Kapitel 1. Komplexe Zahlen

Funktionentheorie 1, SS 19

Denis Vogel

Sitzung vom 15.4.2019

Universität Heidelberg

Historische Anmerkungen

Ausgangspunkt: Kubische Gleichungen

Ausgangspunkt für die Entwicklung der komplexen Zahlen:

kubische Gleichungen

Konkret: Betrachte reelle Gleichungen des Typs

$$x^3 + px + q = 0$$

Offenbar haben diese in jedem Falle mindestens eine reelle Lösung, höchstens drei.

Ein Problem mit der Cardanischen Formel

Im 16. Jahrhundert wurde eine Formel gefunden, die eine Lösung dieser Gleichung liefert, die **Cardanische Formel**

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Problem: Wie verfährt man, wenn der Ausdruck

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 ,$$

der unter der Quadratwurzel steht, negativ ist ("casus irreducibilis")?

Casus irreducibilis

Beispiel: (*Rafael Bombelli*, 1572) Wir betrachten die Gleichung $x^3 = 15x + 4$, also $x^3 - 15x - 4 = 0$. Die Cardanische Formel liefert

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\left(\frac{-4}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} \\ &\quad + \sqrt[3]{-\left(\frac{-4}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Casus irreducibilis

Tatsächlich hat die Gleichung $x^3 - 15x - 4$ die drei reellen Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= -2 + \sqrt{3} \\ x_3 &= -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Was hat der Ausdruck

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

damit zu tun?

Casus irreducibilis

Bombelli rechnet:

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

sowie

$$(2-\sqrt{-1})^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1}$$

und erhält

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$

was in der Tat eine reelle Lösung der gegebenen Gleichung ist.

Casus irreducibilis

Bombelli kommentiert seine Rechnung:

Ein ausschweifender Gedanke nach Meinung vieler. Ich selbst war lange Zeit der gleichen Ansicht. Die Sache schien mir auf Sophismen mehr als auf Wahrheit zu beruhen, aber ich suchte so lange, bis ich den Beweis fand.

Quelle: Cantor (1900)

*Bombelli*s Rechnung legt den Grundstein für die Entwicklung der **komplexen Zahlen**.

Definition der komplexen Zahlen

Definition von $\mathbb{C}$

Auf $\mathbb{R}^2$ setzen wir

$$(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d) \quad \text{und} \quad (a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc).$$

Proposition

$\mathbb{R}^2$ mit obiger Addition und Multiplikation ist ein Körper. Dieser heißt Körper der komplexen Zahlen und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, a \mapsto (a,0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus. Für $(a,0)$ in $\mathbb{C}$ mit $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir a, und wir setzen

$$i := (0,1).$$

Elementare Eigenschaften von $\mathbb{C}$

- Es ist

  $$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

- Jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

  $$z = a + bi$$

  mit a, b in $\mathbb{R}$.
  a heißt der Realteil, b der Imaginärteil von z.
  Notation: $\mathrm{Re}(z)$ bzw. $\mathrm{Im}(z)$.

Konjugation, Absolutbetrag

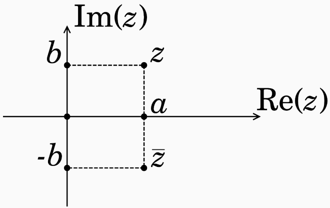
Komplexe Konjugation

Definition

Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ heißt

$$\bar{z} := a - bi$$

die zu z komplex konjugierte Zahl.



Eigenschaften der komplexen Konjugation

Proposition

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Rechenregeln der komplexen Konjugation.

(a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \overline{w}$, $\overline{z\,w} = \bar{z}\,\overline{w}$,

(b) $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$,

(c) $\bar{\bar{z}} = z$,

(d) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

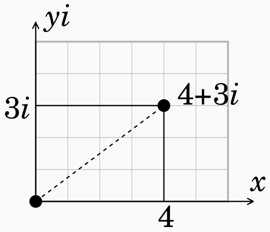
Absolutbetrag

Definition

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$. *Dann heißt*

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

der *Absolutbetrag* *von* z.



Eigenschaften des Absolutbetrages

Proposition

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Rechenregeln des Absolutbetrags.

(a) *Positive Definitheit:* $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0 \iff z = 0$,

(b) *Multiplikativität:* $|zw| = |z| \cdot |w|$,

(c) *Dreiecksungleichungen:* $|z + w| \leq |z| + |w|$ *und* $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$,

(d) *Zusammenhang mit der komplexen Konjugation:* $|\bar{z}| = |z|$ *und* $|z|^2 = z\,\bar{z}$.

Geometrische Veranschaulichung der Multiplikation

Polarkoordinaten

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir schreiben

$$z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|(x + iy),$$

wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf dem Einheitskreis liegt. Insbesondere gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$. Mit $r := |z|$ gilt insgesamt

$$z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi).$$

Auf diese Weise lassen sich von Null verschiedene komplexe Zahlen in Polarkoordinaten darstellen.

Hauptwert des Arguments

Definition

φ heißt ein Argument von z. Wählt man $-\pi < \varphi \leq \pi$, so heißt diese Wahl des Arguments Hauptwert des Arguments.
Bezeichnung: $\operatorname{Arg} z$

Multiplikation komplexer Zahlen

Für

$$z = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi) \quad \text{und} \quad w = s(\cos\psi + i\ \sin\psi)$$

mit $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} z \cdot w &= rs(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)(\cos\psi + i\ \sin\psi) \\ &= rs\big((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)\big) \\ &= rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\ \sin(\varphi+\psi)\big). \end{aligned}$$

Fazit: Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente (modulo 2π) addiert.

Proposition

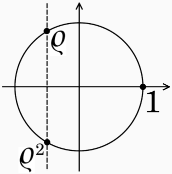
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann hat die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen z in $\mathbb{C}$. Ist $a = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, so werden diese gegeben durch

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

mit $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Denn: Diese n Zahlen sind paarweise verschiedene Lösungen der Gleichung, also Nullstellen des Polynoms $X^n - a \in \mathbb{C}[X]$. Dieses hat als Polynom vom Grad n mit Einträgen in einem Körper höchstens n Nullstellen.

Lösungen von $z^n = 1$ heißen n-te Einheitswurzeln.
In der Abbildung sind die dritten Einheitswurzeln dargestellt:
1, ϱ, ϱ^2 mit $\varrho = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.



Der Limes und elementare topologische Begriffe

Definition

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer Zahlen heißt* *konvergent*, *wenn es ein* $z \in \mathbb{C}$ *gibt, so dass es für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *gibt mit*

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

Dann heißt z *der* *Limes* *von* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$*; man schreibt*

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Eigenschaften des Limes

Lemma

(a) *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

(b) *Konvergente Folgen sind beschränkt, es existiert also ein $C > 0$ mit $|z_n| \leq C \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(c) *Ist $\lim z_n = z$ und $\lim w_n = w$, so folgt*

$$\lim(z_n + w_n) = z + w \quad \textit{und} \quad \lim(z_n \cdot w_n) = z \cdot w$$

(d) *Ist $\lim z_n = z \neq 0$ und $z_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z}$.*

(e) *Ist $\lim z_n = z$, so folgt*

$$\lim \overline{z_n} = \bar{z}, \quad \lim \mathrm{Re} z_n = \mathrm{Re} z, \quad \lim |z_n| = |z|, \quad \lim \mathrm{Im} z_n = \mathrm{Im} z.$$

Cauchyfolgen

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine Cauchyfolge, wenn gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $m, n > N$.

Lemma (Cauchysches Konvergenzkriterium)

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Definition

Unter der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ *mit* $z_\nu \in \mathbb{C}$ *versteht man die Folge* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *der Partialsummen* $S_n := \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu$. *Ist diese konvergent, so ist die Reihe konvergent. Ist* $S = \lim S_n$, *so schreibt man*

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu .$$

Geometrische Reihe

Für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gilt für $|z| < 1$:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

Wegen $|z| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$, also folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z}.$$

Eigenschaften von Reihen

Für komplexe Reihen gelten die aus der reellen Analysis bekannten Gesetzmäßigkeiten, wie etwa

- Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert, dann ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge,
- Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergiert, dann auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$,
- Majorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium, …

Definition

Die Standardtopologie auf $\mathbb{C}$ ist wie folgt gegeben.

(a) *Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann heißt*

$$U_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

eine (offene) ε-Umgebung von z_0.

(b) *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ und $z_0 \in A$. Genau dann heißt z_0 ein innerer Punkt von A, wenn A eine ε-Umgebung von z_0 enthält.*

(c) *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt offen, wenn jeder Punkt $z_0 \in A$ innerer Punkt von A ist. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.*

Beschränktheit, Kompaktheit

Definition

(a) *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt* **beschränkt**, *wenn es ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für alle $z_0 \in A$ die Abschätzung $|z_0| \leq C$ gilt.*

(b) *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt* **kompakt**, *falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Nach dem Satz von* HEINE-BOREL *ist dies äquivalent dazu, dass sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Erweiterte komplexe Zahlen

Wir setzen

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

und versehen $\overline{\mathbb{C}}$ wie folgt mit einer Topologie:

Definition

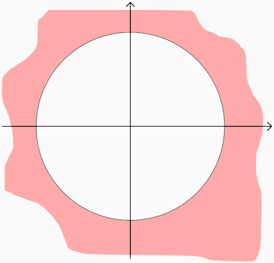
Eine Teilmenge $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ heißt offen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) *$A \cap \mathbb{C}$ ist offen in $\mathbb{C}$,*

(b) *Ist ∞ in A, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$A \supseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\} =: U_\varepsilon(\infty).$$

Abbildung 1: $U_\varepsilon(\infty)$



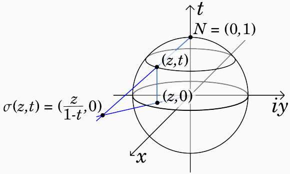
$\overline{\mathbb{C}}$ ist (im Gegensatz zu $\mathbb{C}$) kompakt. Tatsächlich ist $\overline{\mathbb{C}}$ die sogenannte Alexandrow- oder Einpunkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$.

Riemannsche Zahlenkugel

$\overline{\mathbb{C}}$ ist homöomorph zur Kugeloberfläche

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+t^2 = 1\} \cong \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2+t^2 = 1\}$$

über eine *stereographische Projektion*.



Betrachtet man $\mathbb{S}^2$ auf diese Weise als Modell für $\overline{\mathbb{C}}$, so nennt man $\overline{\mathbb{C}}$ auch die Riemannsche Zahlenkugel