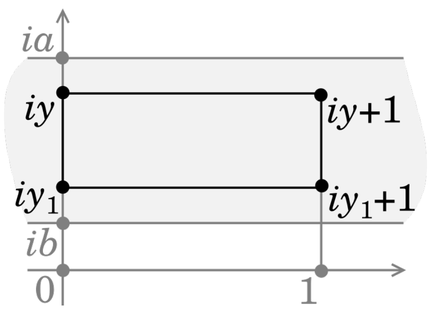
Beweis. Offenbar gilt $e^{-2\pi b} < |q| = |e^{2\pi i z}| < e^{-2\pi a}$ genau für $a < \mathrm{Im}(z) < b$, weshalb die Reihen $f_{i\infty}(q)$ und $f(z)$ gegenseitig ihre Konvergenz implizieren. Es ist daher die offenbar lineare Abbildung nach dem Identitätssatz für Potenzreihen wohldefiniert und wegen des Identitätssatzes für Fourier-Reihen 2.6 injektiv. Es verbleibt, die Surjektivität zu zeigen. Ist $f\colon D_{a,b} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische, holomorphe Funktion, so wird einerseits zu jedem $a < y_1 < b$ eine 1-periodische Abbildung $x \mapsto f(x + iy_1)$ auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definiert. Wegen der Holomorphie von f besitzt diese nach Satz 2.8 eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe

$$f(x + iy_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y_1, f) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi n y_1} a_n(y_1, f) e^{2\pi i n (x + iy_1)}. \tag{2.5}$$

Andererseits ist für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ auch die Funktion $g_n(z) := f(z) e^{-2\pi i n z}$ auf $D_{a,b}$ holomorph und 1-periodisch. Wenden wir für feste $y_1 \in (a, b)$ und $n \in \mathbb{Z}$ den Cauchy'schen Integralsatz längs des Randes des Rechtecks mit Ecken $iy_1, iy, iy + 1$ und $iy_1 + 1$ auf die Funktion g_n an, so folgt für beliebige $y \in (a, b)$

$$\begin{aligned} e^{2\pi n y_1} a_n(y_1, f) &\overset{(2.5)}{=} \int_0^1 f(x + iy_1) e^{-2\pi i n (x + iy_1)} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi i n (x + iy)} \, \mathrm{d}x \\ &\overset{(2.5)}{=} e^{2\pi n y} a_n(y, f), \end{aligned}$$

da sich die Integrale über die vertikalen Seiten wegen der Periodizität des Integranden gegenseitig wegheben.



Folglich ist $y \mapsto e^{2\pi n y} a_n(y, f)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine konstante Funktion auf dem Intervall (a, b), deren Wert wir als $a_n(f)$ bezeichnen, und das Integral (2.4) hängt wegen der Periodizität von f nicht von der Wahl z_0 ab. Aus der absolut gleichmäßigen Konvergenz der Laurent-Reihe $f_{i\infty}$ auf den kompakten Teilmengen $\overline{D_{e^{-2\pi d}}^{e^{-2\pi c}}} \subseteq D_{e^{-2\pi b}}^{e^{-2\pi a}}$ folgt ebendiese von f in den Bereichen $\overline{D_{c,d}} \subseteq D_{a,b}$ mit $a < c < d < b$, womit alles gezeigt ist. □

Bemerkung 2.12. *Offenbar folgt in der Situation von Satz 2.11 insbesondere die absolut gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe auf Kompakta $K \subseteq D_{a,b}$, da jedes solche K in einer Menge $\overline{D_{c,d}}$ mit $a < c < d < b$ enthalten ist.*

Wenn wir darauf achtgeben, dass $f_{i\infty}(q)$ in $q = 0$ keine nicht-isolierte Singularität erhält, können wir Satz 2.11 auf eine meromorphe Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit ganzzahliger Periode anwenden, um für eine solche Funktion eine Fourier-Entwicklung zu erhalten. Wir definieren nun:

Definition 2.13. (a) *Zu einer holomorphen, 1-periodischen Funktion $f\colon D_{a,\infty} \to \mathbb{C}$ gibt es nach Satz 2.11 eine holomorphe Funktion $f_{i\infty}\colon D_0^R \to \mathbb{C}$ mit $f_{i\infty} \circ e = f$, wobei wir die dort eingeführte Notation benutzen. Wir nennen f **holomorph** bzw. **meromorph in** $z = i\infty$, wenn $f_{i\infty}$ in $q = 0$ holomorph bzw. meromorph ist.*

(b) *Sei $h \in \mathbb{N}$. Zu einer holomorphen, h-periodischen Funktion $f\colon D_{a,\infty} \to \mathbb{C}$ ist nach Bemerkung 2.3 die Funktion $g(z) := f(hz)$ holomorph und 1-periodisch. Die Funktion f heißt **holomorph** bzw. **meromorph in** $z = i\infty$, wenn dies im Sinne von (a) auf die Funktion g zutrifft.*

(c) *Sei nun speziell $a = 0$, und sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine meromorphe, h-periodische Funktion mit $h \in \mathbb{N}$. Wir nennen f **holomorph** bzw. **meromorph in** $z = i\infty$, wenn*

- *die Menge*
  $$\{y \in \mathbb{R}_{>0} : \text{es gibt eine Polstelle von } f \text{ mit Imaginärteil } y\}$$
  nach oben beschränkt ist, so dass die Einschränkung von f auf ein geeignetes $D_{a,\infty}$ holomorph ist,
- *diese Einschränkung $f|_{D_{a,\infty}}$ im Sinne von (b) holomorph bzw. meromorph in $z = i\infty$ ist.*

2.2 Die Fourier-Transformation

Das zentrale Werkzeug der Fourier-Analysis ist die Fourier-Transformation. Je nach Beschaffenheit der Funktion ist deren Gestalt unterschiedlich. Wir beginnen mit der klassischen (kontinuierlichen) Fourier-Transformation für Funktionen auf den reellen Zahlen.

Definition 2.14. *Wir sagen, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **moderat abklingt**, falls diese stetig ist und es eine Konstante $A > 0$ sowie ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1 + |x|^{1+\varepsilon}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gibt. Die $\mathbb{C}$-Algebra der moderat abklingenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Beispiel 2.15. *Beispiele für moderat abklingende Funktionen sind*

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \qquad g(x) := e^{-x^2}, \qquad h(x) := e^{-a|x|} \textit{ mit } a \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Definition 2.16. *Für $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ heißt die Zuordnung*

$$\mathcal{F}\colon \begin{cases} \mathcal{M}(\mathbb{R}) & \to \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \\ f & \mapsto \hat{f} \end{cases}$$

mit

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i x y} \, \mathrm{d}y.$$

*die **(kontinuierliche) Fourier-Transformation** und $\hat{f}$ für ein gegebenes $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ die **Fourier-Transformierte** von f.*

Etwa unter Zuhilfenahme des Majorantenkriteriums kann man schnell zeigen, dass die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ wohldefiniert ist, da das betreffende Integral absolut konvergiert.

Für viele wichtige Anwendungen ist der Raum $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ zu groß. Wir reduzieren ihn daher auf einen bedeutenden Unterraum:

Definition 2.17. *Es bezeichne $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R})$ den Raum aller glatten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die mitsamt all ihrer Ableitungen **schnell abklingen** in dem Sinne, dass*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty \quad \textit{für alle } \ell, k \in \mathbb{N}_0$$

*gilt. Wir bezeichnen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ auch als den **SCHWARTZ-Raum**[8] und seine Elemente als **Schwartz-Funktionen**.*

Man kann zeigen, dass der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Zudem ist er aber auch abgeschlossen unter Skalierung mit beliebigen komplexen Polynomen und also auch ein $\mathbb{C}[X]$-Modul.

Unser erstes Ziel ist, zu zeigen, dass der Schwartz-Raum unter der Fourier-Transformation in sich selbst überführt wird. Tatsächlich wird sich die Fourier-Transformation als ein Automorphismus des Schwartz-Raumes entpuppen.

Für einen sinnvollen Umgang mit der Fourier-Transformation benötigen wir ein paar Techniken aus der Analysis:

Lemma 2.18. *Seien $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbare Funktionen, so dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvergiert und $(g_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dann ist g stetig differenzierbar und es gilt $g' = f$.*

[8] Laurent Schwartz (1915-2002)

Beweis. Der Beweis wird in der Analysis gegeben. □

Lemma 2.19. *Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ eine stetige und in der zweiten Variablen stetig differenzierbare Funktion. Existieren dann für alle kompakten Intervalle $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ mit $c < d$ die uneigentlichen Integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,t)| \, \mathrm{d}x \quad \textit{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right| \mathrm{d}x \qquad \textit{für alle } t \in [c,d]$$

und konvergiert das Integral

$$\int_{|x| \geq R} \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right| \mathrm{d}x \qquad \textit{für alle } t \in [c,d]$$

für $R \to \infty$ gleichmäßig gegen 0, so ist auch

$$g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) \, \mathrm{d}x$$

differenzierbar und es gilt

$$g'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right) \mathrm{d}x \qquad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Für beliebige reelle Zahlen $c < d$ ist nach der Leibniz'schen Regel für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$g_n(t) := \int_{-n}^{n} f(x,t) \, \mathrm{d}x$$

differenzierbar mit

$$g_n'(t) = \int_{-n}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right) \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } t \in [c,d].$$

Wegen der vorausgesetzten Existenz der uneigentlichen Integrale über die Beträge von $f(x,t)$ und $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ gilt daher

$$|g_n(t) - g(t)| \leq \int_{|x|>n} |f(x,t)| \, \mathrm{d}x \overset{n \to \infty}{\to} 0 \qquad \text{für alle } t \in [c,d],$$

$$\left| g_n'(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right) \mathrm{d}x \right| \leq \int_{|x|>n} \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right| \mathrm{d}x \overset{n \to \infty}{\to} 0 \qquad \text{für alle } t \in [c,d],$$

wobei die Konvergenz im zweiten Fall gleichmäßig ist. Da das kompakte Intervall $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, folgt nach Lemma 2.18 die stetige Differenzierbarkeit von g auf ganz $\mathbb{R}$ und es gilt

$$g'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right) \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Das zeigt das Lemma. □

Wir halten nun die folgenden Rechenregeln für die Fourier-Transformierten von Schwartz-Funktionen fest:

Proposition 2.20. *Für ein $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Ist $h \in \mathbb{R}$ und $g(x) := f(x+h)$, so folgt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)e^{2\pi i h x}$.*

(b) *Ist $h \in \mathbb{R}$ und $g(x) := f(x)e^{-2\pi i h x}$, so folgt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x+h)$.*

(c) *Ist $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und $g(x) := f(\delta x)$, so folgt $\hat{g}(x) = \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}x)$.*

(d) *Ist $g(x) := f'(x)$, so folgt $\hat{g}(x) = 2\pi i x \hat{f}(x)$.*

(e) *Ist $g(x) := -2\pi i x f(x)$, so folgt $\hat{g}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{f}(x)$.*

Beweis. Die ersten drei Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus Definition 2.16:

Für ein $h \in \mathbb{R}$ und $g(x) := f(x+h)$ erhalten wir

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+h)e^{-2\pi i x y}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i x(y-h)}\,\mathrm{d}y = \hat{f}(x)e^{2\pi i h x}$$

und somit Behauptung (a).

Für ein $h \in \mathbb{R}$ und $g(x) := f(x)e^{-2\pi i h x}$ erhalten wir

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i h y}e^{-2\pi i x y}\,\mathrm{d}y = \hat{f}(x+h)$$

und somit Behauptung (b).

Für ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und $g(x) := f(\delta x)$ erhalten wir nach Substitution $y = \delta^{-1}t$

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta y)e^{-2\pi i x y}\,\mathrm{d}y = \delta^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i x \delta^{-1} t}\,\mathrm{d}t = \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}x)$$

und somit Behauptung (c).

Zum Beweis der letzten beiden Behauptungen müssen wir etwas subtiler argumentieren:

Für ein $n \in \mathbb{N}$ und $g(x) := f'(x)$ ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_{-n}^{n} f'(y)e^{-2\pi i x y}\,\mathrm{d}y = \Big[f(y)e^{-2\pi i x y}\Big]_{y=-n}^{n} + 2\pi i x\int_{-n}^{n} f(y)e^{-2\pi i x y}\,\mathrm{d}y$$

und Behauptung (d) folgt mit Grenzübergang $n \to \infty$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Zum Beweis von Behauptung (e) sei schließlich $g(x) := -2\pi i x f(x)$. Die auf $\mathbb{R}^2$ stetige Funktion $G(y,x) := f(y)e^{-2\pi i x y}$ erfüllt alle Voraussetzungen von Lemma 2.19, *denn:* Offensichtlich ist $\frac{\partial}{\partial x}G(y,x) = -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i x y}$ stetig. Wegen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existieren zudem die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(y,x)|\, \mathrm{d}y, \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} G(y,x) \right| \mathrm{d}y.$$

Schließlich gilt

$$\int_{|y|\geq R} \left| \frac{\partial}{\partial x} G(y,x) \right| \mathrm{d}y \leq 2\pi \int_{|y|\geq R} |y f(y)|\, \mathrm{d}y \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

gleichmäßig für x aus einem beliebigen kompakten Intervall in $\mathbb{R}$, da das Integral rechts unabhängig von x ist. #

Durch Anwenden von Lemma 2.19 erhalten wir nun die Differenzierbarkeit von $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(y,x)\, \mathrm{d}y$ und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} G(y,x) \right) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i x y}\, \mathrm{d}y = \hat{g}(x).$$

Das zeigt Behauptung (e). □

Wir kommen nun zum anfangs ausgerufenen Ziel dieses Abschnitts und zeigen, dass der Schwartz-Raum unter Fourier-Transformation unverändert bleibt:

Satz 2.21. *Für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt auch $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fest vorgegeben. Nach Proposition 2.20 (d) und (e) ist dann für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ die Funktion

$$\hat{g}(x) := x^k \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^{\ell} \hat{f}(x)$$

die Fourier-Transformierte der durch

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^{k} \left[(-2\pi i x)^{\ell} f(x) \right]$$

definierten Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Da aber – wie man direkt aus der kanonischen Abschätzung des Integrals abliest – die Fourier-Transformierte einer jeden Schwartz-Funktion beschränkt ist, klingt jede Ableitung von $\hat{f}$ schnell ab. Insgesamt haben wir den Satz zeigt. □

2.3 Die Poisson'sche Summationsformel

Nun kommen wir zum Beweis der POISSON'schen Summationsformel,[9] die eines der zentralen Resultate der Fourier-Analysis darstellt. Wir beschränken uns im Folgenden auf den besonders einfachen Fall für Schwartz-Funktionen, weisen aber darauf hin, dass die Summationsformel auch für größere Klassen von Funktionen bewiesen werden kann.

[9] Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Satz 2.22 (Poisson'sche Summationsformel)**.** *Für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}. \tag{2.6}$$

Mit $x = 0$ folgt insbesondere

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

Beweis. Es genügt offenbar, die Identität (2.6) zu beweisen. Wegen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergiert die Reihe

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen, weshalb die durch sie definierte Funktion g stetig ist. Zudem ist sie nach Konstruktion klar 1-periodisch, so dass sie eine Fourier-Entwicklung aufweist. Für ein beliebiges $m \in \mathbb{Z}$ ist der m-te Fourier-Koeffizient von g durch

$$\begin{aligned}
a_m(g) &= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2\pi imx}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n)e^{-2\pi imx}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y)e^{-2\pi imy}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi imy}\,\mathrm{d}y \\
&= \hat{f}(m)
\end{aligned}$$

gegeben. Dabei sind Vertauschen von Integration und Summation im zweiten Schritt wegen absoluter Konvergenz und dem Satz von LEBESGUE[10] gerechtfertigt. Da die rechte Seite von (2.6) offenbar ebenfalls die Fourier-Koeffizienten $\hat{f}(m)$ besitzt, folgt der Satz nun mit Korollar 2.6. □

2.4 Die Jacobi'sche Thetafunktion

In diesem Abschnitt führen wir die JACOBI'sche Thetareihe[11] $\vartheta(z,\tau)$ ein und wenden die Poisson'sche Summationsformel 2.22 an, um in Satz 2.27 eine Transformationsformel für diese zu beweisen. Thetareihen spielen in der Analytischen Zahlentheorie eine große Rolle; wir werden sie beispielsweise in Kapitel 6 dazu verwenden, um herauszufinden, auf wie viele Weisen sich eine gegebene natürliche Zahl als die Summe einer vorgegebenen Anzahl von Quadratzahlen schreiben lässt.

[10] Henri Léon Lebesgue (1875-1941)
[11] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Definition 2.23. *Wir definieren die* ***Jacobi'sche Thetareihe*** *durch*

$$\vartheta(z,\tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z + 2\pi i n \tau} \qquad \text{für alle } (z,\tau) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}.$$

Die auf den Wert $\tau = 0$ eingeschränkte Reihe

$$\vartheta(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

bezeichnen wir auch als ***Thetanullwert*** *oder* ***Jacobi'sche Thetafunktion****.*

Aus der Definition wird nach Variablensubstitution $n \mapsto -n$ sofort

$$\vartheta(z,-\tau) = \vartheta(z,\tau)$$

ersichtlich.

Bevor wir die Thetareihe analysieren, müssen wir ein wenig ausholen und den Holomorphiebegriff für Funktionen mehrerer Veränderlicher einführen. Analog zum Begriff der (totalen) reellen Differenzierbarkeit auf offenen Teilmengen in $\mathbb{R}^n$ definieren wir zunächst:

Definition 2.24. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Dann heißt eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$* ***holomorph****, wenn es zu jedem $z_0 \in D$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $L^{(z_0)}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ gibt mit*

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0) - L^{(z_0)}(h)}{\|h\|} \right) = 0.$$

Dies ist im Allgemeinen schwer zu überprüfen; angenehmer ist das folgende, 1899 von OSGOOD[12] nachgewiesene Kriterium:

Lemma 2.25 (Lemma von Osgood)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn sie stetig und bezüglich jeder Variablen separat holomorph ist.*

Beweis. Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann folgt wie in der reellen Analysis, dass f auf D stetig ist und für jedes $1 \le j \le n$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ existiert, so dass f als Funktion in z_j holomorph ist.

Sei umgekehrt $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die in jeder der Variablen $z_1, \ldots, z_n$ separat holomorph ist. Dann zeigen die Cauchy'schen Integralformeln für

$$z_j \mapsto \frac{\partial f}{\partial z_j}(\ldots, z_j, \ldots)$$

zusammen mit der Stetigkeit von f auf D, dass alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ auf D stetig sind. Mit demselben Argument wie in der reellen Analysis folgt dann die Holomorphie von f. $\square$

[12] William Fogg Osgood (1864-1943)

Bemerkung 2.26. *Nach dem* 1906 *bewiesenen Satz von* HARTOGS[13] *ist die Forderung der Stetigkeit im Lemma von Osgood* 2.25 *unnötig.*

Unmittelbar aus den bekannten Rechenregeln im Fall $n = 1$ folgt, dass die Menge der holomorphen Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$ die Struktur einer $\mathbb{C}$-Algebra trägt.

Wir weisen nun die angekündigten Transformationsformeln der Jacobi'schen Thetareihe nach:

Satz 2.27. *Die Jacobi'sche Thetareihe stellt eine auf ganz $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ holomorphe Funktion dar und gehorcht den* ***Transformationsformeln***

$$\vartheta(z+2,\tau) = \vartheta(z,\tau+1) = \vartheta(z,\tau) \tag{2.7}$$

und

$$\vartheta\left(-\frac{1}{z},\tau\right) = e^{\pi i \tau^2 z}\sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \vartheta(z,\tau z), \tag{2.8}$$

wobei die Quadratwurzel aus $\frac{z}{i}$ über den Hauptzweig des Logarithmus definiert ist. Im Besonderen gelten für die Jacobi'sche Thetafunktion die Transformationsformeln

$$\vartheta(z+2) = \vartheta(z) \tag{2.9}$$

und

$$\vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \vartheta(z). \tag{2.10}$$

Dem eigentlichen Beweis stellen wir ein Lemma voraus:

Lemma 2.28. *Die durch $f(x) := e^{-\pi x^2}$ gegebene Funktion f ist eine Schwartz-Funktion und erfüllt $\hat{f} = f$.*

Beweis. Die erste Behauptung, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ergibt sich unmittelbar aus dem schnellen Abklingen der Exponentialfunktion. Für die Fourier-Transformierte von f gilt nach Definition 2.16

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi i x y}\,\mathrm{d}y \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Über das GAUSS'sche Fehlerintegral[14] wissen wir speziell

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\,\mathrm{d}y = 1.$$

Nach Proposition 2.20 (e) und mit $f'(x) = -2\pi x f(x)$ erhalten wir

$$(\hat{f})'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}(-2\pi i y) e^{-2\pi i x y}\,\mathrm{d}y$$

[13]Friedrich Moritz Hartogs (1874-1943)

$$\begin{aligned} &= i\int_{-\infty}^{\infty} f'(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y. \\ &= i\,\widehat{(f')}(x) \qquad\qquad \text{für alle } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mit Teil (d) derselben Proposition folgt daraus

$$(\hat{f})'(x) = i(2\pi ix)\hat{f}(x) = -2\pi x\hat{f}(x) \qquad \text{für alle } x\in\mathbb{R}.$$

Für die durch $g(x) := \hat{f}(x)e^{\pi x^2}$ gegebene Funktion ergibt sich so

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\pi x\hat{f}(x)e^{\pi x^2} + (\hat{f})'(x)e^{\pi x^2} \\ &= 2\pi x\hat{f}(x)e^{\pi x^2} - 2\pi x\hat{f}(x)e^{\pi x^2} \\ &= 0 \qquad\qquad \text{für alle } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist, folgt daraus die Konstanz von g. Wegen dem bereits oben angemerkten $\hat{f}(0) = 1$, gilt sogar $g \equiv 1$ und somit das Lemma. □

Wir können nun den eigentlichen Beweis der Transformationsformeln der Jacobi'schen Thetareihe angehen:

Beweis von Satz 2.27. Wir zeigen zunächst, dass die Jacobi'sche Thetareihe für $(z,\tau)\in\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion darstellt. Nach dem Lemma von Osgood 2.25 genügt es dafür zu zeigen, dass sie stetig und in jeder Variablen einzeln holomorph ist. Hierfür betrachten wir beliebige Kompakta $K_{\mathbb{H}}\subseteq\mathbb{H}$ und $K_{\mathbb{C}}\subseteq\mathbb{C}$. Für diese gibt es Konstanten $N_0\in\mathbb{N}$ und $C>0$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{|n|\geq N}\left|e^{\pi in^2z+2\pi in\tau}\right| &\leq \sum_{|n|\geq N} e^{-C|n|} \\ &= O\left(e^{-C|N|}\right) \qquad \text{für alle } (z,\tau)\in K_{\mathbb{H}}\times K_{\mathbb{C}},\ N\geq N_0, \end{aligned}$$

denn: Bezeichne $z_{\min}\in K_{\mathbb{H}}$ bzw. $\tau_{\max}\in K_{\mathbb{C}}$ ein Element mit minimalem bzw. maximalem Imaginärteil. Dann gibt es Konstanten $N_0\in\mathbb{N}$ und $C>0$ mit

$$-\pi\mathrm{Im}(z_{\min})n^2 - 2\pi\mathrm{Im}(\tau_{\max})n < -C|n| \quad \text{für alle } n\in\mathbb{Z} \text{ mit } |n|\geq N_0$$

und die Behauptung folgt. #

Hieraus folgt die gleichmäßig absolute Konvergenz der holomorphen Partialsummen der Jacobi'schen Thetareihe auf kompakten Teilmengen in jeder der beiden Variablen gegen die Grenzfunktion. Mit einem Standardargument der Analysis folgt hieraus die Stetigkeit der Grenzfunktion und mit dem Approximationssatz von Weierstraß auch die Holomorphie in jeder der Variablen.

Es verbleiben die Transformationsformeln zu zeigen, wobei die Formeln (2.9) und (2.10) offensichtlich Spezialfälle von (2.7) und (2.8) sind. Die Periodizität (2.7) folgt unmittelbar aus der

[14] Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

bekannten Periodizitätseigenschaft der Exponentialfunktion. Beim Nachweis von (2.8) kommt die Poisson'sche Summationsformel 2.22 zum Einsatz. Hierfür setzen wir

$$f(x) := e^{-\pi x^2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$
$$f_t(x) := f(\sqrt{t}x) = e^{-\pi x^2 t} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und einen Parameter } t \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Mit Proposition 2.20 (c) und Lemma 2.28 erhalten wir dann

$$\widehat{f_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\hat{f}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{e^{-\frac{\pi x^2}{t}}}{\sqrt{t}} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Mit der Poisson'schen Summationsformel 2.22 folgt

$$\begin{aligned}
\sqrt{t}e^{-\pi\tau^2 t}\vartheta(it, \tau it) &= \sqrt{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t - 2\pi n\tau t - \pi\tau^2 t} \\
&= \sqrt{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(n+\tau)^2 t} \\
&= \sqrt{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_t(n+\tau) \\
&\overset{2.22}{=} \sqrt{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f_t}(n)e^{2\pi in\tau} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}+2\pi in\tau} \\
&= \vartheta\left(\frac{i}{t}, \tau\right) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{>0},\ \tau \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch zweimaliges Anwenden des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen: Für zunächst festes $\tau \in \mathbb{R}$ lässt sich die Identität im ersten Schritt auf die gesamte z-Halbebene $\mathbb{H}$ ausweiten, da beide Seiten dort holomorph sind. Halten wir nun ein $z \in \mathbb{H}$ fest, so können wir die Identität im zweiten Schritt analog auf die gesamte τ-Ebene $\mathbb{C}$ ausdehnen, weshalb insgesamt (2.8) für alle Paare $(z, \tau) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$ erfüllt ist. □

An späterer Stelle werden wir wiederholt eine rechnerische Folgerung aus Satz 2.27 benötigen, die wir deshalb jetzt herleiten:

Korollar 2.29. *Es gilt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i(n+\alpha)^2}{z}} = \sqrt{\frac{z}{i}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi in^2 z + 2\pi in\alpha} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{H}, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Es gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i(n+\alpha)^2}{z}} = e^{-\frac{\pi i\alpha^2}{z}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi in^2}{z}-\frac{2\pi in\alpha}{z}} = e^{-\frac{\pi i\alpha^2}{z}}\vartheta\left(-\frac{1}{z}, -\frac{\alpha}{z}\right)$$

$$\overset{2.27}{=} e^{-\frac{\pi i \alpha^2}{z}} e^{\frac{\pi i \alpha^2}{z}} \sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \vartheta(z, -\alpha) = \sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \vartheta(z, \alpha)$$
$$= \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z + 2\pi i n \alpha}.$$

Damit ist das Korollar bewiesen. □

2.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. *Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ der moderat abklingenden Funktionen eine $\mathbb{C}$-Algebra bildet.*

Aufgabe 2.2. *Zeigen Sie*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\hat{g}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2.3. (a) *Zeigen Sie: Die durch*

$$g(x) := \begin{cases} 1 - |x| & \text{für } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegebene Funktion auf den reellen Zahlen hat die Fourier-Transformierte

$$\hat{g}(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(b) *Zeigen Sie mit der Poisson'schen Summationsformel die Identität meromorpher Funktionen*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} = \frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}.$$

Aufgabe 2.4. *Gegeben seien die drei Reihen*

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H},$$
$$\tilde{\vartheta}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i n^2 z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H},$$
$$\tilde{\tilde{\vartheta}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Zeigen Sie: Diese genügen als meromorphe Funktionen den Transformationsformeln

$$\vartheta(z+1) = \tilde{\vartheta}(z), \qquad \tilde{\vartheta}(z+1) = \vartheta(z), \qquad \tilde{\tilde{\vartheta}}(z+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \tilde{\tilde{\vartheta}}(z),$$
$$\vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z), \qquad \tilde{\vartheta}\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\tilde{\tilde{\vartheta}}(z), \qquad \tilde{\tilde{\vartheta}}\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\tilde{\vartheta}(z),$$

wobei die Wurzelausdrücke durch den Hauptzweig des Logarithmus gegeben seien.

KAPITEL 3

Charaktere

3.1 Gruppencharaktere

Der Begriff des Charakters einer Gruppe lässt sich leicht festlegen:

Definition 3.1. *Ein* ***Charakter*** *χ einer Gruppe G ist ein Homomorphismus $\chi\colon G \to \mathbb{C}^\times$. Das ist synonym zu*

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \quad \text{für alle } a, b \in G \text{ und alle Charaktere } \chi \text{ von } G,$$

wobei χ nie den Wert 0 annimmt. Die Menge der Charaktere von G bezeichnen wir mit $\widehat{G}$.

Die anschauliche Motivation hinter dieser Definition ist, dass man mit komplexen Zahlen möglicherweise besser rechnen kann als mit Elementen der Gruppe G. Wie die Wortwahl zudem andeutet, sollte es möglich sein, entscheidende Informationen über G durch das Studium ihrer Charaktere zu erlangen.

Beispiel 3.2. *Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $f_\alpha(x) := e^{2\pi i \alpha x}$ ein Charakter der additiven Gruppe $\mathbb{R}$.*

Bevor wir fundamentale Eigenschaften von Charakteren beweisen, geben wir eine nützliche Definition:

Definition 3.3. *Für eine natürliche Zahl n definieren wir $\mu_n(\mathbb{C})$ als die* ***Gruppe der n-ten Einheitswurzeln*** *in $\mathbb{C}$ und schreiben*

$$\mu_n(\mathbb{C}) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta^n = 1\}.$$

Aus der elementaren Zahlentheorie ist wohlbekannt, dass jedes der $\mu_n(\mathbb{C})$ die Struktur einer endlichen zyklischen Gruppe trägt und, genauer, eine Isomorphismie $\mu_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vorliegt. Wie wir sehen werden, hängt die Theorie der Charaktere im Falle endlicher abelscher Gruppen eng mit Einheitswurzeln zusammen. Eine einfache erste Feststellung ist:

Proposition 3.4. *Sei G eine endliche Gruppe und $a \in G$ ein Element der Ordnung* $\operatorname{ord}(a)$. *Dann gilt für alle $\chi \in \widehat{G}$ bereits $\chi(a)^{\operatorname{ord}(a)} = 1$. Insbesondere ist $\chi(G) \subseteq \mu_{\exp(G)}(\mathbb{C})$ eine Untergruppe, wobei*

$$\exp(G) := \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(a) : a \in G)$$

den ***Exponenten*** *von G bezeichne.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Da $\mathbb{C}^\times$ eine multiplikative Gruppe ist, kann der Menge $\widehat{G}$ der Charaktere einer gegebenen Gruppe G über die komponentenweise Multiplikation

$$\chi\psi := (a \mapsto \chi(a)\psi(a)) \quad \text{für alle } a \in G$$

von Charakteren $\chi, \psi \in \widehat{G}$ ebenfalls die Struktur einer Gruppe verliehen werden. Das neutrale Element χ_1 dieser Gruppe ist durch

$$\chi_1(a) := 1$$

gegeben und heißt der ***triviale Charakter*** von G. Man bemerke, dass der zu χ inverse Charakter gerade durch den komplex konjugierten Charakter $\overline{\chi}$ gegeben ist – insbesondere sind reelle Charaktere selbstinvers. All dies führt schnell zu der Frage, inwiefern die Gruppen G und $\widehat{G}$ miteinander zusammenhängen. Im Fall einer endlichen abelschen Gruppe G erweist sich die Antwort als besonders schön:

Satz 3.5. *Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Dann ist $\widehat{G}$ nicht-kanonisch isomorph zu G. Insbesondere gilt $|\widehat{G}| = |G|$, es gibt also genau so viele Charaktere von G wie Elemente in G.*

Der Begriff „nicht-kanonisch" ist an dieser Stelle zu wählen, da ein solcher Isomorphismus stets von der Wahl von Erzeugern von G abhängt.

Beweis. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen können wir G als direkte Summe

$$G \cong \bigoplus_{j=1}^{N} \mathbb{Z}/q_j\mathbb{Z}$$

mit einer natürlichen Zahl N und eindeutig bestimmten Primzahlpotenzen $1 < q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_N$ schreiben. Damit kann jedes $a \in G$ eindeutig als Produkt

$$a = \lambda_1^{\nu_1} \lambda_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_N^{\nu_N} \tag{3.1}$$

mit fest gewählten erzeugenden Elementen λ_j der Ordnung q_j und ganzen Exponenten $0 \leq \nu_j < q_j$ geschrieben werden. Es ist zu beachten, dass die Erzeuger λ_j in (3.1) nicht eindeutig sind. Sei nun $\chi \in \widehat{G}$. Dann sind alle $\chi(\lambda_j)$ bereits q_j-te Einheitswurzeln, und χ ist durch diese eindeutig bestimmt, *denn:* Mit Proposition 3.4 sehen wir sofort, dass die $\chi(\lambda_j)$ Einheitswurzeln sind. Da λ_j ein Element der Ordnung q_j in G ist, folgt $1 = \chi(e) = \chi(\lambda_j^{q_j}) = \chi(\lambda_j)^{q_j}$. Mit der Homomorphie von χ gilt dann für das beliebig gewählte Element a aus (3.1)

$$\chi(a) = \chi\left(\lambda_1^{\nu_1}\lambda_2^{\nu_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_N^{\nu_N}\right) = \chi(\lambda_1)^{\nu_1}\chi(\lambda_2)^{\nu_2}\cdot\ldots\cdot\chi(\lambda_N)^{\nu_N}$$

und es ist offensichtlich, dass die Einheitswurzeln $\chi(\lambda_1), \chi(\lambda_2), \ldots, \chi(\lambda_N)$ den Charakter χ vollständig festlegen. #

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \widehat{G} &\to \bigoplus_{j=1}^{N} \mu_{q_j}(\mathbb{C}) \\ \chi &\mapsto (\chi(\lambda_1), \chi(\lambda_2), \ldots, \chi(\lambda_N)) \end{aligned}$$

ist also ein wohldefinierter Monomorphismus. Dieser ist aber auch surjektiv, denn jedes N-Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mu_{q_1}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus \mu_{q_N}(\mathbb{C})$ induziert über die Vorschrift

$$\lambda_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_N^{\nu_N} \mapsto \xi_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot\xi_N^{\nu_N}$$

einen Charakter χ von G, der offenbar $\chi(\lambda_j) = \xi_j$ erfüllt. Schließlich erhalten wir mit $\mu_{q_j}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}/q_j\mathbb{Z}$

$$\widehat{G} \cong \bigoplus_{j=1}^{N} \mu_{q_j}(\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{j=1}^{N} \mathbb{Z}/q_j\mathbb{Z} \cong G,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Mitunter können Charaktere interessante arithmetische Informationen in sich tragen. Wie insbesondere der Beweis von Satz 3.5 demonstriert, schlüsseln sie durch das Projizieren auf Einheitswurzeln – leicht zu quantifizierende komplexe Zahlen – die innere Struktur der Gruppe auf. Kennt man alle Charaktere, so auch die Gruppe.

Zu beachten ist noch, dass die Verbindung zwischen einer Gruppe G und ihrer Charaktergruppe $\widehat{G}$ als „mehr" als nur ein Isomorphismus gedeutet werden kann. Analog zum Dualraum $\widehat{V} := \mathrm{Hom}(V, K)$ eines K-Vektorraums in der Linearen Algebra lässt sich die Gruppe $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ als das Dual zu G auffassen. Wir reizen diese natürliche Identifikation weiter aus, indem wir für eine endliche abelsche Gruppe G mit Ordnung n alle Daten aus $G \times \widehat{G}$ in einer Matrix

$$A := \chi_k(a_\ell)_{1\le k,\ell\le n} \in \mathbb{C}^{n\times n} \quad \text{mit } a_\ell \text{ durchläuft } G \text{ und } \chi_k \text{ durchläuft } \widehat{G} \tag{3.2}$$

vereinen. Dabei ist χ_1 der triviale Charakter von G und $a_1 = e$ das neutrale Element von G. Die Einträge der ersten Zeile bzw. Spalte der Matrix A nehmen also allesamt den Wert 1 an, die restlichen Einträge sind irgendwelche n-ten Einheitswurzeln. Da wir die Reihenfolge der Elemente bzw. Charaktere im Wesentlichen nicht festgelegt haben, ist die Wahl von A nicht vollkommen eindeutig.

Die Bedeutung der Matrix A für die bereits oben erwähnte Arithmetik der Gruppe G ist nicht zu unterschätzen: Während ihre Einträge durch multiplikative Gesetze betreffend G miteinander verwoben sind, bringt sie zusätzlich noch Aspekte der linearen Algebra ins Spiel. Ein in diesem Kontext wichtiger Begriff ist derjenige der unitären Matrix:

Definition 3.6. *Eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **unitär**, falls sie die Relation $M\,{}^t\overline{M} = I_n$ erfüllt.*

Im Folgenden werden wir nachweisen, dass die Matrix $M := \frac{1}{\sqrt{n}}A$ unitär ist, und damit insbesondere die Orthogonalitätsrelationen für Charaktere herleiten. Wir beginnen mit einem Lemma:

Lemma 3.7. *Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung n. Für ein $\chi \in \widehat{G}$ gilt dann*

$$\sum_{a\in G}\chi(a) = \begin{cases} n, & \chi = \chi_1 \text{ ist trivial,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Ist χ der triviale Charakter, so wird in der Summe aus der Behauptung des Lemmas der Wert 1 insgesamt n-mal addiert und es verbleibt nichts mehr zu zeigen. In den anderen Fällen existiert ein $b \in G$ mit $\chi(b) \neq 1$. Wir erhalten mittels der Bijektion $a \mapsto b^{-1}a =: c$

$$S := \sum_{a\in G}\chi(a) = \chi(b)\sum_{a\in G}\chi(b^{-1}a) = \chi(b)\sum_{c\in G}\chi(c) = \chi(b)S$$

durch Umordnung der Summation. Aus $(1-\chi(b))S = 0$ folgt $S = 0$. □

Wegen der schönen Eigenschaften von Charakteren führt uns das vorherige Lemma bereits zu folgender Proposition:

Proposition 3.8. *Für die Matrix A aus (3.2) gilt*

$$A\,{}^t\overline{A} = nI_n;$$

insbesondere ist $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ unitär.

Beweis. Es gilt

$$\left(A\,{}^t\overline{A}\right)_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{n}\chi_k(a_j)\overline{\chi_\ell}(a_j) = \sum_{j=1}^{n}(\chi_k\overline{\chi_\ell})(a_j) \overset{3.7}{=} \begin{cases} n, & \text{für } k=\ell, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit die Behauptung. □

Proposition 3.8 findet auch in den sogenannten Orthogonalitätsrelationen Ausdruck:

Satz 3.9. *Es sei $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine endliche abelsche Gruppe mit zugehöriger Charaktergruppe $\widehat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$. Dann gelten auf G bzw. $\widehat{G}$ die **Orthogonalitätsrelation**en*

$$\langle a_k, a_\ell \rangle := \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(a_k)\overline{\chi}(a_\ell) = \begin{cases} 1, & k = \ell, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\langle \chi_k, \chi_\ell \rangle := \frac{1}{n} \sum_{a \in G} \chi_k(a)\overline{\chi_\ell}(a) = \begin{cases} 1, & k = \ell, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Beweis. Nach Proposition 3.8 kann (3.4) als der Eintrag der Einheitsmatrix I_n an der k-ten Zeile und der ℓ-ten Spalte aufgefasst werden. Für (3.3) nutzen wir, dass in der Gruppe der unitären Matrizen in $\mathbb{C}^{n \times n}$ jedes Linksinverse auch ein Rechtsinverses ist, so dass auch ${}^t\overline{A}A = nI_n$ gilt, weshalb die zu (3.3) gehörige Summe ebenso als der Eintrag der Einheitsmatrix I_n an der k-ten Zeile und der ℓ-ten Spalte aufgefasst werden kann. Damit folgt der Satz. □

Unmittelbar aus Satz 3.9 folgt:

Korollar 3.10. *Es sei $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine endliche abelsche Gruppe und $\widehat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ ihre Charaktergruppe. Dann bilden die Systeme $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $C := \{c_1, \ldots, c_n\}$ mit*

$$b_j := \frac{1}{\sqrt{n}} {}^t(\chi_j(a_1), \chi_j(a_2), \ldots, \chi_j(a_n)) \qquad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$c_j := \frac{1}{\sqrt{n}} {}^t(\chi_1(a_j), \chi_2(a_j), \ldots, \chi_n(a_j)) \qquad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\},$$

Orthonormalbasen des $\mathbb{C}^n$ bezüglich des Standardskalarproduktes.

Aus Satz 3.5 ergibt sich leicht $\widehat{\widehat{G}} \cong G$. Doch in diesem Falle ist der Isomorphismus kanonisch:

Korollar 3.11. *Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\widehat{\widehat{G}} \cong G$. Ist $a \in G$ nicht das neutrale Element von G, so existiert ein $\chi \in \widehat{G}$ mit $\chi(a) \neq 1$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die zweite Behauptung. Schreiben wir $\widehat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$, so steht nach Korollar 3.10 der Vektor ${}^t(\chi_1(a), \ldots, \chi_n(a))$ orthogonal auf ${}^t(1, \ldots, 1)$, weshalb offensichtlich ein Charakter χ_ℓ mit $\chi_\ell(a) \neq 1$ existiert.

Zum Beweis der ersten Behauptung halten wir zunächst fest, dass nach Satz 3.5 die Isomorphie $G \cong \widehat{G} \cong \widehat{\widehat{G}}$ bereits bekannt ist. Wir zeigen jetzt, dass dieser Isomorphismus kanonisch ist und also nicht von der Wahl von Erzeugern von G abhängt: Offensichtlich induziert jedes Element $a \in G$ via $\psi_a(\chi) := \chi(a)$ einen Charakter ψ_a auf $\widehat{G}$ und die Zuordnung $a \mapsto \psi_a$ definiert einen Homomorphismus $\psi \colon G \to \widehat{\widehat{G}}$. Dieser Homomorphismus ist injektiv,

denn: Schreiben wir e für das neutrale Element von G und wählen $a \in G$ beliebig. Nach Konstruktion ist $\psi_a = \psi_e$ genau dann, wenn für alle Charaktere $\chi \in \widehat{G}$ bereits $\chi(a) = 1$ gilt. Nach der bereits bewiesenen zweiten Behauptung folgt $a = e$ und also die Injektivität. #

Mit der Endlichkeit von G folgt auch die Surjektivität von ψ und somit das Korollar. □

3.2 Dirichlet-Charaktere

Wir studieren jetzt speziell Charaktere χ der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und wollen von diesen zu zahlentheoretischen Funktionen übergehen, da wir als Argumente natürliche Zahlen und nicht nur Elemente endlicher Gruppen zulassen wollen. Dieses Unterfangen erweist sich auf den ersten Blick als problematisch, da es – im Gegensatz zum Fall $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ – keine kanonische Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ gibt. Ein Ausweg besteht darin, den Charakter χ zunächst zu einer Abbildung auf $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ fortzusetzen, indem man allen Elementen aus $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ den Wert 0 zuordnet. Über die kanonische Projektion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ induziert diese dann eine zahlentheoretische Funktion $\widetilde{\chi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Dieses Prozedere fassen wir in der folgenden Definition zusammen:

Definition 3.12. *Sei N eine natürliche Zahl und $\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Charakter. Dann bezeichnen wir die zu χ gehörige Abbildung $\widetilde{\chi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit*

$$\widetilde{\chi}(m) := \begin{cases} \chi(m + N\mathbb{Z}), & \text{für } \mathrm{ggT}(m, N) = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.5}$$

*als einen **Dirichlet-Charakter** modulo N.*

Bemerkung 3.13. (a) *Aus Gründen der Einfachheit werden wir den aus einem Charakter χ entstehenden Dirichlet-Charakter $\widetilde{\chi}$ ab sofort stets wieder mit χ bezeichnen. Es „ist“ in diesem Sinne jeder Charakter von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ bereits ein Dirichlet-Charakter.*

(b) *Offensichtlich ist für jeden Dirichlet-Charakter χ modulo einer natürlichen Zahl N die Einschränkung $\chi|_{\mathbb{N}}$ eine zahlentheoretische Funktion wie in Kapitel 1. Da χ nach Konstruktion durch seine Werte auf den Zahlen $\{1, \ldots, N\}$ bereits eindeutig bestimmt ist, kann χ dabei Eins zu Eins mit seiner Einschränkung identifiziert werden. In diesem Sinne „ist“ jeder Dirichlet-Charakter bereits eine zahlentheoretische Funktion.*

Definition 3.14. *Den zum trivialen Gruppencharakter χ_1 von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ gehörigen Dirichlet-Charakter nennen wir den **Hauptcharakter** bzw. **prinzipalen Charakter** modulo N und schreiben $\chi_{1,N}$ oder weiterhin χ_1, wenn der Modulus klar ist.*

Im Sinne von Bemerkung 3.13 lassen sich – mit etwas Vorsicht – Konzepte und Aussagen über Gruppencharaktere und zahlentheoretische Funktionen auf Dirichlet-Charaktere übertragen. So folgt etwa aus der Homomorphie der Gruppencharaktere:

Proposition 3.15. *Jeder Dirichlet-Charakter $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist **stark multiplikativ**, erfüllt also*

$$\chi(nm) = \chi(n)\chi(m) \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Wir unterscheiden für den Beweis zwei Fälle:

Fall 1: $\mathrm{ggT}(nm, N) = 1$. Dann gilt offenbar auch $\mathrm{ggT}(n, N) = \mathrm{ggT}(m, N) = 1$, so dass in diesem Fall die Restklassen $n + N\mathbb{Z}, m + N\mathbb{Z}, nm + N\mathbb{Z}$ sämtlich in $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ liegen. Definitionsgemäß folgt

$$\chi(nm) \overset{(3.5)}{=} \chi\,(nm + N\mathbb{Z}) = \chi\,(n + N\mathbb{Z})\,\chi\,(m + N\mathbb{Z}) \overset{(3.5)}{=} \chi(n)\chi(m)$$

und somit die Behauptung in diesem Fall.

Fall 2: $\mathrm{ggT}(nm, N) > 1$. Dann gilt offenbar $\mathrm{ggT}(n, N) > 1$ oder $\mathrm{ggT}(m, N) > 1$, was definitionsgemäß

$$\chi(nm) \overset{(3.5)}{=} 0 \overset{(3.5)}{=} \chi(n)\chi(m)$$

impliziert, so dass die Behauptung auch in diesem Fall nachgewiesen ist. □

Dirichlet-Charaktere spielen in der Analytischen Zahlentheorie eine entscheidende Rolle. Es lässt sich mit ihrer Hilfe die Indikatorfunktion eines jeden Wertes in $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ linear kombinieren, genauer folgt mit den Orthogonalitätsrelationen 3.9 für Gruppencharaktere:

$$\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a)\chi(b) = \begin{cases} 1, & \text{für } a \equiv b \bmod (N),\ \mathrm{ggT}(a, N) = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Natürlich ist dies an sich noch nicht besonders verwunderlich und jede Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^{\varphi(N)}$ würde eine analoge Aussage liefern. Mit den Charakteren haben wir jedoch sozusagen die „richtige“ Basis gefunden, da sie zusätzlich die in Proposition 3.15 nachgewiesene und äußerst nützliche starke Multiplikativität aufweisen. Tatsächlich sind die Dirichlet-Charaktere mit diesen Eigenschaften in gewisser Weise einzigartig:

Proposition 3.16. *Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine **schwach multiplikative** Funktion, erfülle also*

$$f(1) \neq 0 \text{ und } f(nm) = f(n)f(m) \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{Z} \text{ mit } \mathrm{ggT}(n, m) = 1.$$

Gibt es dann zusätzlich eine natürliche Zahl N mit

$$f(n) = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } \mathrm{ggT}(n, N) > 1$$

*und ist f **periodisch** mit diesem N als Periode, gilt also*

$$f(n + N) = f(n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

so ist f bereits stark multiplikativ und ein Dirichlet-Charakter modulo N.

Beweis. Da die Funktion f Periode N hat, induziert sie eine wohldefinierte Abbildung $f_N\colon \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass die Einschränkung $f_N|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}$ dieser Abbildung einen Gruppenhomomorphismus mit Werten in $\mathbb{C}^\times$ definiert, da f dann wegen

$$f(n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } \mathrm{ggT}(n, N) > 1$$

ein Dirichlet-Charakter modulo N ist und also auch stark multiplikativ nach Proposition 3.15.

Für beliebige zwei ganze Zahlen $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(n, N) = \mathrm{ggT}(m, N) = 1$ gibt es nach dem Erweiterten Euklid'schen Algorithmus ganze Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit

$$kn + \ell N = 1 \quad \text{und somit auch mit} \quad k(1-m)n + \ell(1-m)N = 1 - m.$$

Es folgt

$$\mathrm{ggT}(n, m + \ell(1-m)N) = \mathrm{ggT}(n, m + (1-kn)(1-m)) = \mathrm{ggT}(n, 1) = 1$$

und somit wegen der schwachen Multiplikativität und der N-Periodizität von f schließlich

$$\begin{aligned} f(n)f(m) &= f(n)f(m + \ell(1-m)N) = f(n(m + \ell(1-m)N)) = f(nm + n\ell(1-m)N) \\ &= f(nm). \end{aligned}$$

Die behauptete Homomorphie

$$f_N|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}(n + N\mathbb{Z})\, f_N|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}(m + N\mathbb{Z}) = f_N|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}(nm + N\mathbb{Z})$$

von $f_N|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}$ folgt. Wegen der schwachen Multiplikativität von f gilt zudem $f(1) \neq 0$, also $f_N|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}(1 + N\mathbb{Z}) \neq 0$, was zusammen mit der bereits gezeigten Homomorphie bedingt, dass $f_N|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}$ nur Werte in $\mathbb{C}^\times$ annimmt. □

Hinter den einfachen Feststellungen in Proposition 3.15 sowie in (3.6) verbirgt sich eine verblüffende zahlentheoretische Konsequenz. Bereits 1737 zeigte Euler, dass die Reihe der reziproken Primzahlen divergiert, also

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots = \infty. \tag{3.7}$$

Dies ist ein stärkeres Resultat als der klassische Satz des Euklid über die Unendlichkeit der Primzahlen, der zwar kompakt und äußerst elegant zu führen ist, jedoch keine brauchbare Abschätzung für die Häufigkeit der Primzahlen bereitstellt. Indes vermutete Euler, dass jede ***arithmetische Progression***

$$(kN + a)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{mit } a, N \in \mathbb{N} \text{ und } \mathrm{ggT}(a, N) = 1$$

eine unendliche Teilfolge an Primzahlen besitzt. Erst 1837, genau ein Jahrhundert später, konnte Dirichlet diese Aussage, den ***Dirichlet'schen Primzahlsatz***, beweisen – und zwar mit Hilfe von Charakteren! Dirichlet ging dabei ähnlich vor wie damals Euler im Fall $a = N = 1$ und zeigte

$$\sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \equiv a \bmod (N)}} \frac{1}{p} = \infty. \tag{3.8}$$

Ein entscheidender Zwischenschritt im Beweis von (3.8) ist die Identität

$$\sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \equiv a \bmod (N)}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a) \sum_{p \text{ prim}} \frac{\chi(p)}{p},$$

die aus (3.6) herrührt. Die – nach dem Satz des Euklid unendlichen – Reihen

$$\sum_{p \text{ prim}} \frac{\chi(p)}{p} \tag{3.9}$$

können nun dank Proposition 3.15 detailliert analysiert werden und dies ist der Grund, warum die Charaktere die „richtige“ Basis im Sinne von (3.6) bilden.

Ist χ nicht der Hauptcharakter, so sind die Partialsummen der Reihe (3.9) beschränkt – und die Reihe dann sogar konvergent – womit (3.8) schließlich aus (3.7) folgt. Der Nachweis dieser Beschränktheit macht den schwierigsten Teil des Beweises des Dirichlet'schen Primzahlsatzes aus. Alle dafür benötigten Methoden werden in Kapitel 4 entwickelt, bevor wir den Dirichlet'schen Primzahlsatz selbst dann als Satz 5.16 beweisen.

3.3 Primitive Dirichlet-Charaktere

Wir betrachten die folgende Situation: Für eine natürliche Zahl N mit Teiler d existiert eine natürliche Reduktionsabbildung

$$\mathrm{red}_d^N : \begin{cases} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times & \to (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times, \\ a + N\mathbb{Z} & \mapsto a + d\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und einen Gruppenhomomorphismus darstellt. Es ist naheliegend, dieses Phänomen der Reduktion im Lichte der Dirichlet-Charaktere zu betrachten. Beginnen wir etwa mit einem Dirichlet-Charakter ψ modulo d, der sich problemlos wie in Bemerkung 3.13 (a) mit einem Charakter $\psi\colon (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ identifizieren lässt. Wie man an der Verkettung

$$\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\mathrm{red}_d^N} (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^\times \tag{3.10}$$

zweier Gruppenhomomorphismen erkennen kann, lässt sich dieser zu einem neuen Charakter χ modulo N „hochheben“, der wiederum als Dirichlet-Charakter betrachtet werden kann. Wir halten fest:

Definition 3.17. *Ein Dirichlet-Charakter χ modulo N wird von einem Dirichlet-Charakter ψ modulo d* ***induziert****, falls er durch (3.10)* ***faktorisiert****, falls also für den zugehörigen Gruppencharakter $\chi = \psi \circ \mathrm{red}_d^N$ gilt.*

Es gibt demnach für alle $d \mid N$ Einbettungen

$$\widehat{(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \to \widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}$$
$$\psi \mapsto \psi \circ \mathrm{red}_d^N .$$

Einen charakterisierenden Überblick über induzierte Charaktere liefert das folgende:

Lemma 3.18. *Seien $d, N \in \mathbb{N}$ mit $d \mid N$, ψ ein Dirichlet-Charakter modulo d sowie χ ein Dirichlet-Charakter modulo N. Dann gilt:*

$$\chi \text{ ist durch } \psi \text{ induziert} \quad \Longleftrightarrow \quad \chi(n) = \psi(n)\chi_{1,N}(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Wir untersuchen den Ausdruck auf der rechten Seite. Dieser erfüllt

$$\begin{aligned}\psi(n) \cdot \chi_{1,N}(n) &= \begin{cases} \psi(n) & \text{für } \operatorname{ggT}(n,N) = 1, \\ 0 & \text{für } \operatorname{ggT}(n,N) > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \psi(n + d\mathbb{Z}) & \text{für } \operatorname{ggT}(n,N) = 1, \\ 0 & \text{für } \operatorname{ggT}(n,N) > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \psi\left(\operatorname{red}_d^N(n + N\mathbb{Z})\right) & \text{für } \operatorname{ggT}(n,N) = 1, \\ 0 & \text{für } \operatorname{ggT}(n,N) > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

und beschreibt darum gerade den von ψ induzierten Dirichlet-Charakter modulo N. □

Im Falle $d = N$ induziert sich natürlich jeder Dirichlet-Charakter selbst. Im Fall

$$\left|\widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}\right| = \varphi(N) > \varphi(d) = \left|\widehat{(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times}\right|,$$

können andererseits nicht alle Charaktere modulo N durch Charaktere modulo diesem festen d induziert sein.

Lemma 3.19. *Seien $d, N \in \mathbb{N}$ mit $d \mid N$ und χ ein Dirichlet-Charakter modulo N. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Dirichlet-Charakter χ ist durch einen Dirichlet-Charakter ψ modulo d induziert.*

(ii) *Für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(a,N) = 1$ und $a \equiv 1 \bmod (d)$ gilt $\chi(a) = 1$.*

(iii) *Für alle $a, n \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(n,N) = \operatorname{ggT}(n + ad, N) = 1$ gilt $\chi(n) = \chi(n + ad)$.*

Beweis. Gelte zunächst Aussage (i), sei also χ durch einen Dirichlet-Charakter ψ modulo d induziert. Nach Lemma 3.18 ist dann

$$\begin{aligned}&\chi(n) = \psi(n)\chi_{1,N}(n) && \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, \\ &\chi(n + ad) = \psi(n + ad)\chi_{1,N}(n + ad) = \psi(n)\chi_{1,N}(n + ad) && \text{für alle } a, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Gilt nun zusätzlich $\operatorname{ggT}(n,N) = \operatorname{ggT}(n + ad, N) = 1$, so verschwinden die $\chi_{1,N}$-Werte und wir erhalten $\chi(n) = \chi(n + ad)$, also Aussage (iii).

Gelte nun Aussage (iii), sei also $\chi(n) = \chi(n + ad)$ für alle $a, n \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(n,N) = \operatorname{ggT}(n + ad, N) = 1$. Für $n = 1$ gilt dann speziell

$$1 = \chi(1) = \chi(1 + ad) \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{Z} \text{ mit } \operatorname{ggT}(1 + ad, N) = 1$$

und also

$$1 = \chi(b) \qquad\qquad \text{für alle } b \in \mathbb{Z} \text{ mit } \operatorname{ggT}(b, N) = 1 \text{ und } b \equiv 1 \bmod (d).$$

Das ist Aussage (ii).

Gelte schließlich Aussage (ii). Da für $d = N$ nichts zu zeigen ist, nehmen wir ohne Einschränkung $d < N$ an. Dann nimmt χ für je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(a, N) = \operatorname{ggT}(b, N) = 1$ und $a \equiv b \bmod (d)$ denselben Wert an,

denn: Es gilt dann $ab^{-1} \equiv 1 \bmod (d)$ und also nach Voraussetzung $\chi(ab^{-1}) = 1$ und mit der starken Multiplikativität von χ auch $\chi(a) = \chi(b)$. #

Folglich existiert eine Funktion $\psi\colon (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ mit $\chi(a) = \psi(\operatorname{red}_d^N(a))$. Diese ist sogar ein Homomorphismus,

denn: Für beliebige $a + d\mathbb{Z}, b + d\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ existieren Urbilder $a + N\mathbb{Z}, b + N\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ unter dem Reduktionshomomorphismus – diese dürfen wir ohne Einschränkung in dieser Gestalt wählen, da wir bereits gezeigt haben, dass χ modulo d dieselben Werte annimmt. Mit der Homomorphie von χ als Gruppencharakter von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ folgt

$$\begin{aligned}\psi(ab) &= \psi(ab + d\mathbb{Z}) = \chi(ab + N\mathbb{Z}) \\ &= \chi(a + N\mathbb{Z})\chi(b + N\mathbb{Z}) = \psi(a + d\mathbb{Z})\psi(b + d\mathbb{Z}) = \psi(a)\psi(b)\end{aligned}$$

sowie offenbar $\psi(1) = \chi(1) = 1$. #

Also ist ψ ein Dirichlet-Charakter modulo d und χ durch ψ induziert. Es gilt also Aussage (i). □

Wir interessieren uns im Folgenden für Dirichlet-Charaktere, die von keinem einzigen Charakter eines echten Teilers von N induziert sind.

Definition 3.20. *Ein Dirichlet-Charakter χ modulo einem natürlichen N heißt ein **primitiver Charakter**, falls er durch keinen Dirichlet-Charakter ψ modulo d mit $d \mid N$ und $0 < d < N$ induziert wird.*

Beispiel 3.21. *Für jedes $N > 1$ ist der Hauptcharakter $\chi_{1,N}$ vom Hauptcharakter $\chi_{1,1}$ induziert und also nicht primitiv. Es gilt die Faktorisierung*

$$\chi_{1,N}\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \overset{\operatorname{red}_1^N}{\to} (\mathbb{Z}/1\mathbb{Z})^\times = \{1\} \overset{\chi_{1,1}}{\to} \mathbb{C}^\times.$$

Definition 3.20 gibt uns zwar eine griffige Beschreibung von primitiven Charakteren, bei konkreten Rechnungen ist diese jedoch etwas sperrig. Aus Lemma 3.19 folgt jedoch unmittelbar eine handlichere, äquivalente Charakterisierung:

Lemma 3.22. *Sei $N \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichlet-Charakter modulo N. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Dirichlet-Charakter χ ist primitiv.*

(ii) *Für alle $d \mid N$ mit $0 < d < N$ gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$ und $a \equiv 1 \bmod (d)$, für das $\chi(a) \neq 1$ gilt.*

Primitive Dirichlet-Charaktere heben sich mit ihren Eigenschaften deutlich von den nicht-primitiven Dirichlet-Charakteren ab. Das hat zum Einen den Grund, dass nicht-primitive Dirichlet-Charaktere immer von primitiven induziert werden und durch deren Untersuchung somit nichts Neues in Erfahrung gebracht werden kann. Zum Anderen ist es – wie wir im Folgenden sehen werden – deutlich leichter, mit primitiven Dirichlet-Charakteren zu rechnen, so dass wir uns später, wenn wir zu Dirichlet-Charakteren assoziierte Objekte studieren, auf primitive Charaktere beschränken werden. Im Falle, dass N eine Primzahl ist, gestaltet sich dies als besonders leicht, denn dann ist mit der in Beispiel 3.21 gezeigten Ausnahme des Hauptcharakters jeder Dirichlet-Charakter primitiv:

Proposition 3.23. *Sei p eine Primzahl und $\chi \neq \chi_{1,p}$ ein Dirichlet-Charakter modulo p. Dann ist χ primitiv.*

Beweis. Aufgrund seiner Primalität hat p den einzigen echten natürlichen Teiler 1. Es folgt, dass $\chi_{1,1}$ der einzige Dirichlet-Charakter ist, durch den ein Dirichlet-Charakter modulo p induziert sein kann. Die Proposition folgt, da wir schon in Beispiel 3.21 gesehen hatten, dass der durch $\chi_{1,1}$ induzierte Dirichlet-Charakter modulo p der Hauptcharakter ist. □

Bemerkung 3.24. *Die Umkehrung von Proposition 3.23 ist falsch,*

denn: Es ist 4 eine zusammengesetzte Zahl, modulo derer sämtliche Dirichlet-Charaktere bis auf den Hauptcharakter $\chi_{1,4}$ primitiv sind. In der Tat ist der einzige solche Dirichlet-Charakter durch

$$\chi_{-4}(n) := \begin{cases} 1, & \text{für } n \equiv 1 \bmod (4), \\ -1, & \text{für } n \equiv 3 \bmod (4), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Da es modulo 1 und modulo 2 jeweils außer dem Hauptcharakter keine Dirichlet-Charaktere gibt, ist χ_{-4} durch keinen Dirichlet-Charakter modulo einem echten natürlichen Teiler von 4 induziert und somit primitiv. #

Man kann zeigen, dass 1 und 4 die einzigen Gegenbeispiele zur Umkehrbarkeit von Proposition 3.23 sind. Einen Beweis dafür liefern wir am Ende dieses Abschnittes, in Proposition 3.29.

Im Falle zusammengesetzter Zahlen N ist die Situation nicht ganz so leicht. Unter anderem ist zu klären, auf welch vielfältige Weise Dirichlet-Charaktere von „weiter unten" lebenden primitiven Charakteren abstammen. Bevor wir diese Frage befriedigend klären können, müssen wir in der Lage sein, sie formal zu beschreiben, und brauchen daher den folgenden Begriff:

Definition 3.25. *Seien $N \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichlet-Charakter modulo N. Dann heißt der kleinste natürliche Teiler N_χ von N, für den χ durch einen Dirichlet-Charakter modulo N_χ induziert ist, der **Führer** von χ. Ist χ primitiv, so gilt definitionsgemäß $N_\chi = N$.*

Der Führer eines Dirichlet-Charakters ist offensichtlich durch die an ihn gestellte Minimalitätseigenschaft eindeutig bestimmt. Wir können jedoch noch mehr sagen:

Proposition 3.26. *Seien $d, N \in \mathbb{N}$ mit $d \mid N$ und χ ein Dirichlet-Charakter modulo N mit Führer $N_\chi \mid N$. Ist dann χ durch einen Dirichlet-Charakter ψ modulo d induziert, so gilt bereits $N_\chi \mid d$.*

Der Führer ist also auch in einem arithmetischen Sinne minimal. Wir schicken dem Beweis von Proposition 3.26 ein Lemma voraus:

Lemma 3.27. *Seien $n, m, N \in \mathbb{N}$ mit $n \mid N$ und $m \mid N$ sowie $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$ und $a \equiv 1 \bmod (\mathrm{ggT}(n, m))$. Dann gibt es ganze Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ mit*

$$a = 1 + kn + lm \quad \textit{und} \quad \mathrm{ggT}(1 + kn, N) = 1.$$

Beweis. Schreiben wir

$$N = \prod_{p \text{ prim}} p^{\nu_p(N)} = de \quad \text{mit } d, e \in \mathbb{N} \text{ und } e = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \mid m}} p^{\nu_p(N)},$$

so gilt $\mathrm{ggT}(dn, m) = \mathrm{ggT}(n, m)$ und nach dem Erweiterten Euklid'schen Algorithmus haben wir

$$\{bdn + cm : b, c \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{ggT}(dn, m)\mathbb{Z} = \mathrm{ggT}(n, m)\mathbb{Z}.$$

Für die gegebene ganze Zahl a mit $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$ und $a \equiv 1 \bmod (\mathrm{ggT}(n, m))$ gibt es daher ganze Zahlen $t, u, v \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = 1 + t \, \mathrm{ggT}(n, m) \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(n, m) = udn + vm.$$

Mit $k := tud$ und $l := tv$ ergibt sich

$$a = 1 + t(udn + vm) = 1 + kn + lm.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ggT}(1 + kn, d) = \mathrm{ggT}(1 + tudn, d) = 1, \\
&\mathrm{ggT}(1 + kn, m) = \mathrm{ggT}(a - lm, m) = \mathrm{ggT}(a, m) = 1
\end{aligned}$$

und somit auch

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ggT}(1 + kn, e) = 1, \\
&\mathrm{ggT}(1 + kn, de) = \mathrm{ggT}(1 + kn, N) = 1,
\end{aligned}$$

also das Lemma. □

Beweis von Proposition 3.26. Wir bezeichnen die Menge der Moduli, für welche Charaktere existieren, die χ induzieren, mit $\mathcal{M}_\chi$. Wegen $N \in \mathcal{M}_\chi$ ist $\mathcal{M}_\chi \subseteq \mathbb{N}$ nicht leer und der Führer N_χ als minimales Element von $\mathcal{M}_\chi$ somit wohldefiniert. Weiter gilt

$$\mathrm{ggT}(n,m) \in \mathcal{M}_\chi \quad \text{für alle } n,m \in \mathcal{M}_\chi,$$

denn: Für ein beliebiges $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,N) = 1$ und $a \equiv 1 \bmod \big(\mathrm{ggT}(n,m)\big)$ gibt es nach Lemma 3.27 ganze Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $a = 1 + kn + lm$ und $\mathrm{ggT}(1+kn, N) = 1$. Wegen $m \in \mathcal{M}_\chi$ sowie der Implikation „(i) $\Longrightarrow$ (iii)“ in Lemma 3.19 folgt

$$\chi(a) = \chi(1+kn+lm) = \chi(1+kn)$$

und wegen $n \in \mathcal{M}_\chi$ sowie der Implikation „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“ in Lemma 3.19 auch

$$\chi(a) = \chi(1+kn) = 1.$$

Nach der Implikation „(ii) $\Longrightarrow$ (i)“ in Lemma 3.19 ist schließlich χ durch einen Dirichlet-Charakter modulo $\mathrm{ggT}(n,m)$ induziert und also $\mathrm{ggT}(n,m) \in \mathcal{M}_\chi$. #

Wegen der Minimalität des Führers folgt

$$N_\chi \leq \mathrm{ggT}(N_\chi, n) \leq N_\chi \quad \text{für alle } n \in \mathcal{M}_\chi,$$

also $N_\chi = \mathrm{ggT}(N_\chi, n)$ und somit $N_\chi \mid n$. □

Schließlich beschreiben wir noch, wie häufig primitive Dirichlet-Charaktere auftreten:

Proposition 3.28. *Für die Anzahl der primitiven Dirichlet-Charaktere modulo einer natürlichen Zahl N gilt*

$$\left| \left(\widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \right)_{\mathrm{prim}} \right| = N \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \| N}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p^2 | N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2$$

mit

$$p \parallel N \quad :\Longleftrightarrow \quad p \mid N \text{ und } p^2 \nmid N.$$

Insbesondere existieren genau für $N \equiv 2 \bmod (4)$ keine primitiven Charaktere modulo N.

Beweis. Wird in Beispiel 4.45 gegeben. □

Dies zieht eine Präzisierung der Umkehrbarkeit von Proposition 3.23 nach sich:

Proposition 3.29. *Es sei $N \geq 2$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Es ist $N = 4$ oder N eine Primzahl.*

(ii) *Mit Ausnahme des Hauptcharakters sind alle Dirichlet-Charaktere modulo N primitiv.*

Beweis. Dass Aussage (ii) aus Aussage (i) folgt, haben wir bereits in Proposition 3.23 und Bemerkung 3.24 gezeigt.

Für die umgekehrte Implikation stellen wir zunächst fest, dass Aussage (ii) offenkundig äquivalent zu

$$\left| \left(\widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \right)_{\text{prim}} \right| = \left| \widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \right| - 1 \overset{3.5}{=} \left| (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \right| - 1 \overset{1.2(c)}{=} \varphi(N) - 1$$

ist. Nach Korollar 1.18 und Proposition 3.28 ist dies wiederum äquivalent zu

$$N \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \| N}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p^2 | N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 = N \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p | N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - 1. \tag{3.11}$$

Wir zeigen nun, dass $N = 4$ die einzige zusammengesetzte natürliche Zahl ist, für die (3.11) gilt. Sei also $N \in \mathbb{N}$ zusammengesetzt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: N ist zusammengesetzt und eine Primpotenz. Wir schreiben $N = p^r$ mit einer Primzahl p und $r \geq 2$. Damit wird (3.11) zu

$$p^r - 2p^{r-1} + p^{r-2} = p^r \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 = \varphi(p^r) - 1 = p^r - p^{r-1} - 1.$$

Dies ist äquivalent zu

$$1 = p^{r-1} - p^{r-2} = p^{r-2}(p-1)$$

und somit zu $r = 2$ und $p = 2$, also zu $N = 4$.

Fall 2: N ist zusammengesetzt und keine Primpotenz. Dann hat der Modulus N mindestens zwei verschiedene Primfaktoren p_1, p_2, wobei wir ohne Einschränkung annehmen können, p_1 sei der kleinste Primfaktor von N. Mit den elementaren Abschätzungen

$$1 - \frac{2}{p} < 1 - \frac{1}{p} \quad \text{sowie} \quad \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 < 1 - \frac{1}{p} \quad \text{für alle Primzahlen } p$$

gilt dann

$$\begin{aligned} & N \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \| N}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p^2 | N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \\ < {} & N \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \prod_{\substack{p \| N \\ p \neq p_1}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{\substack{p^2 | N \\ p \neq p_1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\prod_{\substack{p\| N\\ p\neq p_1,p_2}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\prod_{\substack{p^2| N\\ p\neq p_1,p_2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\\
&\leq \varphi(N),
\end{aligned}
$$

wobei zu beachten ist, dass der Ausdruck in der zweiten Zeile wegen der Minimalität von p_1 positiv ist. Da jeder Term in dieser Abschätzungskette eine ganze Zahl ist, folgt

$$
N\prod_{\substack{p \text{ prim}\\ p\| N}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\prod_{\substack{p \text{ prim}\\ p^2| N}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \leq \varphi(N)-2,
$$

so dass (3.11) für N nicht gelten kann. $\square$

3.4 Diskrete Fourier-Analysis und Gauß-Summen

In Abschnitt 2.1 haben wir gesehen, dass sich geeignete, 1-periodische Funktionen auf den reellen Zahlen oder einem komplexen Gebiet als Fourier-Reihe schreiben lassen. Sie werden also gewissermaßen aus einer Reihe trigonometrischer Funktionen erzeugt und die Fourier-Koeffizienten bestimmen das Maß, mit dem ein jeder solcher Anteil auftritt. Über Mittelwertbildung gegen einen trigonometrischen Integrationskern kann dabei umgekehrt auf die Koeffizienten geschlossen werden. Aus diesem eindeutig bestimmten Zusammenspiel ergab sich unter anderem die Poisson'sche Summationsformel 2.22, mit der wir das Transformationsgesetz der Jacobi'schen Thetareihe 2.27 ableiten konnten.

In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns in Analogie dazu darauf, periodische zahlentheoretische Funktionen geschlossen als Fourier-Reihen zu schreiben. Ähnlich wie im Falle von Funktionen auf $\mathbb{R}$ gibt diese Zerlegung einiges an Eigenschaften über die periodische Funktion preis. Zum Beispiel haben die Fourier-Transformierten primitiver Dirichlet-Charaktere überraschende Eigenheiten. Wir führen zunächst das Konzept der diskreten Fourier-Transformation ein:

Definition 3.30. *Für ein $N \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ die Menge der N-periodischen Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$. Dann heißt die Zuordnung*

$$
\mathcal{F}_N \colon \begin{cases} \mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z},\mathbb{C}) & \to \mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z},\mathbb{C}),\\ f & \mapsto \hat{f}_N \end{cases}
$$

mit

$$
\hat{f}_N(n) := \sum_{j=1}^{N} f(j) e^{-\frac{2\pi i j n}{N}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}
$$

*die **(diskrete) Fourier-Transformation** und $\hat{f}_N$ für ein gegebenes $f \in \mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ die **Fourier-Transformierte** von f.*

Auch wenn es hinsichtlich der Notation einen Mehraufwand bedeutet, kommen wir nicht umhin, die Periode $N \in \mathbb{N}$ mitzuprotokollieren. Es ist offenkundig, dass $\mathcal{F}_N$ für jedes N einen Endomorphismus von $\mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ induziert. Es handelt sich dabei sogar um einen Automorphismus:

Proposition 3.31. *Für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $\mathcal{F}_N \colon \mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \to \mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen, deren Umkehrabbildung explizit durch*

$$\mathcal{F}_N^{-1}(g)(n) := \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^{N} g(\ell) e^{\frac{2\pi i \ell n}{N}} \quad \textit{für alle } g \in \mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$$

gegeben ist.

Beweis. Es genügt zu verifizieren, dass $\mathcal{F}_N^{-1}$ die Umkehrabbildung von $\mathcal{F}_N$ ist. Dafür setzen wir $g := \mathcal{F}_N(f)$ für ein $f \in \mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ in $\mathcal{F}_N^{-1}$ ein, und erhalten für alle $n \in \mathbb{Z}$ durch Vertauschung endlicher Summen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_N(f))(n) &= \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} f(j) e^{-\frac{2\pi i j \ell}{N}} \right) e^{\frac{2\pi i \ell n}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(j) \sum_{\ell=1}^{N} e^{\frac{2\pi i (j-n)\ell}{N}}. \end{aligned}$$

Um die innere Summe auf der rechten Seite zu verstehen, betrachten wir für jedes $j \in \{1, \ldots, N\}$ die Abbildung

$$\psi_\ell \colon \begin{cases} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} & \to \mathbb{C}, \\ \ell + N\mathbb{Z} & \mapsto e^{\frac{2\pi i (j-n)\ell}{N}}. \end{cases}$$

Diese ist offensichtlich ein Charaker der Restklassengruppe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ und genau für $j = n$ trivial. Mit Lemma 3.7 folgt

$$\sum_{\ell=1}^{N} e^{\frac{2\pi i (j-n)\ell}{N}} = \begin{cases} N & \text{für } j = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insgesamt erhalten wir so

$$\mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_N(f))(n) = f(n).$$

Der Beweis für $\mathcal{F}_N(\mathcal{F}_N^{-1}(g))(n) = g(n)$ mit einem $g \in \mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ funktioniert genau analog. □

Natürlich sind Dirichlet-Charaktere modulo N Elemente des Raums $\mathrm{Abb}_N(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ und können somit einer diskreten Fourier-Transformation unterzogen werden. Ein wichtiges Resultat in dieser Richtung betrifft primitive Charaktere. Bevor wir dieses beweisen, müssen wir zunächst etwas ausholen. Bis heute gültigen Konventionen folgend sind wir die Einführung der Gauß-Summe als die Fourier-Transformierte negativen Arguments eines Dirichlet-Charakters schuldig:

Definition 3.32. *Für natürliche Zahlen $n, N \in \mathbb{N}$ und einen Dirichlet-Charakter χ modulo N definieren wir*

$$\mathcal{G}(n;\chi) := \mathcal{F}_N(\chi)(-n) = \sum_{j=1}^{N} \chi(j) e^{\frac{2\pi i j n}{N}}$$

*als die **Gauß-Summe** von χ. Für $n = 1$ schreiben wir auch einfacher $\mathcal{G}(\chi) := \mathcal{G}(1;\chi)$.*

Wie wir später sehen werden, ist der Wert $\mathcal{G}(\chi)$ eine wichtige Kenngröße von χ. Wir werden im Falle von Dirichlet-Charakteren die Gauß-Summe verwenden, im allgemeineren Fall aber die diskrete Fourier-Transformation benutzen.

Beim Arbeiten mit Gauß-Summen wäre es angenehm, diese stets auf $\mathcal{G}(\chi)$ zurückführen zu können. Um zu kontrollieren, wann dies auf einfache Weise möglich ist, definieren wir daher den Begriff der Separabilität einer Gauß-Summe:

Definition 3.33. *Seien $n, N \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichlet-Charakter modulo N. Genau dann heißt die Gauß-Summe $\mathcal{G}(n;\chi)$ **separabel**, falls*

$$\mathcal{G}(n;\chi) = \mathcal{G}(\chi)\overline{\chi}(n)$$

gilt.

Wir geben nun ein einfaches Kriterium für die Separabilität von Gauß-Summen an:

Proposition 3.34. *Seien $n, N \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichlet-Charakter modulo N. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Gilt* $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$, *so ist $\mathcal{G}(n;\chi)$ immer separabel.*

(b) *Gilt* $\mathrm{ggT}(n, N) > 1$, *so ist $\mathcal{G}(n;\chi)$ genau dann separabel, wenn $\mathcal{G}(n;\chi) = 0$ gilt.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, es gelte $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$. Dann durchläuft das System nr mit $r = 1, \ldots, N$ ein komplettes Vertretersystem von Restklassen modulo N. Zusammen mit $\chi(r) = \overline{\chi}(n)\chi(nr)$ folgt daher

$$\mathcal{G}(n;\chi) = \sum_{r=1}^{N} \chi(r) e^{\frac{2\pi i n r}{N}} = \overline{\chi}(n) \sum_{r=1}^{N} \chi(nr) e^{\frac{2\pi i n r}{N}} = \overline{\chi}(n) \sum_{m=1}^{N} \chi(m) e^{\frac{2\pi i m}{N}} = \overline{\chi}(n)\mathcal{G}(\chi),$$

was Behauptung (a) beweist.

Gelte nun $\mathrm{ggT}(n, N) > 1$. Dann gilt $\overline{\chi}(n) = 0$ und Behauptung (b) folgt unmittelbar aus Definition 3.33. □

Besonders wichtig ist der Fall der primitiven Dirichlet-Charaktere. Hier gibt es einen engen Zusammenhang zur Separabilität:

Satz 3.35. *Sei χ ein primitiver Dirichlet-Charakter modulo einem natürlichen N. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Gauß-Summen $\mathcal{G}(n;\chi)$ separabel.*

(b) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(n, N) > 1$ gilt $\mathcal{G}(n;\chi) = 0$.*

(c) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(n, N) = 1$ gilt $|\mathcal{G}(n;\chi)|^2 = N$.*

(d) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(n, N) = 1$ gilt $\mathcal{G}(n;\chi)\mathcal{G}(n;\overline{\chi}) = \chi(-1)\, N$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Nach Proposition 3.34 sind die Gauß-Summen $\mathcal{G}(n;\chi)$ genau dann separabel, wenn $\operatorname{ggT}(n, N) = 1$ oder $\mathcal{G}(n;\chi) = 0$ gilt. Nehmen wir also an, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$m := \operatorname{ggT}(n, N) > 1 \quad \text{sowie} \quad \mathcal{G}(n;\chi) \neq 0$$

und zeigen, dass dies im Widerspruch zur Primitivität von χ steht. Offensichtlich ist $d := \frac{N}{m} < N$ ein Teiler von N. Nach Lemma 3.19 können wir den Widerspruch also herleiten, indem wir zeigen, dass für jedes $a \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(a, N) = 1$ und $a \equiv 1 \bmod (d)$ schon $\chi(a) = 1$ gälte. Wegen $\operatorname{ggT}(a, N) = 1$ durchliefe aj für jedes solche a und $j \in \{1, \ldots, N\}$ ein vollständiges Restklassensystem modulo N, also folgte

$$\mathcal{G}(n;\chi) = \sum_{j=1}^{N} \chi(aj) e^{\frac{2\pi i n a j}{N}} = \chi(a) \sum_{j=1}^{N} \chi(j) e^{\frac{2\pi i a n j}{N}}.$$

Wegen $a \equiv 1 \bmod (d)$ und $d = \frac{N}{m}$ gäbe es eine ganze Zahl b mit $a = 1 + \frac{bN}{m}$. Mit $m \mid n$ folgte hieraus

$$\frac{anj}{N} = \frac{nj}{N} + \frac{bNnj}{mN} = \frac{nj}{N} + \frac{bnj}{m} \quad \in \frac{nj}{N} + \mathbb{Z}$$

und also

$$\mathcal{G}(n;\chi) = \chi(a) \sum_{j=1}^{N} \chi(j) e^{\frac{2\pi i n j}{N}} = \chi(a)\mathcal{G}(n;\chi).$$

Da wir $\mathcal{G}(n;\chi) \neq 0$ vorausgesetzt hatten, erhielten wir mit $\chi(a) = 1$ den angestrebten Widerspruch und somit insgesamt Behauptung (a).

Behauptung (b) folgt unmittelbar aus Aussage (a) und Proposition 3.34.

Wir zeigen nun Behauptung (c). Nach Aussage (a) gilt zunächst

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}(\chi)|^2 = \mathcal{G}(\chi)\overline{\mathcal{G}(\chi)} = \mathcal{G}(\chi) \sum_{m=1}^{N} \overline{\chi}(m) e^{-\frac{2\pi i m}{N}} \\
&= \sum_{m=1}^{N} G(m;\chi) e^{-\frac{2\pi i m}{N}} \\
&= \sum_{m=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \chi(j) e^{\frac{2\pi i m j}{N}} e^{-\frac{2\pi i m}{N}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{N} \chi(j) \sum_{m=1}^{N} e^{\frac{2\pi i m(j-1)}{N}} \\
&= \chi(1)\, N = N,
\end{aligned}$$

wobei man die vorletzte Identität analog zu den Überlegungen im Beweis von Proposition 3.31 herleitet. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$ gewählt. Nach Aussage (a) ist dann $\mathcal{G}(n; \chi)$ separabel und wir erhalten

$$|\mathcal{G}(n;\chi)|^2 = |\mathcal{G}(\chi)\overline{\chi}(n)|^2 = |\mathcal{G}(\chi)|^2\, |\overline{\chi}(n)|^2 \overset{3.4}{=} N \cdot 1 = N$$

und insgesamt Behauptung (c).

Zum Beweis von Behauptung (d) wählen wir schließlich ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Für dieses gilt elementar

$$\begin{aligned}
\chi(-1)\mathcal{G}(n;\overline{\chi}) &= \sum_{j=1}^{N} \chi(-1)\overline{\chi}(j) e^{\frac{2\pi i n j}{N}} = \sum_{j=1}^{N} \overline{\chi(-j)} e^{\frac{2\pi i n j}{N}} \\
&= \overline{\sum_{j=1}^{N} \chi(-j) e^{-\frac{2\pi i n j}{N}}} = \overline{\sum_{j=1}^{N} \chi(j) e^{\frac{2\pi i n j}{N}}} \\
&= \overline{\mathcal{G}(n;\chi)}.
\end{aligned}$$

Erfüllt n speziell $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$, so folgt hieraus mit Aussage (c) und $\chi(-1)^2 = 1$ Behauptung (d). □

Bemerkung 3.36. *Es gilt auch die Umkehrung von Satz 3.35 (a): Sind alle Gauß-Summen $\mathcal{G}(n; \chi)$ zu einem gegebenen Dirichlet-Charakter χ separabel, so muss dieser bereits primitiv sein.*

In der Analytischen Zahlentheorie ist es oft von Bedeutung, Reihen der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \chi(n)$$

mit einer durch die Zuordnung $n \mapsto a_n$ definierten Funktion $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, cum grano salis also einer zahlentheoretischen Funktion, und einem Charakter χ zu verstehen. In einigen Anwendungen wird davon ausgegangen, dass die a_n jenseits einer gewissen Schranke $x \in \mathbb{R}$ nur noch den Wert 0 annehmen, und die betroffene Reihe dann als eine Funktion in x aufgefasst werden kann. Hier können uns im primitiven Falle Gauß-Summen weiterhelfen:

Proposition 3.37. *Sei χ ein primitiver Dirichlet-Charakter modulo einem natürlichen N. Dann gilt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \chi(n) = \frac{1}{\mathcal{G}(\overline{\chi})} \sum_{j=1}^{N} \overline{\chi}(j) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n j}{N}},$$

sobald die Reihe auf der linken Seite absolut konvergiert.

Beweis. Das ist eine einfache Anwendung von Satz 3.35 (a). In der Tat erhalten wir mit der Separabilität der Gauß-Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \chi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\mathcal{G}(n;\overline{\chi})}{\mathcal{G}(\overline{\chi})} = \frac{1}{\mathcal{G}(\overline{\chi})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sum_{j=1}^{N} \overline{\chi}(j) e^{\frac{2\pi i n j}{N}}$$

und Vertauschen der letzten beiden Summen zeigt die Proposition. □

3.5 Thetafunktionen zu Dirichlet-Charakteren

Die aus Abschnitt 2.4 bekannte Jacobi'sche Thetafunktion

$$\vartheta(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}$$

kann mannigfaltig verallgemeinert werden, unter anderem durch das summandenweise Heranmultiplizieren von Werten von Dirichlet-Charakteren. In diesem Setting gehört dann die Jacobi'sche Thetafunktion zum Hauptcharakter $\chi_{1,1}$, der stets einen trivialen Faktor beisteuert:

Definition 3.38. *Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo einem natürlichen N. Dann definieren wir*

$$\Theta(z;\chi) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) e^{\frac{\pi i n^2 z}{N}}, \qquad \Theta_1(z;\chi) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) n e^{\frac{\pi i n^2 z}{N}}$$

und sprechen von ***Thetafunktionen zu Dirichlet-Charakteren****.*

Definition 3.39. *Wir bezeichnen einen Dirichlet-Charakter als* ***gerade****, falls er $\chi(-1) = 1$ erfüllt, und als* ***ungerade****, falls $\chi(-1) = -1$ gilt.*

Bemerkung 3.40. *Wie man anhand der entsprechenden Asymmetrie der Summanden leicht einsieht, gilt*

$$\begin{aligned} \Theta(\cdot;\chi) &= 0 \qquad && \textit{für ungerade Charaktere } \chi, \\ \Theta_1(\cdot;\chi) &= 0 && \textit{für gerade Charaktere } \chi. \end{aligned}$$

Im Rest dieses Abschnitts leiten wir für die in Definition 3.38 eingeführten Thetafunktionen Funktionalgleichungen her. Hierbei machen wir von der Transformationsformel für die Jacobi'sche Thetafunktion 2.27 und somit implizit auch von der Poisson'schen Summationsformel 2.22 Gebrauch. Neu ist, dass nun zusätzlich Gauß-Summen zum Einsatz kommen:

Satz 3.41. *Für einen geraden, primitiven Dirichlet-Charakter χ modulo einem natürlichen N gilt die* ***Transformationsformel***

$$\mathcal{G}(\overline{\chi})\, \Theta\left(-\frac{1}{z};\chi\right) = \sqrt{\frac{Nz}{i}}\, \Theta(z;\overline{\chi}) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Beweis. Setzen wir $a_n := e^{-\frac{\pi i n^2}{Nz}}$ in Proposition 3.37 ein, so erhalten wir für alle $z \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\overline{\chi}) \cdot \Theta\left(-\frac{1}{z};\chi\right) &= \mathcal{G}(\overline{\chi}) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i n^2}{Nz}} \chi(n)\right) \\
&\overset{3.37}{=} \sum_{j=1}^{N} \overline{\chi}(j) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i n^2}{Nz} + \frac{2\pi i n j}{N}} \\
&\overset{2.29}{=} \sum_{j=1}^{N} \overline{\chi}(j) \sqrt{\frac{Nz}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i N(n+\frac{j}{N})^2 z} \\
&= \sqrt{\frac{Nz}{i}} \sum_{j=1}^{N} \overline{\chi}(j) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i (Nn+j)^2 z}{N}} \\
&= \sqrt{\frac{Nz}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} \overline{\chi}(Nn+j) e^{\frac{\pi i (Nn+j)^2 z}{N}} \\
&= \sqrt{\frac{Nz}{i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\chi}(m) e^{\frac{\pi i m^2 z}{N}} \\
&= \sqrt{\frac{Nz}{i}} \, \Theta(z;\overline{\chi})
\end{aligned}$$

und somit die Transformationsformel. $\square$

Satz 3.42. *Für einen ungeraden, primitiven Dirichlet-Charakter χ modulo einem natürlichen N gilt die **Transformationsformel***

$$\mathcal{G}(\overline{\chi})\, \Theta_1\left(-\frac{1}{z};\chi\right) = i\sqrt{N} \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{3}{2}} \Theta_1(z;\overline{\chi}) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Beweis. Durch beidseitiges Differenzieren der Identität aus Korollar 2.29 nach der komplexen Variablen α folgt zunächst nach einfacher Umformung

$$i\left(\frac{i}{z}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\alpha) e^{-\frac{\pi i (n+\alpha)^2}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{\pi i n^2 z + 2\pi i n \alpha}. \tag{3.12}$$

Setzen wir $a_n := n e^{-\frac{\pi i n^2}{Nz}}$ in Proposition 3.37 ein, so folgt damit für alle $z \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\overline{\chi})\Theta_1\left(-\frac{1}{z};\chi\right) &= \mathcal{G}(\overline{\chi}) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-\frac{\pi i n^2}{Nz}} \chi(n)\right) \\
&\overset{3.37}{=} \sum_{j=1}^{N} \overline{\chi}(j) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-\frac{\pi i n^2}{Nz} + \frac{2\pi i n j}{N}} \\
&\overset{(3.12)}{=} i\left(\frac{i}{\left(-\frac{1}{Nz}\right)}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^{N} \overline{\chi}(j) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{j}{N}\right) e^{\pi i (n+\frac{j}{N})^2 zN}
\end{aligned}$$

$$= iN^{\frac{3}{2}} \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^{N} \overline{\chi}(j) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{j}{N}\right) e^{\frac{\pi i (Nn+j)^2 z}{N}}$$
$$= i\sqrt{N} \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\chi}(Nn+j)\,(Nn+j)\, e^{\frac{\pi i (Nn+j)^2 z}{N}}$$
$$= i\sqrt{N} \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\chi}(m) m e^{\frac{\pi i m^2 z}{N}}$$
$$= i\sqrt{N} \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{3}{2}} \Theta_1\left(z; \overline{\chi}\right)$$

und somit die Transformationsformel. □

3.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. *In unserem Studium der Gruppencharaktere haben wir uns auf endliche abelsche Gruppen beschränkt. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Theorie der Charaktere einfacher endlicher nichtabelscher Gruppen*[15] *trivial ist. Zeigen Sie dafür, dass für eine einfache endliche nichtabelsche Gruppe G die konstante Eins-Abbildung der einzige Gruppenhomomorphismus $\chi\colon G \to \mathbb{C}^\times$ ist.*

Aufgabe 3.2. *Seien G eine endliche abelsche Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $g \in G \setminus H$. Zeigen Sie, dass es dann einen Charakter $\chi \in \widehat{G}$ gibt, der eingeschränkt auf H trivial ist und $\chi(g) \neq 1$ erfüllt.*

Aufgabe 3.3. *Der kanonische Isomorphismus ψ zwischen einer endlichen abelschen Gruppe G und ihrem Bidual $\widehat{\widehat{G}}$ aus Korollar 3.11 ist ein Spezialfall der* **Pontrjagin-*Dualität***[16] *wie man sie üblicherweise für Charaktere lokalkompakter abelscher Gruppen formuliert. Im Fall endlicher abelscher Gruppen können hierbei aufwändige analytische Methoden durch bloßes Abzählen ersetzt werden. Die Pontrjagin-Dualität lässt uns eine beliebige endliche abelsche Gruppe G als ein Dual verstehen – nämlich als das Dual der Charaktergruppe $\widehat{G}$. In dieser Aufgabe wollen wir uns diese Anschauung verdeutlichen.*

Zeigen Sie dafür zunächst die folgenden Aussagen über eine eine endliche abelsche Gruppe G und ein $m \in \mathbb{Z}$:

(a) *Ein Element $g \in G$ erfüllt $g^m = 1$ genau dann, wenn $\chi(g) = 1$ für jedes $\chi \in \widehat{G}$, das eine m-te Potenz in $\widehat{G}$ ist.*

(b) *Ein Element $g \in G$ ist genau dann eine m-te Potenz in G, wenn $\chi(g) = 1$ gilt für jedes $\chi \in \widehat{G}$ mit $\chi^m = \chi_1$.*

Da diese Aussagen für alle *endlichen abelschen Gruppen gelten, können wir vermöge der Pontrjagin-Dualität die Rollen von G und $\widehat{G}$ vertauschen. Wir erhalten so:*

(â) *Ein $\chi \in \widehat{G}$ erfüllt $\chi^m = \chi_1$ genau dann, wenn $\chi(g) = 1$ für jedes $g \in G$, das eine m-te Potenz in G ist.*

[15] Eine Gruppe heißt bekanntlich ***einfach***, wenn sie nur sich selbst und die triviale Gruppe als Normalteiler aufweist.

[16] Lem Semjonowitsch Pontrjagin (1908-1988)

(b̂) *Ein Charakter $\chi \in \widehat{G}$ ist eine m-te Potenz in $\widehat{G}$ genau dann, wenn $\chi(g) = 1$ für alle $g \in G$ mit $g^m = 1$.*

Aufgabe 3.4. *Sei p eine ungerade Primzahl. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

(a) *Das* **LEGENDRE-*Symbol***[17]

$$\left(\frac{n}{p}\right) := \begin{cases} 1 & \text{für } p \nmid n \text{ und } n \equiv m^2 \bmod (p) \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{für } p \nmid n \text{ und } n \not\equiv m^2 \bmod (p) \text{ für alle } m \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{für } p \mid n \end{cases}$$

definiert einen Dirichlet-Charakter modulo p.

(b) *Der Hauptcharakter und das Legendre-Symbol sind die einzigen reellwertigen Dirichlet-Charaktere modulo p.*
Hinweis: *Benutzen Sie ohne Beweis, dass die Einheitengruppe eines endlichen Körpers zyklisch ist.*

Aufgabe 3.5. *In Fortführung von Aufgabe 3.4 beschreiben wir in dieser Aufgabe die Gesamtheit der reellwertigen primitiven Dirichlet-Charaktere. Dafür führen wir den Begriff der* ***Grundzahl*** *ein. Das ist eine ganze Zahl D mit*

$$D \equiv 1 \bmod (4) \text{ quadratfrei}$$

oder

$$D \equiv 0 \bmod (4) \text{ mit } \frac{D}{4} \text{ quadratfrei und } \frac{D}{4} \equiv 2 \text{ oder } 3 \bmod (4).$$

Für eine Grundzahl D definieren wir eine Funktion $\chi_D \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch

$$\chi_D(2) := \begin{cases} 0 & \text{für } D \equiv 0 \bmod (4), \\ 1 & \text{für } D \equiv 1 \bmod (8), \\ -1 & \text{für } D \equiv 5 \bmod (8) \end{cases}$$

$$\chi_D(p) := \left(\frac{D}{p}\right) \text{ für } p \text{ ungerade Primzahl,}$$

$$\chi_D\left(\prod_{p \text{ prim}} p^{v_p}\right) := \prod_{p \text{ prim}} \chi_D(p)^{v_p}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) *Für eine gegebene Grundzahl D definiert die Funktion χ_D einen primitiven Dirichlet-Charakter modulo $|D|$ mit*

$$\chi_D(-1) = \begin{cases} 1 & \text{für } D > 0, \\ -1 & \text{für } D < 0. \end{cases}$$

[17] Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

(b) *Jeder reellwertige primitive Dirichlet-Charakter ist einer der Dirichlet-Charaktere χ_D mit einer Grundzahl D.*

Hinweis: *Verwenden Sie ohne Beweis die folgenden elementaren Aussagen:*

(i) Für eine ungerade Primzahl p und ein $r \geq 1$ ist die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ zyklisch,

(ii) Ist $n \equiv 1 \bmod (8)$, so ist n modulo jedem 2^r mit $r \geq 3$ ein Quadrat.

Aufgabe 3.6. *Seien N eine natürliche Zahl und χ ein reellwertiger Dirichlet-Charakter modulo N. In dieser Aufgabe untersuchen wir die Größe*

$$S := \sum_{n=1}^{N} n\chi(n).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $S \in \mathbb{Z}$.

(b) $m\chi(m)S \equiv S \bmod (N)$ *für jedes $m \in \mathbb{Z}$ mit* $\operatorname{ggT}(m, N) = 1$.

(c) *Schreiben wir $N = 2^{v_2(N)}M$ mit $M \in \mathbb{N}$ ungerade, so gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(m, N) = 1$, das*

$$m \equiv 3 \bmod (2^{v_2(N)}) \quad \textit{und} \quad m \equiv 2 \bmod (M)$$

erfüllt.

(d) $12S \equiv 0 \bmod (N)$.

Aufgabe 3.7. *Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass für einen Dirichlet-Charakter χ modulo einer natürlichen Zahl N der Definitionsmodul N, die Periode – also die kleinste natürliche Zahl r mit $\chi(n + r) = \chi(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ – und der Führer verschieden sein können. Welche Beziehung gibt es zwischen diesen drei Zahlen?*

Aufgabe 3.8. *Seien G eine endliche abelsche Gruppe und $f: G \to \mathbb{C}$ eine nichttriviale Abbildung. Zeigen Sie dann*

$$|\operatorname{supp} f| \cdot |\operatorname{supp} \hat{f}| \geq |G|,$$

wobei supp *den **Träger** einer Funktion bezeichne, in unserem Kontext also die Anzahl von Punkten, in denen die betreffende Funktion nicht den Wert Null annimmt.*

Aufgabe 3.9. *Für eine ungerade natürliche Zahl $N > 1$ mit kanonischer Primfaktorzerlegung $N = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(N)}$ ist das als Produkt von Legendre-Symbolen definierte **Jacobi-Symbol***

$$\left(\frac{n}{N}\right) := \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{n}{p}\right)^{v_p(N)} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

nach Aufgabe 3.4 offensichtlich ein Dirichlet-Charakter modulo N, dessen Gauß-Summe wir in dieser Aufgabe mit $\mathcal{G}(N)$ bezeichnen. Zeigen Sie dann die folgenden beiden Aussagen:

(a) $\mathcal{G}(pq) = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)\mathcal{G}(p)\mathcal{G}(q)$ *für je zwei ungerade Primzahlen* p, q.

(b) $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ *für je zwei ungerade Primzahlen* p, q.

Das ist das berühmte ***Quadratische Reziprozitätsgesetz****, mit dem sich das Legendre-Symbol effizient berechnen lässt.*

Hinweis: *Verwenden Sie ohne Beweis die Identität* $\sum_{n=1}^{N} e^{\frac{2\pi i n^2}{N}} = i^{\frac{(N-1)^2}{4}}\sqrt{N}$. *Diese lässt sich durch einen Trick (Welchen?) aus der Transformationsformel 2.27 der Jacobi'schen Thetareihe herleiten.*

KAPITEL 4

Dirichlet-Reihen und der Hecke'sche Umkehrsatz

Eine indirekte Möglichkeit, zahlentheoretisch interessante Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu studieren, ergibt sich, indem man ihre Glieder als Koeffizienten in geeignete analytische Reihen einsetzt. Im Falle, dass die gewählte analytische Reihe eine Potenzreihe ist, erhält man so die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{mit einer komplexen Variablen } z.$$

Sollen funktionentheoretische Methoden angewandt werden, muss dabei Konvergenz vorliegen; es ist also sinnvoll zu fordern, dass die Reihe einen positiven Konvergenzradius hat. Der Identitätssatz für Potenzreihen stellt dann sicher, dass die entstandene Funktion völlig charakteristisch für die untersuchte Folge ist. Wächst die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht schneller als ein bestimmtes Polynom – so wie das bei der Folge der Fourier-Koeffizienten einer gegebenen Modulform der Fall ist – kann man ihre Glieder statt in eine Potenzreihe in eine Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \qquad \text{mit einer komplexen Variablen } s$$

als Koeffizienten einsetzen und erhält wieder eine für die untersuchte Folge charakteristische Funktion. Derartige Reihen wurden zuerst von Dirichlet im Nachgang des Beweises seines Primzahlsatzes – bei uns Satz 5.16 – und beginnend 1838 konzeptionell gefasst und heißen heute ***Dirichlet-Reihen***. In diesem Kapitel werden wir Dirichlet-Reihen studieren und als Höhepunkt mit dem zuerst 1936 von Hecke bewiesenen Hecke'schen Umkehrsatz einen engen Zusammenhang zwischen diesen und Fourier-Reihen herstellen.

4.1 Dirichlet-Reihen

Definition 4.1. *Für eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen bezeichnen wir die (formale) Reihe*

$$D(s) := D(s;a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

als die von a erzeugte ***Dirichlet-Reihe****, wobei $s = \sigma + it$ eine komplexe Variable bezeichne.*

Bemerkung 4.2. *Offenbar besteht eine philosophische Verbindung zwischen Potenzreihen und Dirichlet-Reihen in dem Sinne, dass bei Ersteren mit z^n der Summenindex die Exponenten, und bei Letzteren mit n^{-s} der Summenindex die Basen durchläuft. Nach den grundlegenden Potenzgesetzen gelten*

$$z^{m+n} = z^m z^n \quad \text{sowie} \quad (mn)^{-s} = m^{-s} n^{-s} \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}.$$

Es ist daher naheliegend, Potenzreihen ausgiebig in der additiven und Dirichlet-Reihen in der multiplikativen Zahlentheorie zu untersuchen.

Natürlich ist es möglich, Dirichlet-Reihen als rein formale Objekte zu studieren. Umso besser ist es aber, wenn sie in gewissen Regionen konvergieren und dort eine komplexwertige Funktion darstellen. Um ein einfaches Kriterium anzugeben, wo eine Dirichlet-Reihe konvergiert, benötigen wir die folgende einfache und dennoch nützliche Technik, die auf eine Arbeit von Abel aus dem Jahr 1826 zurückgeht:

Proposition 4.3 (Abel'sche partielle Summation)**.** *Für je zwei Folgen komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie ganze Zahlen $N \in \mathbb{Z}$ und $M \in \mathbb{N}$ gilt die Formel*

$$\sum_{n=N+1}^{N+M} a_n b_n = A_{N+M} b_{N+M} + \sum_{n=N+1}^{N+M-1} A_n (b_n - b_{n+1}). \tag{4.1}$$

Dabei bezeichnet $A_n := \sum_{k=N+1}^{n} a_k$ die partiellen Summanden. Insbesondere gilt: Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, so folgt die ***Abel'sche Ungleichung***

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+M} a_n b_n \right| \leq A b_{N+1} \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } \sup_{N<n\leq N+M} |A_n| \leq A.$$

Beweis. Wir setzen $a_n = A_n - A_{n-1}$ in die Summe ein und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{N+M} a_n b_n &= \sum_{n=N+1}^{N+M} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=N+1}^{N+M} A_n b_n - \sum_{n=N+1}^{N+M} A_{n-1} b_n \\ &= A_{N+M} b_{N+M} + \sum_{n=N+1}^{N+M-1} A_n b_n - \sum_{n=N+1}^{N+M-1} A_n b_{n+1} - A_N b_{N+1}. \end{aligned}$$

Mit der leeren Summe $A_N = 0$ folgt nach Zusammenfassen direkt die erste Behauptung (4.1). Durch Anwenden der Dreiecksungleichung auf diese folgern wir für ein $A \in \mathbb{R}_{>0}$ wie in der Formulierung der Proposition und unter Berücksichtigung der Monotonie von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N+1}^{N+M} a_n b_n \right| &\leq A b_{N+M} + \sum_{n=N+1}^{N+M-1} |A_n| (b_n - b_{n+1}) \\ &\leq A \left(b_{N+M} + \sum_{n=N+1}^{N+M-1} (b_n - b_{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Nach Auflösen der Teleskopsumme folgt nun auch die Abel'sche Ungleichung. □

Die Abel'sche partielle Summation ist in vielerlei Hinsicht bemerkenswert. Zuallererst sei auf die offensichtliche Ähnlichkeit mit der aus der Analysis wohlbekannten partiellen Integration

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

hingewiesen, bei welcher im Gegensatz zur partiellen Summation aber mit „infinitesimalen Differenzen" $\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ anstelle der gewöhnlichen Differenzen $a_n = A_n - A_{n-1}$ gearbeitet wurde. Ferner ist – wie wir bald sehen werden – die durch die Abel'sche partielle Summation gewonnene Transformation trotz ihres schnellen Beweises von enormer Nützlichkeit: Sie hilft dabei, Summen der Form $\sum a_n b_n$ zu kontrollieren, wenn dies für die Summen der a_n und die Differenzen der b_n möglich ist. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn die a_n oszillieren und die b_n monoton fallen, was $b_n - b_{n+1}$ signifikant kleiner macht als b_n selbst. Das nächste Korollar gibt einen ersten Vorgeschmack:

Korollar 4.4 (Abel'sches Konvergenzkriterium)**.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| \leq A \qquad \text{für ein } A \in \mathbb{R}_{>0}$$

und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ und für alle $N \geq 0$ gilt die Ungleichung

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n b_n \right| \leq A b_{N+1}.$$

Beweis. Seien N, M natürliche Zahlen und $A \in \mathbb{R}_{>0}$ wie in der Formulierung des Korollars. Durch Anwenden der Dreiecksungleichung auf (4.1) folgern wir unter Berücksichtigung der Monotonie von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N+1}^{N+M} a_n b_n \right| &\leq A b_{N+M} + A \sum_{n=N+1}^{N+M-1} (b_n - b_{n+1}) \\ &= A b_{N+M} + A(b_{N+1} - b_{N+M}) = A b_{N+1}. \end{aligned}$$

Das Korollar folgt mit dem Cauchy-Kriterium, wenn wir N und M gegen unendlich laufen lassen. □

Das Abel'sche Kriterium verallgemeinert das klassische Leibniz'sche Kriterium über die Konvergenz alternierender Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ mit monoton fallenden Nullfolgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass statt der dort verwendeten Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun beliebige oszillierende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eingesetzt werden können. Damit bringt es trotz seiner schnellen Herleitung eine gewisse Stärke mit.

Beispiel 4.5. *Die Potenzreihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

*konvergiert nach der Formel von Cauchy-*HADAMARD[18] *für* $|z| < 1$ *und stellt dort bekanntermaßen die Funktion* $-\log(1-z)$ *dar. Mit dem Abel'schen Konvergenzkriterium 4.4 lassen sich nun Aussagen über das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzbereichs treffen. Tatsächlich konvergiert die Reihe für alle* $|z| = 1$ *mit Ausnahme von* $z = 1$,

denn: Mit der geometrischen Summenformel erkennt man schnell

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z^n\right| = \left|\frac{z - z^{N+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|} \quad \text{für alle } z \neq 1 \text{ mit } |z| = 1.$$

Mit der Wahl $a_n := z^n$ *und* $b_n := \frac{1}{n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *sind alle Voraussetzungen des Abel'schen Konvergenzkritiums 4.4 erfüllt.* #

Wir verwenden nun Abel'sche partielle Summation, um die Konvergenzeigenschaften von Dirichlet-Reihen zu untersuchen. Dabei sind Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die durch eine Reihe gegeben sind, für uns keinesfalls neu. Im Falle einer Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ benennt uns bekanntlich die gerade in Beispiel 4.5 eingesetzte Formel von Cauchy-Hadamard die eindeutig bestimmten Zahl $R \geq 0$ mit der Eigenschaft, dass die Potenzreihe für $|z| < R$ konvergiert und für $|z| > R$ divergiert. Für $|z| = R$ kann dabei allerdings keine allgemeine Aussage getroffen werden. Es stellt sich also die Frage, ob sich bei Dirichlet-Reihen ein ähnliches Verhalten beobachten lässt.

Satz 4.6. *Seien* $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge komplexer Zahlen und die Dirichlet-Reihe*

$$D(s; a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

für eine komplexe Zahl s_0 *konvergent. Dann konvergiert sie bereits für alle* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$. *Die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Teilmengen der Halbebene*

$$\mathbb{S}_{\mathrm{Re}(s_0)} := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)\},$$

weshalb die Reihe $D(s; a)$ *in diesem Bereich eine holomorphe Funktion darstellt.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $s_0 = 0$ annehmen und sonst a_n durch $a_n n^{-s_0}$ ersetzen. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach Voraussetzung konvergiert, existiert ein $N > 0$ mit

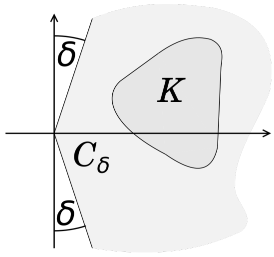
$$|A_{N+M}| = \left|\sum_{n=N+1}^{N+M} a_n\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } M > 0.$$

Wir wählen nun ein festes, nicht-leeres Kompaktum $K \subseteq \mathbb{S}_{\mathrm{Re}(s_0)}$. Dieses ist vollständig in einem Kegel

$$C_\delta := \{s \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(s)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta\} \quad \text{mit einem } \delta > 0$$

[18] Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

enthalten.



Für komplexe Zahlen $s \in C_\delta$ mit Realteil $\sigma > 0$ erhalten wir mit Proposition 4.3

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{N+M} a_n n^{-s}\right| &\leq \varepsilon(N+M)^{-\sigma} + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{N+M-1} \left|n^{-s} - (n+1)^{-s}\right| \\ &\leq \varepsilon(M+N)^{-\sigma} + \varepsilon|s| \sum_{n=N+1}^{N+M-1} \left|\int_{\log(n)}^{\log(n+1)} e^{-sx}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \varepsilon(M+N)^{-\sigma} + \varepsilon|s| \sum_{n=N+1}^{N+M-1} \int_{\log(n)}^{\log(n+1)} e^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \varepsilon(M+N)^{-\sigma} + \varepsilon\frac{|s|}{\sigma}\left((N+1)^{-\sigma} - (N+M)^{-\sigma}\right) \\ &\leq \varepsilon\left(1+\frac{|s|}{\sigma}\right)(N+1)^{-\sigma}.\end{aligned}$$

Die Größe $\frac{|s|}{\sigma}$ ist in C_δ offenbar beschränkt. Damit folgt die gleichmäßige Konvergenz in diesem Bereich und insbesondere im Kompaktum K. Die Aussage folgt jetzt mit dem Konvergenzsatz von Weierstraß, da die Partialsummen offenbar sämtlich holomorphe Funktionen sind. □

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta der Dirichlet-Reihe $D(s;a)$ zu einer gegebenen Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen können wir diese in ihrem Konvergenzbereich gliedweise ableiten und erhalten dort somit

$$D^{(k)}(s;a) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log(n)^k n^{-s}.$$

Im folgenden Korollar zu Satz 4.6 untersuchen wir die Frage, inwieweit es für Dirichlet-Reihen einen zum Konvergenzradius einer Potenzreihe analogen Begriff gibt:

Korollar 4.7. *Zu jeder Dirichlet-Reihe $D(s)$, die irgendwo konvergiert und irgendwo divergiert, gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\sigma_0 := \sigma_0(D) \in \mathbb{R}$, so dass $D(s)$ für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0(D)$ konvergiert und für alle s mit $\mathrm{Re}(s) < \sigma_0(D)$ divergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung und Satz 4.6 existiert

$$\sigma_0(D) := \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \text{es gibt ein } t \in \mathbb{R} \text{ mit konvergentem } D(\sigma+it)\} \in \mathbb{R}$$

und hat die gewünschten Eigenschaften. □

Die reelle Zahl σ_0 aus dem Korollar nennt man auch die ***Konvergenzabszisse*** der Dirichlet-Reihe. Natürlich gibt es auch Dirichlet-Reihen, die an allen Stellen konvergieren, wie zum Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n^{-s},$$

aber auch solche, die nirgends konvergieren, wie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! n^{-s}.$$

In diesen Fällen setzen wir die Konvergenzabszisse formal zu $\sigma_0 := -\infty$ bzw. $\sigma_0 := \infty$.

Wir erinnern uns, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzbereichs absolut konvergieren. Bei Dirichlet-Reihen muss dies allerdings nicht mehr so sein. Beispielsweise konvergiert die Dirichlet-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s} \tag{4.2}$$

nach dem Abel'schen Konvergenzkriterium 4.4 für alle reellen $s > 0$, aber wegen der Divergenz der harmonischen Reihe und Korollar 4.7 im Bereich $0 < s \leq 1$ keinesfalls absolut. Dies ist nur ein erster Hinweis auf die starken Unterschiede zwischen der Theorie von Potenzreihen und Dirichlet-Reihen: Wir ziehen als Konsequenz, dass es neben der Konvergenzabszisse einer gegebenen Dirichlet-Reihe $D(s)$ noch eine ***absolute Konvergenzabszisse*** $\sigma_a := \sigma_a(D)$ geben muss. Ist $D(s) = D(s; a)$ für eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen, so ist diese definiert als die Konvergenzabszisse der Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-s}$. Offenkundig gilt dann $\sigma_0(D) \leq \sigma_a(D)$. Die Frage, ob sich $\sigma_a(D)$ auch in die andere Richtung durch $\sigma_0(D)$ kontrollieren lässt, beantwortet die folgende Proposition:

Proposition 4.8. *Für die Konvergenzabszisse $\sigma_0(D)$ und die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a(D)$ einer gegebenen Dirichlet-Reihe $D(s)$ gilt*

$$\sigma_0(D) \leq \sigma_a(D) \leq \sigma_0(D) + 1.$$

Beweis. Die Ungleichung $\sigma_0(D) \leq \sigma_a(D)$ ist trivial, da absolute Konvergenz stets gewöhnliche Konvergenz impliziert. Es verbleibt demnach nur $\sigma_a(D) \leq \sigma_0(D) + 1$ zu zeigen. Seien dafür $D(s) = D(s; a)$ mit einer Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen und $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Proposition folgt, wenn wir zeigen können, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma_0 - 1 - 2\varepsilon} \tag{4.3}$$

konvergiert. Mit Abel'scher partieller Summation 4.3 erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| n^{-\sigma_0 - \varepsilon} n^{-1-\varepsilon}$$

$$= N^{-1-\varepsilon} \sum_{n=1}^{N} |a_n| n^{-\sigma_0-\varepsilon} + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| k^{-\sigma_0-\varepsilon} \right) \left(n^{-1-\varepsilon} - (n+1)^{-1-\varepsilon} \right). \tag{4.4}$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma_0-\varepsilon}$ ist $\left(|a_n| n^{-\sigma_0-\varepsilon}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, weshalb es eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k| k^{-\sigma_0-\varepsilon} \leq C_\varepsilon N \quad \text{für alle } N > 0$$

gibt. Folglich ist durch den ersten Summanden in (4.4)

$$N^{-1-\varepsilon} \sum_{n=1}^{N} |a_n| n^{-\sigma_0-\varepsilon} \leq C_\varepsilon N^{-\varepsilon}$$

eine Nullfolge in N definiert; insbesondere ist der Ausdruck beschränkt. Andererseits erhalten wir für den zweiten Summanden in (4.4) eine Abschätzung der Form

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| k^{-\sigma_0-\varepsilon} \right) \left(n^{-1-\varepsilon} - (n+1)^{-1-\varepsilon} \right) \\ \leq\ & C_\varepsilon \sum_{n=1}^{N-1} n \left(n^{-1-\varepsilon} - (n+1)^{-1-\varepsilon} \right) \leq\ C_\varepsilon, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Teleskopsumme über $n^{-\varepsilon} - (n+1)^{-\varepsilon}$ berechnet wurde. Damit erhalten wir eine beschränkte Majorante für (4.3) und die Proposition folgt. □

Die Abschätzung in Proposition 4.8 ist scharf, da die Reihe (4.2) die Konvergenzabszissen $\sigma_0 = 0$ und $\sigma_a = 1$ besitzt.

Da der entartete Fall $\sigma_0 = \infty$ aus analytischer Sicht nicht interessant ist, geben wir im Folgenden noch ein einfaches Kriterium, wann eine Dirichlet-Reihe absolut konvergiert.

Proposition 4.9. *Für eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen gebe es ein $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| = O_\varepsilon(n^{\sigma-1+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, wobei die Beschränktheitskonstante vom jeweiligen ε abhängt. Dann folgt für die Dirichlet-Reihe $D(s) = D(s;a)$ bereits $\sigma_a(D) \leq \sigma$.*

Beweis. Sei $\tilde{s} = \tilde{\sigma} + i\tilde{t} \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{\sigma} > \sigma$ fest gewählt. Es genügt zu zeigen, dass die Reihe im Punkt $\tilde{s}$ absolut konvergiert. Für $\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}-\sigma}{2} > 0$ gibt es nach Voraussetzung eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ mit $|a_n| \leq C_\varepsilon n^{\sigma-1+\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\tilde{\sigma}-i\tilde{t}} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, n^{-\sigma-2\varepsilon} \\ &\leq C_\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\varepsilon} \leq C_\varepsilon + C_\varepsilon \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\varepsilon}} = C_\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Damit ist eine konvergente Majorante gefunden und die Behauptung folgt. □

Natürlich ist es interessant, von den Eigenschaften einer Koeffizientenfolge auf die zugehörige Dirichlet-Reihe zu schließen. Man spricht hier von ***Abel'schen Sätzen***. So sind Resultate wie Satz 4.6 und Proposition 4.9 im weitesten Sinne Sätze dieses Typs. Die oftmals schwierige Umkehrung solcher Sätze – also vom Verhalten der Funktionen auf die Koeffizienten zurückzuschließen – bilden einen eigenen mathematischen Forschungszweig und sind auch als **TAUBER-*Sätze***[19] bekannt. Einen typischen Vertreter dieser Gattung, den Taubersatz von NEWMAN,[20] werden wir in Kapitel 5 als Satz 5.25 beweisen. Bereits an dieser Stelle ist es uns allerdings ohne viel Aufwand möglich, sehr schwache Tauber-Sätze zu zeigen, und wir tun dies mit einer nützlichen Proposition:

Proposition 4.10. *Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, für welche die Partialsummen der Dirichlet-Reihe $D(s; a)$ für ein $s = \sigma \geq 0$ beschränkt sind. Dann folgt bereits*

$$A(x) := \sum_{0<n\leq x} a_n = O(x^\sigma).$$

Beweis. Für die Funktion

$$B(x) := \sum_{0<n\leq x} a_n n^{-\sigma} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt nach Voraussetzung

$$B := \limsup_{x\to\infty} |B(x)| < \infty.$$

Wir setzen nun $N := \lfloor x \rfloor$ und argumentieren mit Abel'scher partieller Summation 4.3. Es gilt dann

$$\begin{aligned}|A(x)| &= \left| \sum_{0<n\leq x} a_n n^{-\sigma} n^\sigma \right| = \left| B_N N^\sigma + \sum_{k=1}^{N-1} B_k \left(k^\sigma - (k+1)^\sigma\right) \right| \\ &\overset{\sigma\geq 0}{\leq} BN^\sigma + B\sum_{k=1}^{N-1} \left((k+1)^\sigma - k^\sigma\right) = B(2N^\sigma - 1) = O(N^\sigma) = O(x^\sigma)\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Der aus der Funktionentheorie wohlbekannte Identitätssatz für Potenzreihen besagt, dass zwei Potenzreihen, die in einem Häufungspunkt ihres gemeinsamen zusammenhängenden Definitionsbereichs übereinstimmen, bereits identisch sind, so dass insbesondere alle ihre Koeffizienten übereinstimmen. Für Dirichlet-Reihen gibt es auch solch einen Identitätssatz:

Satz 4.11 (Identitätssatz für Dirichlet-Reihen). *Seien $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\tilde{a} := (\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen komplexer Zahlen, für welche die zugehörigen Dirichlet-Reihen $D(s; a)$ und $D(s; \tilde{a})$ irgendwo konvergieren und in einer nichtleeren, offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ übereinstimmen. Dann folgt bereits, dass $D(s; a)$ und $D(s; \tilde{a})$ auf einer rechten Halbebene übereinstimmen und insbesondere $a_n = \tilde{a}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

[19] Alfred Tauber (1866-1942)

[20] Donald Joseph Newman (1930-2007)

Beweis. Nach Satz 4.6 konvergieren $D(s;a)$ und $D(s;\tilde{a})$ bereits auf einer rechten Halbebene $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{C}$, welche die offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ umfasst, auf sie übereinstimmen, und stellen dort holomorphe Funktionen dar. Da $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet ist, stimmen somit $D(s;a)$ und $D(s;\tilde{a})$ nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen auf ganz $\mathbb{S}$ überein.

Nehmen wir nun an, es gäbe eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \neq \tilde{a}_m$. Dann gälte

$$0 = m^{\sigma}\left(D(\sigma;a) - D(\sigma;\tilde{a})\right) = (a_m - \tilde{a}_m) + \sum_{n=m+1}^{\infty} (a_n - \tilde{a}_n)\left(\frac{n}{m}\right)^{-\sigma} \qquad \text{für } \sigma \gg 0$$

und insbesondere

$$|a_m - \tilde{a}_m| = m^{\sigma}\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} (a_n - \tilde{a}_n) n^{-\sigma}\right| \qquad \text{für } \sigma \gg 0.$$

Wäre nun speziell σ größer als eine Konstante C, die wiederum größer ist als das Maximum der absoluten Konvergenzabszissen von $D(s;a)$ und $D(s;\tilde{a})$, so erhielten wir eine konvergente Majorante

$$\begin{aligned}
|a_m - \tilde{a}_m| &\leq m^{\sigma} \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n - \tilde{a}_n| n^{-\sigma} \\
&= m^{\sigma} \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n - \tilde{a}_n| n^{-C} n^{-(\sigma-C)} \\
&\leq m^{\sigma}(m+1)^{-(\sigma-C)} \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n - \tilde{a}_n| n^{-C} \\
&= \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\sigma} \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n - \tilde{a}_n| \left(\frac{m+1}{n}\right)^{-C}.
\end{aligned}$$

Die Summe auf der rechten Seite hängt nicht von σ ab. Im Grenzübergang $\sigma \to \infty$ ergäbe sich so im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $a_m = \tilde{a}_m$, so dass es eine solche kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ nicht geben kann. Das zeigt die Behauptung des Satzes. □

Wir können den Identitätssatz für Dirichlet-Reihen 4.11 dazu verwenden, die Menge

$$\mathcal{O}_{\mathrm{DR}} \subseteq \left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathbb{S}_x)\right) /_{\sim} \quad \text{mit } \mathbb{S}_x := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > x\} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

aller auf irgendeiner rechten Halbebene holomorphen Funktionen, die sich dort in eine Dirichlet-Reihe entwickeln lassen, genauer zu beschreiben. Hierbei werden im Sinne des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen zwei je auf einer rechten Halbebene holomorphe Funktionen genau dann durch $\sim$ identifiziert, wenn Sie eingeschränkt auf eine geeignete rechte Halbebene übereinstimmen. Um die Idee gedanklich vorzubereiten, führen wir zunächst auf der Menge FDR der formalen Dirichlet-Reihen eine Ringstruktur ein:

Nach Konstruktion entsprechen formale Dirichlet-Reihen Eins-zu-Eins Folgen komplexer Zahlen und nach Definition 1.1 diese wiederum zahlentheoretischen Funktionen. So erhalten wir eine Bijektion von Mengen

$$\Upsilon\colon \begin{cases} \mathcal{A} & \to \mathrm{FDR}, \\ a & \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}, \end{cases}$$

die es uns ermöglicht, formale Dirichlet-Reihen künftig auch durch zahlentheoretische Funktionen statt durch Folgen komplexer Zahlen zu beschreiben, wobei wir in diesem Kontext stillschweigend für alle $n \in \mathbb{N}$ den Funktionswert $a(n)$ mit a_n bezeichnen werden, um die gewohnte Schreibweise für die Koeffizienten einer Reihe beizubehalten.

Diese Umdeutung hat den Vorteil, dass wir nun die aus Satz 1.5 bekannte Ringstruktur auf $\mathcal{A}$ via Υ auf FDR übertragen können. So wird FDR zum ***Ring der formalen Dirichlet-Reihen*** und Υ zum Ringhomomorphismus. Als Verknüpfungen in FDR erhalten wir dabei

$$\begin{aligned} D(s;a) + D(s;\tilde{a}) = D(s;a+\tilde{a}) &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \tilde{a}_n) n^{-s} && \text{für alle } a, \tilde{a} \in \mathcal{A}, \\ D(s;a)D(s;\tilde{a}) = D(s;a*\tilde{a}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{d|k} a_d \tilde{a}_{\frac{k}{d}} \right) k^{-s} \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n \tilde{a}_m (nm)^{-s} && \text{für alle } a, \tilde{a} \in \mathcal{A}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Die Teilmenge KDR $\subseteq$ FDR der irgendwo konvergenten Dirichlet-Reihen stellt offenbar einen Unterring von FDR dar. Nach Satz 4.6 und Korollar 4.7 lässt sich jeder konvergenten Dirichlet-Reihe aus KDR eindeutig eine Funktion in $\mathcal{O}_{\mathrm{DR}}$ zuordnen und nach dem Identitätssatz für Dirichlet-Reihen 4.11 ist diese Zuordnung Eins-zu-Eins. Wir können so $\mathcal{O}_{\mathrm{DR}}$ als Unterring von FDR auffassen und via Υ^{-1} durch eine geeignete Teilmenge von $\mathcal{A}$ beschreiben. Nach den Propositionen 4.9 und 4.10 ist diese Teilmenge gerade der Unterring $\mathcal{A}_{\mathrm{Poly}} \subseteq \mathcal{A}$ der polynomiell beschränkten zahlentheoretischen Funktionen. Insgesamt erhalten wir so durch Einschränkung von Υ einen Ringisomorphismus

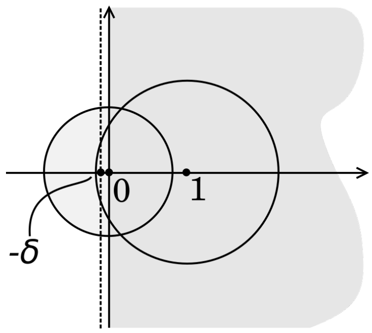
$$\Upsilon_{\mathrm{Poly}}\colon \begin{cases} \mathcal{A}_{\mathrm{Poly}} & \to \mathcal{O}_{\mathrm{DR}}, \\ a & \mapsto \Upsilon(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}. \end{cases}$$

Eine durch eine beliebige Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ dargestellte holomorphe Funktion mit endlichem Konvergenzradius $R > 0$ hat auf dem Rand $\partial K_R(z_0)$ ihrer Konvergenzkreisscheibe stets mindestens einen ***singulären Punkt***, also einen Punkt, für den es keine Möglichkeit gibt, die betrachtete Funktion auf eine offene Umgebung dieses Punktes fortzusetzen. Die analoge Aussage für Dirichlet-Reihen ist im Allgemeinen falsch. In manchen Fällen kann jedoch auf einen singulären Punkt auf der Randlinie des Konvergenzbereichs geschlossen werden. Zum Abschluss dieses Abschnittes beweisen wir den folgenden, 1905 erschienenen Satz von LANDAU:[21]

[21] Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938)

Satz 4.12 (Satz von Landau)**.** *Die von einer Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer reeller Zahlen erzeugte Dirichlet-Reihe $D(s;a)$ habe die Konvergenzabszisse $\sigma_0(D) \in \mathbb{R}$. Dann ist $\sigma_0(D)$ ein* ***singulärer Punkt****, die durch $D(s;a)$ gegebene Funktion $f(s) \in \mathcal{O}_{\mathrm{DR}}$ kann also in keine den Punkt $\sigma_0(D)$ enthaltende offene Umgebung holomorph fortgesetzt werden.*

Beweis. Da mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(a_n n^{-\sigma_0(D)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine nicht-negative reelle Folge ist, können wir für den Beweis des Satzes ohne Einschränkung $\sigma_0(D) = 0$ annehmen. Ließe sich $f(s)$ holomorph nach $s = 0$ fortsetzen, so besäße es um $s = 1$ eine TAYLOR-Entwicklung[22] in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \geq 1 + 2\delta$ für ein $\delta > 0$.



Es wäre dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(-1-\delta)^k$$

konvergent und gleich $f(-\delta)$. Da $f(s)$ in einer offenen Umgebung von $s = 1$ durch die Dirichlet-Reihe $D(s;a)$ gegeben ist, gilt aber

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(-1-\delta)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\delta)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)^k a_n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log(n)^k (1+\delta)^k}{k!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\delta},
\end{aligned}$$

was wegen der Konvergenzabszisse bei 0 nicht konvergieren kann, was ein Widerspruch ist. Man beachte, dass der entscheidende Schritt das Vertauschen der Reihen über k bzw. n ist, in dem eingeht, dass die Koeffizienten a_n nicht-negativ sind und somit alles absolut konvergiert. □

[22] Brook Taylor (1685-1731)

4.2 Die Mellin-Transformation

Für unsere weiteren Untersuchungen fehlt uns mit der MELLIN-Transformation[23] noch ein wesentliches Werkzeug. Sie soll uns für Koeffizientenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen eine ***analytische Realisierung*** der Zuordnung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

vom Raum der in der Einheitskreisscheibe konvergenten Potenzreihen mit betragsmäßig langsam wachsenden Koeffizienten in den Raum der Dirichlet-Reihen liefern. Auf diese Weise beheben wir das Problem, dass die obige Zuordnung zwar über die Koeffizienten ausgedrückt wurde, wir aber bisher noch keine geschlossene Formel kennen, mit deren Hilfe wir die eine Seite in die andere umrechnen können. Wir bemerken, dass wegen der Identitätssätze für Potenz- bzw. Dirichlet-Reihen die Zuordnung auch als Abbildung zwischen Teilräumen analytischer Funktionen wohldefiniert ist und somit die Mellin-Transformation – sobald wir sie gefunden haben – automatisch auch Funktionen auf Funktionen abbildet. Um die Mellin-Transformation in ausreichender Allgemeinheit definieren zu können, benötigen wir noch:

Definition 4.13. *Für je zwei reelle Zahlen $a < b$ nennen wir eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$* ***stückweise stetig****, falls es eine Zerlegung*

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

gibt, so dass für alle $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ die Einschränkungen $g_j := f|_{(x_j, x_{j+1})}$ stetig sind und zu stetigen Funktionen auf $[x_j, x_{j+1}]$ fortgesetzt werden können.

Für ein beliebiges nichttriviales (halb)offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ nennen wir eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ ***stückweise stetig****, falls für je zwei reelle Zahlen $c < d$ mit $[c,d] \subseteq I$ die Einschränkungen $f|_{[c,d]}$ stückweise stetig sind.*

Wir bezeichnen Unstetigkeitsstellen auch als ***Sprungstellen*** *von f.*

In Definition 4.13 verlangen wir, dass sich die abschnittsweise stetigen Einschränkungen stets stetig in die Ränder fortsetzen lassen. Das hat den Hintergrund, dass wir stückweise stetige Funktionen an jedem inneren Punkt ihres Definitionsbereichs gut kontrollieren wollen. Anschaulich handelt es sich bei stückweise stetigen Funktionen um Funktionen mit diskreten Sprüngen oder beschränkten Definitionslücken. Es ist eine einfache Übungsaufgabe, zu zeigen, dass stückweise stetige Funktionen auf einem beliebigen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ lokal beschränkt und ihre Sprungstellen diskret in I sind.

Beispiel 4.14. (a) *Für jedes stetige $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ ist die Funktion $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ mit*

$$g(t) := \mathbb{1}_{[1,\infty)}(t) f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \in (0,1), \\ f(t) & \text{für } t \in [1,\infty) \end{cases}$$

stückweise stetig mit einer Sprungstelle $x_1 = 1$ genau für $f(1) \neq 0$.

[23] Robert Hjalmar Mellin (1854-1933)

(b) *Die Funktion* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{t} & \textit{für } t \neq 0, \\ 0 & \textit{für } t = 0 \end{cases}$$

ist nicht stückweise stetig auf $[-1,1]$.

(c) *Die Funktion* $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *mit* $f(t) := \sin(\frac{1}{t})$ *ist stückweise stetig, aber nicht die Funktion* $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *mit*

$$g(t) := \begin{cases} f(t) & \textit{für } t > 0, \\ 0 & \textit{für } t = 0. \end{cases}$$

(d) *Für stückweise stetige Funktionen* f, g *auf einem Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *sind auch* $s := f + g$ *und* $p := fg$ *stückweise stetig auf* I.

Definition 4.15. *Seien* $a < b$ *reelle Zahlen und* $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *eine stückweise stetige Funktion mit einer Zerlegung*

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

wie in Definition 4.13. Dann ist das ***Integral*** *über* f *erklärt durch*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.6}$$

Man beachte, dass die uneigentlichen Teilintegrale alle existieren, da sich der Intergrand stets stetig in die Ränder fortsetzen lässt. Da die Randpunkte eine Nullmenge bilden, ändert sich dabei auch nichts am Wert der Integrals, womit (4.6) wohldefiniert ist. Es gelten natürlich weiterhin die üblichen Rechenregeln für Integrale, etwa Linearität, Monotonie und die Standardabschätzung

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Für beliebige Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ *definieren wir – falls existent – das* ***Integral*** *einer zugehörigen stückweise stetigen Funktion* $g\colon I \to \mathbb{C}$ *wie folgt: Für kompakte Intervalle* I_n *mit* $I_n \subseteq I_{n+1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *sei*

$$\int_I g(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \int_{I_n} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dabei existiert das uneigentliche Integral zur Linken, falls der Grenzwert rechts nicht von der Wahl der I_n *abhängt.*

Für die angekündigte Formel zur Umwandlung von Potenzreihen in Dirichlet-Reihen benötigen wir die folgende, zunächst von Riemann zur Untersuchung der Zetafunktion eingesetzte und dann 1897 von Mellin systematisch eingeführte Integraltransformation:

Definition 4.16. *Für eine stückweise stetige Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ definieren wir die **(formale) Mellin-Transformierte** von f als*

$$\mathcal{M}(f)(s) := \int_0^\infty f(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t,$$

*wobei wir zunächst nicht annehmen, dass ein eindeutiger Grenzwert existiert. Die Zuordnung $f \mapsto \mathcal{M}(f)$ nennen wir die **Mellin-Transformation**.*

Von Interesse sind natürlich diejenigen Fälle, in denen das Integral in Definition 4.16 existiert. Ist f zum Beispiel um den Punkt $t = 0$ beschränkt und fällt außerdem für $t \to \infty$ exponentiell ab, so wird $\mathcal{M}(f)(s)$ für alle Werte $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ existieren. Fragen der Konvergenz sowie der Holomorphie werden wir nun schrittweise angehen und holen dazu ein wenig aus. Fast nahtlos geht zunächst die Definition der stückweisen Stetigkeit auf Funktionen mehrerer Veränderlicher über:

Definition 4.17. *Seien $a < b$ reelle Zahlen und Ω ein topologischer Raum. Wir bezeichnen eine Abbildung $f\colon [a,b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ als **stückweise stetig**, falls es eine Zerlegung*

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

gibt, so dass für alle $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ die Einschränkungen $g_j := f|_{(x_j,x_{j+1})\times\Omega}$ stetig sind, und zu stetigen Funktionen auf $[x_j, x_{j+1}] \times \Omega$ fortgesetzt werden können.

*Für ein beliebiges nichttriviales Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ nennen wir eine Funktion $f\colon I \times \Omega \to \mathbb{C}$ **stückweise stetig**, falls für je zwei reelle Zahlen $c < d$ mit $[c,d] \subseteq I$ die Einschränkungen $f|_{[c,d]\times\Omega}$ stückweise stetig sind.*

*Wir bezeichnen die Komponenten η_j möglicher Unstetigkeitsräume $\{\eta_j\} \times \Omega$ auch als **Sprungstellen** von f.*

Bemerkung 4.18. *Ist $f\colon [a,b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ für reelle Zahlen $a < b$ stückweise stetig, so ist offenbar für einen festen Parameter $z \in \Omega$ die Funktion $t \mapsto f(t,z)$ stückweise stetig auf $[a,b]$. Dabei sind mögliche Sprungstellen unabhängig von z.*

Wir brauchen jetzt die folgende Verallgemeinerung der aus der Funktionentheorie bekannten Leibniz'schen Regel:

Lemma 4.19. *Seien $a < b$ reell, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon [a,b] \times U \to \mathbb{C}$ stückweise stetig. Für jedes $t \in [a,b]$ mit möglicher Ausnahme der Sprungstellen sei f holomorph in der zweiten Variablen. Dann ist die Abbildung $g\colon U \to \mathbb{C}$ mit*

$$g(z) := \int_a^b f(t,z)\,\mathrm{d}t$$

holomorph in U, wobei das Parameterintegral punktweise im Sinne der Bemerkungen 4.15 und 4.18 zu verstehen ist.

Beweis. Wir haben eine Zerlegung

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

so dass die Einschränkungen $g_j := f|_{(x_j, x_{j+1}) \times U}$ stetig sind und holomorph in der zweiten Variablen. Zudem lässt sich g_j für jedes $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ stetig nach $[x_j, x_{j+1}] \times U$ fortsetzen. Daraus folgt bereits, dass die stetigen Fortsetzungen $z \mapsto g_j(x_j, z)$ und $z \mapsto g_j(x_{j+1}, z)$ auf U holomorph sind,

denn: Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in (x_j, x_{j+1}), die in $[x_j, x_{j+1}]$ gegen x_j konvergiert. Wegen $g_j(t_n, z) = f(t_n, z)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $Z \in U$ definiert diese nach Voraussetzung eine Folge $\big(g_j(t_n, z)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ auf U holomorpher Funktionen. Sei $K \subseteq U$ kompakt. Nach Voraussetzung ist die Einschränkung $g_j|_{[x_j, x_{j+1}] \times K}$ stetig und wegen der Kompaktheit von $[x_j, x_{j+1}] \times K$ sogar gleichmäßig stetig – beachte, dass U ein metrischer Raum ist. Ergo gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\sup_{z \in K} \big|g_j(x_j, z) - g_j(t_n, z)\big| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \text{ mit } |x_j - t_n| < \delta.$$

Also konvergiert die Folge $\big(g_j(t_n, z)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf Kompakta gegen die Funktion $g_j(x_j, z)$, womit letztere Funktion nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß holomorph in U ist. Für x_{j+1} wird identisch argumentiert. #

Wegen der punktweisen Gleichheit

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t, z)\,\mathrm{d}t = \int_{x_j}^{x_{j+1}} g_j(t, z)\,\mathrm{d}t,$$

die über die stetige Fortsetzbarkeit von f folgt, haben wir

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g_j(t, z)\,\mathrm{d}t.$$

Für alle $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ haben die Integrale innerhalb der Summe stetige Integranden $g_j\colon [x_j, x_{j+1}] \times U \to \mathbb{C}$ mit holomorphem zweiten Argument. Wir können daher die Leibniz'sche Regel anwenden, womit g als endliche Summe holomorpher Funktionen wieder holomorph sein muss. □

Bei Multiplikation mit einem gutartigen Kern $k(t, s)$ in der Integraltransformation – wie etwa mit $k(t, s) = t^{s-1}$ bei der Mellin-Transformation – können wir uns auf eine einfachere Situation einstellen. Das folgende Lemma hilft uns beim Einsatz eines solchen Kerns:

Lemma 4.20. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichttriviales Intervall, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon I \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und $k\colon I \times U \to \mathbb{C}$ stetig sowie für alle fest gewählten $t \in I$ holomorph in der zweiten Variablen. Dann ist das Produkt*

$$p\colon \begin{cases} I \times U & \to \mathbb{C}, \\ (t, s) & \mapsto f(t)k(t, s) \end{cases}$$

stückweise stetig und für jedes $t \in I$ holomorph in der zweiten Variablen.

Beweis. Wir betrachten ein beliebiges Teilintervall $[c,d] \subseteq I$ mit $c < d$. Für dieses ist nach Voraussetzung $f|_{[c,d]}$ stückweise stetig. Es gibt daher eine Zerlegung

$$c = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = d$$

gibt, so dass für alle $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ die Funktkionen $g_j := f|_{(x_j,x_{j+1})}$ stetig sind und sich auch stetig in den Rand fortsetzen lassen. Dann sind die eingeschränkten Produkte

$$p|_{(x_j,x_{j+1})\times U}(t,s) = f|_{(x_j,x_{j+1})}(t)\, k|_{(x_j,x_{j+1})\times U}(t,s)$$

als Produkte stetiger Funktionen wieder stetig und lassen sich stetig auf $[x_j, x_{j+1}] \times U$ fortsetzen, da dies auf beide Faktoren einzeln zutrifft. Die Holomorphie in der zweiten Variablen von $p(t,s) = f(t)k(t,s)$ ist mit der Voraussetzung klar, da $f(t)$ nicht von s abhängt. $\square$

Wir wenden dies nun auf den Fall der Mellin-Transformation an. Wir definieren allgemein für reelle $a < b$ den ***Vertikalstreifen***

$$\mathbb{S}_{a,b} := \{s \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}(s) < b\}.$$

Proposition 4.21. *Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion mit*

$$\begin{aligned} f(t) &= O(t^A) && \text{für } t \to 0, \\ f(t) &= O(t^B) && \text{für } t \to \infty \end{aligned}$$

für reelle Zahlen $B < A$. Dann ist $\mathcal{M}(f)(s)$ eine auf dem Streifen $\mathbb{S}_{-A,-B}$ holomorphe Funktion.

Beweis. Nach Lemma 4.20 ist die Funktion

$$h\colon \begin{cases} (0,\infty)\times\mathbb{C} & \to \mathbb{C}, \\ (t,s) & \mapsto f(t)t^{s-1} \end{cases}$$

stückweise stetig und für jedes $t > 0$ holomorph in der zweiten Variablen und nach Lemma 4.19 sind somit die Funktionen

$$\begin{aligned} g_{1,n}(s) &:= \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ g_{2,n}(s) &:= \int_{1}^{n} f(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

holomorph auf $\mathbb{S}_{-A,-B}$. Für jede beliebige kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{S}_{-A,-B}$ gibt es ein s_0 mit minimalem Realteil $\sigma_0 > -A$. Es gilt somit für hinreichend große natürliche $m < n$

$$\begin{aligned} \sup_{s\in K} |g_{1,m}(s) - g_{1,n}(s)| &\leq \sup_{s\in K} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |f(t)t^{s-1}|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |f(t)|t^{\sigma_0-1}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} t^{A+\sigma_0-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{A+\sigma_0}\left(\frac{1}{m^{A+\sigma_0}} - \frac{1}{n^{A+\sigma_0}}\right) \\
&\overset{m,n\to\infty}{\to} 0,
\end{aligned}
$$

womit die $g_{1,n}$ auf Kompakta gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion g_1 streben. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß ist g_1 daher wieder holomorph auf $\mathbb{S}_{-A,-B}$. Ähnlich argumentieren wir für die $g_{2,n}$: Diesmal wählen wir ein $s_1 \in K$ mit maximalem Realteil $\sigma_1 < -B$. Damit gilt für natürliche $m < n$

$$
\begin{aligned}
\sup_{s\in K} |g_{1,m}(s) - g_{1,n}(s)| &\le \sup_{s\in K} \int_m^n |f(t)t^{s-1}|\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_m^n |f(t)t^{\sigma_1-1}|\,\mathrm{d}t \\
&\ll \int_m^n t^{B+\sigma_1-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{B+\sigma_1}\left(n^{B+\sigma_1} - m^{B+\sigma_1}\right) \\
&\overset{m,n\to\infty}{\to} 0,
\end{aligned}
$$

womit auch die $g_{2,n}$ gleichmäßig auf Kompakta gegen ihre Grenzfunktion g_2 streben. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß ist auch g_2 holomorph auf $\mathbb{S}_{-A,-B}$. Fügen wir alles zusammen, so erhalten wir, dass die Grenzfunktion $g := g_1 + g_2$ holomorph auf $\mathbb{S}_{-A,-B}$ ist, was zu zeigen war. □

Wir bereits gesehen, ist die Mellin-Transformierte unter gewissen Voraussetzungen eine in Vertikalstreifen holomorphe Funktion. In manchen Fällen ist aber darüber hinaus eine meromorphe Fortsetzung auf größere Bereiche möglich. Um dies weiter auszuführen, benötigen wir den Begriff der asymptotischen Entwicklung:

Definition 4.22. *Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, lokal beschränkte Funktion.*[24] *Wir schreiben*

$$
f(t) \sim \sum_{m=-\nu}^{\infty} a_m t^m \qquad \text{für } t \to 0^+, \tag{4.7}
$$

falls für alle $M \ge -\nu$

$$
\left| f(t) - \sum_{m=-\nu}^{M} a_m t^m \right| = O_M\left(t^{M+1}\right) \qquad \text{für } t \to 0^+
$$

[24] Eine Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ heißt ***lokal beschränkt***, wenn es für alle $x \in (0,\infty)$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, für das f auf $U_\varepsilon(x) = \{y \in (0,\infty) : |x-y| < \varepsilon\}$ beschränkt ist.

gilt.[25] *Dabei bedeutet $t \to 0^+$, dass sich t von rechts dem Wert 0 nähert. Wir nennen (4.7) auch* ***asymptotische Entwicklung*** *von f an der Stelle $t = 0$.*

Bemerkung 4.23. *Die Reihe (4.7) ist als formal zu verstehen und muss auch im Falle $\nu \leq 0$ keinesfalls in einer Umgebung von $t = 0$ konvergieren. Allerdings gilt natürlich die Umkehrung: Lässt sich f in einer Umgebung von $t = 0$ als Taylor-Reihe bzw. Laurent-Reihe darstellen, so stimmt diese Reihe mit der asymptotischen Entwicklung überein.*

Proposition 4.24. *Sei $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, lokal beschränkte Funktion mit*

$$f(t) = O_\nu(t^{-\nu}) \qquad \text{für } t \to \infty \text{ für alle Werte } \nu > 0.$$

Zudem gelte

$$f(t) \sim \sum_{m=-\nu}^{\infty} b_m t^m \qquad \text{für } t \to 0^+ \text{ für ein } \nu \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist die Funktion $\mathcal{M}(f)(s)$ holomorph in der rechten Halbebene $\mathbb{S}_\nu$, und dehnt sich zu einer in ganz $\mathbb{C} \setminus \{\nu, \nu - 1, \ldots\}$ holomorphen Funktion aus. Diese hat höchstens einfache Pole in $\{\nu, \nu - 1, \ldots\}$ und es gilt für alle $m \leq \nu$:

$$\operatorname{res}_{s=m}\left(\mathcal{M}(f)(s)\right) = b_{-m}.$$

Beweis. Aufgrund von $f(t) = O(t^{-\nu})$ für $t \to 0^+$ folgt die Holomorphie von $\mathcal{M}(f)$ auf der Halbebene $\mathbb{S}_\nu$ sofort mit Lemma 4.21. Für ein beliebiges aber festes $M \geq -\nu$ betrachten wir nun die Funktion $f_M\colon (0, \infty) \to \mathbb{C}$ mit

$$f_M(t) := \begin{cases} f(t) - \sum_{m=-\nu}^{M} b_m t^m & \text{für } 0 < t < 1, \\ f(t) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese ist wieder stückweise stetig und lokal beschränkt und nach Voraussetzung gilt $f_M(t) = O_M(t^{M+1})$ für $t \to 0^+$. Nach Lemma 4.21 dehnt sich daher $\mathcal{M}(f_M)$ holomorph in die Halbebene $\mathbb{S}_{-M}$ aus. Gleichzeitig gilt für Werte s mit $\mathrm{Re}(s) > \nu$

$$\int_0^1 \left(\sum_{m=-\nu}^{M} b_m t^m \right) t^{s-1} \, \mathrm{d}t = \sum_{m=-\nu}^{M} \frac{b_m}{s + m}.$$

Es ist also

$$\mathcal{M}(f)(s) = \mathcal{M}(f_M)(s) + \sum_{m=-\nu}^{M} \frac{b_m}{s + m}$$

und die Behauptung folgt jetzt mit beliebig großer Wahl von M. □

[25] Die Indizes in der O-Notation stehen für mögliche Abhängigkeiten der absoluten Konstanten von diesen Parametern.

4.3 Die Gammafunktion

In diesem Kapitel benötigen wir detaillierte Informationen über das Verhalten der Gammafunktion. Diese lässt sich als Interpolierende der Fakultätsfunktion interpretieren und gehört zu den wichtigsten Funktionen der Mathematik. Erstmals systematisch studiert wurde sie als reelle Funktion 1729 fast gleichzeitig von Daniel BERNOULLI[26] und unabhängig davon von Euler, amüsanterweise jeweils in einem Brief an GOLDBACH.[27] Die heute gängige Bezeichnung mit dem griechischem Buchstaben Γ wurde zuerst 1809 von Legendre benutzt und der Fall komplexer Zahlen wurde im Jahr 1812 von Gauß zugelassen. Es wurden verschiedene Möglichkeiten gefunden, die Gammafunktion zu definieren. Wir beginnen mit einer Integraldarstellung, die in einer etwas anderen Form auf Euler zurückgeht:

Definition 4.25. *Wir definieren die **Gammafunktion** als das unbestimmte Integral*

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_0. \tag{4.8}$$

*Diese Darstellung der Gammafunktion heißt auch das **Euler'sche Integral zweiter Gattung** oder auch die **Euler'sche Integraldarstellung** der Gammafunktion.*

Die Euler'sche Integraldarstellung (4.8) ist Ausgangspunkt einer neuen Methode zur Untersuchung von Dirichlet-Reihen. So können mit ihr manche bedeutende Dirichlet-Reihen auch außerhalb ihres Konvergenzbereichs meromorph, oder sogar holomorph, fortgesetzt werden. Man spricht dann von analytischer Fortsetzung von der Konvergenzhalbebene in ein größeres Gebiet, welches die Halbebene komplett umfasst. Bei der Gammafunktion handelt es sich darüber hinaus um eine Funktion, die bereits für sich genommen interessant ist: Sie hat zahlreiche Anwendungen in der Mathematik, so etwa in der Analysis, der Funktionentheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie. Auch für uns wird die Gammafunktion als Bindeglied zwischen Modulformen und L-Funktionen von großer Bedeutung sein. Hierfür leiten wir zunächst einige ihrer Eigenschaften her:

Proposition 4.26. *Die Gammafunktion $\Gamma(s)$ besitzt folgende Eigenschaften:*

(a) *Sie ist auf $\mathbb{S}_0$ holomorph und besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ mit einfachen Polen in $s = -n \in (-\mathbb{N}_0)$ mit Residuum*

$$\operatorname{res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{4.9}$$

(b) *Sie ist auf jedem abgeschlossenen Streifen $\overline{\mathbb{S}_{a,b}}$ mit $0 < a < b$ beschränkt.*

(c) *Es gilt die Funktionalgleichung $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$.*

(d) *Es gilt $\Gamma(1) = 1$ und allgemein $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

[26] Daniel Bernoulli (1700-1782)
[27] Christian Goldbach (1690-1764)

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} e^{-t} &= O(1) \qquad \text{für } t \to 0, \\ e^{-t} &= O(t^{-M}) \quad \text{für } t \to \infty \text{ für alle Werte } M > 0. \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$e^{-t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^m}{m!}.$$

Damit folgt Behauptung (a) direkt mit Proposition 4.24.

Behauptung (b) erhalten wir unmittelbar durch die Abschätzung

$$|\Gamma(s)| \leq \int_0^\infty |t^{s-1}e^{-t}| \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t} \, \mathrm{d}t \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{a,b},$$

da das Integral auf der rechten Seite als auf dem Kompaktum $[a, b]$ stetige Funktion beschränkt ist.

Wir zeigen nun die Funktionalgleichung (c). Mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^\infty t^s e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= \left[t^s \left(-e^{-t}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty s t^{s-1}(-e^{-t}) \, \mathrm{d}t \\ &= \left[t^s \left(-e^{-t}\right)\right]_0^\infty + s\Gamma(s). \end{aligned}$$

Wegen $t^s e^{-t} = e^{s \log t - t}$ gilt

$$\left[t^s \left(-e^{-t}\right)\right]_0^\infty = 0 - 0 = 0,$$

so dass die Behauptung folgt.

Zum Beweis von Behauptung (d) betrachten wir schließlich zunächst

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1.$$

Die allgemeine Aussage $\Gamma(n+1) = n!$ folgt hieraus nun induktiv über die Funktionalgleichung $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. □

Die Gammafunktion interpoliert also die natürlichen Fakultäten

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, \ldots$$

und definiert damit eine Fortsetzung dieser Folge auf beliebige komplexe Zahlen. Es ist jedoch zu beachten, dass es viele meromorphe Funktionen gibt, die diese Interpolationseigenschaft haben, zum Beispiel $\Gamma(s)\cos(2\pi s)$,

denn: Bekanntlich gilt $\cos(2\pi(s+1)) = \cos(2\pi s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ sowie $\cos(2\pi n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. #

Wir kommen also nicht um die Frage herum, warum Γ die „natürlichste“ Interpolierende der Fakultätsfunktion ist. Die Antwort liegt in ihrem Verhalten auf vertikalen Streifen endlicher Breite, also Bereichen der Form $\mathbb{S}_{a,b}$ mit reellen $a < b$, begründet. Über den Satz von WIELANDT[28] kann sogar gezeigt werden, dass die Gammafunktion durch ihren Wert an der Stelle 1, ihre Funktionalgleichung und eine Beschränktheitsbedingung bereits eindeutig bestimmt ist, siehe Übungsaufgabe 4.5. Durch das exponentielle Wachstum von $\cos(2\pi s)$ auf vertikalen Streifen scheidet beispielsweise die oben betrachtete „alternative Gammafunktion“ $\Gamma(s)\cos(2\pi s)$ aus. Gleichzeitig ist genau dieses Beschränktheitsverhalten sehr nützlich zur Herleitung überraschender Identitäten. Als nächstes merken wir an, dass sich unter Anwendung der „Fast-Periodizität“ $H(s+1) = -H(s)$ der Funktion $H(s) := \Gamma(s)\Gamma(1-s)$ und dem Satz von Liouville mühelos eine elegante Reflexionsformel beweisen lässt:

Proposition 4.27 (Euler'scher Ergänzungssatz)**.** *Es gilt die Identität*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C}$$

meromorpher Funktionen. Insbesondere ist $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Beweis. Nach Teil (a) von Proposition 4.26 ist die Funktion

$$H(s) := \Gamma(s)\Gamma(1-s)$$

holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und besitzt einfache Pole in $s = n \in \mathbb{Z}$ und nach Teil (c) derselben Proposition gilt

$$\begin{aligned} H(s+2) &= \Gamma(s+2)\Gamma(-1-s) = ((s+1)s\Gamma(s)) \cdot \left(\frac{1}{-1-s}\frac{1}{-s}\Gamma(1-s)\right) \\ &= \Gamma(s)\Gamma(1-s) = H(s) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

so dass $H(s)$ Periode 2 hat. Durch einen Vergleich der Residuen stellt man fest, dass

$$H(s) - \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

eine ganze Funktion ist und beschränkt auf allen Vertikalstreifen. Wegen der Periodizität und nach dem Satz von Liouville ist sie daher konstant. Die Proposition folgt, da die Funktion an der Stelle 1 den Wert 0 annimmt. □

[28] Der Satz wurde 1939 von Helmut Wielandt (1910-2001) gezeigt und ist eine Verallgemeinerung des entsprechenden reellen Satzes von HARALD AUGUST BOHR (1887-1951) und JOHANNES MOLLERUP (1872-1937) aus dem Jahr 1922.

Im Jahr 1811 zeigte Legendre die folgende Formel, die Gauß 1812 zur ***Gauß'schen Multiplikationsformel*** (siehe Übungsaufgabe 4.8) verallgemeinerte:

Proposition 4.28 (Duplikationsformel von Legendre)**.** *Die Gammafunktion erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}}\Gamma(s) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0).$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gelten zudem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{n!4^n}\sqrt{\pi}, \tag{4.10}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}. \tag{4.11}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst (4.10) per Induktion. Für $n = 0$ gilt dabei die Behauptung nach dem Ergänzungssatz 4.27 und für $n > 0$ folgern wir aus der Gültigkeit der Behauptung für n und Teil (c) von Proposition 4.26

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) &= \frac{2n+1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)}\frac{(2n)!}{n!4^n}\sqrt{\pi}\\ &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!4^{n+1}}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

und somit die Gültigkeit der Behauptung für $n+1$ und insgesamt also (4.10). Nach dem Ergänzungssatz 4.27 gilt nun

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \pi(-1)^n,$$

so dass (4.11) unmittelbar aus (4.10) folgt. Zudem folgt hieraus mit Proposition 4.26 (a)

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=-2n}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) &= \frac{2(-1)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\\ &= \frac{2(-1)^n}{n!}\frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}\\ &= \sqrt{\pi}\frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\\ &= \operatorname{res}_{s=-2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}}\Gamma(s) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Die entsprechende Aussage für $s = -2n-1$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ zeigt man analog. Insgesamt erhalten wir so, dass

$$f(s) := \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) - \Gamma(s)$$

eine ganze Funktion ist, die offenbar $sf(s) = f(s+1)$ erfüllt. Hieraus folgt komplett analog zu den entsprechenden Überlegungen im Beweis des Ergänzungssatzes 4.27, dass die ganze Funktion $H(s) := f(s)f(1-s)$ Periode 2 hat. Da H aber nach Teil (b) von Proposition 4.26 auf dem Streifen $\overline{\mathbb{S}_{1,3}}$ beschränkt ist, ist es nach dem Satz von Liouville konstant und hat den Wert $f(1) = 0$. Hieraus folgt sofort auch $f \equiv 0$ und somit die Proposition, denn wegen $H \equiv 0$ hat offenbar mindestens einer der Faktoren $f(s)$ bzw. $f(1-s)$ überabzählbar viele Nullstellen. □

Bereits die natürliche Erweiterung der Fakultäten auf halbzahlige Argumente hängt also eng mit einer bedeutenden Konstanten wie der Kreiszahl zusammen. Durch eine einfache Substitution im Euler'schen Integral (4.8) erkennt man zudem schnell die Beziehung zum Gauß'schen Fehlerintegral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t^{-1}e^{-t^2}2t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,\mathrm{d}u \overset{(4.8)}{=} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \overset{4.27}{=} \sqrt{\pi}. \tag{4.12}$$

Zusammenhänge zu anderen mathematischen Konstanten werden in den folgenden Produktentwicklungen erkennbar:

Proposition 4.29. *Es gilt*

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} = \frac{e^{-\gamma s}}{s}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{s}{k}}}{1+\frac{s}{k}} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0).$$

*Hierbei wird die erste Formel die **Gauß'sche Produktdarstellung** genannt, die zweite die **Weierstraß'sche Produktformel**. Dabei bezeichnet*

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n)\right) = 0{,}577215664901532\ldots$$

*die **Euler-*M*ASCHERONI*-Konstante**.*[29]

Beweis. Die Idee des Beweises fußt auf der Approximation von e^{-t} durch die Funktionen $(1-\frac{t}{n})^n$ mit Werten $n \in \mathbb{N}$, wobei unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ für $t \in [0,n]$ zudem die Abschätzung $e^t(1-\frac{t}{n})^n \leq 1$ gilt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun

$$\begin{aligned}\Gamma_n(s) &:= \int_0^n t^{s-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{[0,n]}(t)t^{s-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_0.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Der Integrand konvergiert punktweise gegen $t \mapsto t^{s-1}e^{-t}$ und wird für $t \geq 0$ durch die Funktion $t^{\sigma-1}e^{-t}$ majorisiert. Mit dem Satz von Lebesgue folgt also

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(s) = \Gamma(s).$$

[29] Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800)

Durch Substitution $t = xn$ in (4.13) erhalten wir

$$\Gamma_n(s) = n^s \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^n \, \mathrm{d}x$$

und insbesondere

$$\Gamma_1(s) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Durch partielle Integration folgt hieraus

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^{s+1}}{s} \int_0^1 x^s (1-x)^{n-1} \, \mathrm{d}x = \frac{n^{s+1}}{(n-1)^{s+1} s} \Gamma_{n-1}(s+1).$$

Wiederholen wir diesen Schritt $n-1$ Mal, so erhalten wir

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s n!}{s(s+1) \cdot \ldots \cdot (s+n-2)} \Gamma_1(s+n-1) = \frac{n^s n!}{s(s+1) \cdot \ldots \cdot (s+n)}.$$

Einerseits ergibt sich nun die Gauß'sche Produktdarstellung, wenn wir n gegen unendlich laufen lassen. Andererseits gilt nach einfacher Umformung

$$\frac{1}{\Gamma_n(s)} = n^{-s} s(1+s) \left(1 + \frac{s}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{s}{n}\right) = s e^{\gamma_n s} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}},$$

mit

$$\gamma_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$$

Wegen des Prinzips der monotonen Folge existiert der Grenzwert

$$\begin{aligned}
\gamma &:= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1,
\end{aligned}$$

denn die Integranden $\frac{1}{k} - \frac{1}{x}$ sind nichtnegativ. Folglich gilt

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}.$$

Das Weierstraß-Produkt konvergiert wegen der nach der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion gültigen Asymptotik

$$\left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}} = 1 - \frac{s^2}{k^2} + O\left(\frac{s^3}{k^3}\right) \quad \text{für } k \to \infty$$

und dem aus der Funktionentheorie bekannten Konvergenzverhalten unendlicher Produkte gleichmäßig auf Kompakta in $\mathbb{C}$. $\square$

Während die Gammafunktion in nach rechts orientierter horizontaler Richtung stark ansteigt – eben wie die Fakultätsfunktion – ist ihr Verhalten auf Vertikalstreifen ganz anders: Es zeigt sich, dass sie hier sogar mit exponentieller Geschwindigkeit abklingt. Das ist später von großer Wichtigkeit, um Integrale entlang vertikaler Kurven abzuschätzen. Ein wichtiges Werkzeug, um auf das Wachstum der Gammafunktion schließen zu können, ist die Formel, die sich zuerst in STIRLINGS[30] Schrift *Methodus differentialis* aus dem Jahr 1730 findet. Sie drückt $\Gamma(s)$ bis auf einen kontrollierbaren Fehler in Termen elementarer Funktionen aus, sofern sich die Funktionsargumente nicht in der Nähe der negativen reellen Achse befinden:

Satz 4.30 (Stirling'sche Formel)**.** *Sei* $\delta > 0$. *Dann gilt*

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s}(1 + O_\delta(|s|^{-1})), \tag{4.14}$$

für $|s| \to \infty$ *im Winkelbereich* $W_\delta := \{s \in \mathbb{C} : |\mathrm{Arg}(s)| \leq \pi - \delta\}$.

Beweis. Durch logarithmisches Ableiten des Weierstraß'schen Produktes erhalten wir für $\mathrm{Re}(s) > 0$ die Integralformel

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} &= -\gamma - \frac{1}{s} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+k} - \frac{1}{k} \right) \\
&= -\gamma - \int_0^\infty e^{-st} \, \mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty \left(e^{-(k+s)t} - e^{-kt} \right) \mathrm{d}t \\
&= -\gamma + \int_0^\infty \frac{1 - e^{t(1-s)}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

wobei die Summe mit dem Integral wegen absoluter Konvergenz vertauscht werden darf. Nun gilt nach Übungsaufgabe 4.9 die Beziehung

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t} \right) \mathrm{d}t.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{te^t} - \frac{e^{-ts}}{e^t - 1} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-st}}{t} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st} \, \mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{-ts} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_1^s \int_0^\infty e^{-tw} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}w + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st} \, \mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{-ts} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{Log}(s) + \frac{1}{2s} + \int_0^\infty e^{-ts} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

[30] James Stirling (1692-1770)

wobei $\mathrm{Log}(s)$ wie immer den Hauptzweig des Logarithmus bezeichne. Durch beidseitiges logarithmisches Ableiten der Funktionalgleichung 4.26 (c) folgt

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)},$$

also insgesamt

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \mathrm{Log}(s) - \frac{1}{2s} + \int_0^\infty e^{-ts}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t-1}\right) \mathrm{d}t.$$

Mittels bestimmter Integration von 1 bis zum Wert s mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ folgt hieraus

$$\mathrm{Log}(\Gamma(s)) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}(s) - s + C - \int_0^\infty e^{-ts}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t} - \frac{1}{t(e^t-1)}\right) \mathrm{d}t$$

mit einer noch unbestimmten Konstanten C, wobei wir den Differentialoperator wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals auf kompakten Teilmengen der rechten Halbebene in das Integral ziehen dürfen. Wenden wir nun – weiterhin für $\mathrm{Re}(s) > 0$ – partielle Integration auf das hintere Integral an und definieren dafür abkürzend

$$\psi(t) := \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t} - \frac{1}{t(e^t-1)},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty e^{-ts}\psi(t)\,\mathrm{d}t &= -\left[-\frac{e^{-ts}}{s}\psi(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-ts}}{s}\psi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{12s} - \int_0^\infty \frac{e^{-ts}}{s}\psi'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dieser letzte Term ist für $|s| \to \infty$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ gleichmäßig in $O(|s|^{-1})$,

denn: Die **BERNOULLI-*Zahlen***[31] B_n für $n \in \mathbb{N}$ sind definiert durch die Taylor-Entwicklung von

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!} z^n := \frac{z}{e^z - 1}, \quad \text{für alle } z \in U_{2\pi}(0).$$

Nach Übungsaufgabe 4.6 gelten für diese insbesondere $B_0 = 1$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$. Hieraus erhalten wir

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t-1} = \sum_{n=2}^\infty \frac{B_n}{n!} t^{n-1} = O(t) \qquad \text{für } t \to 0,$$

also

$$\psi(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t-1}\right) = \frac{1}{t}O(t) = O(1) \qquad \text{für } t \to 0$$

[31] Jakob I. Bernoulli (1655-1705)

und schließlich

$$\psi'(t) = O(1) \qquad \text{für } t \to 0.$$

Zudem gilt elementar

$$\psi'(t) = O(t^{-2}) \qquad \text{für } t \to \infty.$$

Hieraus erhalten wir

$$\int_0^\infty |\psi'(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$$

und daher

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\infty \frac{e^{-ts}}{s} \psi'(t) \right| &\leq \int_0^\infty \left| \frac{e^{-ts}}{s} \right| |\psi'(t)| \, \mathrm{d}t \\
&= |s|^{-1} \int_0^\infty e^{-t\mathrm{Re}(s)} |\psi'(t)| \, \mathrm{d}t \\
&\overset{\mathrm{Re}(s)>0}{\leq} |s|^{-1} \int_0^\infty |\psi'(t)| \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. #

Aus Stetigkeitsgründen lässt sich die so erlangte Beschreibung von $\mathrm{Log}(\Gamma(s))$ auf diejenigen $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ und $s \neq 0$ fortsetzen. Für diese s gilt also

$$\mathrm{Log}(\Gamma(s)) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \mathrm{Log}(s) - s + C + O(|s|^{-1}) \quad \text{für } |s| \to \infty. \tag{4.15}$$

Nach Anwenden der Exponentialfunktion auf beide Seiten erhalten wir

$$\Gamma(s) = e^C s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} \left(1 + O(|s|^{-1})\right) \qquad \text{für } |s| \to \infty. \tag{4.16}$$

Für die Bestimmung der Konstanten C nutzen wir die bisher gezeigte Stirling'sche Formel auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = \sigma = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\log(2\pi) - \pi\sigma - \log(1 - e^{-2\pi\sigma}) \\
&= \mathrm{Log}\left(\frac{\pi}{\sin\left(\pi(\frac{1}{2} + i\sigma)\right)} \right) \\
&\overset{4.27}{=} \mathrm{Log}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\sigma\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\sigma\right) \right) \\
&\overset{(4.15)}{=} i\sigma \left(\mathrm{Log}\left(\frac{1}{2} + i\sigma\right) - \mathrm{Log}\left(\frac{1}{2} - i\sigma\right) \right) - 1 + 2C + O(\sigma^{-1}) \\
&= -2\sigma \,\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{2} + i\sigma\right) - 1 + 2C + O(\sigma^{-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\sigma\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2\sigma}\right)\right) - 1 + 2C + O(\sigma^{-1})\\
&= -\sigma\left(\pi - \frac{1}{\sigma} + O(\sigma^{-2})\right) - 1 + 2C + O(\sigma^{-1})\\
&= -\pi\sigma + 2C + O(\sigma^{-1}).
\end{aligned}
$$

Durch Vergleich beider Seiten erhalten wir $C = \frac{1}{2}\log(2\pi)$ und mit (4.16) somit die Stirling'sche Formel für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ und $s \neq 0$. Um die Aussage auf den gesamten Winkelbereich W_δ auszudehnen, nutzen wir für alle $s \in W_\delta$ mit $\mathrm{Re}(s) < 0$ und $\mathrm{Im}(s) > 0$ den Zusammenhang

$$
\mathrm{Log}(1-s) = \mathrm{Log}(s) - \pi i - \frac{1}{s} + O(|s|^{-2}). \tag{4.17}
$$

Dieser gilt,

denn: Bekanntlich erfüllt der Hauptzweig des komplexen Logarithmus für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Rechenregel

$$
\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w) \in (-\pi, \pi].
$$

Für ein $s \in W_\delta$ mit $\mathrm{Re}(s) < 0$ und $\mathrm{Im}(s) > 0$ gelten daher

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Log}(s) &= \mathrm{Log}\left((s-1)\left(1 + \frac{1}{s-1}\right)\right) = \mathrm{Log}(s-1) + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{s-1}\right),\\
\mathrm{Log}(s-1) &= \mathrm{Log}\left((-1)(1-s)\right) = \mathrm{Log}(-1) + \mathrm{Log}(1-s) = \pi i + \mathrm{Log}(1-s).
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen in die Taylor-Entwicklung von $\mathrm{Log}(1+w)$ um $w = 0$ erhalten wir zudem

$$
\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s} + O(|s|^{-2}) \quad \text{für } |s| \to \infty
$$

und somit insgesamt die Behauptung. #

Nach dem Ergänzungssatz 4.27 sowie wegen $\mathrm{Re}(1-s) > 0$ und dem bisher Gezeigten gilt dann für Werte $s \in W_\delta$ mit $\mathrm{Re}(s) < 0$, $\mathrm{Im}(s) > 0$ und $\mathrm{Im}(s) \to \infty$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \frac{\pi}{\Gamma(1-s)\sin(\pi s)}\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}(1-s)^{\frac{1}{2}-s}e^{s-1}(1 + O(|1-s|^{-1}))} \cdot \frac{2i}{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}}\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}i}{e^{(\frac{1}{2}-s)\,\mathrm{Log}(1-s)}e^{s-1}(e^{\pi i s} - e^{-\pi i s})(1 + O(|1-s|^{-1}))}\\
&\overset{(4.17)}{=} \frac{\sqrt{2\pi}i}{e^{(\frac{1}{2}-s)\,\mathrm{Log}(s) + (\frac{1}{2}-s)\pi i + 1 + O(|s|^{-1})}e^{s-1}(e^{\pi i s} - e^{-\pi i s})(1 + O(|s|^{-1}))}\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{s^{-s+\frac{1}{2}}e^{s}(1 - e^{-2\pi i s})e^{O(|s|^{-1})}(1 + O(|s|^{-1}))}
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s}(1 + O_\delta(|s|^{-1})),$$

denn es gilt

$$\frac{1}{1 - e^{2\pi i s}} = 1 + O_\delta(|s|^{-1})$$

im Bereich $W_\delta \cap \mathbb{H} \cap \mathbb{S}_{-\infty,0}$. Zur Abschätzung der Nenner auf die Zählerform $1 + O_\delta(|s|^{-1})$ kann dabei zum Beispiel die geometrische Reihenformel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2)$$

genutzt werden. Damit ist alles bewiesen,

denn: Die Aussage für Werte $s \in W_\delta$ mit $\mathrm{Re}(s) < 0$ und $\mathrm{Im}(s) < 0$ folgt mittels

$$\Gamma(\bar{s}) = \overline{\Gamma(s)} \quad \text{und} \quad \mathrm{Log}(\bar{s}) = \overline{\mathrm{Log}(s)} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

durch Konjugation aus dem bisher Gezeigten; man beachte

$$\overline{s^{s-\frac{1}{2}}} = \overline{e^{(s-\frac{1}{2})\,\mathrm{Log}(s)}} = e^{(\bar{s}-\frac{1}{2})\,\mathrm{Log}(\bar{s})} = \bar{s}^{\bar{s}-\frac{1}{2}} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

#

□

Im Beweis der Stirling-Formel 4.30 wurde bereits eine erste Aussage über das Verhalten der Gammafunktion auf Vertikalstreifen angedeutet. In der folgenden Proposition wird diese präzisiert:

Proposition 4.31. *Für beliebige reelle Zahlen $a < b$ gilt*

$$|\Gamma(s)| = O_{a,b}\left(|t|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right), \quad \textit{für alle } s = \sigma + it \in \overline{\mathbb{S}_{a,b}} \textit{ und } |t| \to \infty.$$

Beweis. Es sei zunächst $a > 0$. Für $\sigma \in \overline{\mathbb{S}_{a,b}}$ folgt dann

$$\begin{aligned}
|\Gamma(s)| &\overset{4.30}{=} \left|\sqrt{2\pi}(\sigma+it)^{\sigma+it-\frac{1}{2}} e^{-\sigma-it}\left(1 + O_{a,b}\left(|s|^{-1}\right)\right)\right| \\
&= \sqrt{2\pi}\left|e^{(\log|\sigma+it| + i\,\mathrm{Arg}(\sigma+it))(\sigma+it-\frac{1}{2})}\right| e^{-\sigma}\left(1 + O_{a,b}\left(|s|^{-1}\right)\right) \\
&= \sqrt{2\pi} e^{(\sigma-\frac{1}{2})\log|\sigma+it| - t\,\mathrm{Arg}(\sigma+it)} e^{-\sigma}\left(1 + O_{a,b}\left(|s|^{-1}\right)\right) \\
&= \sqrt{2\pi}|\sigma+it|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-t\,\mathrm{Arg}(\sigma+it)} e^{-\sigma}\left(1 + O_{a,b}\left(|s|^{-1}\right)\right) \\
&= \sqrt{2\pi}\sigma^{\sigma-\frac{1}{2}}\left|1 + \frac{it}{\sigma}\right|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-t\,\mathrm{Arg}(\sigma+it)} e^{-\sigma}\left(1 + O_{a,b}\left(|s|^{-1}\right)\right) \\
&= O_\sigma\left(|t|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right) \qquad \text{für } |t| \to \infty,
\end{aligned}$$

da $\operatorname{Arg}(\sigma + it) = \operatorname{sgn}(t)\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{t}\right)$ für $|t| \to \infty$. Da zudem die Funktionen

$$t \mapsto \frac{1}{t} + \frac{i}{\sigma} \quad \text{und} \quad t \mapsto 1 + O_{a,b}\left(|s|^{-1}\right)$$

für $\sigma \in [a,b]$ und $1 \leq |t| \to \infty$ gleichmäßig beschränkt sind, folgt insgesamt

$$|\Gamma(s)| = O_{a,b}\left(|t|^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right), \qquad \sigma \in [a,b], |t| \to \infty. \tag{4.18}$$

Über die Funktionalgleichung $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ zeigt man dann leicht, dass die Bedingung $0 < a$ in (4.18) weggelassen werden kann. □

4.4 Der Mellin'sche Umkehrsatz

Dirichlet- und Potenzreihen sind über die Mellin-Transformation eng miteinander verwoben. Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir auf, warum das so ist, und geben gleichzeitig den Auftakt für ein reichhaltiges Wechselspiel zwischen Modulformen mit Fourier-Entwicklungen einerseits und deren zugehörige Dirichlet-Reihen andererseits.

Wir zeigen nun den ersten wichtigen Vorbereitungssatz, der zuerst 1910 von Mellin nachgewiesen wurde:

Proposition 4.32 (Mellin'sche Inversionsformel)**.** *Für alle reellen Parameter $c > 0$ gilt die Formel*

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} \Gamma(s) z^{-s} \, \mathrm{d}s \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{S}_0.$$

Beweis. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{S}_0$ schreiben wir in diesem Beweis

$$I_x(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{x - i\infty}^{x + i\infty} \Gamma(s) z^{-s} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(x+it)}{z^{x+it}} \, \mathrm{d}t.$$

Für $x \notin -\mathbb{N}_0$ konvergiert dieses Integral stets absolut,

denn: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(x+it)}{z^{x+it}} \right| \mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Gamma(x+it)|}{e^{x \log|z| - t \operatorname{Arg}(z)}} \, \mathrm{d}t \\ &= e^{-x \log|z|} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(x+it)| e^{-t \operatorname{Arg}(z)} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun, da die Gammafunktion einerseits nach Proposition 4.26 (b) und (c) wegen $x \notin -\mathbb{N}_0$ auf einem geeigneten, $x + i\mathbb{R}$ umfassenden, abgeschlossenen Vertikalstreifen beschränkt ist und dort andererseits nach (4.18) die Asymptotik

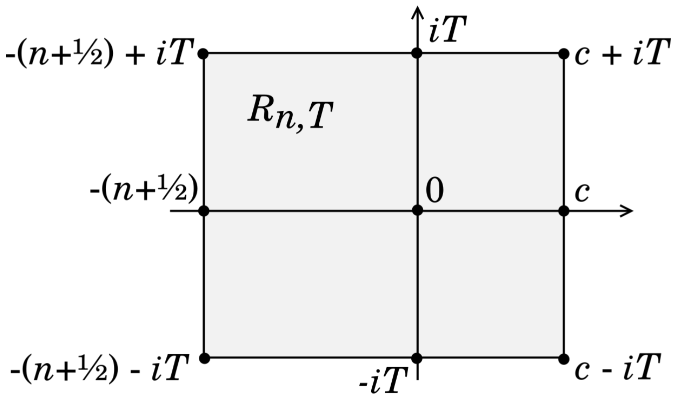
$$|\Gamma(s)| = O_x\left(|t|^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right) \quad \text{für } |t| \to \infty$$

erfüllt, so dass der Integrand auf Grund von $|\mathrm{Arg}(z)| < \frac{\pi}{2}$ sowohl für $t \to \infty$ als auch für $t \to -\infty$ exponentiell abklingt. #

Zur Bestimmung des Wertes von $I_c(z)$ für $c > 0$ betrachten wir nun zunächst die durch den einfach positiv durchlaufenen Rand des Rechtecks $R_{n,T}$ mit den Eckpunkten

$$-\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm iT, c \pm \pm iT \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0, T \in \mathbb{R}_{>0}$$

gegebene Kurve $\gamma_{n,T}$.



Nach dem Residuensatz gilt offensichtlich

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_{n,T}} \Gamma(s) z^{-s}\,\mathrm{d}s = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{res}_{s=-j}\left(\frac{\Gamma(s)}{z^s}\right) \overset{(4.9)}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-z)^j}{j!} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}_0.$$

Lassen wir nun für zunächst festes n den Parameter T gegen unendlich gehen, so erhalten wir vermöge (4.18) für die Integrale längs der waagrechten Seiten von $R_{n,T}$ die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c\pm iT}^{-(n+\frac{1}{2})\pm iT} \Gamma(s) z^{-s}\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{c}^{-(n+\frac{1}{2})} |\Gamma(\sigma \pm iT)||z^{-(\sigma\pm iT)}|\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{c}^{-(n+\frac{1}{2})} O_{n,c}\left(T^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}T}\right) e^{\sigma\log|z| \pm T\,\mathrm{Arg}(z)}\,\mathrm{d}\sigma \\
&= O_{n,c}\left(\lim_{T\to\infty} e^{(\pm\mathrm{Arg}(z)-\frac{\pi}{2})T}\int_{c}^{-(n+\frac{1}{2})} T^{c-\frac{1}{2}}e^{\sigma\log|z|}\,\mathrm{d}\sigma\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da das Integral ganz rechts für $T \to \infty$ höchstens polynomiell wächst, der Vorfaktor wegen $|\mathrm{Arg}(z)| < \frac{\pi}{2}$ aber exponentiell abklingt. Insgesamt erhalten wir so

$$I_c(z) - I_{-(n+\frac{1}{2})}(z) = \sum_{j=0}^{n}\frac{(-z)^j}{j!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } z \in \mathbb{S}_0.$$

Die Proposition folgt im Grenzübergang $n \to \infty$, wenn wir

$$\lim_{n\to\infty} |I_{-(n+\frac{1}{2})}(z)| = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}_0$$

zeigen können. Dies gilt,

denn: Wir können elementar abschätzen:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |I_{-(n+\frac{1}{2})}(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Gamma\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)+it\right)\right| e^{(n+\frac{1}{2})\log|z|-t\operatorname{Arg}(z)}\, \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) e^{(n+\frac{1}{2})\log|z|-t\operatorname{Arg}(z)}\, \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Abschätzung $|\Gamma(s)| \leq \Gamma(\operatorname{Re}(s))$ aus dem Beweis von Proposition 4.26 (b) ausgenutzt haben. Wegen der Asymptotik

$$\Gamma\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n!}\right) \quad \text{für } n \to \infty,$$

die sich leicht aus der Funktionalgleichung 4.26 (c) der Gammafunktion herleiten lässt, und da die Fakultätsfunktion – etwa nach der Stirling-Formel 4.30 – schneller wächst als die Exponentialfunktion, fällt die Folge der (nichtnegativen) Integranden für große Werte von n monoton gegen Null ab. Daher und aufgrund der bereits eingangs nachgewiesenen absoluten Konvergenz der Integrale $I_{-(n+\frac{1}{2})}(z)$ dürfen wir den Satz von Beppo Levi[32] anwenden, der uns erlaubt, den Grenzübergang in das Integral zu ziehen, was unmittelbar die Behauptung liefert. #

□

Mellin verallgemeinerte seine Inversionsformel 4.32 zu einem Zusammenhang zwischen gewissen gegebenen Funktionen und ihren jeweiligen Mellin-Transformierten. Wir nehmen dies als Ausgangspunkt für die Umrechnung von Dirichlet-Reihen in Potenz- bzw. Fourier-Reihen:

Satz 4.33 (Mellin'scher Umkehrsatz)**.** *Seien $\lambda, A \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit*

$$a_n = O(n^A) \qquad \textit{für } n \to \infty.$$

Wir betrachten weiter die Funktionen

$$\begin{aligned} f(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}} && \textit{mit } q^{\frac{n}{\lambda}} = e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}, \\ \Lambda_\lambda(s;f) &:= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) L(s;f) && \textit{mit } L(s;f) := D(s;a) \end{aligned}$$

[32] Beppo Levi (1875-1961)

in komplexen Variablen z bzw. s. Diese hängen wie folgt zusammen:

$$\Lambda_\lambda(s;f) = \int_0^\infty t^{s-1}(f(it) - a_0)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{für alle } s \in \mathbb{S}_{A+1},$$
$$f(iy) - a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Lambda_\lambda(s;f)y^{-s}\,\mathrm{d}s \qquad \textit{für alle } c > A+1, y > 0.$$

Insbesondere konvergieren die Funktionen in den angegebenen Bereichen.

Beweis. Nach Proposition 4.9 konvergiert die Reihe $L(s;f)$ in $\mathbb{S}_{A+1}$ absolut. Dort erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Lambda_\lambda(s;f) &= \sum_{n=1}^\infty a_n \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^{-s} \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty a_n \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^{-s} t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty a_n t^{s-1} e^{-\frac{2\pi n t}{\lambda}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Lebesgue können wir Integration und Summation vertauschen – wir wählen die absolut konvergente Reihe als Majorante – und erhalten

$$\begin{aligned}
\Lambda_\lambda(s;f) &= \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\frac{2\pi n t}{\lambda}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^{s-1}(f(it) - a_0)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Das zeigt die erste Teilbehauptung.

Die zweite Teilbehauptung ergibt sich durch Anwendung der Mellin'schen Inversionsformel 4.32. Für alle $y > 0$ und zunächst alle $c > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(iy) - a_0 &= \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\frac{2\pi n y}{\lambda}} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^\infty \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a_n \Gamma(s) \left(\frac{2\pi n y}{\lambda}\right)^{-s}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Nehmen wir nun zusätzlich $c > A+1$ an, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ absolut und gleichmäßig nach Proposition 4.9. Erneut folgt die Behauptung direkt durch Vertauschen von Integration und Summation. □

4.5 Die Riemann'sche Zetafunktion

In diesem Abschnitt führen wir als Beispiel mit der Riemann'schen Zetafunktion eine besonders berühmte und wichtige Dirichlet-Reihe ein:

Definition 4.34. *Die zur konstanten Folge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige Dirichlet-Reihe heißt die* ***Riemann'sche Zetafunktion***

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \tag{4.19}$$

Bemerkung 4.35. *Offensichtlich erfüllt die Koeffizientenfolge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ der Riemann'schen Zetafunktion $\zeta(s)$ die Beschränktheitsbedingungen $|1| = 1 = O_\varepsilon(n^\varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$. Mit Proposition 4.9 folgt hieraus sofort*

$$\sigma_0(\zeta) = \sigma_a(\zeta) \leq 1.$$

Da $\zeta(s)$ andererseits aufgrund der Divergenz der harmonischen Reihe in $s = 1$ nicht konvergiert, folgt nach Korollar 4.7 sogar

$$\sigma_0(\zeta) = \sigma_a(\zeta) = 1.$$

Bemerkung 4.36. *Die Koeffizientenfolge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ der Riemann'schen Zetafunktion $\zeta(s)$ besteht offensichtlich aus nicht-negativen reellen Zahlen. Weiter besitzt $\zeta(s)$ nach Bemerkung 4.35 die endliche Konvergenzabszisse $\sigma_0(\zeta) = 1$. Der Satz von Landau 4.12 besagt nun, dass $s = 1$ ein singulärer Punkt von $\zeta(s)$ ist – was uns allerdings bereits ohne den Satz von Landau bekannt war.*

Bemerkung 4.37. *Wir wenden den Mellin'schen Umkehrsatz 4.33 auf die Riemann'sche Zetafunktion an. Setzen wir $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt offenbar $a_n = O(1)$, also können wir $A = 0$ setzen. Ferner gilt mit $\lambda = 2\pi$ und der geometrischen Reihenformel:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz} = \frac{1}{e^z - 1} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{S}_0.$$

Damit erhalten wir

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_1.$$

4.6 Analytische Fortsetzung von Dirichlet-Reihen

Zum Beginn dieses Abschnitts geben wir eine andere, in der Analytischen Zahlentheorie häufig gebrauchte Darstellung einer Dirichlet-Reihe als Mellin-Transformierte an, die sich konzeptionell vom Mellin'schen Umkehrsatz 4.33 unterscheidet:

Proposition 4.38. *Für eine beliebige Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen und $A(x) := \sum_{0<n\leq x} a_n$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt die Darstellung*

$$D(s;a) = s\int_1^\infty A(t)t^{-s-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{\max\{0,\sigma_0(D(\cdot;a))\}}.$$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{S}_{\max\{0,\sigma_0(D(\cdot;a))\}}$. Nach Konstruktion ist die Funktion A stückweise stetig auf $(0,\infty)$ und mit der Abel'schen partiellen Summation 4.3 gilt

$$\begin{aligned} s\int_1^N A(t)t^{-s-1}\,\mathrm{d}t = s\int_1^N \sum_{0<n\le t} a_n t^{-s-1}\,\mathrm{d}t \\ &= s\sum_{k=1}^{N-1}\int_k^{k+1}\sum_{0<n\le t} a_n t^{-s-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{0<n\le k} a_n \int_k^{k+1} st^{-s-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} A(k)\left(k^{-s}-(k+1)^{-s}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} - N^{-s}A(N). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Nach Proposition 4.10 gilt $A(N) = O_\varepsilon(N^{\max\{0,\sigma_0(D(\cdot;a))\}+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, insbesondere gilt

$$N^{-s}A(N) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Die Behauptung folgt jetzt aus (4.20), wenn wir N gegen unendlich laufen lassen. □

Bereits diese einfache Darstellungsmöglichkeit erweist sich in einigen Anwendungen als nützlich:

Beispiel 4.39. *Wir zeigen im Folgenden eine Möglichkeit, die Riemann'sche Zetafunktion über die Halbebene $\mathbb{S}_1$ hinaus meromorph fortzusetzen, und zudem ihr Wachstum im sogenannten* ***kritischen Streifen*** *$\overline{\mathbb{S}_{0,1}}$ zu kontrollieren:*[33]

Mit $a_n = 1$ für alle n folgt mit Proposition 4.38 für alle $s \in \mathbb{S}_1$ sofort

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \lfloor t\rfloor t^{-s-1}\,\mathrm{d}t,$$

wobei $\lfloor t\rfloor$ der ganzzahlige Teil von t ist. Dies lässt sich leicht zu

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} + s\int_1^\infty \left(\lfloor t\rfloor - t + \frac{1}{2}\right) t^{-s-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_1^\infty \left(\lfloor t\rfloor - t + \frac{1}{2}\right) t^{-s-1}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.21}$$

umordnen. Dieser Ausdruck stellt eine in $\mathbb{S}_{-1} \setminus \{1\}$ holomorphe Funktion mit einem Pol erster Ordnung in $s = 1$ dar,

[33] Wir werden den kritischen Streifen später in Abschnitt 4.8 genauer verstehen. Für den Moment sei festgehalten, dass sich die Riemann'sche Zetafunktion außerhalb dieses Streifens vergleichsweise gut kontrollieren lässt, da ihre Funktionswerte dort im Wesentlichen von ihrer Dirichlet-Reihe bestimmt werden. Im kritischen Streifen stehen uns dafür nur Integraldarstellungen wie die in diesem Beispiel behandelte zur Verfügung.

denn: Die Funktion $f(t) := \lfloor t \rfloor - t + \frac{1}{2}$ ist 1-periodisch und es gilt

$$\int_0^1 \left(\lfloor t \rfloor - t + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}t = 0.$$

Nach Teil (d) von Übungsaufgabe 4.7 ist somit $\int_1^\infty f(t) t^{s-1} \,\mathrm{d}t$ holomorph in $\mathbb{S}_{-\infty,1}$. #

Eine unmittelbare Folgerung der Darstellung (4.21) ist beispielsweise $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Es gilt aber auch

$$\zeta(s) = O_{a,b}(|\mathrm{Im}(s)|^2) \quad \text{für } |s| \to \infty \text{ mit } s \in \mathbb{S}_{a,b} \text{ und } -1 < a < b, \tag{4.22}$$

denn: Mittels partieller Integration und $I(x) := \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$ erhalten wir

$$\left| s \int_1^\infty \left(\lfloor t \rfloor - t + \frac{1}{2} \right) t^{-s-1} \,\mathrm{d}t \right| \leq |s(s+1)| \int_1^\infty I(t) t^{-a-2} \,\mathrm{d}t = O_{a,b}(|\mathrm{Im}(s)|^2).$$

#

Der Umkehrsatz von Mellin 4.33 stellt eine Verbindung zwischen Potenzreihen $f(t) = P(e^{-t})$ und zugehörigen Dirichlet-Reihen her. Für den Fall, dass f für $t \to 0^+$ eine asymptotische Entwicklung besitzt, hat dies besonders schöne Konsequenzen für die Fortsetzbarkeit der Dirichlet-Reihe. Tatsächlich lässt sich die allgemeine Feststellung von Proposition 4.24 im Fall der Dirichlet-Reihen weiter spezifizieren:

Proposition 4.40. *Sei $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit*

$$a_n = O(n^A) \qquad \text{für } n \to \infty \text{ und ein } A \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Weiter erfülle die zugehörige Funktion $f(t) := \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-nt}$ für ein $\nu \geq 0$ die asymptotische Äquivalenz

$$f(t) \sim \sum_{m=-\nu}^{\infty} b_m t^m, \qquad \text{für } t \to 0^+.$$

Dann lässt sich die Dirichlet-Reihe $D(s;a)$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\nu, \nu-1, \ldots, 1\}$ fortsetzen, hat in $\{\nu, \nu-1, \ldots, 1\}$ höchstens einfache Pole mit

$$\mathrm{res}_{s=m} D(s;a) = \frac{b_{-m}}{(m-1)!} \qquad \text{für alle } 1 \leq m \leq \nu$$

und erfüllt

$$D(-n;a) = (-1)^n n! b_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Nach Voraussetzung und Proposition 4.9 konvergiert $D(s;a)$ in der Halbebene $\mathbb{S}_{A+1}$ absolut. Nach dem Mellin'schen Umkehrsatz 4.33 mit der Wahl $\lambda = 2\pi$ gilt daher

$$\Lambda(s;a) := \Gamma(s) D(s;a) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} \,\mathrm{d}t \overset{4.16}{=} \mathcal{M}(f)(s) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{A+1}.$$

Da offenbar f für $t \to \infty$ exponentiell abklingt, gilt weiter

$$f(t) = O_\mu(t^{-\mu}) \quad \text{für } t \to \infty \text{ und alle } \mu > 0.$$

Nach Voraussetzung und Proposition 4.24 lässt sich die Funktion $\Lambda(s;a)$ holomorph nach $\mathbb{C} \setminus \{\nu, \nu-1, \ldots\}$ fortsetzen und hat höchstens einfache Polstellen in $\{\nu, \nu-1, \ldots\}$ mit Residuen

$$b_{-m} = \operatorname{res}_{s=m} \mathcal{M}(f)(s) = \operatorname{res}_{s=m} \left(\Gamma(s) D(s;a)\right).$$

Im Fall $m > 0$ ist die Gammafunktion in m holomorph und es gilt

$$b_{-m} = \Gamma(m) \operatorname{res}_{s=m} D(s;a) = (m-1)! \operatorname{res}_{s=m} D(s;a).$$

Das zeigt die erste Teilbehauptung.

Im Fall $m \leq 0$ hat die Gammafunktion nach Proposition 4.26 in m einen einfachen Pol mit Residuum $\frac{(-1)^m}{(-m)!}$. Da die Polstellen von $\Lambda(s;a)$ höchstens einfach sind, ist demnach $D(s;a)$ in m holomorph und es gilt

$$b_{-m} = D(m;a) \operatorname{res}_{s=m} \Gamma(s) = D(m;a) \frac{(-1)^m}{(-m)!}.$$

Das zeigt die zweite Teilbehauptung. □

Wir können Proposition 4.40 nutzen, um die Riemann'sche Zetafunktion meromorph auf die ganze komplexe Ebene fortzusetzen. Weiter interessieren wir uns für die Werte der Riemann'schen Zetafunktion an den nicht-positiven ganzen Stellen. Diese Funktionswerte sind tatsächlich alle rational und hängen eng mit den aus Übungsaufgabe 4.6 bekannten Bernoulli-Zahlen zusammen:

Satz 4.41. *Die Riemann'sche Zetafunktion besitzt eine holomorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit einem einfachen Pol in $s = 1$ und $\operatorname{res}_{s=1} \zeta(s) = 1$. Weiter gilt*

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad \textit{und} \quad \zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \textit{ für } n \in \mathbb{N},$$

wobei B_n die n-te Bernoulli-Zahl ist. Insbesondere gilt $\zeta(-2n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Nach Definition der Bernoulli-Zahlen gilt für hinreichend kleine $x > 0$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-mx} = \frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{B_{n+1} x^n}{(n+1)!}.$$

Mit Bemerkung 4.37 und Proposition 4.40 folgern wir die holomorphe Fortsetzbarkeit der Zetafunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit einem einfachen Pol in $s = 1$ und

$$\operatorname{res}_{s=1} \zeta(s) = \frac{B_0}{0!^2} = 1$$

sowie

$$\zeta(-n) = \frac{(-1)^n n! B_{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$

Nach aus Übungsaufgabe 4.6 gilt nun $B_n = 0$ für alle ungeraden $n > 1$, so dass wir (4.23) zur Behauptung vereinfachen können. Weiter erhalten wir

$$\zeta(0) = (-1)^0 0! B_1 = -\frac{1}{2}.$$

Damit ist alles gezeigt. □

4.7 Euler-Produkte

Ihre maßgebliche Bedeutung kommt Dirichlet-Reihen in der multiplikativen Zahlentheorie zu. Dabei macht man sich im Kern die fundamentale Relation $(nm)^{-s} = n^{-s}m^{-s}$ zunutze. Dennoch reicht dies allein natürlich nicht, um einer beliebigen Dirichlet-Reihe eine besondere Eigenschaft abzuringen. Entscheidend ist, dass ihre Koeffizienten ein ähnliches Verhalten mitbringen. Gilt zum Beispiel $a_{nm} = a_n a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, so folgt schnell $a_{nm}(nm)^{-s} = a_n n^{-s} \cdot a_m m^{-s}$. Es war eine bahnbrechende Erkenntnis Eulers, dass man den Fundamentalsatz der Arithmetik analytisch beschreiben kann:

Satz 4.42 (Satz vom Euler-Produkt). *Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Ist die durch a gegebene zahlentheoretische Funktion schwach multiplikativ, so gilt die Identität*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{p \text{ prim}} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{p^\nu}.$$

(b) *Ist die durch a gegebene zahlentheoretische Funktion stark multiplikativ, so gilt sogar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - a_p}.$$

Beweis. Es reicht aus, Behauptung (a) zu zeigen, da Behauptung (b) dann unmittelbar aus der geometrischen Summenformel und der Identität $a_{p^\nu} = a_p^\nu$ folgt. Da mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(a_{p^\nu} = a_p^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein muss, gilt dabei $|a_p| < 1$ für alle Primzahlen p.

Für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}_{>2}$ betrachten wir das endliche Produkt

$$P(N) := \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq N}} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{p^\nu}.$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist dieses offenbar wohldefiniert. Ferner dürfen wir die Reihen ausmultiplizieren und die Summanden nach Belieben vertauschen, also folgt

$$\begin{aligned} P(N) &= \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_r=0}^{\infty} a_{p_1^{\nu_1}} a_{p_2^{\nu_2}} \cdot \ldots \cdot a_{p_r^{\nu_r}} \\ &= \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_r=0}^{\infty} a_{p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r}}, \end{aligned}$$

wenn wir die Primzahlen $p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leq N < p_{r+1}$ ihrem Absolutbetrag gemäß anordnen. Schreiben wir Ω_r für die Menge aller natürlichen Zahlen, die einen Primfaktor aus $\mathbb{P} \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ besitzen, so gilt nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik

$$\Omega_r \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \ldots, p_{r+1} - 1\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, N\}$$

und folglich

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - P(N) \right| = \left| \sum_{n \in \Omega_r} a_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|.$$

Ausgehend von dieser Beobachtung ist offensichtlich, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$ mit

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - P(N) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } N > M$$

gibt. Damit folgt die Behauptung. □

Aus dem Satz vom Euler-Produkt 4.42 können wir folgern, dass sich gewisse Dirichlet-Reihen in Euler-Produkte zerlegen lassen:

Korollar 4.43. *Sei $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass die Dirichlet-Reihe $D(s) := D(s; a)$ irgendwo konvergiert. Dann gilt:*

(a) *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

  (i) *Die durch a gegebene zahlentheoretische Funktion ist schwach multiplikativ.*

  (ii) *Es ist*

$$D(s) = \prod_{p \text{ prim}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{p^\nu} p^{-\nu s} \right) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{\sigma_a(D)}.$$

(b) *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

  (i) *Die durch a gegebene zahlentheoretische Funktion ist stark multiplikativ.*

(ii) *Es ist*

$$D(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{\sigma_a(D)}.$$

Beweis. Die Implikationen von (i) nach (ii) in (a) und (b) des Korollars folgen unmittelbar durch punktweise Anwendung des Satzes vom Euler-Produkt 4.42 und der Tatsache, dass für jedes $s \in \mathbb{C}$ die Folge $(n^{-s})_{n\in\mathbb{N}}$ stark multiplikativ ist. Die Rückrichtungen sind einfache Folgerungen des Identitätssatzes für Dirichlet-Reihen 4.11. □

Beispiel 4.44. *Die Riemann'sche Zetafunktion $\zeta(s)$ hat das Euler-Produkt*

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_1,$$

denn: Nach Bemerkung 4.35 erfüllt die Riemann'sche Zetafunktion $\sigma_a(\zeta) = 1$ und konvergiert insbesondere irgendwo. Weiter ist die durch die Koeffizientenfolge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ der Riemann'schen Zetafunktion gegebene zahlentheoretische Funktion offensichtlich stark multiplikativ, so dass wir Korollar 4.43 anwenden dürfen. Dieses liefert direkt die Behauptung. #

Da das Euler-Produkt in $\mathbb{S}_1$ normal konvergiert und offensichtlich keiner der Faktoren dort eine Nullstelle aufweist, ist auch die Riemann'sche Zetafunktion in $\mathbb{S}_1$ nullstellenfrei.

Beispiel 4.45. *In diesem Beispiel bestimmen wir die Anzahl primitiver Dirichlet-Charaktere modulo einem gegebenen natürlichen N und zeigen so durch den Beweis von Proposition 3.28 die Nützlichkeit des Euler-Produktes. Tatsächlich gilt*

$$\left| \left(\widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \right)_{\text{prim}} \right| = N \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \| N}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p^2 | N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2,$$

denn: Offenbar ist jeder Dirichlet-Charakter modulo N entweder primitiv oder induziert. Durch die Eindeutigkeit des Führers erhalten wir damit

$$\varphi(N) = \sum_{d|N} \left| \widehat{(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times}_{\text{prim}} \right|.$$

Unter Benutzung der durch die Dirichlet-Faltung auf $\mathcal{O}_{\text{DR}}$ induzierten Multiplikation ergibt sich

$$\zeta(s) \sum_{N=1}^{\infty} \left| \widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}_{\text{prim}} \right| N^{-s} = \sum_{N=1}^{\infty} \varphi(N) N^{-s} \overset{1.15}{=} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_2$$

und damit

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left| \widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}_{\text{prim}} \right| N^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)^2} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_2.$$

Durch Einsetzen der Euler-Produkt-Darstellung 4.44 der Riemann'schen Zetafunktion erhalten wir

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left| \widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}}_{\text{prim}} \right| N^{-s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{(1-p^{-s})^2}{1-p^{1-s}} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_2.$$

Es gilt nun für Werte $|x| < \frac{1}{p}$ mit primem p die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{1-px} &= 1 + (p-2)x + \sum_{\nu=2}^{\infty} (p^{\nu} - 2p^{\nu-1} + p^{\nu-2}) x^{\nu} \\ &= 1 + p\left(1 - \frac{2}{p}\right) x + \sum_{\nu=2}^{\infty} p^{\nu} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 x^{\nu}. \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir für $x = p^{-s}$ mit $s \in \mathbb{S}_2$

$$\prod_{p \text{ prim}} \frac{(1-p^{-s})^2}{1-p^{1-s}} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + p\left(1 - \frac{2}{p}\right) p^{-s} + \sum_{\nu=2}^{\infty} p^{\nu} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 p^{-\nu s} \right).$$

Da wir somit eine Euler-Produktdarstellung für die Dirichlet-Reihe

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left| \widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}}_{\text{prim}} \right| N^{-s}$$

gefunden haben, muss die zu ihrer Koeffizientenfolge gehörige zahlentheoretische Funktion nach Korollar 4.43 schwach multiplikativ sein und wird daher nach Korollar 1.10 durch ihre Werte in den Primpotenzen festgelegt: Für $N = p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\nu_k}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ gilt also

$$\left| \widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}}_{\text{prim}} \right| = \prod_{j=1}^{k} \left| \widehat{(\mathbb{Z}/p^{\nu_j}\mathbb{Z})^{\times}}_{\text{prim}} \right|.$$

Die Behauptung folgt jetzt mittels Koeffizientenvergleichs. #

4.8 Der Hecke'sche Umkehrsatz

In diesem Abschnitt zeigen wir die Umkehrsätze von Bochner 4.47 und Hecke 4.56. Um zu diesen Hauptresultaten zu gelangen, benötigen wir ein Resultat der Funktionentheorie. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des bekannten Maximumprinzips auf die Situation unendlich fern reichender Ränder und wurde nach Vorarbeiten von PHRAGMÉN[34] im Jahr 1908 von diesem und LINDELÖF[35] gemeinsam veröffentlicht. Wir zeigen es in einer abgeschwächten, für unsere Zwecke ausreichenden Version:

Satz 4.46 (Phragmén-Lindelöf'sches Prinzip). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das für reelle $a < b$ den abgeschlossenen Vertikalstreifen $\overline{\mathbb{S}_{a,b}}$ enthält, und sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph und erfülle für ein $\delta > 0$ auf ganz $\overline{\mathbb{S}_{a,b}}$ die gleichmäßige Wachstumsbedingung*

$$f(s) = O\left(e^{|t|^{\delta}}\right) \qquad \text{für } |t| \to \infty,$$

[34] Lars Edvard Phragmén (1863-1937)
[35] Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946)

wobei wir wie üblich $s = \sigma + it$ schreiben. Gilt nun für ein $A \in \mathbb{R}$ die Wachstumsbedingung

$$f(s) = O\left(|t|^A\right) \qquad \text{für } |t| \to \infty$$

gleichmäßig auf $\partial\mathbb{S}_{a,b} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma \in \{a,b\}\}$, so auch gleichmäßig auf ganz $\overline{\mathbb{S}_{a,b}}$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für den Fall $A = 0$, also für auf $\partial\mathbb{S}_{a,b}$ beschränkte f. Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$|f(s)| \leq Ce^{|t|^\delta} \qquad \text{für alle } s \in \overline{\mathbb{S}_{a,b}}.$$

Wegen $A = 0$ gibt es zudem ein $M > 0$ mit

$$|f(s)| \leq M \qquad \text{für alle } s \in \partial\overline{\mathbb{S}_{a,b}}.$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $m \equiv 2 \bmod (4)$. Dann gilt

$$\mathrm{Re}(s^m) = \mathrm{Re}((\sigma + it)^m) = -t^m + O(|t|^{m-1}) \qquad \text{für } |t| \to \infty$$

gleichmäßig auf dem gesamten Vertikalstreifen $\overline{\mathbb{S}_{a,b}}$. Wegen $t^m \geq 0$ gibt es somit ein $N \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{Re}(s^m) \leq N \qquad \text{für alle } s \in \overline{\mathbb{S}_{a,b}}.$$

Gilt nun speziell $m > \delta$, so folgt für ein beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\left|f(s)e^{\varepsilon s^m}\right| \leq Me^{\varepsilon N} \qquad \text{für alle } s \in \partial\mathbb{S}_{a,b},$$

$$\left|f(s)e^{\varepsilon s^m}\right| = \left|Ce^{-\varepsilon t^m + |t|^\delta + O(|t|^{m-1})}\right| \xrightarrow{|t|\to\infty} 0 \qquad \text{gleichmäßig in ganz } \overline{\mathbb{S}_{a,b}}.$$

Die zweite Aussage garantiert $|f(s)e^{\varepsilon s^m}| \leq Me^{\varepsilon N}$ für $|t|$ oberhalb einer geeigneten Schranke. Mit der ersten Aussage und dem Maximumprinzip auf Kompakta folgt

$$\left|f(s)e^{\varepsilon s^m}\right| \leq Me^{\varepsilon N} \qquad \text{für alle } s \in \overline{\mathbb{S}_{a,b}}.$$

Lassen wir nun ε gegen 0 gehen, so folgt

$$|f(s)| \leq M = O(|t|^0) \qquad \text{für alle } s \in \overline{\mathbb{S}_{a,b}}$$

und somit der Satz im Fall $A = 0$.

Nun zeigen wir die Behauptung für allgemeine $A \in \mathbb{R}$. Dafür definieren wir die Funktion

$$\psi(s) = (s - a + 1)^A = e^{A\,\mathrm{Log}(s-a+1)}.$$

Diese ist für $0 < \varepsilon < 1$ im Gebiet $\mathbb{S}_{a-\varepsilon,b+\varepsilon} \supseteq \overline{\mathbb{S}_{a,b}}$ holomorph und nullstellenfrei und wegen $\mathrm{Re}(\mathrm{Log}(s - a + 1)) = \log|s - a + 1|$ gilt dort

$$|\psi(s)| = O\left(|t|^A\right) \qquad \text{für } |t| \to \infty.$$

Es folgt, dass der Quotient $\tilde{f}(s) := \frac{f(s)}{\psi(s)}$ im Durchschnitt $D \cap \mathbb{S}_{a-\varepsilon,b+\varepsilon} \supseteq \overline{\mathbb{S}_{a,b}}$ holomorph ist und die Wachstumsbedingung

$$\tilde{f}(s) = O(|t|^0) \qquad \text{für } |t| \to \infty$$

gleichmäßig auf $\partial\mathbb{S}_{a,b}$ erfüllt. Da $\tilde{f}$ die auf ganz $\overline{\mathbb{S}_{a,b}}$ gegebene Wachstumsbedingung von f erbt, können wir die bereits bewiesene Aussage für $A = 0$ auf $\tilde{f}$ anwenden und erhalten

$$f(s) = \psi(s)O(|t|^0) = O(|t|^A) \qquad \text{für } |t| \to \infty$$

gleichmäßig auf ganz $\overline{\mathbb{S}_{a,b}}$ und somit den Satz für allgemeines A. □

Wir zeigen nun den folgenden Satz, der in dieser Allgemeinheit auf BOCHNERS[36] Arbeit aus dem Jahr 1951 zurückgeht:

Satz 4.47 (Bochner'scher Umkehrsatz). *Seien $\lambda, A \in \mathbb{R}_{>0}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sowie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen mit*

$$a_n = O(n^A) \qquad \text{für } n \to \infty.$$
$$b_n = O(n^A) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Weiter betrachten wir die Funktionen

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}} \quad \text{sowie} \quad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^{\frac{n}{\lambda}} \qquad \text{mit } q^{\frac{n}{\lambda}} = e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}.$$

Für $k \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowie eine rationale Funktion $R(s)$ mit $\lim_{|s|\to\infty} R(s) = 0$ sind dann die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) *Die Funktion*

$$\Lambda_\lambda(s; f) - R(s)$$

lässt sich holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen und ist als ganze Funktion in jedem Vertikalstreifen $\mathbb{S}_{a,b}$ mit reellen $a < b$ beschränkt. Zudem gilt die Funktionalgleichung

$$\Lambda_\lambda(k - s; f) = C\Lambda_\lambda(s; g) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C}.$$

(ii) *Es gilt das Transformationsgesetz*

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) - a_0 = C\left(\frac{z}{i}\right)^k (g(z) - b_0) + E_R(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

mit dem Fehlerterm

$$E_R(z) := \sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ R(w)=\infty}} \operatorname{res}_{s=w}\left(\left(\frac{z}{i}\right)^s R(s)\right).$$

[36] Salomon Bochner (1899-1982)

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass Aussage (ii) bereits Aussage (i) impliziert. Nach den vorausgesetzten oberen Schranken für die Koeffizientenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt mit dem Mellin'schen Umkehrsatz 4.33

$$\begin{aligned}\Lambda_\lambda(s;f) &= \int_0^\infty t^{s-1}(f(it)-a_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{s-1}(f(it)-a_0)\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{s-1}(f(it)-a_0)\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } s\in\mathbb{S}_{A+1}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Da die stückweise stetige Funktion $\mathbb{1}_{[1,\infty]}(t)(f(it)-a_0)$ für $t\to\infty$ exponentiell abklingt und für $t\to 0$ in allen $O(t^B)$ mit $B>0$ enthalten ist, folgt mit Proposition 4.21, dass das zweite Integral in (4.24) eine ganze Funktion in der Variablen s darstellt. Aus der Abschätzung

$$\left|\int_1^\infty t^{s-1}(f(it)-a_0)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_1^\infty t^{\sigma-1}|(f(it)-a_0)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } s=\sigma+it\in\mathbb{C}$$

folgt zudem deren Beschränktheit auf Vertikalstreifen endlicher Breite. Wir betrachten nun das erste Integral in (4.24). Über die Funktionalgleichung in der vorausgesetzen Aussage (ii) erhalten wir

$$\begin{aligned}&\int_0^1 t^{s-1}(f(it)-a_0)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int_1^\infty x^{-s-1}\left(f\left(\frac{i}{x}\right)-a_0\right)\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \int_1^\infty x^{-s-1}\left(Cx^k g(ix) - Cx^k b_0 + E_R(ix)\right)\mathrm{d}x \\ &= C\int_1^\infty x^{k-s-1}\left(g(ix)-b_0\right)\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{-s-1}E_R(ix)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für } s\in\mathbb{S}_{A+1}.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Das zweite Integral in (4.25) erkennen wir hierbei zu

$$\int_1^\infty x^{-s-1}E_R(ix)\,\mathrm{d}x = R(s),$$

denn: Die rationale Funktion $R(s)$ mit $\lim_{|s|\to\infty} R(s) = 0$ hat eine eindeutige Partialbruchzerlegung der Form

$$R(s) = \sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ R(w)=\infty}} \sum_{j=1}^{\infty\text{-}\operatorname{ord}(R;w)} \frac{c_{w,j}}{(s-w)^j} \qquad \text{mit } c_{w,j}\in\mathbb{C} \text{ für alle } w,j.$$

Für ein reelles $B > \max\{\mathrm{Re}(w) : R(w) = \infty\}$ gilt andererseits

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty x^{-s-1} \operatorname{res}_{z=w}\left(\frac{x^z}{(z-w)^j}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty x^{w-s-1} \operatorname{res}_{z=w}\left(\frac{1}{(z-w)^j} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\log(x)(z-w))^n}{n!}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty x^{w-s-1} \frac{\log(x)^{j-1}}{(j-1)!} \mathrm{d}x \\
&\overset{x=e^u}{=} \frac{1}{(j-1)!} \int_0^\infty e^{-(s-w)u} u^{j-1} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{(j-1)!} \frac{\Gamma(j)}{(s-w)^j} \\
&= \frac{1}{(s-w)^j} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_B.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Die Behauptung folgt im Vergleich dieser beiden Aussagen über die Linearität von Residuum und Integral sowie die Definition des Fehlerterms $E_R(z)$. #

Setzen wir dies in (4.25) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{s-1}(f(it) - a_0) \,\mathrm{d}t \\
&= C \int_1^\infty x^{k-s-1} \left(g(ix) - b_0\right) \mathrm{d}x + R(s) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{\max\{A+1,B\}}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Das Integral zur Rechten stellt wegen des exponentiellen Abklingens von $g(it) - b_0$ für $t \to \infty$ nach Proposition 4.21 eine ganze Funktion dar, die – wie im Falle von $f(it) - a_0$ weiter oben – auf vertikalen Streifen endlicher Breite beschränkt ist. Daraus folgt, dass sich die zunächst für $s \in \mathbb{S}_{\max\{A+1,B\}}$ definierte Abbildung

$$\begin{aligned}
&\Lambda_\lambda(s; f) - R(s) \\
&= \int_0^\infty t^{s-1}(f(it) - a_0) \,\mathrm{d}t - R(s) \\
&= \int_0^1 t^{s-1}(f(it) - a_0) \,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{s-1}(f(it) - a_0) \,\mathrm{d}t - R(s) \\
&\overset{(4.27)}{=} C \int_1^\infty x^{k-s-1} \left(g(ix) - b_0\right) \mathrm{d}x + \int_1^\infty t^{s-1}(f(it) - a_0) \,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{4.28}$$

zu einer ganzen Funktion fortsetzt und auf Vertikalstreifen endlicher Breite beschränkt ist. Es verbleibt die Funktionalgleichung zu zeigen.

Dazu setzen wir in der vorausgesetzten Transformationsformel aus (ii) den Wert $-\frac{1}{z}$ ein – was bekanntermaßen für $z \in \mathbb{H}$ wieder in $\mathbb{H}$ liegt – und sortieren die Terme des Ergebnisses um zu

$$\begin{aligned}
&g\left(-\frac{1}{z}\right) - b_0 \\
&= \frac{1}{C}\left(\frac{z}{i}\right)^k (f(z) - a_0) - \frac{1}{C}\left(\frac{z}{i}\right)^k E_R\left(-\frac{1}{z}\right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

was wegen $C \neq 0$ erlaubt ist. Hierbei gilt

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{C}\left(\frac{z}{i}\right)^k E_R\left(-\frac{1}{z}\right)\\
&= -\frac{1}{C}\left(\frac{z}{i}\right)^k \sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ R(w)=\infty}} \operatorname{res}_{s=w}\left(\left(\frac{i}{z}\right)^s R(s)\right)\\
&= -\frac{1}{C}\sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ R(w)=\infty}} \operatorname{res}_{s=w}\left(\left(\frac{z}{i}\right)^{k-s} R(s)\right)\\
&= \sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ R(w)=\infty}} \operatorname{res}_{s=k-w}\left(\left(\frac{z}{i}\right)^{s} \frac{R(k-s)}{C}\right)\\
&= E_Q(z),
\end{aligned}$$

wobei $Q(s) := \frac{R(k-s)}{C}$ eine rationale Funktion mit der Eigenschaft $\lim_{|s|\to\infty} Q(s) = 0$ ist. Eingesetzt in (4.29) erhalten wir

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) - b_0 = \frac{1}{C}\left(\frac{z}{i}\right)^k (f(z)-a_0) + E_Q(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Das oben für f ausgeführte Argument kann nun erneut angewandt werden und führt ganz analog zu (4.28) zu der Formel

$$\begin{aligned}
&\Lambda_\lambda(s;g) - \frac{R(k-s)}{C}\\
&= \frac{1}{C}\int_1^\infty x^{k-s-1}(f(ix)-a_0)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty t^{k-s-1}(g(it)-b_0)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Auch hier dehnt sich die linke Seite zu einer ganzen Funktion mit Beschränktheit auf Vertikalstreifen endlicher Breite aus. Zusammen mit (4.28) folgt die Symmetrie

$$C\Lambda_\lambda(s;g) - R(k-s) = \Lambda_\lambda(k-s;f) - R(k-s) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C},$$

die offenbar äquivalent zur behaupteten Funktionalgleichung aus (i) ist.

Nun zeigen wir die andere Richtung, dass also Aussage (i) auch Aussage (ii) impliziert. Aus dem Mellin'schen Umkehrsatz 4.33 folgt für $y > 0$

$$f(iy) - a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Lambda_\lambda(s;f)y^{-s}\,\mathrm{d}s \qquad \text{für alle } c > A+1, y > 0. \tag{4.30}$$

Aufgrund der absoluten Konvergenz der Dirichlet-Reihe $L(s;f) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ für $\mathrm{Re}(s) > A+1$ nach Proposition 4.9 folgt mit Proposition 4.31 für ein $c > A+1$

$$\begin{aligned}
&|\Lambda_\lambda(c+it;f)|\\
&= \left|\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-c-it}\Gamma(c+it)L(f;c+it)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\ll_c \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-c} |t|^{c-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi|t|}{2}} \\
&= \ O_{c,M}(|t|^{-M}) \qquad\qquad \text{für alle } c > A+1, M > 0 \text{ und } |t| \to \infty.
\end{aligned}
$$

Nach der vorausgesetzten Aussage (i) gilt ferner die Funktionalgleichung

$$\Lambda_\lambda(k-s;f) = C\Lambda_\lambda(s;g)$$

und analog zu oben folgt

$$|\Lambda_\lambda(k-c-it;f)| = O_{c,M}\left(|t|^{-M}\right) \qquad \text{für alle } c > A+1, M > 0 \text{ und } |t| \to \infty.$$

Da weiter $\Lambda_\lambda(s;f) - R(s)$ nach der vorausgesetzten Aussagen (i) beschränkt auf allen Vertikalstreifen endlicher Breite ist und alle Pole von $\Lambda_\lambda(s;f)$ offenbar in $\overline{\mathbb{S}_{k-A-1,A+1}}$ liegen, folgt mit dem Prinzip von Phragmén-Lindelöf 4.46

$$|\Lambda_\lambda(s;f)| = O_{c,M}\left(|t|^{-M}\right) \qquad \text{für alle } c > A+1, M > 0 \text{ und } |t| \to \infty,$$

gleichmäßig für $s \in \overline{\mathbb{S}_{k-c,c}}$,

denn: Besitzt $\Lambda_\lambda(s;f)$ die Polstellen $s_1, \ldots, s_n$ mit jeweiliger Ordnung $m_1, \ldots, m_n > 0$, so können wir das Polynom

$$P(s) := \prod_{j=1}^{n} (s-s_j)^{m_j}$$

definieren, welches den Grad $N = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ besitzt und in seiner Konstruktion damit lediglich von f abhängt. Dann ist die Hilfsfunktion

$$H(s) := P(s)\Lambda_\lambda(s;f)$$

konstruktionsgemäß ganz, erfüllt auf dem Rand $\partial\mathbb{S}_{k-c,c}$ aber weiterhin die Beschränkung durch $O_{c,M}(|t|^{-M})$, da P nicht von c und der freien Wahl von $M > 0$ abhängt. Da $\Lambda_\lambda(s;f) - R(s)$ auf Vertikalstreifen endlicher Breite beschränkt ist, wächst $H(s) = P(s)(\Lambda_\lambda(s;f) - R(s)) + P(s)R(s)$ in $\overline{\mathbb{S}_{k-c,c}}$ polynomiell, womit die Bedingungen für das Phragmén-Lindelöf'sche Prinzip 4.46 erfüllt sind. #

Analog zu der Argumentation im Beweis der Mellin'schen Inversionsformel 4.32 können wir damit die Integrationskurve in (4.30) nach links verschieben und dabei die von den Polstellen kommenden Residuen einsammeln, bis diese alle rechts von der Integrationslinie liegen. Es gilt daher unter Anwendung der vorausgesetzten Funktionalgleichung:

$$
\begin{aligned}
f(iy) - a_0 &= \sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ R(w)=\infty}} \operatorname{res}_{s=w}\left(y^{-s}R(s)\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{k-c-i\infty}^{k-c+i\infty} \Lambda_\lambda(s;f)y^{-s}\,\mathrm{d}s \\
&= \sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ R(w)=\infty}} \operatorname{res}_{s=w}\left(y^{-s}R(s)\right) + \frac{C}{2\pi i}\int_{k-c-i\infty}^{k-c+i\infty} \Lambda_\lambda(k-s;g)y^{-s}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$\overset{s\mapsto k-s}{=} \sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ R(w)=\infty}} \mathrm{res}_{s=w}\left(y^{-s}R(s)\right) + \frac{C}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Lambda_\lambda(s;g)y^{-(k-s)}\,\mathrm{d}s$$

$$= \sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ R(w)=\infty}} \mathrm{res}_{s=w}\left(y^{-s}R(s)\right) + Cy^{-k}\left(g\left(\frac{i}{y}\right) - b_0\right),$$

wobei wir im letzten Schritt wieder den Mellin'schen Umkehrsatz 4.33 verwendet haben. Aussage (ii) folgt jetzt mit $y := \frac{i}{z}$ und analytischer Fortsetzung von der positiven imaginären Achse auf die obere Halbebene. □

Beispiel 4.48. *Wir nutzen den Bochner'schen Umkehrsatz 4.47, um eine Funktionalgleichung der Riemann'schen Zetafunktion herzuleiten. Hierfür betrachten wir die Jacobi'sche Thetafunktion*

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H},$$

welche nach Satz 2.27 die Transformationsformeln

$$\vartheta(z+2) = \vartheta(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H},$$

$$\vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\cdot\vartheta(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

erfüllt. Dies lässt sich als Aussage (ii) des Bochner'schen Umkehrsatzes 4.47 für

$$f = g = \vartheta,\ \lambda = 2,\ A = 0,\ k = \frac{1}{2},\ C = 1 \text{ und } R(s) = \frac{1}{s-\frac{1}{2}} - \frac{1}{s}$$

verstehen. Nach dem Satz lässt sich daher die zugehörige Funktion

$$\Lambda_2(s;\vartheta) = 2\pi^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}(n^2)^{-s} = 2\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$$

holomorph nach $\mathbb{C}\setminus\{0,\frac{1}{2}\}$ fortsetzen mit einfachen Polen in $s \in \{0,\frac{1}{2}\}$ und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Lambda_2\left(\tfrac{1}{2}-s;\vartheta\right) = \Lambda_2(s;\vartheta) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C}.$$

Ersetzen wir s durch $\frac{s}{2}$, so erhalten wir die Funktionalgleichung der Riemann'schen Zetafunktion in ihrer üblichen Schreibweise:

$$\Lambda(1-s) = \Lambda(s) \text{ mit } \Lambda(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C}.$$

Ist umgekehrt die Funktionalgleichung der Riemann'schen Zetafunktion mitsamt Polstellenverhalten bekannt, so kann daraus die Transformationsformel der Thetafunktion zurückgewonnen werden.

Die Funktionalgleichung ist ein erstaunliches sowie starkes Resultat. Sie erlaubt einige Rückschlüsse über das Verhalten von $\zeta(s)$ in Bereichen weit jenseits der Gültigkeit von (4.19). Es zeigt sich etwa, dass es für alle Werte $s \in \mathbb{S}_{-\infty,0}$ erneut eine Art von Euler-Produktentwicklung gibt, die wir zum Beweis des folgenden Korollars verwenden:

Korollar 4.49. *Die Riemann'sche Zetafunktion besitzt im Bereich $\mathbb{S}_{-\infty,0} \setminus -2\mathbb{N}$ keine Nullstellen und für $s = -2, -4, -6, \dots$ einfache Nullstellen.*

Beweis. Nach Beispiel 4.48 folgt über Beispiel 4.44

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{1-s}} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{-\infty,0}.$$

Nach Beispiel 4.44 und da weder Gamma- noch Exponentialfunktion Nullstellen haben, ist die rechte Seite im betrachteten Bereich nullstellenfrei. Auf der linken Seite ist $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$ nullstellenfrei, besitzt allerdings einfache Pole an den Stellen $s \in -2\mathbb{N}$. Also muss $\zeta(s)$ genau dort mit Ordnung 1 verschwinden und hat sonst keine Nullstellen. □

Der Effekt, den wir hier beobachten, ist, dass sich das gut zu kontrollierende Verhalten der Riemann'schen Zetafunktion rechts von der Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1$ durch die Spiegelung $s \mapsto 1-s$ auf den Bereich links von $\mathrm{Re}(s) = 0$ überträgt. Da es nach Beispiel 4.44 und Korollar 4.49 in $\mathbb{S}_{-\infty,0} \cup \mathbb{S}_1$ keine weiteren Nullstellen gibt, bezeichnet man in diesem Sinne $s = -2, -4, -6, \dots$ auch als die ***trivialen Nullstellen*** der Riemann'schen Zetafunktion.

Unbekannt bleibt das Nullstellenverhalten der Zetafunktion im ***kritischen Streifen*** $\overline{\mathbb{S}_{0,1}}$ – die dort gelegene Nullstellen bezeichnet man daher auch als die ***nichttriviale Nullstellen*** der Riemann'schen Zetafunktion. Im Jahr 1859 konnte Riemann mithilfe der Euler-Produktdarstellung einen Zusammenhang zwischen diesen nichttrivialen Nullstellen und der Verteilung der Primzahlen herstellen. Auf diese Weise bildet das Euler-Produkt der Zetafunktion den Ausgangspunkt der analytischen Theorie um die Primzahlen.

Neben der Lokalisierung der trivialen Nullstellen liefert uns die Funktionalgleichung noch eine Möglichkeit, das Wachstum der Zetafunktion in vertikalen Streifen polynomiell zu begrenzen:

Proposition 4.50. *Es seien $a < b$ reelle Zahlen. Dann gibt es ein zugehöriges $\delta_{a,b} = \delta > 0$, so dass*

$$\zeta(s) = O_{a,b}(|\mathrm{Im}(s)|^{\delta}), \qquad |s| \to \infty, s \in \mathbb{S}_{a,b}.$$

Beweis. Für $-1 < a$ ist die Aussage schon durch (4.22) gezeigt. Sei also $a \leq -1$. Wegen der Funktionalgleichung reicht es dann aus, den Ausdruck

$$2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

in der Halbebene $1 - \mathbb{S}_{a,b} = \mathbb{S}_{1-a,1-b}$ zu studieren. Da nun $2 \geq 1-a$, ist der Term $\zeta(s)$ dort trivialerweise beschränkt. Ferner folgt mit Proposition 4.31

$$\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s) = \frac{e^{\frac{\pi i s}{2}} + e^{-\frac{\pi i s}{2}}}{2}\Gamma(s) = O_{a,b}(|\mathrm{Im}(s)|^{1-b-\frac{1}{2}}).$$

Zu guter Letzt ist $(2\pi)^{-s}$ offenbar auf jedem endlichen Vertikalstreifen beschränkt. Damit folgt die Behauptung. □

Wir können den in Beispiel 4.48 nachgewiesenen Zusammenhang zwischen der Riemann'schen Zetafunktion und der Jacobi'schen Thetafunktion noch stärker ausnutzen: Charakterisieren wir etwa die Jacobi'sche Thetafunktion anhand ihrer Transformationsformel und des Wachstumsverhaltens ihrer Koeffizienten, so lässt sich dies mit dem Bochner'schen Umkehrsatz 4.47 auf die Riemann'sche Zetafunktion übertragen. Dieses Ergebnis wurde zuerst 1921 von HAMBURGER[37] gezeigt, der hierfür jedoch einen anderen Umkehrsatz verwendete, der nur ein Spezialfall des Bochner'schen ist. Bevor wir einen Beweis herleiten können, benötigen wir noch ein wenig Vorarbeit:

Definition 4.51. *Sei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig.*

(a) *Eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften*

  (i) $f(z+1) = f(z)$ *und* $f(-\frac{1}{z}) = (-z)^k f(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{H}$,

  (ii) $f(z)$ *ist holomorph in* $z = i\infty$,

  heißt eine ***(ganze) Modulform*** *von Gewicht k bezüglich der vollen Modulgruppe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. *Den Vektorraum aller solchen Modulformen nennen wir M_k.*

(b) *Eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit*

  (i) $f(z+2) = f(z)$ *und* $f(-\frac{1}{z}) = (-z)^k f(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{H}$,

  (ii) $f(z)$ *und* $(-z)^k f(\frac{z+1}{z})$ *sind holomorph in* $z = i\infty$

  heißt eine ***(ganze) Modulform*** *von Gewicht k bezüglich der Thetagruppe Γ_ϑ.*[38] *Den Vektorraum aller solchen Modulformen bezeichnen wir mit $M_k(\Gamma_\vartheta)$.*

Vermittels des Residuensatzes lässt sich die sogenannte Valenzformel der Thetagruppe herleiten, die eine Abschätzung der Nullstellenordnung einer Modulform $0 \not\equiv f \in M_k(\Gamma_\vartheta)$ in $i\infty$ erlaubt. Tatsächlich gilt

$$\operatorname{ord}(f; i\infty) \leq \frac{k}{4}. \tag{4.31}$$

Wir sind nun in der Lage, eine Charakterisierung der Jacobi'schen Thetafunktion anzugeben:

Proposition 4.52. *Erfülle $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{2}}$ die folgenden Bedingungen:*

(i) *Es ist f holomorph auf $\mathbb{H}$ und erfüllt dort das Transformationsgesetz*

$$f(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}} f(z).$$

(ii) *Es existiert ein $A > 0$ mit $a_n = O(n^A)$ für $n \to \infty$.*

[37] Hans Ludwig Hamburger (1889-1956)

[38] Für unsere Vorlesung ist die genaue Definition der Thetagruppe nicht von Belang. Es handelt sich dabei um eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, deren Erzeuger explizit bekannt sind und mit der man daher angenehm arbeiten kann.

Dann gilt bereits $f \equiv a_0\vartheta$, wobei $\vartheta(z)$ die in Definition 2.23 erklärte Jacobi'sche Thetafunktion bezeichnet.

Beweis. Nach Voraussetzung und Satz 2.27 ist $h^8(z)$ mit $h(z) := f(z) - a_0\vartheta(z)$ holomorph auf $\mathbb{H}$ und erfüllt die Transformationsgesetze

$$h^8(z+2) = h^8(z) \quad \text{und} \quad h(-\frac{1}{z}) = z^4 h(z).$$

Da die Koeffizienten von h^8 offenbar wieder polynomiell anwachsen – das sieht man an der Definition des Cauchy-Produkts – gilt nach Übungsaufgabe 4.13 bereits $h^8 \in M_4(\Gamma_\vartheta)$. Da der nullte Koeffizient von h verschwindet, hat h^8 nun aber die Ordnung 8 in $i\infty$. Mit (4.31) folgt jetzt $h^8 \equiv 0$, also $h \equiv 0$ und somit die Behauptung. $\square$

Korollar 4.53 (Satz von Hamburger). *Eine Funktion $D(s)$ in der komplexen Variablen s erfülle die folgenden Bedingungen:*

(i) *Es lässt sich $D(2s)$ in eine Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ entwickeln, die im Bereich $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}$ absolut konvergiert.*

(ii) *Die Funktion $\Lambda(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})D(s)$ besitzt eine analytische Fortsetzung nach $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, mit einfachen Polstellen in $s \in \{0,1\}$ und erfülle die Funktionalgleichung $\Lambda(1-s) = \Lambda(s)$.*

(iii) *Es ist $\Lambda(s)$ auf allen Vertikalstreifen endlicher Breite beschränkt.*

Dann gilt bereits $D(s) = a_1\zeta(s)$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Bochner'schen Umkehrsatz 4.47 und Proposition 4.52. $\square$

Möchte man – beginnend bei Dirichlet-Reihen mit einer Funktionalgleichung – den Bochner'schen Umkehrsatz 4.47 verwenden, um auf ein Transformationsgsetz einer Fourier-Reihe zu schließen, kann die Bedingung der Beschränktheit auf Vertikalstreifen sperrig sein. Unter Einbindung der Koeffizienten kann man allerdings manchmal auf polynomielles Wachstum der analytischen Fortsetzung entlang vertikaler Streifen schließen:

Proposition 4.54. *Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen, für welche die Dirichlet-Reihen $D(s;a)$ und $D(s;b)$ für ein $k > 0$ in allen $s \in \mathbb{S}_k$ absolut konvergieren und sich meromorph nach ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen lassen.*

Erfülle nun die Funktion

$$F(s;a) := \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-\alpha s+\beta} \Gamma(\delta s + \omega) D(s;a) \qquad \text{mit } \alpha, \delta, \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } \beta, \omega \in \mathbb{R}$$

die Funktionalgleichung

$$F(k-s;a) = F(s;b).$$

Weiter gebe es ein $M \in \mathbb{N}_0$ sowie für alle $j \in \{1, \dots, M\}$ Konstanten

$$c_j \in \mathbb{C},\ m_j \in \mathbb{N}_0 \quad \textit{und} \quad \beta_j \in \overline{\mathbb{S}_{0,k}} \textit{ mit } 0 \leq \mathrm{Re}(\beta_M) \leq \ldots \leq \mathrm{Re}(\beta_1) \leq k,$$

so dass die Intgralfunktion

$$I(x) := \int_1^x A^*(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{mit } A^*(t) := \sum_{0<n\leq t} a_n - \sum_{j=1}^{M} c_j t^{\beta_j} \log(t)^{m_j}$$

für $x \geq 1$ beschränkt ist. Dann existiert für alle reellen $c < d$ ein $\delta > 0$ mit

$$D(s;a) = O_{c,d}(|\mathrm{Im}(s)|^{\delta}) \qquad \textit{für alle } s \in \mathbb{S}_{c,d} \textit{ und } |s| \to \infty.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $k \geq \max\{0, \sigma_a(D(\cdot, a))\}$. Mit Proposition 4.38 erhalten wir somit

$$D(s;a) = s\int_1^\infty \left(A^*(t) + \sum_{j=1}^{M} c_j t^{\beta_j} \log(t)^{m_j}\right) t^{-s-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_k.$$

Das Integral über den zweiten Summanden lässt sich wie in (4.26) berechnen und wegen $\mathrm{Re}(\beta_j) \leq k$ für alle $1 \leq j \leq M$ gilt

$$s\int_1^\infty \sum_{j=1}^{M} c_j t^{\beta_j} \log(t)^{m_j} t^{-s-1}\,\mathrm{d}t = s\sum_{j=1}^{M} \frac{c_j \Gamma(m_j)}{(s-\beta_j)^{m_j+1}} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_k.$$

Diese Funktion ist für $|s| \to \infty$ sicherlich auf Vertikalstreifen endlicher Breite polynomiell beschränkt. Zu bemerken ist auch, dass das Teilintegral im Bereich $s \in \mathbb{S}_k$ absolut konvergiert, womit wir nur noch jenes über $A^*(t)$ betrachten müssen. Hier gilt mit partieller Integration

$$s\int_1^\infty A^*(t) t^{-s-1}\,\mathrm{d}t = -s(s+1)\int_1^\infty I(t) t^{-s-2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{-1},$$

da $I(t)$ nach Voraussetzung für $t \geq 1$ beschränkt ist. Insgesamt gilt mittels meromorpher Fortsetzung

$$D(s;a) = s\sum_{j=1}^{M} \frac{c_j \Gamma(m_j)}{(s-\beta_j)^{m_j+1}} - s(s+1)\int_1^\infty I(t) t^{-s-2}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{-1}.$$

Mit der Standardabschätzung sieht man schnell, dass dieser Ausdruck innerhalb vertikaler Streifen in $\mathbb{S}_{-1}$ polynomiell beschränkt ist. Es verbleibt also nur noch, Vertikalstreifen in einem Bereich der Form $\mathbb{S}_{-\infty,-1+\varepsilon}$, etwa $\mathbb{S}_{-\infty,-\frac{1}{2}}$, zu betrachten. Mit der Funktionalgleichung haben wir

$$\begin{aligned} D(k-s;a) &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-\alpha(k-s)+\beta} \frac{\Gamma(\delta s+\omega)}{\Gamma(\delta k+\omega-\delta s)} D(s;b) \\ &\overset{4.27}{=} \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-\alpha(k-s)+\beta} \Gamma(\delta s+\omega)\Gamma(\delta s+1-\delta k-\omega) \end{aligned}$$

$$\times \sin(\pi(\delta s - \delta k - \omega))D(s;b).$$

Der rechte Ausdruck muss in vertikalen Streifen endlicher Breite in $\mathbb{S}_{k+\frac{1}{2}}$ untersucht werden. Trivialerweise ist auf solchen der Term $(\frac{2\pi}{\lambda})^{-\alpha(k-s)+\beta}D(s;b)$ sogar stets beschränkt, da λ reell ist und die Dirichlet-Reihe $D(s;b)$ dort absolut konvergiert. Mit $\sin(\pi(\delta s - \delta k - \omega)) = O(e^{\pi\delta|\mathrm{Im}(s)|})$ auf allen Vertikalstrefen und Proposition 4.31 folgt schließlich die Behauptung. $\square$

Beispiel 4.55. *Mit der Funktionalgleichung 4.48 der Riemann'schen Zetafunktion an der Hand können wir weitere Dirichlet-Reihen erzeugen, die sich interessant transformieren. Ein schönes Beispiel ist das Produkt*

$$Q_4(s) := \sum_{n=1}^{\infty} r_4(n)n^{-s} := 8(1-2^{2-2s})\zeta(s)\zeta(s-1)$$

mit der zugehörigen Funktion

$$f_4(z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_4(n)q^{\frac{n}{2}}.$$

Tatsächlich lässt sich $\Lambda_2(s;f_4) := \pi^{-s}\Gamma(s)Q_4(s)$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0,2\}$ fortsetzen mit einfachen Polen in $s=0$ und $s=2$ und erfüllt dort die Funktionalgleichung

$$\Lambda_2(2-s;f_4) = \Lambda_2(s;f_4),$$

denn: Die holomorphe Fortsetzbarkeit und die Einfachheit der Pole ergeben sich unmittelbar aus Satz 4.41 und dem bekannten Null- und Polstellenverhalten von Gammafunktion 4.26 (a). Wir zeigen nun die Funktionalgleichung: Mit der Duplikationsformel 4.28 und der Funktionalgleichung 4.26 (c) der Gammafunktion erhalten wir

$$\begin{aligned}\Lambda_2(s;f_4) &= 8(1-2^{2-2s})\pi^{-\frac{s}{2}}\pi^{-\frac{s-1}{2}}\frac{2^{s-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta(s)\zeta(s-1)\\ &= \frac{4(2^{s-1}-2^{1-s})(s-1)}{\pi}\Lambda(s)\Lambda(s-1).\end{aligned}$$

Mit der Funktionalgleichung 4.48 der Riemann'schen Zetafunktion folgt hieraus sofort

$$\Lambda_2(s;f_4) = \Lambda_2(2-s;f_4)$$

und somit die Behauptung. #

Den Grund für den Faktor 8 in der Definition von $Q_4(s)$ erkennt man an der Residuenberechnung

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{s=2}(\Lambda_2(s;f_4)) &= 8(1-2^{-2})\pi^{-2}\Gamma(2)\zeta(2)\,\mathrm{res}_{s=2}\,\zeta(s-1)\\ &\overset{\text{Aufg. 4.6}}{=} \mathrm{res}_{s=2}\,\zeta(s-1)\\ &\overset{4.48}{=} 1.\end{aligned}$$

Mit der bereits gezeigten Funktionalgleichung folgt

$$\operatorname{res}_{s=0} \Lambda_2(s; f_4) = -1.$$

Mit den bekannten Abschätzungen für die Gammafunktion 4.31 und die Zetafunktion 4.50 erhalten wir schließlich die Beschränktheit der ganzen Funktion $\Lambda_2(s; f_4) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-2}$ *auf Vertikalstreifen endlicher Breite. Mit dem Bochner'schen Umkehrsatz 4.47 gilt somit*

$$f_4\left(-\frac{1}{z}\right) = -z^2 f_4(z) \qquad \textit{für alle } z \in \mathbb{H}. \tag{4.32}$$

Wir können den Bochner'schen Umkehrsatz 4.47 nun in eine enge Korrespondenz zwischen Modulformen zur vollen Modulgruppe und L-Funktionen verwandeln. Das Resultat wird auch als Hecke'scher Umkehrsatz bezeichnet und wurde in dieser Allgemeinheit zuerst 1936 von Hecke bewiesen. Wir geben je eine Version des Hecke'schen Umkehrsatzes für die volle Modulgruppe und die Thetagruppe:

Satz 4.56 (Hecke'scher Umkehrsatz)**.** *Seien* $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $k \in 2\mathbb{N}$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge komplexer Zahlen und*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\lambda}}$$

eine Funktion in der komplexen Variablen q. *Dann gelten die folgenden Charakterisierungen:*

(a) *Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *Die Funktion* f *ist eine Modulform von Gewicht* k *zu* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, *liegt also in* M_k.

  (ii) *Es ist* $\lambda = 1$ *und* $a_n = O(n^A)$ *für ein* $A > 0$. *Die Funktion*

$$\Lambda(s; f) + a_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{s-k} \right)$$

  besitzt eine ganze Fortsetzung und ist auf vertikalen Streifen endlicher Breite beschränkt. Zudem besteht zwischen meromorphen Funktionen die Funktionalgleichung

$$\Lambda(k-s; f) = (-1)^{\frac{k}{2}} \Lambda(s; f).$$

(b) *Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *Die Funktion* f *ist eine Modulform von Gewicht* k *zur Thetagruppe* Γ_ϑ, *liegt also in* $M_k(\Gamma_\vartheta)$.

  (ii) *Es ist* $\lambda = 2$ *und* $a_n = O(n^A)$ *für ein* $A > 0$. *Die Funktion*

$$\Lambda_2(s; f) + a_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{s-k} \right)$$

  besitzt eine ganze Fortsetzung und ist auf vertikalen Streifen endlicher Breite beschränkt. Zudem besteht zwischen meromorphen Funktionen die Funktionalgleichung

$$\Lambda_2(k-s; f) = (-1)^{\frac{k}{2}} \Lambda_2(s; f).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst Behauptung (a) und schreiben dafür

$$C := (-1)^{\frac{k}{2}} \quad \text{sowie} \quad R(s) := -a_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{s-k} \right).$$

Gelte zunächst (i), liege f also in M_k. In diesem Fall ist f bekanntlich 1-periodisch und es gilt $\lambda = 1$. Weiter gilt die Hecke-Abschätzung,[39] so dass es ein $A > 0$ mit $a_n = O(n^A)$ gibt. Schließlich gilt für alle $z \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
& f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z) \\
\iff & f\left(-\frac{1}{z}\right) - a_0 = z^k f(z) - a_0 z^k - a_0 + a_0 z^k \\
\iff & f\left(-\frac{1}{z}\right) - a_0 = (-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{z}{i}\right)^k (f(z) - a_0) \\
& \qquad - a_0 \sum_{w \in \{0,k\}} \operatorname{res}_{s=w} \left(\left(\frac{z}{i}\right)^s \left(\frac{1}{s} - \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{s-k} \right) \right) \\
\iff & f\left(-\frac{1}{z}\right) - a_0 = C \left(\frac{z}{i}\right)^k (f(z) - a_0) + E_R(z).
\end{aligned}$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.47 mit $f = g$ erfüllt und es folgt (ii). Da es sich bei den Umformungen um Äquivalenzen handelt, können sie auch für die Rückrichtung verwendet werden. Zu beachten ist bei der Implikation von (ii) nach (i) dann lediglich, dass mit der von $\lambda = 1$ induzierten 1-Periodizität, $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$ auf der oberen Halbebene und der Holomorphie in $z = i\infty$ bereits $f \in M_k$ folgt.

Der Beweis von Behauptung (b) erfolgt analog wie bei Aussage (a). Für die Implikation von (ii) nach (i) folgt aus $f(z+2) = f(z)$ und $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$ auf der oberen Halbebene sowie Übungsaufgabe 4.13 mit der Bedingung $a_n = O(n^A)$ für ein $A > 0$. □

Beispiel 4.57. *Wir wenden den Hecke'schen Umkehrsatz 4.56 auf die Dirichlet-Reihe*

$$Q_8(s) := \sum_{n=1}^{\infty} r_8(n) n^{-s} := 16(1 - 2^{1-s} + 2^{4-2s})\zeta(s)\zeta(s-3)$$

[39]Die Hecke-Abschätzung sprengt den Rahmen dieser Vorlesung, da man für ihre Herleitung um einiges tiefer in die Theorie der Modulformen eindringen muss. Die Idee ist die folgende: Zunächst konstruiert man - recht aufwändig - in M_k spezielle Modulformen E_k, deren Koeffizienten trivialerweise in $O(n^{k-1})$ liegen. Nun zerlegt man den Raum M_k in die direkte Summe aus dem $\mathbb{C}$-Spann von E_k und dem Raum der Spitzenformen. Es langt dann zu zeigen, dass die Koeffizienten von Spitzenformen das gewünschte Wachstumsverhalten haben. Tatsächlich ist dieses sogar signifikant besser: Für eine Spitzenform

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_k$$

ist aufgrund ihrer Fourier-Entwicklung und ihres Transformationsverhaltens die Funktion $|f(z)|\mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}}$ auf der oberen Halbebene beschränkt. Über die Integralformel für die Fourier-Koeffizienten erhält man so $a_n = O(n^{\frac{k}{2}})$.

und die zugehörige Funktion

$$f_8(z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_8(n) q^{\frac{n}{2}}$$

an. Dann besitzt $\Lambda_2(s; f_8) := \pi^{-s}\Gamma(s)Q_8(s)$ *eine holomorphe Fortsetzung nach* $\mathbb{C} \smallsetminus \{0, 4\}$ *mit einfachen Polen in* $s = 0$ *und* $s = 4$ *und erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\Lambda_2(4 - s; f_8) = \Lambda_2(s; f_8),$$

denn: Die holomorphe Fortsetzbarkeit und die Einfachheit der Pole ergeben sich unmittelbar aus Satz 4.41 und dem bekannten Null- und Polstellenverhalten der Gammafunktion 4.26 (a). Wir weisen nun die Funktionalgleichung nach: Mit der Duplikationsformel 4.28 und der Funktionalgleichung 4.26 (c) der Gammafunktion erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\Lambda_2(s; f_8) \\
&= 16(1 - 2^{1-s} + 2^{4-2s})\pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\zeta(s)\zeta(s-3) \\
&= \frac{4(2^{s-1} - 1 + 2^{3-s})(s-1)(s-3)}{\pi^2}\pi^{-\frac{s}{2}}\pi^{-\frac{s-3}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-3}{2}\right)\zeta(s)\zeta(s-3) \\
&= \frac{4(2^{s-1} - 1 + 2^{3-s})(s-1)(s-3)}{\pi^2}\Lambda(s)\Lambda(s-3).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt mit der Funktionalgleichung 4.48 der Riemann'schen Zetafunktion. #

Für die Residuenberechnung bemerken wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{s=0}\,\Lambda_2(s; f_8) &= 16(1 - 2 + 16)\zeta(0)\zeta(-3)\,\mathrm{res}_{s=0}\,\Gamma(s) \\
&= \frac{16 \cdot 15}{(-2) \cdot 120} \\
&= -1
\end{aligned}$$

und mit der Funktionalgleichung folgt

$$\mathrm{res}_{s=4}\,\Lambda_2(s; f_8) = 1$$

Mit den bekannten Abschätzungen für die Gammafunktion 4.31 und die Zetafunktion 4.50 erhalten wir schließlich die Beschränktheit der ganzen Funktion $\Lambda_2(s; f_8) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-4}$ *auf Vertikalstreifen endlicher Breite. Da die Koeffizienten von* $\zeta(s)\zeta(s-3)$ *offensichtlich polynomiell beschränkt sind, können wir mit* $\lambda = 2$ *und* $k = 4$ *den Hecke'schen Umkehrsatz 4.56 anwenden und erhalten insgesamt*

$$f_8 \in M_4(\Gamma_\vartheta).$$

4.9 Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. *Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass die Dirichlet-Reihe $D(s) := D(s;a)$ für $s = 0$ divergiert. Zeigen Sie, dass dann in Analogie zur Formel von Cauchy-Hadamard bei Potenzreihen für die Konvergenzabszisse von $D(s)$ die Formel*

$$\sigma_0(D) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|A_n|}{\log n} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_{>0} : A_n = O(n^\alpha)\}$$

gilt, wobei wir wie bei der Abel'schen partiellen Summation 4.3

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$

setzen.

Aufgabe 4.2. *Gegeben zwei beliebige Folgen $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\tilde{a} = (\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen schreiben wir kurz*

$$\sigma_a := \sigma_a(D(s;a)) \quad \textit{und} \quad \sigma_{\tilde{a}} := \sigma_a(D(s;\tilde{a}))$$

für die absoluten Konvergenzabszissen der jeweils zugehörigen Dirichlet-Reihen. Zeigen Sie, dass dann die folgende Mittelwerteigenschaft gilt:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} D(\sigma + it;a)D(\tilde{\sigma} - it;\tilde{a})\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\tilde{a}_n}{n^{\sigma+\tilde{\sigma}}} \quad \textit{für alle } \sigma > \sigma_a \textit{ und } \tilde{\sigma} > \sigma_{\tilde{a}}.$$

Aufgabe 4.3. *Zeigen Sie, dass stückweise stetige Funktionen auf einem beliebigen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ lokal beschränkt sind und ihre Sprungstellen diskret in I.*

Hinweis: *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen lokal kompakten Raum.*

Aufgabe 4.4. *In dieser Aufgabe stellen wir einen Zusammenhang zwischen der Mellin-Transformation und der in Abschnitt 2.2 eingeführten kontinuierlichen Fourier-Transformation her:*

Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit

$$\begin{aligned} f(t) &= O(t^A) && \textit{für } t \to 0, \\ f(t) &= O(t^B) && \textit{für } t \to \infty \end{aligned}$$

für reelle Zahlen $B < A$, so dass die Mellin-Transformierte $\mathcal{M}(f)(s)$ nach Proposition 4.21 eine auf dem Vertikalstreifen $\mathbb{S}_{-A,-B}$ holomorphe Funktion darstellt. Zeigen Sie, dass dann in der Notation von Definition 2.16 die Identität

$$\mathcal{M}(f)(s) = \mathcal{F}(f(e^{-t})e^{-\mathrm{Re}(s)t})\left(\frac{\mathrm{Im}(s)}{2\pi}\right) \quad \textit{für alle } s \in \mathbb{S}_{-A,-B}$$

gilt, dass die Mellin-Transformierte also innerhalb ihres Konvergenzstreifens durch eine Fourier-Transformierte dargestellt werden kann.

Aufgabe 4.5. *Zeigen Sie den* ***Satz von Wielandt****: Sei $D \subseteq \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$ ein Gebiet, das den abgeschlossenen Vertikalstreifen $\overline{\mathbb{S}_{1,2}}$ enthält. Sei weiter $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die folgende Eigenschaften hat.*

(i) *Die Funktion f ist auf $\overline{\mathbb{S}_{1,2}}$ beschränkt.*

(ii) *Es gilt $f(s+1) = s\,f(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $s, s+1 \in D$.*

Dann gilt

$$f(s) = f(1)\,\Gamma(s) \quad \text{für alle } s \in D.$$

Hinweis: *Zeigen Sie mit dem Satz von Liouville, dass die holomorphe Funktion*

$$h(s) := f(s) - f(1)\Gamma(s) \quad \text{für alle } s \in D$$

identisch verschwindet.

Aufgabe 4.6. *Die* ***Bernoulli-Zahlen*** *B_n für $n \in \mathbb{N}$ sind definiert durch die Taylor-Entwicklung von*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n := \frac{z}{e^z - 1}, \quad \text{für alle } z \in U_{2\pi}(0).$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) *$B_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Speziell gelten $B_0 = 1$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$.*

(b) *Es gilt die Rekursionsformel $(-1)^n B_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(c) *Für ungerades $n > 1$ gilt $B_n = 0$.*

(d) *Für gerades $n \geq 2$ gilt $B_n = \frac{(-1)^{n/2-1}\, n!}{2^{n-1}\, \pi^n}\, \zeta(n)$.*

Aufgabe 4.7. *In dieser Aufgabe nutzen wir Proposition 4.21 und die Gammafunktion, um die Mellin-Transformierte des Sinus zu bestimmen. Zeigen Sie dafür die folgenden Aussagen:*

(a) *Es gilt*

$$\mu^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} t^{s-1}\, \mathrm{d}t \qquad \text{für alle } \mu \in \mathbb{S}_0.$$

Hinweis: *Zeigen Sie die Behauptung zunächst für reelles $\mu > 0$ und zeigen Sie dann die Holomorphie beider Seiten für $\mu \in \mathbb{S}_0$.*

(b) *Folgern Sie*

$$\int_0^{\infty} e^{-\cos(\theta)t} \sin(\sin(\theta)t) t^{s-1}\, \mathrm{d}t = \sin(\theta s)\Gamma(s) \quad \text{für alle } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}), s \in \mathbb{S}_{-1,1}.$$

Hinweis: *Zeigen Sie die Behauptung zunächst für reelles $s \in (0,1)$ und zeigen Sie dann die Holomorphie beider Seiten für $s \in \mathbb{S}_{-1,1}$.*

(c) *Folgern Sie*

$$\int_0^\infty \sin(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{-1,0}.$$

(d) *Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und λ-periodisch für ein $\lambda > 0$. Zudem sei $f(t) = O(t^A)$ mit $A \geq 0$ für $t \to 0$ und*

$$\int_0^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(f)(s)$ dann eine für $s \in \mathbb{S}_{-A,1}$ holomorphe Funktion ist und folgern Sie speziell

$$\mathcal{M}(\sin)(s) = \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{-1,1}.$$

Aufgabe 4.8. *Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gauß'sche Multiplikationsformel*

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(\frac{s+k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{s-\frac{1}{2}}}\cdot\Gamma(s) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0).$$

Aufgabe 4.9. *Zeigen Sie*

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{te^t}\right)\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 4.10. *Es sei die Euler-Produktdarstllung*

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad \text{für } s \in \mathbb{S}_1,$$

bekannt. Folgern Sie daraus den Fundamentalsatz der Arithmetik.

Aufgabe 4.11. *Leiten Sie die Euler-Produktdarstellung der Dirichlet-Reihe $D(s;\sigma_z)$ mit einem beliebigen $z \in \mathbb{C}$ her, wobei σ_z die in Beispiel 1.2 einführte z-te Teilersummenfunktion bezeichne. Für (zumindest) welche $s \in \mathbb{C}$ gilt diese?*

Aufgabe 4.12. *Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass die zugehörige zahlentheoretische Funktion schwach multiplikativ ist. Zeigen Sie, dass dann bereits für alle Primzahlen p und alle $s \in \mathbb{S}_{\sigma_a(D(s;a))}$ der Zusammenhang*

$$(1+a_p p^{-s})\sum_{n=1}^\infty a_n\mu(n)n^{-s} = (1-a_p p^{-s})\sum_{n=1}^\infty a_n\mu(n)\mu(\mathrm{ggT}(p,n))n^{-s}$$

gilt.

Aufgabe 4.13. *Seien $k \in 2\mathbb{N}$, $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n(f) = O(n^A)$ für ein $A > 0$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^{\frac{n}{2}}$ eine auf $\mathbb{H}$ holomorphe Funktion mit*

$$f(z+2) = f(z) \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{1}{z}\right) = (-z)^k f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

(a) *Es gilt $f(z) = O(\mathrm{Im}(z)^{-A-1})$ für $\mathrm{Im}(z) \to 0^+$, wobei die O-Konstante nicht von x abhängt.*

(b) *Die Funktion $g(z) := (-z)^{-k} f(\frac{z-1}{z})$ hat eine Fourier-Entwicklung der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(g) q^n$ mit Koeffizienten $a_n(g) \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

(c) *Es gilt $|g(z)| = O(\mathrm{Im}(z)^{A-k+1})$ für $\mathrm{Im}(z) \to \infty$.*

(d) *Es gilt $|a_n(g)| = 0$ für alle $n < 0$.*

 Hinweis: *Benutzen Sie die Formel für die Fourier-Koeffizienten mit dem Aufpunkt $z_0 = -\frac{1}{2} + iy$ mit einem $y \in \mathbb{R}_{>0}$ und lassen Sie y gegen ∞ gehen.*

(e) *Es gilt $f \in M_k(\Gamma_\vartheta)$.*

KAPITEL 5

Dirichlet'sche L-Funktionen und der Primzahlsatz in arithmetischen Progressionen

5.1 Dirichlet'sche L-Funktionen

Wir haben im Kapitel 4 bereits die Riemann'sche Zetafunktion

$$\zeta(s) = D(\chi_{1,1}; s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_1,$$

kennengelernt. Durch eine Verbindung zur Jacobi'schen Thetafunktion konnten wir nachweisen, dass sie sich holomorph nach $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortsetzen lässt, einen einfachen Pol in $s = 1$ besitzt und eine Funktionalgleichung erfüllt. Ein sehr wichtiger Aspekt der analytischen Zahlentheorie – und auch der Theorie der Modulformen – ist die Zuordnung einer Dirichlet-Reihe zu einem Dirichlet-Charakter.

Definition 5.1. *Zu einem gegebenen Dirichlet-Charakter χ modulo einer natürlichen Zahl N definieren wir die **Dirichlet'sche L-Funktion** durch*

$$L(s;\chi) := D(\chi; s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}.$$

Wegen $\chi(1) = 1$ und $|\chi(n)| \leq 1$ für alle Dirichlet-Charaktere χ folgt mit dem Majorantenkriterium, dass die Dirichlet-Reihen $L(s;\chi)$ sämtlich für $s \in \mathbb{S}_1$ absolut konvergiert. Wie man außerdem schnell sieht, verfügen die so definierten Dirichlet'schen L-Funktionen auch über Euler-Produkte:

Satz 5.2. *Für einen gegebenen Dirichlet-Charakter χ modulo einem natürlichen N gilt*

$$L(s;\chi) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_1.$$

Beweis. Wie eben festgestellt, konvergiert für alle Dirichlet-Charaktere die Reihe $L(s;\chi)$ absolut für $s \in \mathbb{S}_1$. Die Behauptung folgt damit sofort aus Proposition 3.15 und Korollar 4.43. □

Die folgende Überlegung zeigt, dass es oftmals ausreicht, Dirichlet'sche L-Funktionen für primitive Charaktere zu studieren:

Proposition 5.3. *Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo einem natürlichen N und mit Führer $N_\chi < N$. Ist χ durch einen Dirichlet-Charakter ψ modulo N_χ induziert, so gilt*

$$L(s;\chi) = L(s;\psi) \prod_{p|N} \left(1 - \psi(p)p^{-s}\right).$$

Beweis. Nach Lemma 3.18 gilt $\chi(n) = \psi(n)\chi_{1,N}(n)$, wobei $\chi_{1,N}$ der Hauptcharakter modulo N ist. Es folgt

$$\begin{aligned} L(s;\chi) &\overset{5.2}{=} \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - \psi(p)\chi_{1,N}(p)p^{-s}} \\ &= \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \nmid N}} \frac{1}{1 - \psi(p)p^{-s}} \\ &\overset{5.2}{=} L(s;\psi) \prod_{p|N} \left(1 - \psi(p)p^{-s}\right) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Genau wie im Falle der Riemann'schen Zetafunktion kann man Dirichlet'sche L-Funktionen in größere Bereiche fortsetzen:

Proposition 5.4. *Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo einem natürlichen N. Ist χ der Hauptcharakter, so lässt sich $L(s;\chi)$ holomorph auf $\mathbb{S}_0 \setminus \{1\}$ fortsetzen und hat in $s = 1$ einen einfachen Pol mit Residuum*

$$\operatorname{res}_{s=1} L(s;\chi) = \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(N)}{N}.$$

Ist χ nicht-prinzipal, so lässt sich $L(s,\chi)$ holomorph auf $\mathbb{S}_0$ fortsetzen. Ferner konvergiert dann die zu $L(s;\chi)$ gehörige Dirichlet-Reihe in diesem Bereich.

Beweis. Nach Proposition 5.3 gilt für Hauptcharaktere

$$L(s;\chi) = \zeta(s) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

da diese vom trivialen Charakter $\chi_{1,1}$ induziert sind. Damit folgt die Aussage in diesem Fall mit Beispiel 4.48 und Korollar 1.18.

Ist χ hingegen nicht-prinzipal, so folgt über die Orthogonalitätsrelationen 3.9 die Abschätzung

$$\limsup_{x\to\infty}\left|\sum_{0<n\leq x}\chi(n)\right| \leq \varphi(N).$$

Mit dem Abel'schen Konvergenzkriterium 4.4 folgt daher, dass die Dirichlet-Reihe zu $L(s;\chi)$ für reelle $s>0$ konvergiert. Die Aussage der Proposition folgt jetzt mit Satz 4.6. □

Dass die Verallgemeinerung der Riemann'schen Zetafunktion auf den Fall beliebiger Dirichlet-Charaktere konzeptuell sinnvoll ist, zeigt die Gültigkeit einer Funktionalgleichung auch für die Dirichlet'schen L-Funktionen. Da wir den Fall der Zetafunktion schon ausführlich in Beispiel 4.48 behandelt haben, können wir diesen aus Gründen der Übersicht im Folgenden ausschließen. Wir untersuchen nun zuerst den Fall gerader Dirichlet-Charaktere:

Satz 5.5. *Sei χ ein gerader, primitiver, nicht-prinzipaler Dirichlet-Charakter modulo einer natürlichen Zahl N. Dann lässt sich $L(s;\chi)$ zu einer ganzen Funktion fortsetzen. Weiter gilt für*

$$\Lambda(s;\chi) := \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)L(s;\chi)$$

die Funktionalgleichung

$$\Lambda(1-s;\overline{\chi}) = \frac{\sqrt{N}}{\mathcal{G}(\chi)}\Lambda(s;\chi).$$

Insbesondere gilt $L(-2n;\chi)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$.

Beweis. Wir nutzen die in Satz 3.41 bewiesene Transformationsformel

$$\mathcal{G}(\overline{\chi})\,\Theta\left(-\frac{1}{z};\chi\right) = \sqrt{\frac{Nz}{i}}\,\Theta(z;\overline{\chi}) \quad \text{für alle } z\in\mathbb{H}$$

und wenden den Bochner'schen Umkehrsatz 4.47 an. In dessen Rahmen gilt offenbar

$$k=\frac{1}{2},\ C=\frac{\sqrt{N}}{\mathcal{G}(\overline{\chi})},\ \lambda=2N \quad \text{sowie} \quad f(z)=\Theta(z;\chi) \text{ und } g(z)=\Theta(z;\overline{\chi});$$

man beachte zudem $a_0=\chi(0)=0$. Schließlich kann mit der Transformationsformel $R\equiv 0$ gesetzt werden, was offenbar den Bedingungen genügt. Da die Koeffizientenfolgen beider Thetafunktionen trivialerweise polynomiell anwachsen, folgt hiermit bereits

$$\Lambda_{2N}\left(\frac{1}{2}-s;\Theta(\cdot,\chi)\right) = \frac{\sqrt{N}}{\mathcal{G}(\overline{\chi})}\Lambda_{2N}(s;\Theta(\cdot,\overline{\chi}))$$

mit $\Lambda_{2N}(s;\Theta(\cdot,\chi)) = 2\Lambda(2s;\chi)$. Die behauptete Funktionalgleichung folgt jetzt mit dem Wechsel $\chi\mapsto\overline{\chi}$. Da $\Lambda(s;\chi)$ zudem eine ganze Funktion ist, muss bereits $L(-2n;\chi)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gelten, da die Polstellen der Gammafunktion weggehoben werden. □

Mit völlig analogen Mitteln können wir auch eine Funktionalgleichung im Fall ungerader Dirichlet-Charaktere zeigen:

Satz 5.6. *Sei χ ein ungerader, primitiver Dirichlet-Charakter modulo einer natürlichen Zahl N. Dann lässt sich $L(s;\chi)$ zu einer ganzen Funktion fortsetzen. Weiter gilt für*

$$\Lambda(s;\chi) := \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s;\chi)$$

die Funktionalgleichung

$$\Lambda(1-s;\overline{\chi}) = i\frac{\sqrt{N}}{\mathcal{G}(\chi)}\Lambda(s;\chi).$$

Insbesondere gilt $L(-1-2n;\chi) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Wir nutzen die in Satz 3.42 bewiesene Transformationsformel

$$\mathcal{G}(\overline{\chi})\,\Theta_1\left(-\frac{1}{z};\chi\right) = i\sqrt{N}\left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{3}{2}}\Theta_1(z;\overline{\chi}) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H},$$

und wenden den Bochner'schen Umkehrsatz 4.47 an. In dessen Rahmen gilt offenbar

$$k = \frac{3}{2},\ C = i\frac{\sqrt{N}}{\mathcal{G}(\overline{\chi})},\ \lambda = 2N \quad \text{sowie} \quad f(z) = \Theta(z;\chi) \text{ und } g(z) = \Theta(z;\overline{\chi});$$

man beachte zudem $a_0 = \chi(0) = 0$. Schließlich kann mit der Transformationsformel $R \equiv 0$ gesetzt werden, was offenbar den Bedingungen genügt. Da die Koeffizienten beider Thetafunktionen trivialerweise polynomiell anwachsen, folgt hiermit bereits

$$\Lambda_{2N}\left(\frac{3}{2}-s;\Theta(\cdot,\chi)\right) = i\frac{\sqrt{N}}{\mathcal{G}(\overline{\chi})}\Lambda_{2N}(s;\Theta(\cdot,\overline{\chi}))$$

mit $\Lambda_{2N}(s;\Theta(\cdot,\chi)) = 2\Lambda(2s-1;\chi)$. Die behauptete Funktionalgleichung folgt jetzt mit dem Wechsel $\chi \mapsto \overline{\chi}$. Da $\Lambda(s;\chi)$ zudem eine ganze Funktion ist, muss bereits $L(-2n-1;\chi) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten, da die Polstellen der Gammafunktion weggehoben werden. □

Es ist möglich, alle Fälle der Funktionalgleichung für $L(s;\chi)$ in eine gemeinsame Form zu bringen. Hierfür setzen wir

$$a_\chi := \frac{1-\chi(-1)}{2}.$$

Dann folgt aus dem Bisherigen unmittelbar:

Satz 5.7. *Sei χ ein primitiver Dirichlet-Charakter modulo einem natürlichen N. Dann gilt für*

$$\Lambda(s;\chi) := \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{s+a_\chi}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a_\chi}{2}\right) L(s;\chi)$$

die Funktionalgleichung

$$\Lambda(1-s;\overline{\chi}) = i^{a_\chi}\frac{\sqrt{N}}{\mathcal{G}(\chi)}\Lambda(s;\chi).$$

Für nicht-prinzipales χ ist hierbei $\Lambda(s;\chi)$ eine ganze Funktion und beschränkt auf jedem Vertikalstreifen $\mathbb{S}_{a,b}$ mit reellen $a < b$.

Korollar 5.8. *Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo einem natürlichen N. Dann gibt es für alle reellen $a < b$ ein $\sigma \in \mathbb{R}$ mit*

$$L(s;\chi) = O_{a,b}(|\mathrm{Im}(s)|^{\sigma}) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_{a,b} \text{ und } |s| \to \infty.$$

Beweis. Da χ periodisch ist, gibt es eine Konstante C, nämlich

$$C := \frac{1}{N}\int_0^N \sum_{0<n\leq x} \chi(n)\,\mathrm{d}x,$$

so dass

$$I(x) := \int_0^x \left(\sum_{0<n\leq t}\chi(n) - C\right)\mathrm{d}t$$

beschränkt ist. Damit und wegen Satz 5.7 können wir Proposition 4.54 anwenden und es folgt die Behauptung. □

Beispiel 5.9. *Sei χ_{-4} der in Bemerkung 3.24 studierte primitive Dirichlet-Charakter modulo 4. Wir betrachten die Dirichlet-Reihe*

$$Q_2(s) := 4\zeta(s)L(s;\chi_{-4}).$$

Dann lässt sich die Funktion $\Lambda_2(s) := \pi^{-s}\Gamma(s)Q_2(s)$ holomorph nach $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ fortsetzen mit einfachen Polen in $s = 0$ und $s = 1$ und erfüllt dort die Funktionalgleichung

$$\Lambda_2(1-s) = \Lambda_2(s),$$

denn: Nach den Sätzen 4.41 und 5.6 besitzt $Q_2(s)$ und somit auch $\Lambda_2(s)$ eine holomorphe Fortsetzung nach $\mathbb{S}_0 \setminus \{1\}$ mit einer einfachen Polstelle in $s = 1$. Mit der Duplikationsformel 4.28 und wegen $\chi_{-4}(-1) = -1$ gilt weiter

$$\begin{aligned}\Lambda_2(s) &\overset{4.28}{=} \pi^{-\frac{s}{2}}\pi^{-\frac{s+1}{2}}2^{s+1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta(s)L(s;\chi_{-4})\\ &= \Lambda(s)\Lambda(s;\chi_{-4}).\end{aligned}$$

Mit Beispiel 4.48 und Satz 5.7 folgt sogleich

$$\Lambda_2(1-s) = \Lambda(1-s)\Lambda(1-s;\chi_{-4}) = \frac{2i}{\mathcal{G}(\chi_{-4})}\Lambda(s)\Lambda(s;\chi_{-4}) = \Lambda_2(s)$$

und somit die behauptete Funktionalgleichung und die holomorphe Fortsetzbarkeit nach $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ mit einfachen Polstellen in $s = 0$ und $s = 1$. #

Für die Residuenberechnung bemerken wir

$$\operatorname{res}_{s=1} \Lambda_2(s) = \frac{4\Gamma(1)L(1;\chi_{-4})}{\pi} \cdot \operatorname{res}_{s=1} \zeta(s) \overset{4.41}{=} \frac{4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}}{\pi} = 1$$

und mit der Funktionalgleichung folgt

$$\operatorname{res}_{s=0} \Lambda_2(s) = -1.$$

Insgesamt erhalten wir, dass die Funktion $\Lambda_2(s) - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}$ holomorph nach ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann. Wegen Proposition 4.31 und Korollar 5.8 ist $\Lambda_2(s) - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}$ weiter auf Vertikalstreifen endlicher Breite beschränkt, so dass wir den Bochner'schen Umkehrsatz 4.47 mit $R(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ und $\lambda = 2$ anwenden können. Die Funktion

$$\begin{aligned} f_2(z) &= 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} (\iota^0 * \chi_{-4})(n) q^{\frac{n}{2}} \\ &= 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{-4}(n) \frac{q^{\frac{n}{2}}}{1 - q^{\frac{n}{2}}} \\ &= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{n}{2}} + q^{-\frac{n}{2}}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cos(\pi n z)} \end{aligned}$$

erfüllt also für alle $z \in \mathbb{H}$ die Transformationsformeln

$$f_2(z+2) = f(z) \qquad \textit{und} \qquad f_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right) f_2(z).$$

5.2 Werte an ganzen Stellen

Wir hatten in Aufgabe 4.6 bereits gesehen, dass die Werte $\zeta(2k)$ mit $k \in \mathbb{N}$ eng mit den Bernoulli-Zahlen zusammenhängen. In diesem Abschnitt weiten wir diese Erkenntnis auf Dirichlet'sche L-Funktionen aus. Damit liefern wir gleichzeitig einen zweiten Beweis für die Formeln für $\zeta(2k)$. Die Strategie sieht dieses Mal vor, zunächst die Werte an bestimmten nichtpositiven ganzen Zahlen zu bestimmen und dann die Funktionalgleichung zu verwenden. Zuerst benötigen wir dafür eine geeignete Verallgemeinerung der klassischen Bernoulli-Zahlen:

Definition 5.10. *Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo einem natürlichen N. Dann definieren wir die Bernoulli-Zahlen $B_{n,\chi}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ als Koeffizienten der Entwicklung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n,\chi} z^n}{n!} := \sum_{a=0}^{N-1} \frac{\chi(a) z e^{az}}{e^{Nz} - 1}.$$

Diese Verallgemeinerung ist als solche sinnvoll, wie wir gleich sehen werden. Ist speziell $N = 1$ und $\chi = \chi_1$ der triviale Charakter, so sieht man schnell $B_{n,\chi_1} = B_n$.

Bemerkung 5.11. *In der Literatur ist häufig die alternative Definition*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^*_{n,\chi} z^n}{n!} = \sum_{a=1}^{N} \frac{\chi(a) z e^{az}}{e^{Nz} - 1}$$

zu sehen, die im Fall $N \geq 2$ mit der unseren übereinstimmt. Jedoch erzeugt diese für B^*_{1,χ_1} einen von B_1 verschiedenen Wert, weshalb wir sie als unnatürlich ansehen.

Proposition 5.12. *Sei χ ein nicht-prinzipaler, primitiver Dirichlet-Charakter modulo einer natürlichen Zahl N. Dann gelten für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv a_\chi \mod (N)$ die Formeln*

$$L(n;\chi) = (-1)^{1+\frac{n-a_\chi}{2}} \frac{\mathcal{G}(\chi)}{2i^{a_\chi}} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^n \frac{B_{n,\overline{\chi}}}{n!}$$

und

$$L(1-n;\chi) = -\frac{B_{n,\chi}}{n}.$$

Im Fall $n \not\equiv a_\chi \mod (N)$ gilt bereits $L(1-n;\chi) = 0$.

Beweis. Die Aussage über die Nullstellen haben wir schon in den Sätzen 5.5 und 5.6 gezeigt.

Mit der N-Periodizität von χ, $N \geq 2$ und $\chi(0) = \chi(N) = 0$ ergibt sich weiter für alle $t > 0$

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) e^{-mt} &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-Nmt} \sum_{a=1}^{N} \chi(a) e^{-at} = \sum_{a=1}^{N} \frac{\chi(a) e^{-at}}{1 - e^{-Nt}} \\ &= \chi(-1) \sum_{a=1}^{N} \frac{\chi(N-a) e^{(N-a)t}}{e^{Nt} - 1} = \chi(-1) \sum_{a=0}^{N-1} \frac{\chi(a) e^{at}}{e^{Nt} - 1}\end{aligned}$$

und nach Definition 5.10 erhalten wir so für hinreichend kleine $t > 0$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) e^{-mt} = \chi(-1) \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{B_{n+1,\chi} t^n}{(n+1)!}.$$

Mit Proposition 4.40 folgt hieraus sofort

$$L(-n;\chi) = (-1)^n n! \chi(-1) \frac{B_{n+1,\chi}}{(n+1)!} = (-1)^n \chi(-1) \frac{B_{n+1,\chi}}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

und also

$$L(1-n;\chi) = (-1)^{n-1} \chi(-1) \frac{B_{n,\chi}}{n} \overset{n \equiv a_\chi \bmod (N)}{=} -\frac{B_{n,\chi}}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das ist die Behauptung für die nicht-positiven Stellen. Für die positiven Stellen nutzen wir die Funktionalgleichung: Im Fall, dass χ gerade ist, gilt für gerade $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
L(n;\chi) &\overset{5.5}{=} \frac{\mathcal{G}(\chi)\left(\frac{\pi}{N}\right)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)L(1-n;\overline{\chi})}{\sqrt{N}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
&\overset{(4.11)}{=} -\frac{\mathcal{G}(\chi)\left(\frac{\pi}{N}\right)^{\frac{2n-1}{2}}(-4)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!\sqrt{\pi}B_{n,\overline{\chi}}}{\sqrt{N}n!\left(\frac{n}{2}-1\right)!n} \\
&= (-1)^{1+\frac{n}{2}}\frac{\mathcal{G}(\chi)\left(\frac{\pi}{N}\right)^{n}4^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!B_{n,\overline{\chi}}}{2n!\left(\frac{n}{2}\right)!} \\
&= (-1)^{1+\frac{n}{2}}\frac{\mathcal{G}(\chi)}{2}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{n}\frac{B_{n,\overline{\chi}}}{n!},
\end{aligned}$$

womit wegen $a_\chi = 0$ die Behauptung in diesem Falle folgt. Die Herleitung im ungeraden Falle ist genau analog und wir überlassen die Details dem Leser. □

Bemerkung 5.13. *Offenbar liegen die Nullstellen der Dirichlet'schen L-Funktionen je nach Parität des Charakters unterschiedlich verteilt, was nach Proposition 5.3 auch für nicht-primitive Charaktere gilt. Eine Eselsbrücke besagt, dass für gerade Charaktere die Nullstellen an den nicht-positiven geraden Stellen liegen, und für ungerade Charaktere an den nicht-positiven ungeraden Stellen. Ebenso sind für gerade Charaktere die Werte an positiven geraden Stellen gut bekannt, und für ungerade Charaktere die Werte an ungeraden positiven Stellen.*

Beispiel 5.14. *Unter Verwendung von Proposition 5.12 können einige interessante Reihenwerte direkt berechnet werden, etwa mit dem primitiven Charakter χ_{-4} modulo 4. Es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

5.3 Der Primzahlsatz in arithmetischen Progressionen

Der Beweis des Primzahlsatzes gehört zweifellos zu den großen mathematischen Errungenschaften des 19. Jahrhunderts. Zwar wurde der Primzahlsatz schon 1793 vom damaligen Teenager Carl Friedrich Gauß vermutet, doch erst 1896 voneinander unabhängig von Hadamard und de La Vallée Poussin[40] bewiesen, die auf Arbeiten von Riemann, Mertens[41] und von Mangoldt[42] aufbauten. Ihre Methodik war analytisch und sehr umständlich und gilt aus heutiger Sicht als überholt.

Um zunächst den klassischen Gauß'schen Primzahlsatz zu erklären, können wir direkt an Eulers Entdeckung

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots = \infty$$

[40] Charles-Jean Gustave Nicolas Baron de La Vallée Poussin (1866-1962)
[41] Franz Carl Josef Mertens (1840-1927)
[42] Hans Karl Friedrich von Mangoldt (1854-1925)

anknüpfen. Mit nicht allzu viel Aufwand lässt sich dieses Resultat zu

$$\sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq x}} \frac{1}{p} = \log(\log(x)) + O(1)$$

verfeinern (Übungsaufgabe). Heuristisch könnte man also schließen, dass die n-te Primzahl etwa den Wert $n\log(n)$ hat, denn es gilt auch

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\log(t)} = \log(\log(x)) + O(1).$$

Dies suggeriert, dass es im Intervall $[2, x]$ für $x \to \infty$ asymptotisch etwa $\frac{x}{\log(x)}$ Primzahlen $\pi(x)$ gibt, und genau das ist die Aussage des Gauß'schen Primzahlsatzes:

Satz 5.15 (Primzahlsatz)**.** *Bezeichnet $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen p mit $2 \leq p \leq x$, so gilt*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \quad \textit{für } x \to \infty.$$

Wenn wir uns mit Charakteren und Fourier-Koeffizienten von Modulformen beschäftigen, ist es von entscheidender Bedeutung, auch Primzahlen in arithmetischen Progressionen zu studieren. Bereits Dirichlet erkannte, dass jede arithmetische Progression unendlich viele Primzahlen enthält, sofern dies nicht aus trivialen Gründen unmöglich ist:

Satz 5.16 (Dirichlet'scher Primzahlsatz)**.** *Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $N \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv a \bmod (N)$.*

Beispiel 5.17. *Die Folgen $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ und $17, 1017, 2017, 3017, \ldots$ enthalten jeweils unendlich viele Primzahlen. Andererseits enthält die Folge $2, 6, 10, 14, 18, \ldots$ natürlich nur die Primzahl 2.*

Zur Untersuchung von Primzahlen in arithmetischen Progressionen benötigen wir die sogenannte TSCHEBYSCHOW-Funktion:[43]

Definition 5.18. *Seien N eine positive ganze Zahl und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$. Dann definieren wir die* ***Tschebyschow-Funktion*** *durch*

$$\vartheta_{a,N}(x) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ prim} \\ p \equiv a \bmod (N)}} \log(p) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Als erstes untersuchen wir die Asymptotik der Tschebyschow-Funktionen im Grenzübergang $x \to \infty$:

[43] Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow (1821-1894)

Lemma 5.19. *Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$ gilt die obere Schranke $\vartheta_{a,N}(x) = O(x)$ für $x \to \infty$.*

Beweis. Offenbar gilt $\vartheta_{a,N}(x) \ll \vartheta_{1,1}(x)$, so dass es ausreicht, die Aussage für den Fall $a = N = 1$ zu zeigen. Hierfür müssen wir die Beschränktheit des Quotienten

$$\frac{\vartheta_{1,1}(x)}{x}$$

im Grenzübergang $x \to \infty$ nachweisen. Mit dem Binomischen Lehrsatz erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} 2^{2n} = (1+1)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \\ &\geq \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &\geq \prod_{\substack{n<p\leq 2n \\ p \text{ prim}}} p \\ &= e^{\vartheta_{1,1}(2n) - \vartheta_{1,1}(n)} \end{aligned}$$

und mit der strengen Monotonie der reellen Exponentialfunktion also

$$\vartheta_{1,1}(2n) - \vartheta_{1,1}(n) \leq 2n \cdot \log(2).$$

Ändern wir das Argument von $\vartheta_{1,1}$ um einen beschränkten Term ab, so gilt

$$\vartheta_{1,1}(x + O(1)) - \vartheta_{1,1}(x) = O(\log(x)) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$\vartheta_{1,1}(x) - \vartheta_{1,1}\left(\frac{x}{2}\right) \leq C \cdot x \qquad \text{für ein } C > \log(2) \text{ und } x > x_0(C).$$

Durch eine Teleskopsumme mit $\frac{x}{2^R} \geq x_0(C) > \frac{x}{2^{R+1}}$ folgt daher

$$\begin{aligned} \vartheta_{1,1}(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\vartheta_{1,1}\left(\frac{x}{2^r}\right) - \vartheta_{1,1}\left(\frac{x}{2^{r+1}}\right)\right) \\ &\leq \sum_{r=0}^{R} \left(\vartheta_{1,1}\left(\frac{x}{2^r}\right) - \vartheta_{1,1}\left(\frac{x}{2^{r+1}}\right)\right) + O(1) \\ &\leq Cx \sum_{r=0}^{R} \frac{1}{2^r} + O(1) \\ &= O(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und somit das Lemma. $\square$

Passend zur oben eingeführten Tschebyschow-Funktion definieren wir nun die Dirichlet-Reihe

$$\Phi_{a,N}(s) := \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \equiv a \bmod (N)}} \log(p) p^{-s}.$$

Mit den Orthogonalitätsrelationen aus Satz 3.9 erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi_{a,N}(s) &= \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{p \text{ prim}} \sum_{\chi \bmod (N)} \overline{\chi}(a)\chi(p) \log(p) p^{-s} \\ &= \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi \bmod (N)} \overline{\chi}(a) \sum_{p \text{ prim}} \chi(p) \log(p) p^{-s}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Um die Funktion $\Phi_{a,N}$ zu analysieren, ist also ein Studium der Funktionen

$$\Phi(s;\chi) := \sum_{p \text{ prim}} \chi(p) \log(p) p^{-s}$$

für sämtliche Dirichlet-Charaktere χ modulo N hinreichend. Es gilt nun aber das folgende Lemma:

Lemma 5.20. *Für einen beliebigen Dirichlet-Charakter χ modulo einem natürlichen N gilt*

$$\Phi(s;\chi) = -\frac{L'(s;\chi)}{L(s,\chi)} + H(s;\chi),$$

wobei $H(s;\chi)$ eine in $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}$ holomorphe Funktion ist.

Beweis. Sei zunächst $\mathrm{Re}(s) > 1$. Dann erhalten wir durch logarithmisches Ableiten des Euler-Produktes für $L(s;\chi)$ aus Satz 5.2 sogleich:

$$\begin{aligned} -\frac{L'(s;\chi)}{L(s;\chi)} &= -\sum_{p \text{ prim}} (1-\chi(p)p^{-s}) \left((1-\chi(p)p^{-s})^{-1} \right)' \\ &= \sum_{p \text{ prim}} (1-\chi(p)p^{-s}) \cdot \frac{\chi(p)\log(p)p^{-s}}{(1-\chi(p)p^{-s})^2} \\ &= \sum_{p \text{ prim}} \chi(p) \log(p) p^{-s} \left(1 + h_{\chi(p)}(p^{-s}) \right) \end{aligned}$$

mit wegen $|\chi(p)| \leq 1$ in der Einheitskreisscheibe holomorphen Funktionen $h_{\chi(p)}$, die auf $\overline{\mathbb{S}_{\frac{1}{3}}}$ gleichmäßig $h_{\chi(p)}(p^{-s}) = O(p^{-s})$ erfüllen. Es folgt, dass für

$$H(s;\chi) := \sum_{p \text{ prim}} \chi(p) \log(p) p^{-s} h_{\chi(p)}(p^{-s})$$

die Reihe zur Rechten gleichmäßig auf Kompakta in $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}$ konvergiert, womit $H(s;\chi)$ dort nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß eine holomorphe Funktion darstellt, was zu zeigen war. $\square$

Aus Lemma 5.20 folgt mit (5.1) sofort

$$\Phi_{a,N}(s) = -\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi \bmod (N)} \overline{\chi}(a) \frac{L'(s;\chi)}{L(s;\chi)} + H_{a,N}(s) \tag{5.2}$$

mit einer auf der Halbebene $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}$ holomorphen Funktion $H_{a,N}$. Die Identität (5.2) ist der Ausgangspunkt für unsere weiteren Untersuchungen. Mit Proposition 5.4 und Lemma 5.20 folgt, dass sich $\Phi_{a,N}$ meromorph nach $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}$ fortsetzen lässt. Wir wollen diese Aussage verfeinern, indem wir zeigen, dass $s = 1$ der einzige Pol von $\Phi_{a,N}$ auf der Geraden $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) = 1\}$ ist. Dazu benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 5.21. *Für einen beliebigen Dirichlet-Charakter χ modulo einem natürlichen N gilt*

$$L(1+it;\chi) \neq 0 \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}.$$[44]

Beweis. Maßgeblich für den Beweis des Lemmas ist die für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gültige trigonometrische Identität

$$\begin{aligned} V(\alpha) &:= 3 + 4\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \\ &= 3 + 4\cos(\alpha) + \left(\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2\right) \\ &= 3 + 4\cos(\alpha) + \left(2\cos(\alpha)^2 - 1\right) \\ &= 2(1+\cos(\alpha))^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Für $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$ schreiben wir $\chi(n) = \chi_1(n)e^{i\alpha(n;\chi)}$ mit einem $0 \leq \alpha(n;\chi) < 2\pi$. Dann gelten trivialerweise $\alpha(n;\chi_1) = 0$ und $\alpha(n;\chi^2) \equiv 2\alpha(n;\chi) \bmod (2\pi)$.

Mittels Logarithmieren des Euler-Produktes 5.2 im Hauptzweig erhalten wir

$$\mathrm{Log}(L(s;\chi)) = -\sum_{p \text{ prim}} \mathrm{Log}\left(1 - \chi(p)p^{-s}\right) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_1,$$

und mit dessen Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(L(s;\chi)) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \text{ prim}} \frac{\chi(p)^m}{m} p^{-sm} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \nmid N}} \frac{e^{i\alpha(p;\chi)m}}{m} p^{-sm} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \nmid N}} \frac{e^{i(\alpha(p;\chi) - t\log(p))m}}{m} p^{-\sigma m} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_1. \end{aligned}$$

[44] Im Falle eines nicht-prinzipalen Dirichlet-Charakters χ ist die L-Funktion $L(s;\chi)$ bekanntlich auf der kompletten Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1$ holomorph und es ist klar, wie die Behauptung des Lemmas zu verstehen ist. Im Falle des Hauptcharakters gilt diese Überlegung nur auf der um den Punkt $s = 1$ reduzierten Geraden, da $L(s;\chi_1)$ dort eine Polstelle besitzt. Obwohl der Funktionswert $L(1;\chi_1)$ also nicht definiert ist, schreiben wir auch in diesem Fall $L(1;\chi_1) \neq 0$, um dem Rechnung zu tragen, dass eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion nicht gleichzeitig ein Pol und hebbar sein kann.

Mit der Formel $\operatorname{Re}(\operatorname{Log}(z)) = \log|z|$ und der trigonometrischen Identität (5.3) folgt hieraus

$$\begin{aligned}
&3\log(L(\sigma;\chi_1)) + 4\log|L(\sigma+it;\chi)| + \log|L(\sigma+2it;\chi^2)| \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p\nmid N}} \frac{3 + 4\cos\big((\alpha(p;\chi) - t\log(p))m\big) + \cos\big((2\alpha(p;\chi) - 2t\log(p))m\big)}{m} p^{-\sigma m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p\nmid N}} \frac{V\big((\alpha(p;\chi) - t\log(p))m\big)}{m} p^{-\sigma m} \geq 0 \quad \text{für alle } \sigma + it \in \mathbb{S}_1
\end{aligned}$$

und nach Exponenzieren

$$L(\sigma;\chi_1)^3|L(\sigma+it;\chi)|^4|L(\sigma+2it;\chi^2)| \geq 1 \qquad \text{für alle } \sigma+it \in \mathbb{S}_1. \tag{5.4}$$

Zum eigentlichen Beweis der Behauptung des Lemmas unterscheiden wir nun zwei Fälle:

Fall 1: χ ist nicht-reell. Dann ist $\chi \neq \chi_1 \neq \chi^2$. Wäre nun $L(1+it;\chi) = 0$ für ein $t \in \mathbb{R}$, so folgte hieraus und mit Proposition 5.4 sofort

$$\lim_{\sigma \to 1^+} L(\sigma;\chi_1)^3|L(\sigma+it;\chi)|^4|L(\sigma+2it;\chi^2)| = 0.$$

Dies steht im Widerspruch zu (5.4), so dass $L(1+it;\chi) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten muss.

Fall 2: χ ist reell. Im Fall $t \neq 0$ können wir genauso argumentieren wie in Fall 1. Es verbleibt die Behauptung für $t = 0$ zu zeigen, dass also $L(1;\chi) \neq 0$ gilt. Wir betrachten dafür die Funktion

$$Z(s) := \zeta(s)L(s;\chi).$$

Mit $\rho_n := \sum_{d|n} \chi(d)$ und Satz 5.2 gilt für diese

$$\begin{aligned}
Z(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n n^{-s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}} \cdot \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} \\
&= \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ \chi(p)=1}} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ \chi(p)=-1}} \frac{1}{1-p^{-2s}} \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ \chi(p)=0}} \frac{1}{1-p^{-s}} \\
&= \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ \chi(p)=1}} \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \dots\right) \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ \chi(p)=0}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) \\
&\quad \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ \chi(p)=-1}} \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \dots\right).
\end{aligned}$$

Die schwach multiplikative zahlentheoretische Funktion ρ_n erfüllt demnach $\rho_n \geq 0$ und $\rho_{n^2} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $L(1;\chi) = 0$, so lässt sich Z nach Beispiel 4.48 und den Sätzen 5.5 und

5.6 als ganze Funktion fortsetzen. Nach dem Satz von Landau 4.12 ist im Umkehrschluss die betroffene Dirichlet-Reihe überall konvergent. Für $s = \frac{1}{2}$ gilt aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} \geq \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ Quadratzahl}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

und dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. $\square$

Jetzt können wir folgendes Schlüssellemma zeigen:

Lemma 5.22. *Die Funktion*

$$\Phi^*_{a,N}(s) := \Phi_{a,N}(s) - \frac{1}{\varphi(N)} \frac{1}{s-1}$$

kann holomorph nach $\overline{\mathbb{S}_1}$ fortgesetzt werden.

Beweis. Nach (5.2) gibt es eine auf $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}$ holomorphe Funktion $H_{a,N}$ mit

$$\Phi_{a,N}(s) = -\frac{1}{\varphi(N)} \frac{L'(s;\chi_1)}{L(s;\chi_1)} - \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\substack{\chi \bmod (N) \\ \chi \neq \chi_1}} \overline{\chi}(a) \frac{L'(s;\chi)}{L(s;\chi)} + H_{a,N}(s)$$

und nach Lemma 5.21 dehnen sich die zwei vorderen Terme holomorph nach $\overline{\mathbb{S}_1} \setminus \{1\}$ aus. Hierbei ist der mittlere Term sogar holomorph auf $\overline{\mathbb{S}_1}$ und da $L(s;\chi_1)$ einen einfachen Pol in $s = 1$ hat, folgt

$$\operatorname{res}_{s=1} \left(-\frac{1}{\varphi(N)} \frac{L'(s;\chi_1)}{L(s;\chi_1)} \right) = \frac{1}{\varphi(N)}$$

und damit die Behauptung. $\square$

Als nächstes wollen wir die Funktion $\Phi_{a,N}$ in Termen der Tschebyschow-Funktion $\vartheta_{a,N}$ ausdrücken. Dies wird die entscheidende Brücke zum Primzahlsatz sein. Dafür benötigen wir eine bedeutende Integraltransformation:

Definition 5.23. *Für eine stückweise stetige Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ definieren wir die* ***(formale) Laplace-Transformierte***[45] *von f als*

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-ts} \, \mathrm{d}t.$$

Die Zuordnung $f \mapsto \mathcal{L}(f)$ nennen wir die ***Laplace-Transformation****.*

Die Laplace-Transformation hat viele Anwendungen in der Mathematik und ist auch mit der Mellin-Transformation verwandt:

[45] Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827)

Lemma 5.24. *Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion mit*

$$f(t) = O(e^{\nu t}) \quad \text{für } t \to \infty \text{ und ein } \nu \in \mathbb{R}.$$

Ist weiter $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ die durch

$$g(u) := \begin{cases} f(\log(u)) & \text{für } u \geq 1, \\ 0 & \text{für } 0 \leq u < 1. \end{cases}$$

definierte stückweise stetige Funktion, so gilt

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{M}(g)(-s).$$

Insbesondere ist die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f)(s)$ auf der Halbebene $\mathbb{S}_\nu$ holomorph.

Beweis. Durch die Variablentransformation $t = \log(u)$ erhalten wir einerseits

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-ts}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty f(\log(u))u^{-s-1}\,\mathrm{d}u = \mathcal{M}(g)(-s).$$

Andererseits ist g offenbar stückweise stetig auf $(0,\infty)$. Wegen $f(t) = O(e^{\nu t})$ gilt $g(u) = O(u^\nu)$ für $u \to \infty$ und nach Konstruktion ist $g(u) = O(u^A)$ wenn $u \to 0$ für alle $A > 0$. Nach Proposition 4.21 ist $\mathcal{M}(g)(s)$ damit holomorph auf dem Vertikalstreifen $\mathbb{S}_{-\infty,-\nu}$. Insgesamt folgt nun die Behauptung. □

Der folgende Taubersatz wurde im Zuge der hier ausgeführten Beweisstrategie des Primzahlsatzes 1972 von Newman bewiesen und 1980 veröffentlicht. Mit seiner Hilfe können wir zeigen, dass sich der Term $\vartheta_{a,N}(x) - \frac{x}{\varphi(N)}$ mit teilerfremden a und $N > 0$ für $x \to \infty$ asymptotisch kleiner verhält als x. Dafür wird diese Differenz mit einem konvergenzerzeugenden Faktor auf $[1,\infty)$ integriert und der Tauber-Satz kontrolliert dieses Integral:

Satz 5.25 (Tauber-Satz von Newman)**.** *Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, beschränkte Funktion, deren Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f)(s)$ eine holomorphe Fortsetzung auf die abgeschlossene Halbebene $\overline{\mathbb{S}_0}$ besitzt. Dann konvergiert das Integral $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ und es gilt*

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(0).$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass wegen $f(t) = O(1)$ die zu f gehörige Laplace-Transformierte nach Lemma 5.24 auf der rechten Halbebene $\mathbb{S}_0$ holomoph ist. Für ein beliebiges $T > 0$ ist zudem die Funktion

$$g_T(s) := \int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

ganz,

denn: Die Funktion $h_T(t) := \mathbb{1}_{(0,T)}(t)f(t)$ ist stückweise stetig auf $(0,\infty)$ und erfüllt $h_T(t) = O(e^{\nu t})$ für alle $\nu < 0$. Unmittelbar nach Lemma 5.24 ist dann g_T eine ganze Funktion. #

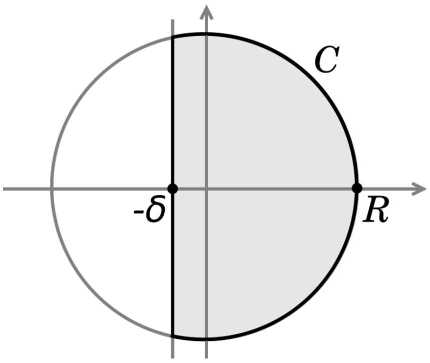
Zum Beweis des Satzes genügt es nun offenbar,

$$\lim_{T\to\infty} g_T(0) = \mathcal{L}(f)(0)$$

zu zeigen. Für große $R > 0$ betrachten wir hierfür den Rand C der abgeschnittenen Kreisscheibe $\{s \in \mathbb{C} : |s| \leq R, \operatorname{Re}(s) \geq -\delta\}$, wobei $\delta > 0$ abhängig von R so klein gewählt sei, dass $\mathcal{L}(f)(s)$ holomorph in ganz C ist. Dabei ist zu beachten, dass Holomorphie in einem (Rand-)Punkt stets in eine Umgebung dieses Punktes ausstrahlt, etwa wegen der vorhandenen Taylor-Entwicklung. Mit der Cauchy'schen Integralformel folgt

$$\mathcal{L}(f)(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \big(\mathcal{L}(f)(s) - g_T(s)\big)e^{sT}\left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right)\frac{\mathrm{d}s}{s}, \tag{5.5}$$

wobei der Term $\frac{s^2}{R^2}$ durch eine komplizierte Null entsteht und $e^0 = 1$ zu beachten ist. Wir zeigen im Folgenden, dass das Integral in (5.5) für $T \to \infty$ gegen 0 strebt.



Auf dem Halbkreis $C_+ := C \cap \mathbb{S}_0$ ist der Integrand durch $\frac{2B}{R^2}$ mit $B := \max_{t\geq 0} |f(t)|$ beschränkt, denn einerseits ist

$$|\mathcal{L}(f)(s) - g_T(s)| = \left|\int_T^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\right| \leq B\int_T^\infty \left|e^{-st}\right|\mathrm{d}t = \frac{Be^{-\operatorname{Re}(s)T}}{\operatorname{Re}(s)}$$

und andererseits

$$\left|e^{sT}\left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right)\frac{1}{s}\right| = e^{\operatorname{Re}(s)T}\cdot\frac{2\operatorname{Re}(s)}{R^2}.$$

Nach der Standardabschätzung für Integrale ist der Beitrag des Integrals über C_+ an $\mathcal{L}(f)(0) - g_T(0)$ durch $\frac{B}{R}$ beschränkt.

Für den Kurventeil $C_- := C \cap \mathbb{S}_{-\infty,0}$ betrachten wir die Integrale über $\mathcal{L}(f)$ und g_T separat. Da g_T eine ganze Funktion ist, kann der Weg C_- hier zum Halbkreis $\{s \in \mathbb{C} : |s| = R, \operatorname{Re}(s) < 0\}$ deformiert werden, ohne den Wert des Integrals darüber zu verändern. Mit derselben Argumentation wie für C_+ gilt

$$|g_T(s)| = \left|\int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\right| \leq B\int_{-\infty}^T |e^{-st}|\,\mathrm{d}t = \frac{Be^{-\operatorname{Re}(s)T}}{|\operatorname{Re}(s)|},$$

so dass auch dieser Beitrag durch $\frac{B}{R}$ beschränkt ist.

Zu guter Letzt geht das Integral über $\mathcal{L}(f)$ längs C_- für $T \to \infty$ gegen 0, denn der Integrand ist das Produkt aus der von T unabhängigen Funktion $\mathcal{L}(f)(s)(1+\frac{s^2}{R^2})\frac{1}{s}$ und aus der auf Kompakta in $\mathbb{S}_{-\infty,0}$ schnell und gleichmäßig gegen Null strebenden Funktion e^{Ts}. Daraus folgt

$$\limsup_{T\to\infty} |\mathcal{L}(f)(0) - g_T(0)| \leq \frac{2B}{R}$$

und im Grenzübergang $R \to \infty$ die Behauptung. □

Nun können wir eine erste Version des Primzahlsatzes in arithmetischen Progressionen beweisen:

Satz 5.26. *Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(a,N) = 1$ konvergiert das Integral*

$$\int_1^\infty \left(\vartheta_{a,N}(x) - \frac{x}{\varphi(N)}\right) x^{-2}\,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere gilt

$$\vartheta_{a,N}(x) \sim \frac{x}{\varphi(N)} \qquad \text{für } x \to \infty.$$

Beweis. Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(a,N) = 1$ erfüllt die stückweise stetige Funktion

$$f(t) = e^{-t}\vartheta_{a,N}(e^t) - \frac{1}{\varphi(N)} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{>0}$$

nach Lemma 5.19 die Wachstumsbedingung $f(t) = O(1)$ für $t \to \infty$, ist also beschränkt. Nach Proposition 4.38 gilt weiter

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_{a,N}(s+1)}{s+1} - \frac{1}{\varphi(N)s} &= \int_1^\infty \frac{\vartheta_{a,N}(x) - \frac{x}{\varphi(N)}}{x^{s+2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \left(e^{-t}\vartheta_{a,N}(e^t) - \frac{1}{\varphi(N)}\right) e^{-ts}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{L}(f)(s) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_0.\end{aligned}$$

Wegen $(s+1)^{-1} = 1 + O(s)$ für $s \to 0$ lässt sich nach Lemma 5.22 die Funktion auf der linken Seite und somit auch $\mathcal{L}(f)$ holomorph auf die abgeschlossene Halbebene $\overline{\mathbb{S}_0}$ fortsetzen. Hiermit sind für f die Voraussetzungen des Tauber-Satzes von Newman 5.25 erfüllt, mit dem somit die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \left(e^{-t}\vartheta_{a,N}(e^t) - \frac{1}{\varphi(N)}\right) \mathrm{d}t = \int_1^\infty \left(\vartheta_{a,N}(x) - \frac{x}{\varphi(N)}\right) x^{-2}\,\mathrm{d}x \tag{5.6}$$

folgt. Es verbleibt die Asymptotik der Tschebyschow-Funktion für $x \to \infty$ zu untersuchen. Aus der Konvergenz von (5.6) folgern wir zunächst

$$\lim_{T\to\infty} \int_T^\infty \left(\vartheta_{a,N}(x) - \frac{x}{\varphi(N)} \right) x^{-2}\, \mathrm{d}x = 0. \tag{5.7}$$

Jetzt argumentieren wir durch Widerspruch und nehmen dafür zunächst an, es gäbe ein $\lambda > 1$ mit $\lambda \frac{T}{\varphi(N)} \leq \vartheta_{a,N}(T)$ für unendlich viele Werte $T \in \mathbb{N}$. Da $\vartheta_{a,N}$ monoton wächst, folgte dann

$$\begin{aligned}\int_T^{\lambda T} \frac{\vartheta_{a,N}(x) - \frac{x}{\varphi(N)}}{x^2}\, \mathrm{d}x &\geq \frac{1}{\varphi(N)} \int_T^{\lambda T} \frac{\lambda T - x}{x^2}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\varphi(N)} \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - x}{x^2}\, \mathrm{d}x > 0\end{aligned}$$

für jedes solche T und im Widerspruch zu (5.7) also

$$\limsup_{T\to\infty} \int_T^{\lambda T} \left(\vartheta_{a,N}(x) - \frac{x}{\varphi(N)} \right) x^{-2}\, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{\varphi(N)} \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - x}{x^2}\, \mathrm{d}x > 0.$$

Wir erhalten also

$$\text{Für alle } \lambda > 1 \text{ und alle bis auf endlich viele } T \text{ gilt } \vartheta_{a,N}(T) < \lambda \frac{T}{\varphi(N)}. \tag{5.8}$$

Nehmen wir nun an, es gäbe ein $\lambda > 1$ mit $\vartheta_{a,N}(T) \leq \lambda^{-1} \frac{T}{\varphi(N)}$ für unendlich viele Werte $T \in \mathbb{N}$. Wieder wegen der Monotonie von $\vartheta_{a,N}$ folgte dann

$$\begin{aligned}\int_{\lambda^{-1}T}^{T} \frac{\vartheta_{a,N}(x) - \frac{x}{\varphi(N)}}{x^2}\, \mathrm{d}x &\geq \frac{1}{\varphi(N)} \int_{\lambda^{-1}T}^{T} \frac{\lambda^{-1}T - x}{x^2}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\varphi(N)} \int_{\lambda^{-1}}^{1} \frac{\lambda^{-1} - x}{x^2}\, \mathrm{d}x < 0\end{aligned}$$

und im Widerspruch zu (5.7) auch

$$\liminf_{T\to\infty} \int_{\lambda^{-1}T}^{T} \left(\vartheta_{a,N}(x) - \frac{x}{\varphi(N)} \right) x^{-2}\, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{\varphi(N)} \int_{\lambda^{-1}}^{1} \frac{\lambda^{-1} - x}{x^2}\, \mathrm{d}x < 0.$$

Wir erhalten so

$$\text{Für alle } \lambda > 1 \text{ und alle bis auf endlich viele } T \text{ gilt } \lambda^{-1} \frac{T}{\varphi(N)} < \vartheta_{a,N}(T). \tag{5.9}$$

Die Behauptung über die Asymptotik der Tschebyschow-Funktion $\vartheta_{a,N}$ ergibt sich unmittelbar aus (5.8) und (5.9). □

Jetzt haben wir alle Resultate zusammen für den Beweis des Hauptsatzes. Hierfür definieren wir

$$\pi_{a,N}(x) := |\{p \text{ Primzahl} : p \leq x, p \equiv a \bmod (N)\}|.$$

Satz 5.27 (Primzahlsatz in arithmetischen Progressionen). *Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(a, N) = 1$ gilt*

$$\pi_{a,N}(x) \sim \frac{1}{\varphi(N)} \frac{x}{\log(x)} \quad \textit{für } x \to \infty.$$

Beweis. Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(a, N) = 1$ gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \vartheta_{a,N}(x) &= \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ prim} \\ p \equiv a \bmod (N)}} \log(p) \\ &\leq \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ prim} \\ p \equiv a \bmod (N)}} \log(x) \\ &= \log(x)\pi_{a,N}(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dieser Ungleichung zufolge gilt unter Benutzung der in Satz 5.26 hergeleiteten Asymptotik der Tschebyschow-Funktion

$$x^{1-\varepsilon} \ll \pi_{a,N}(x) \qquad \text{für } x \to \infty \text{ und alle } \varepsilon > 0. \tag{5.11}$$

Andererseits gilt trivialerweise

$$\pi_{a,N}(x^{1-\varepsilon}) = O(x^{1-\varepsilon}) \qquad \text{für } x \to \infty \text{ und alle } 1 > \varepsilon > 0$$

und somit

$$\begin{aligned} \vartheta_{a,N}(x) &\geq \sum_{\substack{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x \\ p \text{ prim} \\ p \equiv a \bmod (N)}} \log(p) \\ &\geq \sum_{\substack{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x \\ p \text{ prim} \\ p \equiv a \bmod (N)}} \log(x^{1-\varepsilon}) \\ &\geq \log(x^{1-\varepsilon}) \left(\pi_{a,N}(x) + O\left(x^{1-\varepsilon}\right)\right) \qquad \text{für } x \to \infty \text{ und alle } 1 > \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Nach Division durch $\log(x)\pi_{a,N}(x)$ folgt

$$(1 - \varepsilon)(1 + o(1)) \leq \frac{\vartheta_{a,N}(x)}{\log(x)\pi_{a,N}(x)} \overset{(5.10)}{\leq} 1 \qquad \text{für } x \to \infty \text{ und alle } 1 > \varepsilon > 0.$$

Wenn wir ε gegen 0 gehen lassen, folgt die Behauptung mit Satz 5.26. □

Offenbar sind der Primzahlsatz 5.15 und der Dirichlet'sche Primzahlsatz 5.16 unmittelbare Korollare von Satz 5.27. Zudem haben wir das folgende, bemerkenswerte

Korollar 5.28. *Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit* $\operatorname{ggT}(a, N) = 1$. *Dann gilt*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi_{a,N}(x)}{\pi(x)} = \frac{1}{\varphi(N)}.$$

Insbesondere sind die Primzahlen in den verschiedenen primen Restklassen modulo N asymptotisch gleichverteilt.

5.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. *Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo einem natürlichen N. Zeigen Sie dann die folgende Formel:*

$$L(0; \chi) = \begin{cases} -\frac{1}{N} \sum_{a=1}^{N} a\, \chi(a) & \text{für } 1 \equiv a_\chi \bmod (N), \\ 0 & \text{für } 1 \not\equiv a_\chi \bmod (N). \end{cases}$$

Aufgabe 5.2. *Zeigen Sie*

$$\sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq x}} \frac{1}{p} = \log(\log(x)) + O(1).$$

In den folgenden drei Übungsaufgaben zeigen wir weitgehend unabhängig von der in der Vorlesung behandelten Methode den 1850 bewiesenen Satz von Tschebyschow, der eine schwächere Version des damals noch nicht bewiesenen Primzahlsatzes darstellt:

Aufgabe 5.3. *In dieser Aufgabe untersuchen wir die Asymptotik für $x \to \infty$ der drei Funktionen*

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ prim}}} 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0},$$

$$\vartheta(x) := \vartheta_{1,1}(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ prim}}} \log(p) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0},$$

$$\psi(x) := \sum_{\substack{p^m \leq x \\ p \text{ prim},\, m \in \mathbb{N}}} \log(p) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Hierbei schreiben wir kurz

$$L_1 := \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}}, \; L_2 := \limsup_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x}, \; L_3 := \limsup_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) *Es gilt $\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$ und insbesondere $\vartheta(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.*

(b) *Es gilt $\psi(x) = \sum_{p \leq x} \lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \rfloor \log(p)$ und insbesondere $\psi(x) \leq \pi(x) \log(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.*

(c) *Es gilt* $L_2 \leq L_3 \leq L_1$.

(d) *Sei* $\alpha \in (0,1)$ *fest gewählt. Dann gilt* $\vartheta(x) \geq \alpha \log(x)\big(\pi(x) - \pi(x^\alpha)\big)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}_{>1}$ *und insbesondere* $L_2 \geq \alpha L_1$.

(e) *Es gilt* $L_1 = L_2 = L_3$*; wir schreiben hierfür kürzer* L.

Analog zum Bewiesenen kann man zeigen, dass die drei Größen

$$\ell_1 := \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}},\ \ell_2 := \liminf_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x},\ \ell_3 := \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

übereinstimmen; wir schreiben hierfür kürzer ℓ.

Aufgabe 5.4. *In dieser Aufgabe wollen wir in der Situation von Aufgabe 5.3 die Größen L nach oben und* ℓ *nach unten abschätzen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

(a) *Es gilt* $\vartheta(2^r) \leq 2^{r+1}\log(2)$ *für alle* $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(b) *Es gilt* $L \leq 4\log(2)$.

(c) *Seien* $n \in \mathbb{N}$ *und* $p \in \mathbb{P}$. *Dann ist der Exponent von* p *in der kanonischen Primfaktorzerlegung von* $n!$ *gegeben durch*

$$\nu_p(n!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \ldots,$$

wobei die Summe nach Definition der Gauß-Klammer endlich ist.

(d) *Für ein* $n \in \mathbb{N}$ *ist der Exponent von* p *in der kanonischen Primfaktorzerlegung von* $\binom{2n}{n}$ *gegeben durch*

$$\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{r\geq 1}^{M_p} \left(\lfloor \frac{2n}{p^r} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^r} \rfloor\right) \quad \textit{mit } M_p := \lfloor \frac{\log(2n)}{\log(p)} \rfloor.$$

(e) *Es gilt* $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und insbesondere* $\binom{2n}{n} \leq \prod_{p\leq 2n} p^{M_p}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(f) *Es gilt* $\psi(2n) \geq \log\left(\binom{2n}{n}\right)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: *Benutzen Sie (d), (e) und Aufgabe 1 (b).*

(g) *Es gilt* $2^{2n} < (2n+1)\binom{2n}{n}$ *und insbesondere* $\psi(2n) > 2n\log(2) - \log(2n+1)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(h) *Es gilt* $\ell \geq \log(2)$.

Aufgabe 5.5 (Satz von Tschebyschow)**.** *Folgern Sie aus Übungsaufgabe 5.4, dass es reelle Konstanten* $0 < a < b$ *gibt, so dass für hinreichend großes* $x \in \mathbb{R}$ *die Abschätzungen*

$$a\,\frac{x}{\log(x)} < \pi(x) < b\,\frac{x}{\log(x)}$$

gelten.

Aufgabe 5.6. *In dieser Aufgabe zeigen wir in Verallgemeinerung von Aufgabe 5.4 (a), dass die Tschebyschow-Funktion $\vartheta = \vartheta_{1,1}$ die Abschätzung*

$$\vartheta(n) < 2n\log(2) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{$*$}$$

erfüllt. Zeigen Sie hierfür die folgenden Aussagen:

(a) *Es gilt $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

 ***Hinweis:** Zeigen Sie zunächst die Identität $\binom{2n}{n} = 2^{2n}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *Es gilt $\log\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right) \geq \vartheta(2n-1) - \vartheta(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

 ***Hinweis:** Zeigen Sie zunächst die Identität $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(c) *Aus (a) und (b) folgt $\vartheta(2n-1) - \vartheta(n) < (2n-1)\log(2) - \frac{1}{2}\log(2n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(d) *Die Gültigkeit von $(*)$ für n impliziert diese nach (c) für $2n-1$ und damit auch für $2n$. Da die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ trivial überprüft werden können, folgt $(*)$ so in Allgemeinheit.*

Aufgabe 5.7 (Bertrand'sches Postulat)**.** *In dieser Aufgabe leiten wir das Bertrand'sche Postulat her, dass nämlich für jede natürliche Zahl n eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ existiert. Hierfür betrachten wir die Darstellung*

$$\log\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{\substack{p\leq 2n\\ p \text{ prim}}} \nu_p\left(\binom{2n}{n}\right)\log(p) \quad \textit{mit} \quad \nu_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{r\geq 1}^{M_p}\left(\lfloor\frac{2n}{p^r}\rfloor - 2\lfloor\frac{n}{p^r}\rfloor\right)$$

aus Aufgabe 5.4 (d) und zerlegen die Summe in vier Teilsummen $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$ und $\sum_4$ für verschiedene Bereiche für die Werte der Primzahl p, nämlich $n < p \leq 2n$, $\frac{2n}{3} < p \leq n$, $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}$ bzw. $p \leq \sqrt{2n}$. Zeigen Sie nun die folgenden Aussagen:

(a) *Es gilt $\sum_1 = \vartheta(2n) - \vartheta(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *Es gilt $\sum_2 = 0$ für alle $n \geq 3$.*

(c) *Es gilt $\sum_3 \leq \vartheta\left(\frac{2n}{3}\right) - \vartheta(\sqrt{2n}) \leq \vartheta\left(\frac{2n}{3}\right) - \pi(\sqrt{2n})\log(2)$ für alle $n \geq 5$.*

(d) *Es gilt $\sum_4 \leq \pi(\sqrt{2n})\log(2n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

 ***Hinweis:** Benutzen Sie Aufgabe 5.4 (e).*

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich zusammenfassen zu

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) \geq \log\left(\binom{2n}{n}\right) - \vartheta\left(\frac{2n}{3}\right) - \pi(\sqrt{2n})\log(n) \quad \textit{für alle } n \geq 5.$$

Zum Beweis des Bertrand'schen Postulats, dass also die rechte Seite echt positiv ist, zeigen Sie nun die folgenden Aussagen:

(e) *Es gilt* $\pi(n) \leq \frac{n}{2}$ *für alle* $n \geq 8$ *und insbesondere*

$$\begin{aligned}\vartheta(2n) - \vartheta(n) &> 2n\log(2) - \log(2\sqrt{n}) - \frac{4n}{3}\log(2) - \frac{\sqrt{2n}}{2}\log(n) \\ &= \left(\frac{2n}{3} - 1\right)\log(2) - \left(\frac{\sqrt{2n}+1}{2}\right)\log(n) \qquad \text{für alle } n \geq 32.\end{aligned}$$

(f) *Es gilt* $\left(\frac{2n}{3} - 1\right)\log(2) - \left(\frac{\sqrt{2n}+1}{2}\right)\log(n) > 0$ *für* $n > 64$ *und insbesondere das Betrand'sche Postulat für* $n > 64$.

(g) *Zeigen Sie das Betrand'sche Postulat für* $n \leq 64$.

KAPITEL 6

Thetafunktionen und quadratische Formen

6.1 Das Jacobi'sche Tripelprodukt

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die in Abschnitt 2.4 eingeführte Jacobi'sche Thetareihe

$$\vartheta(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z + 2\pi i n \tau}$$

in ihrem gesamten Definitionsbereich in ein unendliches Produkt entwickelt werden kann. Dies wurde zuerst 1829 von Jacobi bewiesenen und hat unter anderem den großen Vorteil, dass wir damit im Stande sind, Nullstellen direkt abzulesen, was bei der Darstellung als Reihe nicht möglich war.

Hierfür benötigen wir eine Aussage aus der Theorie der hypergeometrischen Reihen. Um diese griffiger formulieren zu können, definieren wir für $a, q \in \mathbb{C}$ das **POCHHAMMER-*Symbol***[46] durch

$$(a,q)_n := (1-a)(1-aq)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{n-1}) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

$$(a,q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a,q)_n = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k) \qquad \text{für } |q|<1 \text{ und alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Proposition 6.1. *Für $a, q, t \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und $|t| < 1$ gilt die Identität*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^n)}\, t^n = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-atq^n)}{(1-tq^n)},$$

bzw. in Schreibweise der Pochhammer-Symbole

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,q)_n}{(q,q)_n}\, t^n = \frac{(at,q)_\infty}{(t,q)_\infty}. \tag{6.1}$$

[46] Leo August Pochhammer (1841-1920)

Beweis. Der Beweis dieser Identität entpuppt sich als erstaunlich einfach. Da die rechte Seite als Produkt vorliegt, ergibt sich für diese eine einfache Differenzengleichung. Ein einfacher Koeffizientenvergleich erklärt im Anschluss die Gestalt der Taylor-Koeffizienten, die gewissermaßen eine endliche Version des Produktes ohne t darstellen:

Konkret betrachten wir für $a, q, t \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und $|t| < 1$ die Funktion

$$F(t) := \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - atq^n}{1 - tq^n} =: \sum_{n=0}^{\infty} A_n(a,q)t^n,$$

und kürzen im Folgenden $A_n := A_n(a,q)$ ab. Der Leser kann sich schnell überzeugen, dass das Produkt für $|t| < 1$, mit $|q| < 1$ und $a \in \mathbb{C}$ nach Voraussetzung, normal konvergiert und somit nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß eine in diesem Bereich holomorphe Funktion darstellt. Nun gilt

$$\begin{aligned}(1-t)F(t) &= (1-at)\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-atq^n}{1-tq^n} \\ &= (1-at)\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-atq^{n+1}}{1-tq^{n+1}} \\ &= (1-at)F(tq).\end{aligned} \tag{6.2}$$

Offenbar gilt $A_0 = F(0) = 1$ und durch Koeffizientenvergleich in (6.2) erhalten wir

$$A_n - A_{n-1} = q^n A_n - aq^{n-1}A_{n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

beziehungsweise

$$A_n = \frac{1 - aq^{n-1}}{1 - q^n} A_{n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Induktiv erhalten wir hieraus den Ausdruck

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{(1-aq^{n-1})(1-aq^{n-2}) \cdot \ldots \cdot (1-a)A_0}{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdot \ldots \cdot (1-q)} \\ &= \frac{(1-a)(1-aq) \cdot \ldots \cdot (1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2) \cdot \ldots \cdot (1-q^n)} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Wir erhalten das folgende Korollar:

Korollar 6.2. *Für $z, q \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $|q| < 1$ gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(q,q)_n} z^n = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^n) = (-z,q)_\infty.$$

Beweis. Durch Ersetzen von a durch $\frac{a}{b}$ und t durch bz in (6.1) folgt für $|bz| < 1$:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b-a)(b-aq)\cdot \ldots \cdot (b-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdot \ldots \cdot (1-q^n)} z^n = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-azq^n)}{(1-bzq^n)}.$$

Mit $b \to 0$ und $a = -1$ folgt die Behauptung. □

Nun sind wir in der Lage, den Produktsatz zu formulieren und zu zeigen:

Satz 6.3 (Jacobi'sches Tripelprodukt). *Für $w, q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und $w \neq 0$ gilt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} w^n = \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{2n+2})(1+wq^{2n+1})(1+w^{-1}q^{2n+1}).$$

Beweis. Für $w, q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und $|w| > |q|$ Muss hier nicht noch $|w| < |q|^{-1}$ gelten, damit wir Korollar 6.2 anwenden dürfen? gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\prod_{n=0}^{\infty}(1+wq^{2n+1}) &= (-wq, q^2)_\infty \\
&\overset{6.2}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m(m-1)}(qw)^m}{(q^2,q^2)_m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m q^{m^2}}{(q^2,q^2)_m} \\
&= \frac{1}{(q^2,q^2)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w^m q^{m^2} (q^{2m+2}, q^2)_\infty.
\end{aligned}$$

Wegen $(q^{2m+2}, q^2)_\infty = 0$ für alle $m < 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\prod_{n=0}^{\infty}(1+wq^{2n+1}) &= \frac{1}{(q^2,q^2)_\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w^m q^{m^2} (q^{2m+2}, q^2)_\infty \\
&\overset{6.2}{=} \frac{1}{(q^2,q^2)_\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w^m q^{m^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r q^{r^2+2mr+r}}{(q^2,q^2)_r} \\
&= \frac{1}{(q^2,q^2)_\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r w^{-r} q^r}{(q^2,q^2)_r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{(m+r)^2} w^{m+r} \\
&= \frac{1}{(q^2,q^2)_\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{q}{w}\right)^r}{(q^2,q^2)_r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} w^m \\
&\overset{(6.1)}{=} \frac{1}{(q^2,q^2)_\infty (-\frac{q}{w}, q^2)_\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} w^m,
\end{aligned}$$

wobei die Summen aufgrund der absoluten Konvergenz vertauscht werden dürfen und wir bei der Verwendung von (6.1) im letzten Schritt $t := -\frac{q}{w}$ und $a := 0$ benutzt haben. Daraus folgt bereits die Behauptung unter den oben festgesetzten Bedingungen.

Aus Gründen der analytischen Fortsetzung behält die Formel auch für $0 < |w|$ Gültigkeit. □

Wir erhalten mit dem Tripelprodukt das folgende wichtige Korollar:

Korollar 6.4. *Für alle $z \in \mathbb{H}$ und alle $\tau \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\vartheta(z,\tau) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - e^{2\pi i z(n+1)})(1 + e^{\pi i z(2n+1)+2\pi i\tau})(1 + e^{\pi i z(2n+1)-2\pi i\tau}).$$

Insbesondere besitzt die Thetafunktion $\vartheta(z) = \vartheta(z,0)$ in $\mathbb{H}$ keine Nullstellen.

Beweis. Die Identität folgt unmittelbar aus der Reihendarstellung der Thetareihe und dem Jacobi'schen Tripelprodukt aus Satz 6.3. Aus der unbedingten Konvergenz des Produktes, und der Tatsache, dass kein Faktor in

$$\vartheta(z) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - e^{2\pi i z(n+1)})(1 + e^{\pi i z(2n+1)})(1 + e^{\pi i z(2n+1)})$$

für $z \in \mathbb{H}$ den Wert 0 annimmt, folgt der zweite Teil der Behauptung. □

6.2 Die Quadratesätze

In diesem Abschnitt untersuchen wir die klassischen Quadratesätze, die schöne Anwendungsbeispiele der Modulformen und der analytischen Zahlentheorie sind. Es geht dabei allgemein um die Frage, wie viele Lösungen die diophantische Gleichung

$$n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 \tag{6.3}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ besitzt. Wir werden dies nicht für sämtliche Werte k klären können, aber im Detail auf die Fälle $k \in \{2,4,8\}$ eingehen. Zu bemerken ist, dass der Fall $k = 1$ trivial ist.

Bedeutende Vorarbeit zu den Quadratesätzen haben wir bereits in Abschnitt 4.8 geleistet. Um das zu sehen, bezeichnen wir die Anzahl der Tupel $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{Z}^k$, die (6.3) erfüllen, mit $A_k(n)$ und stellen folgende Beziehung zur komplexen Analysis her:

Proposition 6.5. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\vartheta(z)^k = \sum_{n=0}^{\infty} A_k(n) q^{\frac{n}{2}} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{H},$$

wobei ϑ die Jacobi'sche Thetafunktion bezeichnet.

Beweis. Durch Ausmultiplizieren des k-fachen Produktes der Fourier-Reihe der Jacobi'schen Thetafunktion erhalten wir

$$\vartheta(z)^k = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n_1^2+\ldots+n_k^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_k(n) q^{\frac{n}{2}},$$

wobei wir wegen der absoluten Konvergenz der Reihe nach Belieben umordnen dürfen. □

Wir verwenden nun die bereits in den Beispielen 5.9 bzw. 4.55 betrachteten Dirichlet-Reihen Q_2 und Q_4, um die Quadratesätze zu zeigen, und holen dafür zunächst etwas aus:

Zu beliebigen Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

definieren wir die zugehörige **MÖBIUS-*Transformation***[47] durch

$$M\langle z\rangle := \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass einerseits $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\langle\mathbb{H}\rangle \subseteq \mathbb{H}$ gilt und dass andererseits durch die Möbius-Transformationen eine Gruppenaktion auf $\mathbb{H}$ induziert wird, dass also die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

$$I_2\langle z\rangle = z, \tag{6.4}$$

$$M_1\langle M_2\langle z\rangle\rangle = M_1M_2\langle z\rangle \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H},\ M_1, M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}). \tag{6.5}$$

Die speziellen Matrizen

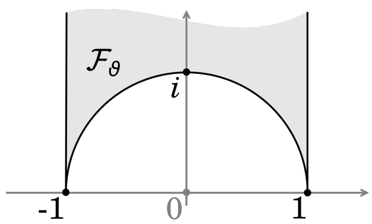
$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (= \text{„Translation“}) \quad \text{und} \quad S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (= \text{„Stürzung“})$$

korrespondieren dabei offenbar zu den Möbius-Transformationen $z \mapsto z+1$ und $z \mapsto -\frac{1}{z}$. Die Jacobi'sche Thetafunktion hat nach Satz 2.27 ein Transformationsverhalten unter T^2 und S. Es ist daher hilfreich, die von T^2 und S erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ genauer zu betrachten. Diese heißt die ***Thetagruppe*** Γ_ϑ. Die erste Aussage, die wir zeigen, befasst sich mit der Frage, wie eine möglichst kleine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ aussehen könnte, die $\Gamma_\vartheta\langle\mathcal{F}\rangle = \mathbb{H}$ erfüllt. Wir beantworten diese Frage teilweise:

Proposition 6.6. *Für jeden Punkt $z \in \mathbb{H}$ existiert ein $M \in \Gamma_\vartheta$, so dass $M\langle z\rangle$ in der Menge*

$$\mathcal{F}_\vartheta := \{z \in \mathbb{H} \colon |z| \geq 1, |\mathrm{Re}(z)| \leq 1\}$$

enthalten ist.



Beweis. Über Benutzung von $\det(M) = 1$ kann zunächst schnell die Formel

$$\mathrm{Im}\left(M\langle z\rangle\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

hergeleitet werden. Jede Bahn $\Gamma_\vartheta\langle z\rangle$ in $\mathbb{H}$ enthält daher einen Punkt $M_0\langle z\rangle$ maximalen Imaginärteils mit einem geeigneten $M_0 \in \Gamma_\vartheta$,

denn: Für ein festes $z \in \mathbb{H}$ definiert die Ungleichung $|cz+d| \leq 1$ ein Kompaktum in $\mathbb{R}^2$. Der Durchschnitt dieses Kompaktums mit dem Gitter $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$ ist endlich, so dass die Ungleichung nur endlich viele Lösungen $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ hat. Es gilt andererseits

$$|cz+d| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im}(M\langle z\rangle) \geq \operatorname{Im}(z) \qquad \text{für alle } M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\vartheta.$$

Da der Imaginärteil von $M\langle z\rangle$ nur von der zweiten Zeile von M abhängt, gibt es innerhalb einer Bahn Punkte maximalen Imaginärteils. #

Da die zu $T^2 \in \Gamma_\vartheta$ gehörige Möbius-Transformation den Imaginärteil unverändert lässt, kann durch anschließende Verkettung von M_0 mit einer geeigneten Potenz von T^2 ein $M_1 \in \Gamma_\vartheta$ gefunden werden, für das $\operatorname{Im}(M_1\langle z\rangle)$ maximal ist und zusätzlich $|\operatorname{Re}(M_1\langle z\rangle)| \leq 1$ gilt. Nun muss aber auch $|M_1\langle z\rangle| \geq 1$ gelten, da sonst nach Anwenden der zu $S \in \Gamma_\vartheta$ gehörigen Möbius-Transformation im Widerspruch zur geforderten Maximalität

$$\operatorname{Im}((SM_1)\langle z\rangle) = \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{M_1\langle z\rangle}\right) = -\frac{\operatorname{Im}(\overline{M_1\langle z\rangle})}{|M_1\langle z\rangle|^2} > \operatorname{Im}(M_1\langle z\rangle)$$

gälte. Da z beliebig gewählt war, folgt die Proposition. □

Nun haben wir die benötigten Hilfsmittel für folgenden zentralen Satz, der ein funktionentheoretisches Kriterium für die Konstanz einer holomorphen Funktion liefert:

Satz 6.7. *Sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) *Für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt $f(z+2) = f(z)$, die Funktion f ist also 2-periodisch.*

(ii) *Für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt $f(-\frac{1}{z}) = f(z)$.*

(iii) *Die Grenzwerte $\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\mathcal{F}_\vartheta}} f(z) = \lim_{\operatorname{Im}(z)\to\infty} f(z) =: w_1$ und $\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\mathcal{F}_\vartheta}} f(z) =: w_2$ existieren.*

Dann ist f konstant und es gilt $f \equiv w_1 = w_2$.

Beweis. Zunächst gilt offenbar

$$f(M\langle z\rangle) = f(z) \quad \text{für alle } M \in \Gamma_\vartheta,$$

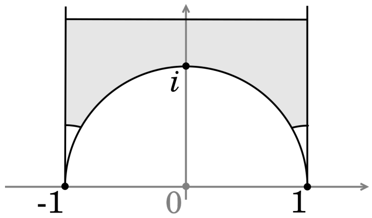
denn: Definitionsgemäß lässt sich jedes $M \in \Gamma_\vartheta$ als Produkt der Matrizen T^2, T^{-2} und S schreiben. Die Behauptung folgt nun induktiv aus den vorausgesetzten Bedingungen (i), (ii) sowie den Axiomen der Gruppenaktion (6.4) und (6.5). #

Damit und mit der vorausgesetzten Bedingung (iii) folgt für die dann ebenfalls Γ_ϑ-invariante Funktion $H(z) := (f(z) - w_1)(f(z) - w_2)$

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\mathcal{F}_\vartheta}} H(z) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\mathcal{F}_\vartheta}} H(z) = 0. \tag{6.6}$$

Hieraus folgt, dass H bereits sein Betragsmaximum in $\mathcal{F}_\vartheta$ annimmt,

denn: Da für $H \equiv 0$ nichts zu zeigen ist, können wir im Weiteren annehmen, es gebe ein $z \in \mathcal{F}_\vartheta$ mit $|H(z)| = w_0 > 0$. Nach (6.6) geht H gegen Null, wenn sich sein Argument innerhalb von $\mathcal{F}_\vartheta$ einem der Punkte 1, -1 oder $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ nähert. Es gibt daher ein $\varepsilon > 0$, so dass die Funktion H in den Durchschnitten von $\mathcal{F}_\vartheta$ mit den offenen ε-Umgebungen um jeden dieser Punkte nur Werte annimmt, die betragsmäßig kleiner als w_0 sind, wobei die ε-Umgebung von ∞ durch $U_\varepsilon(\infty) := \{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im}(z) > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}$ gegeben ist.



Andererseits ist $\mathcal{F}_\vartheta$ ohne diese Durchschnitte nach Proposition 6.6 eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{H}$ und insbesondere kompakt, so dass die stetige Funktion H dort ihr Betragsmaximum annimmt, das nach Konstruktion größer oder gleich w_0 ist. Die Behauptung folgt nun. #

Nun ist H aber invariant unter Γ_ϑ und nimmt nach Proposition 6.6 somit auch im gesamten Gebiet $\mathbb{H}$ sein Betragsmaximum an. Nach dem Maximumprinzip ist daher H und folglich auch f konstant. Der Rest des Satzes folgt mit Bedingung (iii). □

Die vorherigen Aussagen weisen darauf hin, dass wir die Jacobi'sche Thetafunktion in der Nähe von $z = 1$ besser verstehen müssen. Dieser Problematik widmen wir das nächste Lemma:

Lemma 6.8. *Es gilt*

$$\vartheta\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2 \sim 4\left(\frac{z}{i}\right) e^{\frac{\pi i z}{2}} \quad \textit{für } \operatorname{Im}(z) \to \infty.$$

Beweis. Nach Übungsaufgabe 2.4 gilt für die dort eingeführten Funktionen

$$\tilde{\vartheta}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i n^2 z} \quad \text{und} \quad \tilde{\tilde{\vartheta}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 z}$$

der Zusammenhang

$$\vartheta\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2 = \tilde{\vartheta}\left(-\frac{1}{z}\right)^2 = \left(\frac{z}{i}\right)\tilde{\tilde{\vartheta}}(z)^2 = \left(\frac{z}{i}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 z}\right)^2 \sim 4\left(\frac{z}{i}\right) e^{\frac{\pi i z}{2}},$$

wenn $\operatorname{Im}(z) \to \infty$. □

Mit diesen funktionentheoretischen Werkzeugen einerseits und Eigenschaften der Thetafunktion andererseits sind wir nun in der Lage, den folgenden Satz über die Zerlegung in zwei Quadrate zu zeigen:

Satz 6.9 (Zerlegung in zwei Quadrate). *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für die Anzahl*

$$A_2(n) = \left|\{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1^2 + x_2^2 = n\}\right|$$

gilt dann

$$A_2(0) = 1,$$
$$A_2(n) = 4\sum_{d|n} \chi_{-4}(d) = 4(d_{1,4}(n) - d_{3,4}(n)) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei χ_{-4} den in Bemerkung 3.24 eingeführten primitiven Charakter modulo 4 bezeichnet, $d_{1,4}(n)$ die Anzahl aller positiven Teiler d von n mit $d \equiv 1 \bmod (4)$ sowie $d_{3,4}(n)$ jene mit Teilern $d \equiv 3 \bmod (4)$.

Beweis. Aus den Definitionen der beteiligten Dirichlet-Reihen und mit der Dirichlet-Faltung erhalten wir sofort

$$Q_2(s) = 4\zeta(s)L(s;\chi_{-4}) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\chi_{-4}(d)\right)n^{-s}.$$

Wie in Beispiel 5.9 gesehen, erfüllt die zugehörige Funktion

$$f_2(z) = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\chi_{-4}(d)\right)q^{\frac{n}{2}}$$

die Transformationsgesetze

$$f_2(z+2) = f_2(z) \quad \text{und} \quad f_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{z}{i}f_2(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Wir betrachten nun die leicht abgewandelte Fourier-Reihe

$$\widetilde{f_2}(z) := f_2(z+1) = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\chi_{-4}(d)\right)(-1)^n q^{\frac{n}{2}}$$
$$= 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\chi_{-4}(d)(-1)^{\frac{n}{d}}\right)q^{\frac{n}{2}},$$

wobei wir für die letzte Gleichheit ausgenutzt haben, dass der Charakter χ_{-4} für gerade Argumente verschwindet und für ungerade d die Identität $(-1)^n = (-1)^{\frac{n}{d}}$ gilt. Dieser können wir nun eine Dirichlet-Reihe zuordnen, nämlich

$$\widetilde{Q_2}(s) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\chi_{-4}(d)(-1)^{\frac{n}{d}}\right)n^{-s}$$

$$= 4L(s;\chi_{-4}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s}$$
$$= 4L(s;\chi_{-4})(2^{1-s}-1)\zeta(s).$$

Da die Fourier-Reihe eine 2-periodische Funktion darstellt, komplettieren wir über $\lambda = 2$ entsprechend durch

$$\Lambda_2(s;\tilde{f}_2) := \pi^{-s}\Gamma(s)\widetilde{Q_2}(s) \overset{5.9}{=} (2^{1-s}-1)\Lambda_2(s).$$

Wir erhalten so sofort die Funktionalgleichung

$$\Lambda_2(1-s;\tilde{f}_2) = (2^s-1)\Lambda_2(1-s) \overset{5.9}{=} (2^s-1)\Lambda_2(s) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-s}\Gamma(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)Q_2(s).$$

Zu beachten ist, dass diese letzte komplettierte Dirichlet-Reihe zu einer lediglich 4-periodischen Fourier-Reihe korrespondiert, in der Sprache des Umkehrsatzes von Bochner 4.47 also $\lambda = 4$ gilt. Dies stört uns jedoch nicht weiter, da wir jede 2-periodische Funktion durch Ausdünnung auch als 4-periodisch auffassen können. Mit dem bekannten Wachstumsverhalten der beteiligten Dirichlet'schen L-Funktionen auf Vertikalstreifen und mit

$$\operatorname{res}_{s=w}\Lambda_2(s;\tilde{f}_2) = \operatorname{res}_{s=w}(2^{1-s}-1)\Lambda_2(s) \overset{5.9}{=} \begin{cases} -1 & \text{für } w = 0, \\ 0 & \text{für } w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{cases}$$

können wir den Umkehrsatz daher für $k = 1$, $\lambda = 4$ und $R(s) = -\frac{1}{s}$ anwenden. Schreiben wir nun $\tilde{g}_2(z) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^{\frac{n}{4}}$, wobei die b_n als Koeffizienten der Dirichlet-Reihe $(1-2^{-s})Q_2(s)$ definiert sind, so finden wir damit

$$f_2\left(1-\frac{1}{z}\right) - 1 = \tilde{f}_2\left(-\frac{1}{z}\right) - 1 = \frac{z}{i}\,(\tilde{g}_2(z)-0) + \operatorname{res}_{s=0}\left(-\frac{1}{s}\right)$$

und also

$$f_2\left(1-\frac{1}{z}\right) = \tilde{f}_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{z}{i}\,\tilde{g}_2(z) \overset{b_1=4}{\sim} 4\,\frac{z}{i}\,e^{\frac{\pi i z}{2}} \quad \text{für } \operatorname{Im}(z) \to \infty. \tag{6.7}$$

Hieraus folgt bereits $f_2 \equiv \vartheta^2$,

denn: Nach Korollar 6.4 ist die Jacobi'sche Thetafunktion nullstellenfrei auf $\mathbb{H}$ und somit die Funktion

$$h(z) := \frac{f_2(z)}{\vartheta(z)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

holomorph. Da sich f_2 und ϑ^2 nach Beispiel 5.9 bzw. Satz 2.27 unter T^2 und S exakt gleich transformieren – wobei sich der Vorfaktor $\frac{z}{i}$ in letzterem Fall herauskürzt – ist h auch invariant unter der Aktion von Γ_ϑ. Aus den Fourier-Reihen von f_2 und ϑ^2 lesen wir sofort

$$\lim_{\operatorname{Im}(z)\to\infty} h(z) = 1$$

ab. Mit Lemma 6.8 und (6.7) gilt aber auch

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\mathcal{F}_\vartheta}} h(z) = \lim_{\substack{\operatorname{Im}(z)\to\infty\\ 1-\frac{1}{z}\in\mathcal{F}_\vartheta}} h\left(1-\frac{1}{z}\right) = 1.$$

Wir können daher Satz 6.7 anwenden und erhalten $f_2 \equiv \vartheta^2$. #

Die Behauptung des Satzes folgt jetzt durch Koeffizientenvergleich. □

Aus der Anzahl der Zerlegungen in zwei Quadrate können wir einige interessante Aussagen aus der Zahlentheorie folgern, die nicht auf der Hand liegen. Deren erste wurde 1640 von FERMAT[48] vermutet – zusammen mit dem Beweis einer der beiden Schlussrichtungen – aber erst 1752 und 1755 von Euler in zwei Artikeln bewiesen. Das ist der:

Korollar 6.10 (Fermat'scher Quadratesatz)**.** *Eine ungerade Primzahl p ist genau dann Summe zweier Quadratzahlen, wenn sie $p \equiv 1 \bmod (4)$ erfüllt.*

Beweis. Die einzigen positiven Teiler einer Primzahl p sind 1 und p selbst. Jetzt folgt die Aussage sofort mit Satz 6.9. □

Wir können sogar etwas mehr sagen: Die diophantische Gleichung $p = x^2 + y^2$ mit einer Primzahl p mit $p \equiv 1 \bmod (4)$ hat bis auf Vorzeichen und Reihenfolge genau eine ganzzahlige Lösung,

denn: Offenbar ist $A_2(p) = 4(2-0) = 8$. Nun gibt es für eine Lösung $p = x^2 + y^2$ genau 8 Kombinationen $(\pm x, \pm y)$ bzw. $(\pm y, \pm x)$, die auch Lösungen darstellen. #

Eine Beigabe der involvierten Dirichlet-Reihen ist:

Korollar 6.11. *Durch $A_2^*(n) := \frac{1}{4}A_2(n)$ ist eine schwach multiplikative zahlentheoretische Funktion gegeben.*

Beweis. Im Beweis von Satz 6.9 haben wir $\vartheta^2 = f_2$ nachgewiesen, was sich über den Umkehrsatz zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_2^*(n) n^{-s} = \frac{1}{4} Q_2(s) = \zeta(s) L(s;\chi_{-4})$$

übersetzt. Nach Satz 5.2 gilt andererseits

$$\zeta(s)L(s;\chi_{-4}) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{(1-p^{-s})(1-\chi_{-4}(p)p^{-s})} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_1,$$

so dass die Behauptung mit Korollar 4.43 folgt. □

[48] Pierre de Fermat (1607-1655)

Bemerkung 6.12. *Korollar 6.11 lässt sich alternativ auch mit Lemma 1.22 beweisen, da die in Satz 6.9 gegebene explizite Formel für die Darstellungsanzahlen die summatorische Funktion des stark multiplikativen Dirichlet-Charakters χ_{-4} ist.*

Mit diesen Informationen lässt sich der Fermat'sche Quadratesatz verallgemeinern:

Korollar 6.13 (Zwei-Quadrate-Satz). *Eine natürliche Zahl n ist genau dann Summe zweier Quadratzahlen, falls in ihrer Primfaktorzerlegung alle Primfaktoren p mit $p \equiv 3 \bmod (4)$ in gerader Anzahl auftauchen.*

Beweis. Aus der Formel in Satz 6.9 erhalten wir unmittelbar

$$\begin{aligned} &A_2^*(2^m) = 1 && \text{für alle } m \in \mathbb{N}. \\ &A_2^*(p^m) \geq 1 && \text{für eine Primzahl } p \text{ mit } p \equiv 1 \bmod (4) \text{ und alle } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Für eine Primzahl p mit $p \equiv 3 \bmod (4)$ gilt weiter

$$A_2^*(p^m) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m \text{ ungerade},$$

denn: Die positiven Teiler von p^m sind $1, p, p^2, \ldots, p^m$. Offenbar ist $\chi_{-4}(p^j) = (-1)^j$ für $p \equiv 3 \bmod (4)$, also verschwindet

$$A_2^*(p^m) \overset{6.9}{=} \sum_{j=0}^{m} \chi_{-4}(p^j)$$

genau dann, wenn m ungerade ist. #

Da offenbar $A_2(n)$ genau dann Null wird, wenn $A_2^*(n)$ dies tut, folgt das Korollar nun mit Korollar 6.11. □

Wir wenden uns jetzt dem Falle vierer Quadrate zu. Das Vorgehen unterscheidet sich dabei kaum von dem bei zwei Quadraten:

Satz 6.14 (Zerlegung in vier Quadrate). *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für die Anzahl*

$$A_4(n) = \left|\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n\}\right|$$

gilt dann

$$\begin{aligned} A_4(0) &= 1, \\ A_4(n) &= 8 \sum_{\substack{d \mid n \\ 4 \nmid d}} d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig mit $4 \mid n$. Wir interessieren uns für die – offensichtlich genau dann existenten – Teiler von n, die durch 4 teilbar sind. Diese lassen sich beschreiben als die Zahlen

$4d$ mit $d \mid \frac{n}{4}$ und ihre Summe ist $4\sigma_1(\frac{n}{4})$. Aus den Definitionen der beteiligten Dirichlet-Reihen und mit der Dirichlet-Faltung erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} Q_4(s) = 8(1-2^{2-2s})\zeta(s)\zeta(s-1) &= 8\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)n^{-s} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)(4n)^{-s}\right) \\ &= 8\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)n^{-s} - 4\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\4\mid n}}\sigma_1\left(\frac{n}{4}\right)n^{-s}\right) \\ &= 8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{d\mid n\\4\nmid d}} d\right)n^{-s}. \end{aligned}$$

Nach Beispiel 4.55 erfüllt nun die Funktion

$$f_4(z) = 1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{d\mid n\\4\nmid d}} d\right)q^{\frac{n}{2}}$$

das Transformationsgesetz

$$f_4\left(-\frac{1}{z}\right) = -z^2 f_4(z) \quad \text{und sowieso} \quad f_4(z+2) = f_4(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Wir betrachten die leicht abgewandelte Fourier-Reihe

$$\tilde{f}_4(z) := f_4(z+1) = 1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)(-1)^n q^{\frac{n}{2}} - 32\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^{2n}$$

und ordnen dieser die via $\lambda = 2$ komplettierte Dirichlet-Reihe

$$\Lambda_2(s;\tilde{f}_4) = \pi^{-s}\Gamma(s)\left(8\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)(-1)^n n^{-s} - \frac{32}{4^s}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)n^{-s}\right)$$

zu. Letztere bringen wir jetzt in elementare Gestalt. Die zweite Reihe lässt sich dabei leicht zu $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)n^{-s} = \zeta(s)\zeta(s-1)$ erkennen. Für die erste Reihe müssen wir etwas ausholen. Zuerst gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)(-1)^n n^{-s} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)n^{-s} - 2\sum_{\substack{n=1\\n\text{ ungerade}}}\sigma_1(n)n^{-s} \\ &= \zeta(s)\zeta(s-1) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\chi_{1,4}(n)n^{-s} \end{aligned}$$

mit dem Hauptcharakter $\chi_{1,4}$ modulo 4. Das Produkt $\sigma_1(n)\chi_{1,4}(n)$ einer schwach und einer stark multiplikativen Funktion ist offenbar wieder schwach multiplikativ und analog zu der bereits bekannten Identität $\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) n^{-s}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\chi_{1,4}(n) n^{-s} = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p>2}} \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{1-s})} = (1-2^{-s})(1-2^{1-s})\zeta(s)\zeta(s-1). \tag{6.8}$$

Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)(-1)^n n^{-s} &= \zeta(s)\zeta(s-1) - 2(1-2^{-s})(1-2^{1-s})\zeta(s)\zeta(s-1) \\ &= (1-2+2^{2-s}+2^{1-s}-2^{2-2s})\zeta(s)\zeta(s-1) \\ &= -(1-3\cdot 2^{1-s}+2^{2-2s})\zeta(s)\zeta(s-1) \end{aligned}$$

und somit wiederum

$$\begin{aligned} \Lambda_2(s;\tilde{f}_4) &= \pi^{-s}\Gamma(s)\left(-8(1-3\cdot 2^{1-s}+2^{2-2s})\zeta(s)\zeta(s-1) - 2^{5-2s}\zeta(s)\zeta(s-1)\right) \\ &= -8\pi^{-s}\Gamma(s)\left(1-3\cdot 2^{1-s}+2^{2-2s}+2^{2-2s}\right)\zeta(s)\zeta(s-1) \\ &= -8\pi^{-s}\Gamma(s)\left(1-3\cdot 2^{1-s}+2^{3-2s}\right)\zeta(s)\zeta(s-1) \\ &= -\frac{1-2^{2-s}}{1+2^{1-s}}\Lambda_2(s;f_4), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die elementare Identität

$$\frac{1-6x+8x^2}{1-4x^2} = \frac{1-4x}{1+2x}$$

für $x = 2^{-s}$ verwendet haben. Über die Funktionalgleichung von $\Lambda_2(s;f_4)$ erhalten wir so

$$\begin{aligned} \Lambda_2(2-s;\tilde{f}_4) &= -\frac{1-2^s}{1+2^{s-1}}\Lambda_2(2-s;f_4) \\ &\overset{4.55}{=} \frac{2^s-1}{2^{s-1}+1}\Lambda_2(s;f_4) \\ &= 2\,\frac{1-2^{-s}}{1+2^{1-s}}\Lambda_2(s;f_4) \\ &= 16\pi^{-s}\Gamma(s)(1-2^{1-s})(1-2^{-s})\zeta(s)\zeta(s-1). \end{aligned}$$

Mit dem bekannten Wachstumsverhalten der beteiligten Dirichlet'schen L-Funktionen auf Vertikalstreifen und mit

$$\operatorname{res}_{s=w}\Lambda_2(s;\tilde{f}_4) = \operatorname{res}_{s=w}\left(-\frac{1-2^{2-s}}{1+2^{1-s}}\Lambda_2(s;f_4)\right) \overset{4.55}{=} \begin{cases} -1 & \text{für } w=0, \\ 0 & \text{für } w \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \end{cases}$$

können wir daher den Bochner'schen Umkehrsatz 4.47 für $k = 2$, $\lambda = 2$ und $R(s) = -\frac{1}{s}$ anwenden. Schreiben wir nun $\widetilde{g}_4(z) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$, wobei die b_n als die Koeffizienten der Dirichlet-Reihe $16(1-2^{1-s})(1-2^{-s})\zeta(s)\zeta(s-1)$ definiert sind – nach (6.8) gilt konkret $b_n = 16\sigma_1(n)\chi_{1,4}(n)$ – so finden wir damit

$$\tilde{f}_4\left(-\frac{1}{z}\right) - 1 = -z^2\left(\widetilde{g}_4(z) - 0\right) + \operatorname{res}_{s=0}\left(-\frac{1}{s}\right)$$

und also

$$f_4\left(1-\frac{1}{z}\right) = \tilde{f}_4\left(-\frac{1}{z}\right) = -z^2\widetilde{g}_4(z) \overset{b_1=16}{\sim} -16z^2e^{\pi iz} \quad \text{für } \operatorname{Im}(z) \to \infty.$$

Da wir nach Quadrieren in Lemma 6.8 auch

$$\vartheta(1-\frac{1}{z})^4 \sim -16z^2e^{\pi iz} \qquad \text{für } \operatorname{Im}(z) \to \infty$$

haben, können wir ganz analog wie im Beweis des Satzes 6.9 zur Zerlegung in zwei Quadrate die Identität $f_4 \equiv \vartheta^4$ folgern. Wieder ergibt sich der Satz durch einen Koeffizientenvergleich. □

Als offensichtliche Folgerung ergibt sich eine berühmte zahlentheoretische Aussage, die zuerst 1770 von Lagrange[49] bewiesen wurde:

Korollar 6.15 (Satz von Lagrange)**.** *Jede natürliche Zahl ist Summe vierer Quadratzahlen.*

Beweis. Jede natürliche Zahl hat mit der Zahl 1 einen Teiler, der nicht durch 4 teilbar ist. Jetzt folgt das Korollar mit Satz 6.14. □

Eine Beigabe der involvierten Dirichlet-Reihen ist erneut:

Korollar 6.16. *Durch $A_4^*(n) := \frac{1}{8}A_4(n)$ ist eine schwach multiplikative zahlentheoretische Funktion gegeben.*

Beweis. Im Beweis von Satz 6.14 haben wir $\vartheta^4 = f_4$ nachgewiesen, was sich über den Umkehrsatz zu

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} A_4^*(n)n^{-s} &= (1-2^{2-2s})\zeta(s)\zeta(s-1)\\ &\overset{4.44}{=} \frac{1-2^{2-2s}}{(1-2^{-s})(1-2^{1-s})} \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim}\\ p>2}} \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{1-s})} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_2\end{aligned}$$

übersetzt. Die Behauptung folgt nun mit Korollar 4.43. □

[49] Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813)

Zu guter Letzt wenden wir uns noch der Frage nach 8 Quadraten zu. Auch hier existiert eine bemerkenswerte geschlossene Formel, die auf Jacobi zurückgeht:

Satz 6.17 (Zerlegung in acht Quadrate). *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für die Anzahl*

$$A_8(n) = \left|\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbb{Z}^8 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 = n\}\right|$$

gilt dann

$$\begin{aligned} A_8(0) &= 1, \\ A_8(n) &= 16 \sum_{d|n} d^3 (-1)^{(n+1)d} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Beispiel 4.57 gilt

$$\begin{aligned} Q_8(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r_8(n) n^{-s} &= 16\,(1 - 2^{1-s} + 2^{4-2s})\zeta(s)\zeta(s-3) \\ &= 16(1 - 2^{1-s} + 2^{4-2s}) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) n^{-s} \\ &= 16 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) n^{-s} - 32 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)(2n)^{-s} + 256 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)(4n)^{-s}. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung können wir die Koeffizienten als

$$r_8^*(n) := \frac{1}{16} r_8(n) = \sigma_3(n) - 2\sigma_3\left(\frac{n}{2}\right) + 16\sigma_3\left(\frac{n}{4}\right)$$

ablesen, wobei wir $\sigma_3(x)$ für $x \notin \mathbb{N}$ den Wert 0 zuordnen. Hieraus folgt sofort

$$r_8^*(n) = \sigma_3(n) \qquad \text{für alle ungeraden } n \in \mathbb{N}.$$

Für gerades n müssen wir etwas genauer hinschauen: Beachten wir für $\sigma_3^+(n)$ bzw. $\sigma_3^-(n)$ nur gerade bzw. ungerade Teiler von n in der Summe, so erhalten wir dort

$$r_8^*(n) = \sigma_3^+(n) - \sigma_3^-(n) \qquad \text{für alle geraden } n \in \mathbb{N},$$

denn: Wir schreiben $\nu_2(n)$ für den Exponenten von 2 in der Primfaktorzerlegung von n und unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $\nu_2(n) = 1$. Dann entsprechen die ungeraden Teiler von n genau den Teilern von $\frac{n}{2}$ und es gilt $\sigma_3(\frac{n}{4}) = 0$. Wie gefordert folgt

$$r_8^*(n) = \sigma_3(n) - 2\sigma_3\left(\frac{n}{2}\right) = \sigma_3^+(n) - \sigma_3^-(n).$$

Fall 2: $\nu_2(n) \geq 2$. In diesem Fall summiert $\sigma_3(\frac{n}{2})$ neben den ungeraden Teilern von n auch diejenigen geraden Teiler von n auf, die nicht durch $2^{\nu_2(n)}$ teilbar sind. Letztere Teiler werden offenbar durch die Eigenschaft $2 \mid d \mid \frac{n}{2}$ beschrieben und es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_3^+(n) - \sigma_3^-(n) &= \sigma_3(n) - 2\sigma_3\left(\frac{n}{2}\right) + 2\sum_{2|d|\frac{n}{2}} d^3 \\
&= \sigma_3(n) - 2\sigma_3\left(\frac{n}{2}\right) + 2\sum_{d|\frac{n}{4}} (2d)^3 \\
&= \sigma_3(n) - 2\sigma_3\left(\frac{n}{2}\right) + 16\sigma_3\left(\frac{n}{4}\right) \\
&= r_8^*(n).
\end{aligned}$$

#

Wie in Beispiel 4.57 gesehen, erfüllt die zu Q_8 gehörige Funktion

$$f_8(z) = 1 + 16\sum_{n=1}^{\infty} r_8^*(n) q^{\frac{n}{2}}$$

die Transformationsgesetze

$$f_8\left(-\frac{1}{z}\right) = z^4 f_8(z) \quad \text{und} \quad f_8(z+2) = f_8(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Wir betrachten nun die leicht abgewandelte Fourier-Reihe

$$\tilde{f}_8(z) := f_8(z+1) = 1 + 16\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n r_8^*(n) q^{\frac{n}{2}}$$

und ordnen dieser die via $\lambda = 2$ komplettierte Dirichlet-Reihe

$$\Lambda_2(s; \tilde{f}_8) = 16\pi^{-s}\Gamma(s)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)(-1)^n n^{-s} - 2^{1-s}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) n^{-s} + 2^{4-2s}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) n^{-s}\right)$$

zu. Diese bringen wir jetzt in elementare Gestalt, wofür wir lediglich den ersten Term genauer betrachten müssen. Für diesen gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)(-1)^n n^{-s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) n^{-s} - 2\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \sigma_3(n) n^{-s} \\
&= \zeta(s)\zeta(s-3) - 2\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \sigma_3(n) n^{-s} \\
&= \zeta(s)\zeta(s-3) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)\chi_{1,4}(n) n^{-s},
\end{aligned}$$

wobei $\chi_{1,4}$ den Hauptcharakter modulo 4 bezeichnet. Mit dem Euler-Produkt folgt jetzt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)\chi_{1,4}(n)n^{-s} = (1-2^{-s})(1-2^{3-s})\zeta(s)\zeta(s-3)$$

und insgesamt also

$$\begin{aligned}\Lambda_2(s;\tilde{f}_8) &= 16\pi^{-s}\Gamma(s)\left(1-2(1-2^{-s})(1-2^{3-s})-2^{1-s}+2^{4-2s}\right)\zeta(s)\zeta(s-3)\\ &= -16\pi^{-s}\Gamma(s)(1-2^{4-s})\zeta(s)\zeta(s-3)\\ &= -\frac{1-2^{4-s}}{1-2^{1-s}+2^{4-2s}}\Lambda_2(s;f_8).\end{aligned}$$

Über die Funktionalgleichung von $\Lambda_2(s;f_8)$ erhalten wir so

$$\begin{aligned}\Lambda_2(4-s;\tilde{f}_8) &= -\frac{1-2^{s}}{1-2^{s-3}+2^{2s-4}}\Lambda_2(4-s;f_8)\\ &\overset{4.57}{=} 16\frac{2^{-s}(1-2^{-s})}{1-2^{1-s}+2^{4-2s}}\Lambda_2(s;f_8)\\ &= 256\pi^{-s}\Gamma(s)2^{-s}(1-2^{-s})\zeta(s)\zeta(s-3).\end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass dies eigentlich zu einer 1-periodischen Fourier-Reihe korrespondiert, die wir durch Ausdünnung aber auch als 2-periodisch interpretieren dürfen. Mit dem bekannten Wachstumsverhalten der beteiligten Dirichlet'schen L-Funktionen auf Vertikalstreifen und mit

$$\operatorname{res}_{s=w}\Lambda_2(s;\tilde{f}_8) = \operatorname{res}_{s=w}\left(-\frac{1-2^{4-s}}{1-2^{1-s}+2^{4-2s}}\Lambda_2(s;f_4)\right) \overset{4.57}{=} \begin{cases}-1 & \text{für } w=0,\\ 0 & \text{für } w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\end{cases}$$

können wir daher den Bochner'schen Umkehrsatz 4.47 für $k=4$, $\lambda=2$ und $R(s)=-\frac{1}{s}$ anwenden. Schreiben wir nun $\widetilde{g}_8(z) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^{\frac{n}{2}}$, wobei die b_n als die Koeffizienten der Dirichlet-Reihe $2^{8-s}(1-2^{-s})\zeta(s)\zeta(s-3)$ definiert sind, so finden wir damit

$$\tilde{f}_8\left(-\frac{1}{z}\right)-1 = z^4\left(\widetilde{g}_8(z)-0\right)+\operatorname{res}_{s=0}\left(-\frac{1}{s}\right)$$

und also

$$f_8\left(1-\frac{1}{z}\right) = \tilde{f}_8\left(-\frac{1}{z}\right) = z^4\widetilde{g}_8(z) \overset{b_1=256}{\sim} 256z^4e^{2\pi iz} \quad \text{für } \operatorname{Im}(z)\to\infty.$$

Da wir nach Nehmen der vierten Potenz in Lemma 6.8 auch

$$\vartheta(1-\frac{1}{z})^8 \sim 256z^4e^{2\pi iz} \qquad \text{für } \operatorname{Im}(z)\to\infty$$

haben, können wir ganz analog wie im Beweis des Satzes zur Zerlegung in zwei Quadrate 6.9 die Identität $f_8\equiv\vartheta^8$ folgern. Wieder ergibt sich der Satz durch einen Koeffizientenvergleich. □

Eine Beigabe der involvierten Dirichlet-Reihen ist erneut:

Korollar 6.18. *Durch $A_8^*(n) = \frac{1}{16}A_8(n)$ ist eine schwach multiplikative zahlentheoretische Funktion gegeben.*

Beweis. Im Beweis von Satz 6.17 haben wir $\vartheta^8 = f_8$ nachgewiesen, was sich über den Umkehrsatz zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_8^*(n)n^{-s} = (1-2^{1-s}+2^{4-2s})\zeta(s)\zeta(s-3)$$
$$\overset{4.44}{=} \frac{(1-2^{1-s}+2^{4-2s})}{(1-2^{-s})(1-2^{3-s})} \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p>2}} \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{3-s})} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{S}_4$$

übersetzt. Die Behauptung folgt nun mit Korollar 4.43. □

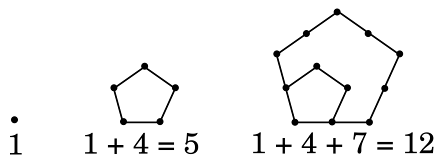
Bemerkung 6.19. *Die vergangenen Herleitungen könnten zu dem Gedanken verleiten, dass es stets ähnlich einfache geschlossene Formeln für $A_k(n)$ mit beliebigem $k \in \mathbb{N}$ gibt. Dies ist jedoch nicht richtig. Spätestens ab $k = 24$ sind die Darstellungsanzahlen nicht mehr durch einfache Summenformeln elementarer zahlentheoretischer Funktionen darstellbar. Erklärt werden kann dieses Phänomen mithilfe der Theorie der Modulformen. Auch sind die zahlentheoretischen Funktionen $A_k^*(n) := \frac{A_k(n)}{2k}$ nicht immer schwach multiplikativ. Es kann sogar gezeigt werden, dass sie es genau in den Fällen $k \in \{1,2,4,8\}$ sind.*

6.3 Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1. *Eine* ***Pentagonalzahl*** *ist eine Zahl der Form*

$$P_n := \sum_{k=0}^{n-1}(3k+1) = \frac{3n^2-n}{2} \qquad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0,$$

was anschaulich motiviert wird durch die Beispiele



In dieser Aufgabe zeigen wir den ursprünglich 1750 von Euler bewiesenen ***Pentagonalzahlensatz***

$$(q,q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{P_n} \qquad \textit{für alle } q \in \mathbb{C} \textit{ mit } |q| < 1$$

und betrachten dafür die Hilfsgröße

$$F_N := \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{(q,q)_N}{(q,q)_n} q^{Nn+\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{für } N \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie für diese die folgenden Aussagen:

(a) *Für alle $N \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung*

$$|F_N - (q,q)_N| \leq N|q|^{N+1} \quad \text{für alle } q \in \mathbb{C} \text{ mit } |q| < 1.$$

(b) *Es gilt*

$$\begin{aligned} F_N - F_{N-1} &= (-1)^N \left(q^{N^2 + \frac{N(N+1)}{2}} + q^{N^2 + \frac{N(N-1)}{2}} \right) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n q^{P_n} - \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} (-1)^n q^{P_n} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hinweis: *Nutzen Sie den Zusammenhang $(q,q)_n = (1-q^n)(q,q)_{n-1}$.*

(c) *Es gilt $F_N = \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n q^{P_n}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und mit Aussage (a) folgt der Pentagonalzahlensatz.*

Aufgabe 6.2. *Es seien m_1 und m_2 natürliche Zahlen. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Formel*

$$A_{m_1+m_2}(n) = \sum_{\ell=0}^{n} A_{m_1}(\ell) A_{m_2}(n-\ell).$$