# Mengentheoretische Topologie

Wintersemester 2020

Vorlesungsskript

Dr. Hendrik Kasten

4. Dezember 2023

# Inhaltsverzeichnis

# KAPITEL 1

# Die Grundbegriffe der Topologie

## 1.1 Topologische Räume

**Definition 1.1.** *Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ aus einer Menge $X$ und einer Teilmenge $\mathcal{O}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von $X$ mit den Eigenschaften*

$(T_1^{(O)})$ $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

$(T_2^{(O)})$ *Die Vereinigung unendlich vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ ist in $\mathcal{O}$:*

$$(O_i)_{i \in I} \text{ Familie von Mengen aus } \mathcal{O} \text{ (mit geeigneter Indexmenge } I) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

$(T_3^{(O)})$ *Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ ist in $\mathcal{O}$:*[1]

$$O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{O} \text{ (mit geeignetem } n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}.$$

*Ist $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so nennen wir $\mathcal{O}$ eine **Topologie** auf $X$ und die Elemente von $\mathcal{O}$ die **offenen Mengen** von $\mathcal{T}$.*

Im Weiteren verwenden wir auch die folgenden Sprechweisen und Notationen:

- Statt vom topologischen Raum $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ sprechen wir auch einfacher vom topologischen Raum $X$.
- Elemente $x \in X$ nennen wir Punkte des topologischen Raums $\mathcal{T}$ bzw. $X$.

[1] Offensichtlich genügt es zum Nachweis von $(T_3^{(O)})$ zu zeigen, dass der Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathcal{O}$ wieder in $\mathcal{O}$ liegt. Letzteres ist oftmals weniger aufwändig.

- Ist $U \subseteq X$ eine offene Menge von $\mathcal{T}$ bzw. $X$, so schreiben wir „$U \subseteq X$ offen (bezüglich $\mathcal{T}$)“oder „$U \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X$“.

**Beispiel 1.2.** (a) *Eine beliebige Menge X lässt sich mit der* ***diskreten Topologie*** *versehen, bezüglich welcher alle Teilmengen von X offen sind. Wir sprechen dann vom* ***diskreten Raum*** $X_{\text{disk}} := (X, \mathcal{P}(X))$.

(b) *Eine beliebige Menge X lässt sich mit der* ***indiskreten Topologie*** *versehen, bezüglich welcher* $\emptyset$ *und X die einzigen offenen Teilmengen von X sind. Wir sprechen dann vom* ***indiskreten Raum*** $X_{\text{indisk}} := (X, \{\emptyset, X\})$.

**Definition 1.3.** *Sei* $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum. Genau dann heißt eine Teilmenge* $U \subseteq X$ *eine* ***abgeschlossene Menge*** *von* $\mathcal{T}$ *bzw. X, wenn ihr Komplement* $X \setminus U$ *offen ist. Wir schreiben „*$U \subseteq X$ *abgeschlossen (bezüglich* $\mathcal{O}$*)“oder „*$U \mathrel{\underset{\bullet}{\subseteq}} X$*“.*

*Eine Teilmenge* $U \subseteq X$*, die gleichermaßen offen und abgeschlossen ist, nennen wir eine* ***abgeschloffene Menge*** *von* $\mathcal{T}$ *bzw. X.*

**Proposition 1.4.** *Eine Topologie lässt sich auch durch die Angabe ihrer abgeschlossenen Mengen definieren: Sei X eine Menge und* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *eine Teilmenge der Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$ *von X mit den Eigenschaften*

($T_1^{(A)}$) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

($T_2^{(A)}$) *Der Durchschnitt unendlich vieler Mengen aus* $\mathcal{A}$ *ist in* $\mathcal{A}$*:*

$$(A_i)_{i\in I} \text{ Familie von Mengen aus } \mathcal{A} \text{ (mit geeigneter Indexmenge } I) \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

($T_3^{(A)}$) *Die Vereinigung endlich vieler Mengen aus* $\mathcal{A}$ *ist in* $\mathcal{A}$*:*

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \text{ (mit geeignetem } n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}.$$

*Dann ist* $\mathcal{O} := \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$ *die eindeutig bestimmte Topologie auf X, so dass* $\mathcal{A}$ *die Menge der abgeschlossenen Mengen des topologischen Raums* $(X, \mathcal{O})$ *ist.*

*Beweis.* Die Menge $\mathcal{O}$ aus der Proposition ist tatsächlich eine Topologie auf $X$,

*denn:* Axiom ($T_1^{(O)}$) folgt sofort aus ($T_1^{(A)}$) und der Definition von $\mathcal{O}$.

Zum Beweis von ($T_2^{(O)}$) betrachten wir eine Familie $(O_i)_{i\in I}$ von Mengen aus $\mathcal{O}$.[2] Dann gibt es zu jedem $i \in I$ ein $A_i \in \mathcal{A}$ mit $O_i = X \setminus A_i$ und es gilt wie verlangt

$$\bigcup_{i\in I} O_i = X \setminus \big(X \setminus \bigcup_{i\in I} O_i\big) = X \setminus \bigcap_{i\in I} (X \setminus O_i) = X \setminus \underbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}_{\in \mathcal{A} \text{ nach } (T_2^{(A)})} \quad \in \mathcal{O}.$$

[2]Wir werden ab sofort nicht mehr eigens erwähnen, dass wir mit $I$ eine geeignete Indexmenge bezeichnen.

Schließlich weisen wir Axiom $(T_3^{(O)})$ nach und betrachten dafür $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{O}$ mit einem $n \in \mathbb{N}$. Wieder gibt es zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein $A_i \in \mathcal{A}$ mit $O_i = X \setminus A_i$ und es gilt wie behauptet

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i = X \setminus \big(X \setminus \bigcap_{i \in I} O_i\big) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus O_i) = X \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}_{\in \mathcal{A} \text{ nach } (T_3^{(A)})} \qquad \in \mathcal{O}.$$

#

Da nach Konstruktion von $\mathcal{O}$ eine Teilmenge $U \subseteq X$ genau dann Element von $\mathcal{O}$ ist, wenn ihr Komplement $X \setminus U$ Element von $\mathcal{A}$ ist, ist $\mathcal{A}$ die Menge der abgeschlossenen Mengen des topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathcal{O}$ mit der nachgewiesenen Eigenschaft eindeutig ist. Sei dafür $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie auf $X$, die der Behauptung genügt. Dann gilt

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{O} &\implies X \setminus U \in \mathcal{A} \implies U \in \mathcal{O}' && \text{und also } \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}', \\ U \in \mathcal{O}' &\implies X \setminus U \in \mathcal{A} \implies U \in \mathcal{O} && \text{und also } \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}. \end{aligned}$$

□

**Definition 1.5.** *Sei $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Genau dann heißt eine Teilmenge $U \subseteq X$ eine* ***Umgebung*** *eines Punktes $x \in X$ (bezüglich der Topologie $\mathcal{O}$), wenn ein $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subseteq U$ existiert.*

Der Begriff der Umgebung ermöglicht eine neue Beschreibung offener Mengen:

**Proposition 1.6.** *Sei $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $U \subseteq X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $U \in \mathcal{O}$.

(ii) *Für alle $x \in U$ ist $U$ eine Umgebung von $x$.*

*Beweis.* Gelte zunächst $U \in \mathcal{O}$ und sei $x \in U$. Dann ist offensichtlich $U$ bereits eine Umgebung von $x$; als offene Teilmenge von $U$, die $x$ enthält, können wir in diesem Fall $U$ selbst heranziehen.

Gibt es umgekehrt für jedes $x \in U$ ein $O_x \in \mathcal{O}$ mit $x \in O_x \subseteq U$, so gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} O_x \subseteq U$$

und also

$$U = \bigcup_{x \in U} O_x \quad \in \mathcal{O}$$

nach $(T_2^{(O)})$. □

In der Analysis zieht man bekanntermaßen besondere Umgebungen heran, um in endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen eine Topologie zu definieren. Dies funktioniert wie folgt auch allgemeiner in metrischen Räumen:

**Beispiel 1.7.** *Ein metrischer Raum $X = (X, d)$ lässt sich mit der **metrischen Topologie** versehen, bezüglich welcher genau diejenigen Teilmengen $U \subseteq X$ offen sind, in denen um jeden Punkt $x \in U$ auch eine $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$ enthalten ist.*[3] *Die **Standardtopologie** eines endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes (wie etwa des $\mathbb{R}^n$ mit einem $n \in \mathbb{N}$) ist die von einer beliebigen Norm, etwa dem Euklidischen Abstand, induzierte Topologie. Da alle Normen auf endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen äquivalent sind, ist diese Topologie unabhängig von der Wahl der Norm.*

**Definition 1.8.** *Sei $X$ eine Menge und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von $X$ mit den Eigenschaften*

($F_1$) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ *und* $X \in \mathcal{F}$.

($F_2$) *Jedes $V \in \mathcal{P}(X)$, das ein $U \in \mathcal{F}$ als Teilmenge enthält, ist selbst schon ein Element von $\mathcal{F}$.*

($F_3$) *Für $U, V \in \mathcal{F}$ ist auch $U \cap V$ wieder Element von $\mathcal{F}$.*

*Dann heißt $\mathcal{F}$ ein **Filter** auf $X$.*

**Beispiel 1.9.** *Sei $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist die Menge*

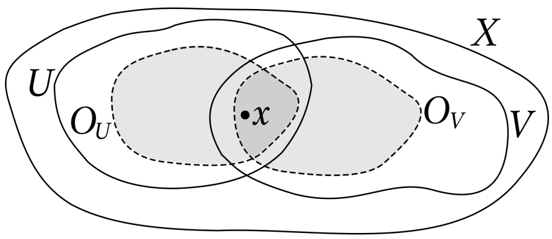
$$\mathcal{U}(x) := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist Umgebung von } x\}$$

*ein Filter, der **Umgebungsfilter** von $x$ (bezüglich der Topologie $\mathcal{O}$),*

*denn: Offensichtlich gelten $\emptyset \notin \mathcal{U}(x)$ und $X \in \mathcal{U}(x)$ und somit Axiom ($F_1$). Da jede Teilmenge $U \subseteq X$, die eine Umgebung von $x$ enthält, nach Definition 1.5 auch selbst eine Umgebung von $x$ in $X$ ist, gilt auch Axiom ($F_2$). Zum Beweis von Axiom ($F_3$) seien $U, V \in \mathcal{U}(x)$ gegeben. Nach Definition 1.5 gibt es dann $O_U, O_V \in \mathcal{O}$ mit*

$$x \in O_U \subseteq U \quad \text{und} \quad x \in O_V \subseteq V.$$

*Einerseits gilt dann $O_U \cap O_V \in \mathcal{O}$ nach ($T_3^{(O)}$), andererseits aber auch $x \in O_U \cap O_V \subseteq U \cap V$. Es folgt $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$ und somit ($F_3$).*




[3] Eine Anmerkung zur Begriffsklärung: Über die Definition der Metrik lässt sich leicht überprüfen, dass die $\varepsilon$-Umgebungen eines gegebenen Punktes $x \in X$ selbst offene Mengen bezüglich der metrischen Topologie sind und daher insbesondere auch Umgebungen von $x$ im Sinne von Definition 1.5.

#

**Proposition 1.10.** *Eine Topologie lässt sich auch durch die Angabe von Umgebungen für jeden einzelnen Punkt definieren: Sei $X$ eine Menge und sei $\mathcal{U}'(x)$ für jedes $x \in X$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von $X$ mit den Eigenschaften*

$(T_1^{(U)})$ *Für alle $x \in X$ ist $\mathcal{U}'(x)$ ein Filter.*

$(T_2^{(U)})$ *Für alle $U \in \mathcal{U}'(x)$ ist $x \in U$.*

$(T_3^{(U)})$ *Für alle $U \in \mathcal{U}'(x)$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}'(x)$ mit $V \subseteq U$ und $V \in \mathcal{U}'(y)$ für alle $y \in V$.*

*Dann ist $\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid \text{ für alle } x \in U \text{ ist } U \in \mathcal{U}'(x)\}$ die eindeutig bestimmte Topologie auf $X$, so dass $\mathcal{U}'(x)$ für alle $x \in X$ mit dem Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ von $x$ bezüglich $\mathcal{O}$ übereinstimmt.*

*Beweis.* Die Menge $\mathcal{O}$ aus der Proposition ist tatsächlich eine Topologie auf $X$,

*denn:* Nach Konstruktion gilt $\emptyset \in \mathcal{O}$. Weiter ist nach $(T_1^{(U)})$ für alle $x \in X$ die Familie $\mathcal{U}'(x)$ ein Filter und nach $(F_1)$ gilt $X \in \mathcal{U}'(x)$ für alle $x \in X$. Es folgt $X \in \mathcal{O}$ und somit Axiom $(T_1^{(O)})$.

Zum Beweis von $(T_2^{(O)})$ betrachten wir eine Familie $(O_i)_{i \in I}$ von Mengen aus $\mathcal{O}$. Nach Konstruktion von $\mathcal{O}$ gibt es für jedes $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$ ein $j \in I$ mit

$$x \in O_j \in \mathcal{U}'(x).$$

Nach $(T_1^{(U)})$ ist $\mathcal{U}'(x)$ ein Filter. Mit $(F_2)$ folgt daher

$$\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{U}'(x)$$

und somit insgesamt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Schließlich weisen wir Axiom $(T_3^{(O)})$ nach und betrachten dafür $O, O' \in \mathcal{O}$. Ist der Durchschnitt $O \cap O'$ leer, so liegt er trivialerweise in $\mathcal{O}$. Andernfalls gibt es ein $x \in O \cap O'$ und nach Konstruktion von $\mathcal{O}$ gilt $O, O' \in \mathcal{U}'(x)$. Da $\mathcal{U}'(x)$ nach $(T_1^{(U)})$ ein Filter ist, folgt mit $(F_3)$ auch in diesem Fall $O \cap O' \in \mathcal{O}$. #

Weiter gilt für jedes $x \in X$ die Identität

$$\mathcal{U}'(x) = \mathcal{U}(x) \left( = \{U \subseteq X \mid U \text{ ist Umgebung von } x \text{ bezüglich } \mathcal{O}\} \right),$$

*denn:* Für gegebenes $x \in X$ sei zunächst $U \in \mathcal{U}(x)$. Nach Definition 1.5 enthält $U$ eine bzgl. $\mathcal{O}$ offene Umgebung $O$ von $x$ als Teilmenge. Nach Konstruktion von $\mathcal{O}$ gilt dann $O \in \mathcal{U}'(x)$ und mit $(T_1^{(U)})$ und $(F_2)$ auch $U \in \mathcal{U}'(x)$.

Sei umgekehrt $U \in \mathcal{U}'(x)$. Wir betrachten die Menge $W := \{y \in X \mid U \in \mathcal{U}'(y)\}$. Trivialerweise ist $x \in W$. Nach Konstruktion von $W$ und $(T_2^{(U)})$ gilt zudem für jedes $y \in W$ auch $y \in U$. Zusammengefasst erhalten wir also

$$x \in W \subseteq U.$$

Die Behauptung $U \in \mathcal{U}(x)$ folgt nach Definition 1.5, wenn wir $W \in \mathcal{O}$ nachweisen können. Nach Konstruktion von $\mathcal{O}$ zeigt man dazu

$$W \in \mathcal{U}'(y) \quad \text{für alle } y \in W.$$

Nach Konstruktion von $W$ erfüllt ein beliebiges $y \in W$ die Beziehung $U \in \mathcal{U}'(y)$ und nach $(T_3^{(U)})$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}'(y)$ mit $V \subseteq U$ und $V \in \mathcal{U}'(z)$ für alle $z \in V$. Nach $(T_1^{(U)})$ ist jedes solche $\mathcal{U}'(z)$ ein Filter. Mit $(F_2)$ folgt daher $U \in \mathcal{U}'(z)$ und also $z \in W$ für alle $z \in V$. Da nach $(T_1^{(U)})$ auch $\mathcal{U}'(y)$ ein Filter ist, folgt mit $V \subseteq W$ und $(F_2)$ in gleicher Manier wie verlangt $W \in \mathcal{U}'(y)$. #

Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathcal{O}$ mit der nachgewiesenen Eigenschaft eindeutig ist. Aber für eine beliebige Topologie $\mathcal{O}'$ auf $X$, deren Umgebungsfilter für jedes $x \in X$ durch $\mathcal{U}'(x)$ gegeben sind, gilt

$$U \in \mathcal{O}' \quad \overset{1.6}{\Longleftrightarrow} \quad U \in \mathcal{U}'(x) \text{ für alle } x \in U,$$

so dass $\mathcal{O}'$ durch das System der $\mathcal{U}'(x)$ für $x \in X$ bereits eindeutig festgelegt ist und somit mit $\mathcal{O}$ übereinstimmt. □

**Definition 1.11.** *Sei $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{A}$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathcal{T}$. Für eine beliebige Teilmenge $U \subseteq X$ heißt dann*

$$\mathring{U} := \bigcup_{O \in \mathcal{O} \text{ mit } O \subseteq U} O \quad \text{das } \textbf{Innere} \text{ von } U \text{ (= größte off. Teilmenge von } X\text{, die in } U \text{ enthalten ist)},$$

$$\overline{U} := \bigcap_{A \in \mathcal{A} \text{ mit } U \subseteq A} A \quad \text{der } \textbf{Abschluss} \text{ von } U \text{ (= kleinste abg. Teilmenge von } X\text{, die } U \text{ enthält)},$$

$$\partial U := \overline{U} \setminus \mathring{U} \quad \text{der } \textbf{Rand} \text{ von } U.$$

*Ein Punkt $x \in X$ heißt*

$$\begin{aligned} &\textbf{innerer Punkt} \text{ von } U && \Longleftrightarrow x \in \mathring{U}, \\ &\textbf{Berührpunkt} \text{ von } U && \Longleftrightarrow x \in \overline{U}, \\ &\textbf{Randpunkt} \text{ von } U && \Longleftrightarrow x \in \partial U, \\ &\textbf{äußerer Punkt} \text{ von } U && \Longleftrightarrow x \in X \setminus \overline{U}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.12.** *Sei die Notation wie in Definition 1.11. Für beliebige Teilmengen $U, V \subseteq X$ gelten dann offensichtlich die folgenden Aussagen:*

- $U \in \mathcal{O} \iff U = \mathring{U}$ *und* $U \in \mathcal{A} \iff U = \overline{U}$,
- $V \subseteq U \implies \mathring{V} \subseteq \mathring{U}$ *und* $V \subseteq U \implies \overline{V} \subseteq \overline{U}$,

- $X \setminus \mathring{U} = X \setminus \bigcup_{O \in \mathcal{O} \text{ mit } O \subseteq U} O = \bigcap_{O \in \mathcal{O} \text{ mit } O \subseteq U} (X \setminus O) = \bigcap_{A \in \mathcal{A} \text{ mit } X \setminus U \subseteq A} A = \overline{(X \setminus U)}$,
- $X \setminus \overline{U} = X \setminus \bigcap_{A \in \mathcal{A} \text{ mit } U \subseteq A} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A} \text{ mit } U \subseteq A} (X \setminus A) = \bigcup_{O \in \mathcal{O} \text{ mit } O \subseteq X \setminus U} O = (X \mathring{\setminus} U)$,
- $X = (X \setminus \overline{U}) \sqcup \overline{U} = (X \setminus \overline{U}) \sqcup \mathring{U} \sqcup (\overline{U} \setminus \mathring{U}) = (X \setminus \overline{U}) \sqcup \mathring{U} \sqcup \partial U$.

**Bemerkung 1.13.** *Die in Definition 1.11 eingeführten Begriffe hängen vom topologischen Raum $X$ ab, in dem die betrachtete Menge $U$ eingebettet ist. Dies sehen wir anhand des Beispiels $U = [0,1)$ des halboffenen Einheitsintervalls ein:*

(a) $X = \mathbb{R}$. *Dann gilt* $\mathring{U} = (0,1)$, $\overline{U} = [0,1]$, $\partial U = [0,1] \setminus (0,1) = \{0,1\}$.

(b) $X = \mathbb{C}$. *Dann gilt* $\mathring{U} = \emptyset$, $\overline{U} = [0,1]$, $\partial U = [0,1] \setminus \emptyset = [0,1]$.

*Hier kommt die in Beispiel 1.7 betrachtete Standardtopologie von $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ bzw. $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ zum Einsatz.*

**Proposition 1.14.** *Sei $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $U \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | *$x$ innerer Punkt von $U$* | $\iff$ | $x \in \mathring{U}$ | $\iff$ | $U \in \mathcal{U}(x)$, |
| (b) | *$x$ Berührpunkt von $U$* | $\iff$ | $x \in \overline{U}$ | $\iff$ | $\forall V \in \mathcal{U}(x) : V \cap U \neq \emptyset$, |
| (c) | *$x$ Randpunkt von $U$* | $\iff$ | $x \in \partial U$ | $\iff$ | $\forall V \in \mathcal{U}(x) : V \cap U \neq \emptyset \neq V \cap (X \setminus U)$, |
| (d) | *$x$ äußerer Punkt von $U$* | $\iff$ | $x \in X \setminus \overline{U}$ | $\iff$ | $X \setminus U \in \mathcal{U}(x)$. |

*Beweis.* Zu zeigen ist jeweils nur die hintere Äquivalenz.

Zum Beweis von Behauptung (a) sei zunächst $x \in \mathring{U} \circledcirc X$. Wegen $\mathring{U} \subseteq U$ folgt $U \in \mathcal{U}(x)$ nach Definition 1.5. Ist umgekehrt $U \in \mathcal{U}(x)$, so gibt es nach Konstruktion ein $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subseteq U$. Nach Definition 1.11 gilt dann auch $x \in \mathring{U}$.

Zum Nachweis von Behauptung (b) sei zunächst $x \in \overline{U}$. Für ein beliebiges $V \in \mathcal{U}(x)$ gilt dann $V \cap U \neq \emptyset$,

*denn:* Ohne Einschränkung sei $V \in \mathcal{O}$. Wegen $x \in V$ und $x \in \overline{U}$ ist $V \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Gälte nun $V \cap U = \emptyset$, so auch $U \subseteq X \setminus V \circledast X$. Mit Bemerkung 1.12 folgte $\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V$, was nicht sein kann. #

Ist nun umgekehrt $x \in X \setminus \overline{U}$, so gilt einerseits insbesondere $X \setminus \overline{U} \in \mathcal{U}(x)$, andererseits

$$(X \setminus \overline{U}) \cap U \subseteq (X \setminus U) \cap U = \emptyset.$$

Somit gibt es ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \cap U = \emptyset$, nämlich $V = X \setminus \overline{U}$.

Wir beweisen nun Behauptung (c): Der Punkt $x$ liegt genau dann in $\partial U = \overline{U} \setminus \mathring{U}$, wenn $x$ in $\overline{U}$ und in $X \setminus \mathring{U} = \overline{X \setminus U}$ liegt. Nach Aussage (b) ist das aber äquivalent dazu, dass für alle $V \in \mathcal{U}(x)$ die behauptete Bedingung $V \cap U \neq \emptyset \neq V \cap (X \setminus U)$ gilt.

Es verbleibt Behauptung (d) zu zeigen. Aber nach Aussage (a) liegt der Punkt $x$ genau dann in $X \setminus \overline{U} = (X \mathring{\setminus} U)$, wenn $X \setminus U \in \mathcal{U}(x)$ gilt. □

**Beispiel 1.15.** *Im topologischen Raum $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie bezeichnen*

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \qquad \text{die } \textbf{offene Einheitskugel},$$
$$\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \qquad \text{die } \textbf{abgeschlossene Einheitskugel}.$$

*Es gelten dann*

$$\overline{\mathbb{B}^n} = \overline{\mathbb{D}^n} = \mathbb{D}^n, \quad \mathring{\mathbb{B}}^n = \mathring{\mathbb{D}}^n = \mathbb{B}^n,$$
$$\partial\mathbb{B}^n = \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} =: \mathbb{S}^{n-1}, \text{ die } (n-1)\text{-dimensionale } \textbf{Einheitssphäre}.$$

**Definition 1.16.** *Sei $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine beliebige Teilmenge $U \subseteq X$ heißt* ***dicht*** *in $X$, wenn die nach Proposition 1.14 äquivalenten Aussagen*

$$\overline{U} = X \iff \text{alle } x \in X \text{ sind Berührpunkte von } U$$
$$\iff \text{für alle } x \in X \text{ und alle } V \in \mathcal{U}(x) \text{ gilt } U \cap V \neq \emptyset$$

*gelten.*

**Beispiel 1.17.** *$\mathbb{Q}$ ist eine dichte Teilmenge in $\mathbb{R}$.*

## 1.2 Stetige Abbildungen

**Definition 1.18.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann sagen wir:*

$$f \text{ ist } \textbf{stetig} \quad :\iff \quad \text{Für alle } U' \in \mathcal{O}' \text{ gilt } f^{-1}(U') \in \mathcal{O}.$$

**Beispiel 1.19.** *Sei $X$ eine beliebige Menge und sei $X'$ ein beliebiger topologischer Raum. Dann gelten für die wie in Beispiel 1.2 definierten topologischen Räume $X_{\text{disk}}$ und $X_{\text{indisk}}$ offensichtlich die folgendenden Aussagen:*

(a) *Jede Abbildung $X_{\text{disk}} \to X'$ ist stetig.*

(b) *Jede Abbildung $X' \to X_{\text{indisk}}$ ist stetig.*

*Als Spezialfall sind die Abbildungen $\mathrm{id} : X_{\text{disk}} \to X_{\text{disk}}$, $\mathrm{id} : X_{\text{disk}} \to X_{\text{indisk}}$ und $\mathrm{id} : X_{\text{indisk}} \to X_{\text{indisk}}$ stetig, die allesamt $X$ punktweise unverändert lassen. Nicht stetig ist dagegen für $|X| > 1$ die Abbildung $\mathrm{id} : X_{\text{indisk}} \to X_{\text{disk}}$,*

*denn: Für ein beliebiges $x \in X$ ist die Menge $\{x\}$ offen in $X_{\text{disk}}$ aber wegen $|X| > 1$ nicht offen in $X_{\text{indisk}}$.* #

**Proposition 1.20.** *Seien $X, X', X''$ topologische Räume und $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$ stetige Abbildungen. Dann ist auch die Verkettung $g \circ f : X \to X''$ stetig.*

*Beweis.* Für $U'' \overset{\circ}{\subseteq} X''$ gilt $g^{-1}(U'') \overset{\circ}{\subseteq} X'$ wegen der Stetigkeit von $g$ und

$$(g \circ f)^{-1}(U'') = f^{-1}(g^{-1}(U'')) \overset{\circ}{\subseteq} X$$

wegen der Stetigkeit von $f$. □

**Definition 1.21.** *Seien $X, X'$ topologische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann sagen wir:*

$$f \textit{ ist ein } \textbf{\textit{Homöomorphismus}} \quad :\Longleftrightarrow \quad f \textit{ ist stetig, } f \textit{ ist bijektiv und } f^{-1} \textit{ ist stetig.}$$

*Die topologischen Räume $X, X'$ heißen **homöomorph**, in Zeichen: $X \cong X'$, falls es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt. Eine Eigenschaft des topologischen Raums $X$ heißt **topologisch**, falls sie unter Homöomorphismen erhalten bleibt.*

**Bemerkung 1.22.** *Es lässt sich leicht überprüfen, dass Homöomorphie eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume ist.*

**Beispiel 1.23.** *Diskretheit ist eine topologische Eigenschaft,*

*denn: Seien $X$ eine Menge, $X'$ ein topologischer Raum und $f : X \to X'$ ein Homöomorphismus. Für ein beliebiges $U' \subseteq X'$ gilt dann $f^{-1}(U') \overset{\circ}{\subseteq} X_{\text{disk}}$ wegen der Diskretheit von $X_{\text{disk}}$ und*

$$U' = f(f^{-1}(U')) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U')) \overset{\circ}{\subseteq} X'$$

*wegen der Homöomorphie von $f$.* #

**Definition 1.24.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume, $f : X \to X'$ eine Abbildung und $x \in X$ ein Punkt. Dann sagen wir:*

$$f \textit{ ist } \textbf{\textit{stetig in}} \ x \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{Für alle } U' \in \mathcal{U}(f(x)) \textit{ gilt } f^{-1}(U') \in \mathcal{U}(x).$$

**Proposition 1.25.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$f$ ist stetig.*

(ii) *$f$ ist stetig in allen $x \in X$.*

(iii) *Für alle $U \subseteq X$ ist $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$.*

(iv) *Für alle $U' \overset{\bullet}{\subseteq} X'$ gilt $f^{-1}(U') \overset{\bullet}{\subseteq} X$.*

*Beweis.* Zunächst gelte Aussage (i). Zu jedem $x \in X$ und jedem $U' \in \mathcal{U}(f(x))$ existiert nach Definition 1.5 ein $V' \overset{\circ}{\subseteq} X'$ mit $f(x) \in V' \subseteq U'$. Dann folgt sofort $x \in f^{-1}(V') \subseteq f^{-1}(U')$ und wegen der Stetigkeit von $f$ gilt $f^{-1}(V') \overset{\circ}{\subseteq} X$. Insgesamt erhalten wir $f^{-1}(U') \in \mathcal{U}(x)$ und nach Definition 1.24 somit Aussage (ii).

Gelte nun Aussage (ii), sei $U \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge und sei $x \in \overline{U}$. Da $f$ stetig in $x$ ist, gilt für jedes $V' \in \mathcal{U}(f(x))$ automatisch $f^{-1}(V') \in \mathcal{U}(x)$. Wir können daher Teil (b) von Proposition 1.14 anwenden und erhalten $f^{-1}(V') \cap U \neq \varnothing$. Nach Abbilden mit $f$ folgt

$$\varnothing \neq f(f^{-1}(V') \cap U) \subseteq f(f^{-1}(V')) \cap f(U) \subseteq V' \cap f(U).$$

Wieder mit Teil (b) von Proposition 1.14 folgt $f(x) \in \overline{f(U)}$ und somit insgesamt Aussage (iii).

Nun gelte Aussage (iii) und sei $U' \overset{\bullet}{\subseteq} X'$. Dann gilt

$$f\left(\overline{f^{-1}(U')}\right) \overset{\text{(iii)}}{\subseteq} \overline{f(f^{-1}(U'))} \subseteq \overline{U'} = U'.$$

Betrachten wir auf beiden Seiten die Urbilder unter $f$, so erhalten wir

$$f^{-1}(U') \subseteq \overline{f^{-1}(U')} \subseteq f^{-1}(U'),$$

also $f^{-1}(U') \overset{\bullet}{\subseteq} X$ und insgesamt Aussage (iv).

Gelte schließlich Aussage (iv). Für jedes $U' \overset{\circ}{\subseteq} X'$ gilt sofort

$$f^{-1}(U') = f^{-1}(X' \setminus (X' \setminus U')) = X \setminus f^{-1}(X' \setminus U').$$

Wegen $X' \setminus U' \overset{\bullet}{\subseteq} X'$ und (iv) wissen wir aber auch $f^{-1}(X' \setminus U') \overset{\bullet}{\subseteq} X$, nach dem Obigen also $f^{-1}(U') \overset{\circ}{\subseteq} X$ und insgesamt Aussage (i). □

**Bemerkung 1.26.** *Es ist a priori unklar, wie die Stetigkeitsbegriffe aus den Definitionen 1.18 und 1.24 mit dem in der Analysis eingeführten Stetigkeitsbegriff für reelle Funktionen zusammenhängen. Wir wollen diese Frage nun untersuchen und geben zunächst eine Definition letzteren Begriffs im etwas allgemeineren Setting metrischer Räume wider:*

*Seien $(X, d), (X', d')$ metrische Räume, $f : X \to X'$ eine Abbildung und $x \in X$ ein Punkt. Dann sagen wir:*

$$f \text{ ist } \varepsilon\text{-}\delta\text{-}\textbf{stetig in } x :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X : d(x, y) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

*Mithilfe der in Beispiel 1.7 eingeführten $\varepsilon$-Umgebungen lässt sich dies umformulieren zu:*

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \varepsilon\text{-}\delta\text{-}\textbf{stetig in } x &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X : y \in U_\delta(x) \Longrightarrow f(y) \in U_\varepsilon(f(x)) \\ &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)) \\ &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))). \end{aligned}$$

*Die letzte Formulierung ähnelt bereits der Definition des Begriffs der Stetigkeit in einem Punkt $x \in X$. Tatsächlich gilt*

$$f \text{ ist } \varepsilon\text{-}\delta\text{-stetig in } x \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist stetig in } x \text{ im Sinne von Definition 1.24},$$

*denn: Gelte zunächst die $\varepsilon$-$\delta$-Stetigkeit von $f$ in einem $x \in X$. Da nach Beispiel 1.7 die $\delta$-Umgebung $U_\delta(x)$ für alle $\delta > 0$ eine offene Umgebung von $x$ ist, folgt*

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))) \in \mathcal{U}(x).$$

*Sei nun $U' \in \mathcal{U}(f(x))$ beliebig. Nach Definition der metrischen Topologie auf $X'$ gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x) \in U_\varepsilon(f(x)) \subseteq U'$ und also $x \in f^{-1}\big(U_\varepsilon(f(x))\big) \subseteq f^{-1}(U')$. Nach $(F_2)$ ist daher $f^{-1}(U')$ im Filter $\mathcal{U}(x)$ enthalten und somit insgesamt $f$ stetig in $x$.*

*Sei nun umgekehrt $f$ stetig in einem Punkt $x \in X$. Da nach Beispiel 1.7 die $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(f(x))$ für alle $\varepsilon > 0$ in $\mathcal{U}(f(x))$ liegt, folgt mit Definition 1.24*

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } f^{-1}\big(U_\varepsilon(f(x))\big) \in \mathcal{U}(x).$$

*Nach Definition der metrischen Topologie in $X$ folgt*

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0 \text{ mit } U_\delta(x) \subseteq f^{-1}\big(U_\varepsilon(f(x))\big)$$

*und insgesamt somit die $\varepsilon$-$\delta$-Stetigkeit von $f$ in $x$.* #

*Nach Proposition 1.25 ist also die Abbildung $f$ genau dann stetig, wenn sie $\varepsilon$-$\delta$-stetig allen $x \in X$ ist.*

Im Spezialfall metrischer Räume lässt es sich mit dem Begriff der $\varepsilon$-$\delta$-Stetigkeit oft angenehmer arbeiten als mit den Stetigkeitsbegriffen aus den Definitionen 1.18 und 1.24. Wir betrachten noch ein weiteres Beispiel für einen Homöomorphismus in diesem Kontext.

**Beispiel 1.27.** *Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $(a, b) \cong \mathbb{R}$,*

*denn: Mit dem Begriff der $\varepsilon$-$\delta$-Stetigkeit aus Bemerkung 1.26 lässt sich leicht einsehen, dass Homothetien $x \mapsto \lambda \cdot x$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und Translationen $x \mapsto x + x_0$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$ Homöomorphismen von $\mathbb{R}$ auf sich selbst sind. Es genügt daher zum Beweis der Behauptung $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cong \mathbb{R}$ zu zeigen.*

*Aus der reellen Analysis ist bekannt, dass der Tangens $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ stetig und bijektiv ist und die stetige Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hat.* #

**Definition 1.28.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann sagen wir:*

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textbf{offen} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } U \circledcirc X \text{ gilt } f(U) \circledcirc X', \\ f \text{ ist } \textbf{abgeschlossen} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } U \odot X \text{ gilt } f(U) \odot X'. \end{aligned}$$

**Proposition 1.29.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $f : X \to X'$ eine stetige, bijektive Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$f$ ist ein Homöomorphismus.*

(ii) *$f$ ist offen.*

(iii) *$f$ ist abgeschlossen.*

*Beweis.* Nach Definition 1.21 ist $f$ genau dann ein Homöomorphismus, wenn $f^{-1}$ stetig ist. Weiter gilt nach Definition 1.24 und Proposition 1.25

$$\begin{aligned} f^{-1} \text{ ist stetig } &\Longleftrightarrow \text{ für alle } U \circledcirc X \text{ gilt } f(U) \circledcirc X' \\ &\Longleftrightarrow \text{ für alle } U \odot X \text{ gilt } f(U) \odot X'. \end{aligned}$$

Die Proposition folgt sofort mit Definition 1.28. □

## 1.3 Erzeugung von Topologien

Ähnlich wie man in der Linearen Algebra Vektorräume lieber als Erzeugnis einer geeigneten Basis darstellt als alle Elemente einzeln anzugeben, möchten wir in diesem Abschnitt geeignete Wege zur Erzeugung von Topologien auf gegebenen Mengen finden. Bevor wir dies tun, führen wir aber noch eine Methode ein, Topologien auf derselben Menge miteinander zu vergleichen.

**Definition 1.30.** *Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Dann sagen wir:*

$$\begin{aligned} &(X,\leq) \text{ ist ein } \textbf{Verband} &&:\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } x,y \in X \text{ gilt } \inf\{x,y\}, \sup\{x,y\} \in X, \\ &(X,\leq) \text{ ist ein } \textbf{vollständiger Verband} &&:\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } \emptyset \neq U \subseteq X \text{ gilt } \inf U, \sup U \in X. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.31.** (a) *Eine totalgeordnete Menge $(X, \leq)$ ist stets ein Verband, denn dann gilt*

$$\inf\{x,y\} = \min\{x,y\} \quad \text{und} \quad \sup\{x,y\} = \max\{x,y\} \qquad \text{für alle } x,y \in X.$$

*Ein Beispiel hierfür ist $(\mathbb{R}, \leq)$ mit der bekannten Totalordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$.*

(b) *$(\mathbb{R}, \leq)$ aus (a) ist kein vollständiger Verband, da offensichtlich ist etwa $\sup \mathbb{R} \notin \mathbb{R}$. Erweitern wir jedoch $\mathbb{R}$ um zwei Symbole $\pm\infty$ mit $-\infty \leq x \leq +\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und setzen für eine beliebige Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \inf U &= -\infty, && \text{falls es für alle } x_0 \in \mathbb{R} \text{ ein } x \in U \text{ gibt mit } x \leq x_0, \\ \sup U &= +\infty, && \text{falls es für alle } x_0 \in \mathbb{R} \text{ ein } x \in U \text{ gibt mit } x \geq x_0, \end{aligned}$$

*so wird $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \leq)$ zu einem vollständigen Verband.*

(c) *Für eine beliebige Menge $X$ ist $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ein vollständiger Verband, denn für alle $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gilt*

$$\inf \mathcal{U} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \quad \text{und} \quad \sup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

**Definition 1.32.** *Sei $X$ eine Menge und sei*

$$\mathcal{T}op(X) := \{\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{O} \text{ Topologie auf } X\}$$

*die Menge der Topologien auf $X$. Für zwei Topologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \mathcal{T}op(X)$ sagen wir:*

$$\mathcal{O} \text{ ist } \textbf{feiner} \text{ als } \mathcal{O}' \text{ (bzw. } \mathcal{O}' \text{ ist } \textbf{gröber} \text{ als } \mathcal{O}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}.$$

**Satz 1.33.** *Für eine beliebige Menge $X$ ist $(\mathcal{T}op(X), \subseteq)$ ein vollständiger Verband.*

*Beweis.* Sei $\{\mathcal{O}_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}op(X)$ nichtleer. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}op(X)$, da sich die Gültigkeit der Axiome $(T_1^{(O)})$, $(T_2^{(O)})$ und $(T_3^{(O)})$ von den einzelnen $\mathcal{O}_i$ vererbt. Genau wie in Teil (c) von Beispiel 1.31 gilt daher

$$\inf_{i \in I} \mathcal{O}_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i \qquad \in \mathcal{T}op(X). \tag{1.1}$$

Wir können nicht die analoge Argumentation benutzen, um zu zeigen, dass auch $\sup_{i\in I}\mathcal{O}_i$ in $\mathcal{T}op(X)$ enthalten ist, denn im Allgemeinen ist $\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i$ keine Topologie auf $X$. Andererseits ist offensichtlich die diskrete Topologie $\mathcal{P}(X)$ eine obere Schranke von $\{\mathcal{O}_i \mid i\in I\}$ in $\mathcal{T}op(X)$, so dass die Menge der Topologien von $X$, die eine obere Schranke von $\{\mathcal{O}_i \mid i \in I\}$ sind, nichtleer ist. Nach (1.1) liegt daher ihr Infimum in $\mathcal{T}op(X)$; es gilt also

$$\sup_{i\in I}\mathcal{O}_i = \inf\{\mathcal{O}\in\mathcal{T}op(X) \mid \mathcal{O} \text{ ist obere Schranke von } \{\mathcal{O}_i \mid i\in I\}\} \qquad \in \mathcal{T}op(X). \tag{1.2}$$

$\square$

Aus Satz 1.33 folgt sofort:

**Korollar 1.34.** *Ist $E$ eine Eigenschaft von Topologien auf $X$, die sich auf alle feineren bzw. gröberen Topologien auf $X$ vererbt, so ist $\inf\{\mathcal{O}\in\mathcal{T}op(X) \mid \mathcal{O}$ erfüllt $E\}$ bzw. $\sup\{\mathcal{O}\in\mathcal{T}op(X)\mid \mathcal{O}$ erfüllt $E\}$ die gröbste bzw. feinste Topologie auf $X$, die $E$ erfüllt.*

Ein Spezialfall von Korollar 1.34 hilft uns bei der Präzisierung der folgenden

**Frage**: Sei nämlich $X$ eine Menge und $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ beliebig. Wie sieht dann die gröbste Topologie auf $X$ aus, die $\mathcal{S}$ enthält?

**Definition 1.35.** *Sei $X$ eine Menge und $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ beliebig. Dann heißt*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{S}} := \inf\{\mathcal{O}\in\mathcal{T}op(X) \mid \mathcal{S}\subseteq\mathcal{O}\},$$

*die nach Korollar 1.34 gröbste Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält, die von $\mathcal{S}$ **erzeugte** Topologie. Umgekehrt heißt $\mathcal{S}$ eine **Subbasis** der Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$.*

**Bemerkung 1.36.** *Sei $\{\mathcal{O}_i \mid i\in I\}\subseteq\mathcal{T}op(X)$ nichtleer. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\sup_{i\in I}\mathcal{O}_i &\overset{(1.2)}{=} \inf\{\mathcal{O}\in\mathcal{T}op(X)\mid \mathcal{O} \text{ ist obere Schranke von } \{\mathcal{O}_i\mid i\in I\}\}\\ &= \inf\{\mathcal{O}\in\mathcal{T}op(X) \mid \bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i\subseteq\mathcal{O}\}\\ &\overset{1.35}{=} \mathcal{O}_{\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i},\end{aligned}$$

*die Vereinigung $\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i$ ist also eine Subbasis der Topologie $\sup_{i\in I}\mathcal{O}_i$.*

**Definition 1.37.** *Sei $\mathcal{T}=(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{O}$. Wir sagen dann:*

*$\mathcal{B}$ ist eine **Basis** der Topologie $\mathcal{O}$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad$ jedes $O\in\mathcal{O}$ ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.*

**Beispiel 1.38.** *Die Menge der offenen Kugeln ist eine Basis der Standardtopologie von $\mathbb{R}^n$.*

**Proposition 1.39** (Basiskriterium)**.** *Sei $X$ eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ von $X$, wenn die folgenden Axiome gelten:*

$(B_1)$ $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.

$(B_2)$ *Für alle $B, C \in \mathcal{B}$ ist $B \cap C$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.*

*In diesem Fall ist $\mathcal{O}$ eindeutig bestimmt und es gilt*

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq X \mid U \text{ ist Vereinigung von Mengen aus } \mathcal{B}\}.$$

*Beweis.* Sei zunächst $\mathcal{B}$ die Basis einer beliebigen Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$. Wegen $X \in \mathcal{O}$ folgt dann $(B_1)$ sofort aus Definition 1.37. Weiter gilt für $B, C \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ mit $(T_3^{(O)})$, dass auch $B \cap C$ in $\mathcal{O}$ liegt. Auch $(B_2)$ folgt nun mit Definition 1.37.

Sei umgekehrt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge, die $(B_1)$ und $(B_2)$ erfüllt, und sei

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq X \mid U \text{ ist Vereinigung von Mengen aus } \mathcal{B}\}$$

wie in der Proposition angegeben. Dann ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ nach Konstruktion und $\mathcal{O}$ ist eine Topologie,

*denn:* Die leere Vereinigung $\emptyset$ ist trivialerweise in $\mathcal{O}$ enthalten und $X$ nach $(B_1)$. Es folgt, dass $\mathcal{O}$ Axiom $(T_1^{(O)})$ erfüllt.

Dass $\mathcal{O}$ auch Axiom $(T_2^{(O)})$ genügt, ist klar.

Zum Nachweis von $(T_3^{(O)})$ betrachten wir

$$U, V \in \mathcal{O} \quad \text{mit } U = \bigcup_{i\in I} B_i \text{ und } V = \bigcup_{j\in J} C_j \text{ für } B_i, C_j \in \mathcal{B}.$$

Nach $(B_2)$ sind dann alle Mengen der Form $B_i \cap C_j$ in $\mathcal{B}$ enthalten. Es folgt

$$U \cap V = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (B_i \cap C_j) \quad \in \mathcal{O}.$$

#

Nach Konstruktion ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{O}$.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathcal{O}$ mit der nachgewiesenen Eigenschaft eindeutig ist. Sei also $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie, für die $\mathcal{B}$ eine Basis ist. Ein beliebiges $O \in \mathcal{O}$ lässt sich nach Definition 1.37 als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}'$ schreiben. Da $\mathcal{O}'$ Axiom $(T_2^{(O)})$ erfüllt, folgt $O \in \mathcal{O}'$ und somit $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$. Die Eindeutigkeit von $\mathcal{O}$ folgt, da sich $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ komplett analog zeigen lässt. □

Wir können nun noch einen Zusammenhang zwischen Basen und Subbasen einer Topologie herstellen:

**Korollar 1.40.** *Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ beliebig und*

$$\mathcal{B} := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist endlicher Durchschnitt von Mengen in } \mathcal{S}\}.$$

*Dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis der von $\mathcal{S}$ erzeugten Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$.*

*Beweis.* Nach Proposition 1.39 ist $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$,

*denn:* Nach Konstruktion ist der leere Durchschnitt $X \in \mathcal{B}$, so dass $(B_1)$ erfüllt ist. Offensichtlich gilt auch $(B_2)$. #

Es ist hierbei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$,

*denn:* Sei $\mathcal{O}' \in \mathcal{T}op(X)$ mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}'$. Da $\mathcal{O}'$ Axiom $(T_3^{(O)})$ erfüllt, folgt dann $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}'$, und da $\mathcal{O}'$ Axiom $(T_2^{(O)})$ erfüllt und nach Definition 1.37 auch $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$. Es ist also $\mathcal{O}$ die gröbste Topologie auf $X$, die $\mathcal{S}$ enthält, also $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$. #

□

**Bemerkung 1.41.** *Ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis eines topologischen Raums $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$, so sind die Mengen aus $\mathcal{O}$ gerade die Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen von $\mathcal{S}$.*

**Proposition 1.42.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume, $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$, $\mathcal{B}'$ eine Basis von $\mathcal{O}'$, $\mathcal{S}'$ eine Subbasis von $\mathcal{O}'$ und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *$f$ stetig $\iff$ für alle $B' \in \mathcal{B}'$ ist $f^{-1}(B') \in \mathcal{O}$ $\iff$ für alle $S' \in \mathcal{S}'$ ist $f^{-1}(S') \in \mathcal{O}$.*
(b) *$f$ offen $\iff$ für alle $B \in \mathcal{B}$ ist $f(B) \in \mathcal{O}'$*

*Beweis.* Behauptung (a) folgt mit

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} U_i'\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i') \text{ und } f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in I} U_i'\Big) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i') \qquad \text{für beliebige } U_i' \subseteq X'$$

und Behauptung (b) folgt mit

$$f\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f(U_i) \qquad \text{für beliebige } U_i \subseteq X.$$

□

**Definition 1.43.** *Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Dann sagen wir:*

$$\mathcal{B} \text{ ist eine \textbf{Basis} des Filters } \mathcal{F} \quad :\iff \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F} \text{ gibt es ein } B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subseteq F.$$

*Eine Basis des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$ eines Punktes $x \in X$ nennen wir auch kurz eine **Umgebungsbasis** von $x$.*

**Beispiel 1.44.** *Sei $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Dann gilt:*

(a) *Stets ist $\{O \in \mathcal{O} \mid x \in O\}$ eine Umgebungsbasis von $x$.*

(b) *Im Spezialfall $\mathcal{T} = X_{\text{disk}}$ ist $\{\{x\}\}$ eine Umgebungsbasis von $x$.*

(c) *Im Spezialfall $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ (mit der Standardtopologie) ist $\{U_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N}, n > N\}$ für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ eine Umgebungsbasis von $x$.*

**Proposition 1.45** (Filterbasiskriterium)**.** *Sei $X$ eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine Basis eines Filters $\mathcal{F}$ auf $X$, wenn die folgenden Axiome gelten:*

$(FB_1)$ *$\mathcal{B} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{B}$.*

$(FB_2)$ *Für alle $B, C \in \mathcal{B}$ gibt es ein $D \in \mathcal{B}$ mit $D \subseteq B \cap C$.*

*In diesem Fall ist $\mathcal{F}$ eindeutig bestimmt und es gilt*

$$\mathcal{F} = \{U \subseteq X \mid \textit{ es gibt ein } B \in \mathcal{B} \textit{ mit } B \subseteq U\}.$$

*Beweis.* Sei zunächst $\mathcal{B}$ Basis eines Filters $\mathcal{F}$ auf $X$. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{B}$ den Axiomen $(FB_1)$ und $(FB_2)$ genügt.

Nach $(F_1)$ gilt $X \in \mathcal{F}$, und nach Definition 1.43 gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq X$. Insbesondere gilt $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Wieder nach $(F_1)$ gilt $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Da nach Definition 1.43 aber auch $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ gilt, folgt $\emptyset \notin \mathcal{B}$ und insgesamt $(FB_1)$.

Seien $B, C \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Nach $(F_3)$ folgt dann $B \cap C \in \mathcal{F}$ und nach Definition 1.43 gibt es somit ein $D \in \mathcal{B}$ mit $D \subseteq B \cap C$. Hiermit ist auch die Gültigkeit von $(FB_2)$ nachgewiesen.

Sei umgekehrt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge, die $(FB_1)$ und $(FB_2)$ erfüllt, und sei

$$\mathcal{F} = \{U \subseteq X \mid \text{ es gibt ein } B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subseteq U\}$$

wie in der Proposition angegeben. Dann ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ nach Konstruktion und $\mathcal{F}$ ist ein Filter auf $X$,

*denn:* Nach $(FB_1)$ gilt $\emptyset \notin \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Nach Definition von $\mathcal{F}$ folgt daher sofort auch $\emptyset \notin \mathcal{F}$ und $X \in \mathcal{F}$, also $(F_1)$.

Seien $U \in \mathcal{F}$ und $V \subseteq X$ mit $U \subseteq V$. Nach Definition von $\mathcal{F}$ gibt es dann ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U \subseteq V$, so dass $V$ nach Konstruktion in $\mathcal{F}$ liegt. Insgesamt folgt $(F_2)$.

Seien $U, V \in \mathcal{F}$. Nach Definition von $\mathcal{F}$ gibt es dann $B, C \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$ und $C \subseteq V$. Zwangsläufig gilt dann $B \cap C \subseteq U \cap V$ und wegen $(FB_2)$ gibt es ein $D \in \mathcal{B}$ mit $D \subseteq B \cap C \subseteq U \cap V$. Nach Konstruktion von $\mathcal{F}$ gilt somit $U \cap V \in \mathcal{F}$. Insgesamt haben wir $(F_3)$ gezeigt. #

Nach Konstruktion ist $\mathcal{B}$ eine Basis des Filters $\mathcal{F}$.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ mit der nachgewiesenen Eigenschaft eindeutig ist. Sei also $\mathcal{F}'$ ein weiterer Filter auf $X$, für den $\mathcal{B}$ eine Basis ist. Nach Definition 1.43 gilt dann einerseits $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}'$, andererseits gibt es für jedes beliebige $F \in \mathcal{F}$ ein $B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}'$ mit $B \subseteq F$. Mit $(F_2)$ folgt $F \in \mathcal{F}$ und somit insgesamt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Die Eindeutigkeit von $\mathcal{F}$ folgt, da sich $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ komplett analog zeigen lässt. □

**Proposition 1.46.** *Sei $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$, so ist für jedes $x \in X$ die Menge $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ eine Umgebungsbasis von $x$.*

(b) *Ist $\mathcal{B}(x)$ für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis, so ist $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ eine Basis von $\mathcal{O}$.*

*Beweis.* Zum Beweis von Behauptung (a) betrachten wir eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{O}$. Für jedes $x \in X$ gilt dann offensichtlich

$$\emptyset \notin \mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in \mathcal{B}\}.$$

Da $\mathcal{B}$ Axiom $(B_1)$ erfüllt, gilt zudem $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$, so dass $\mathcal{B}(x)$ Axiom $(FB_1)$ genügt. Für beliebige $B, C \in \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}$ ist der Durchschnitt $B \cap C$ nach Axiom $(B_2)$ eine Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$. Wegen $x \in B \cap C$ muss eine dieser Mengen $x$ enthalten und also in $\mathcal{B}(x)$ liegen. Es gibt daher ein $D \in \mathcal{B}(x)$, das in $B \cap C$ als Teilmenge enthalten ist und $\mathcal{B}(x)$ genügt auch Axiom $(FB_2)$. Mit Proposition 1.45 folgt Behauptung (a).

Wir wollen nun Behauptung (b) nachweisen. Sei dafür $O \in \mathcal{O}$ beliebig. Dann gilt $O \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in O$ und nach Definition 1.43 gibt es jeweils ein $B(x) \in \mathcal{B}(x)$ mit $x \in B(x) \subseteq O$. Folglich ist $O = \bigcup_{x \in O} B(x)$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$. Mit Definition 1.37 folgt Behauptung (b). □

**Proposition 1.47.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ topologische Räume, $x \in X$ ein Punkt und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Seien weiter $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis von $x$ in $X$ und $\mathcal{B}'(f(x))$ eine Umgebungsbasis von $f(x)$ in $X'$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$f$ ist stetig in $x$.*

(ii) *Für alle $B' \in \mathcal{B}'(f(x))$ gilt $f^{-1}(B') \in \mathcal{U}(x)$.*

(iii) *Für alle $B' \in \mathcal{B}'(f(x))$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}(x)$ mit $f(B) \subseteq B'$.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i), sei also $f$ stetig. Mit $\mathcal{B}'(f(x)) \subseteq \mathcal{U}(f(x))$ und Definition 1.24 folgt dann bereits

$$f^{-1}(\mathcal{B}'(f(x))) \subseteq \mathcal{U}(x),$$

also Aussage (ii).

Gelte nun (ii), für alle $B' \in \mathcal{B}'(f(x))$ gelte also $f^{-1}(B') \in \mathcal{U}(x)$. Nach Definition 1.43 gibt es in dieser Situation stets ein $B \in \mathcal{B}(x)$ mit $B \subseteq f^{-1}(B')$, also mit $f(B) \subseteq B'$, und es gilt Aussage (iii).

Schließlich gelte (iii). Sei $U' \in \mathcal{U}(f(x))$. Nach Definition 1.43 gibt es dann ein $B' \in \mathcal{B}'(f(x))$ mit $B' \subseteq U'$. Nach (iii) gibt es weiter ein $B \in \mathcal{B}(x)$ mit $f(B) \subseteq B' \subseteq U'$, also mit $B \subseteq f^{-1}(U')$. Mit $B \in \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ und Axiom $(F_2)$ folgt $f^{-1}(U') \in \mathcal{U}(x)$ und nach Definition 1.24 somit die Stetigkeit von $f$ in $x$, also Aussage (i). □

## 1.4 Initial- und Finaltopologie

**Definition 1.48.** *Sei $X$ eine Menge und sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume mit zugehörigen Abbildungen $f_i : X \to X_i$. Dann heißt die gröbste Topologie, bezüglich derer alle $f_i$ stetig sind, die* ***Initialtopologie*** *auf $X$ bezüglich $(f_i)_{i \in I}$.*

Offensichtlich gilt in der Situation von Definition 1.48

$$f_i^{-1}(\mathcal{O}_i) := \{f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{O}_i\} \quad \in \mathcal{T}op(X).$$

Nach Korollar 1.34 ist dann die Initialtopologie auf $X$ bezüglich $(f_i)_{i\in I}$ durch

$$\mathcal{O}_{\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{O}_i)} \overset{1.35}{=} \inf\{\mathcal{O} \in \mathcal{T}op(X) \mid \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{O}_i) \subseteq \mathcal{O}\} = \sup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{O}_i) \tag{1.3}$$

gegeben.

**Proposition 1.49** (Stetigkeitskriterium für die Initialtopologie)**.** *Sei $X$ eine Menge und sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume mit zugehörigen Abbildungen $f_i : X \to X_i$. $X$ trage die Initialtopologie $\mathcal{O}$ bezüglich $(f_i)_{i\in I}$. Seien weiter $(X', \mathcal{O}')$ ein topologischer Raum und $g : X' \to X$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i\circ g"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

(i) *$g$ ist stetig.*

(ii) *Für alle $i \in I$ ist die Verknüpfung $f_i \circ g$ stetig.*

*Beweis.* Die Abbildungen $f_i$ sind nach Konstruktion stetig. Gilt nun (i), ist also $g$ stetig, so sind offensichtlich auch alle Verknüpfungen $f_i \circ g$ stetig, es gilt also (ii).

Gelte nun umgekehrt (ii). Nach der der Proposition vorangehenden Überlegung ist durch $\mathcal{S} := \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$ eine Subbasis von $\mathcal{O}$ gegeben. Für ein beliebiges $S \in \mathcal{S}$ gibt es ein $i \in I$ und ein $O_i \in \mathcal{O}_i$ mit $S = f_i^{-1}(O_i)$. Es folgt

$$g^{-1}(S) = g^{-1}\big(f_i^{-1}(O_i)\big) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i) \overset{\text{(ii)}}{\in} \mathcal{O}'$$

und mit Teil (a) von Proposition 1.42 die Stetigkeit von $g$, also (i). □

**Definition 1.50.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $X' \subseteq X$ eine Teilmenge und*

$$\iota := \iota_{X'}^X : \begin{cases} X' & \hookrightarrow X, \\ x' & \mapsto x' \end{cases}$$

*die Inklusionsabbildung. Die Initialtopologie auf $X'$ bezüglich $\iota_{X'}^X$ heißt die **induzierte Topologie** oder **Unterraumtopologie** auf $X'$ und wird mit $\mathcal{O}|_{X'}$ bezeichnet. Nach (1.3) gilt*

$$\mathcal{O}|_{X'} = (\iota_{X'}^X)^{-1}(\mathcal{O}) = \{(\iota_{X'}^X)^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}\} = \{O \cap X' \mid O \in \mathcal{O}\}.$$

*Wir nennen $(X', \mathcal{O}|_{X'})$ einen* ***(topologischen) Unterraum*** *von $\mathcal{T}$. Falls nicht ausdrücklich anders gesagt, werden wir künftig Teilmengen $X' \subseteq X$ eines topologischen Raumes $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ stets als Unterräume mit der induzierten Topologie betrachten.*

*Jede Teilmenge $U' \subseteq X'$ heißt*

$$\begin{aligned} &\textbf{(relativ) offen in } X' &&:\Longleftrightarrow && U' \in \mathcal{O}|_{X'}, \\ &\textbf{(relativ) abgeschlossen in } X' &&:\Longleftrightarrow && U' \in \mathcal{A}|_{X'} := \{X' \setminus O \mid O \in \mathcal{O}|_{X'}\}, \\ &\textbf{(relativ) abgeschloffen in } X' &&:\Longleftrightarrow && U' \in \mathcal{O}|_{X'} \cap \mathcal{A}|_{X'}. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.51.** *Wir benutzen die Notation von Definition 1.50. Im Kontext der induzierten Topologie gibt es die folgenden wichtigen Spezialfälle:*

(a) *$X' \circledcirc X$. Dann gilt*

$$\mathcal{O}|_{X'} = \{O \cap X' \mid O \in \mathcal{O}\} = \{O \in \mathcal{O} \mid O \subseteq X'\},$$

*für Teilmengen $U' \subseteq X'$ ist in diesem Fall also „offen in $X$“ und „offen in $X'$“ dasselbe.*

(b) *$X' \circledast X$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}|_{X'} &= \{X' \setminus (O \cap X') \mid O \in \mathcal{O}\} \\ &= \{(X \setminus O) \cap X' \mid O \in \mathcal{O}\} \\ &= \{A \cap X' \mid A \in \mathcal{A}\} \\ &= \{A \in \mathcal{A} \mid A \subseteq X'\}, \end{aligned}$$

*für Teilmengen $U' \subseteq X'$ ist in diesem Fall also „abgeschlossen in $X$“ und „abgeschlossen in $X'$“ dasselbe.*

**Beispiel 1.52.** *Wir betrachten die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als Teilraum in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Dann ist offensichtlich für jedes $x \in \mathbb{Z}$*

$$\{x\} = \mathbb{Z} \cap U_{\frac{1}{2}}(x)$$

*relativ offen in $\mathbb{Z}$ und man sieht leicht ein, dass die von $\mathbb{R}$ induzierte Topologie auf $\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie auf $\mathbb{Z}$ übereinstimmt. Wir sagen daher auch, $\mathbb{Z}$ ist ein* ***diskreter Unterraum*** *von $\mathbb{R}$.*

**Proposition 1.53.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Seien weiter $U \subseteq X$ und $U' \subseteq X'$ Teilmengen mit $f(U) \subseteq U'$. Dann bezeichnet*

$$f|_U^{U'} : \begin{cases} U & \to U', \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$$

*die* ***Einschränkung*** *von $f$ auf $U$ mit zu $U'$ verkleinerter Zielmenge.*[4] *Ist nun $f$ stetig, so auch $f|_U^{U'}$.*

[4]Insbesondere stimmt $f|_U^{X'}$ mit der üblichen Einschränkung $f|_U$ überein.

*Beweis.* Zu jedem $O' \in \mathcal{O}'|_{U'}$ existiert ein $\tilde{O}' \in \mathcal{O}'$ mit $O' = \tilde{O}' \cap U'$. Wegen der Stetigkeit von $f$ gilt für dieses $f^{-1}(\tilde{O}') \in \mathcal{O}$. Es folgt

$$\begin{aligned}(f|_U^{U'})^{-1}(O') &= (f|_U^{U'})^{-1}(\tilde{O}' \cap U') \\ &= f^{-1}(\tilde{O}' \cap U') \cap U \\ &= f^{-1}(\tilde{O}') \cap f^{-1}(U') \cap U \\ &= f^{-1}(\tilde{O}') \cap U \quad \in \mathcal{O}|_U\end{aligned}$$

und somit die Stetigkeit von $f|_U^{U'}$. □

**Bemerkung 1.54.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume, $f : X \to X'$ eine Abbildung und gelte $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ für geeignete Teilmengen $U_i \subseteq X$. Ist $f$ stetig, so offensichtlich auch alle Einschränkungen $f|_{U_i}$ mit $i \in I$. Sind umgekehrt alle Einschränkungen $f|_{U_i}$ mit $i \in I$ stetig, so muss $f$ selbst deshalb nicht stetig sein,*

*denn: Wir geben ein Gegenbeispiel an. Seien $X = \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie, $X' = \{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie und $f : X \to X'$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

*Seien schließlich $U_1 = \mathbb{Q}$ und $U_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jeweils mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie. Dann sind die Einschränkungen*

$$f|_{U_1} : \begin{cases} U_1 = \mathbb{Q} & \to \{0, 1\}, \\ x & \mapsto 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f|_{U_2} : \begin{cases} U_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \to \{0, 1\}, \\ x & \mapsto 1 \end{cases}$$

*als konstante Funktionen trivialerweise stetig. Die Funktion $f$ selbst ist aber nicht stetig, weil $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ nicht offen ist.* #

**Proposition 1.55.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume, $f : X \to X'$ eine Abbildung und gelte $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit einer der folgenden beiden Zusatzbedingungen:*

(A) *$U_i \overset{\circ}{\subseteq} X$ für alle $i \in I$,*

(B) *$U_i \overset{\bullet}{\subseteq} X$ für alle $i \in I$ und $I$ endlich.*

*Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *$f$ ist stetig.*

(ii) *Alle Einschränkungen $f|_{U_i}$ mit $i \in I$ sind stetig.*

*Beweis.* Dass (i) auch ohne die Voraussetzungen (A) bzw. (B) sofort (ii) impliziert, ist klar – das hatten wir schon in Bemerkung 1.54 festgestellt.

Gelten nun (ii) und (A) bzw. (B) und sei $U' \subseteq X'$ offen bzw. abgeschlossen. Wir haben

$$f^{-1}(U') = \bigcup_{i \in I} (f^{-1} \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} f|_{U_i}^{-1}(U').$$

Nach (ii) und Definition 1.18 bzw. Proposition 1.25 ist $f|_{U_i}^{-1}(U')$ für jedes $i \in I$ offen bzw. abgeschlossen in $U_i$ und nach (A) bzw. (B) und Beispiel 1.51 sogar offen bzw. abgeschlossen in $X$. Es folgt, dass $f^{-1}(U')$ offen bzw. abgeschlossen in $X$ ist und somit nach Definition 1.18 bzw. Proposition 1.25 die Stetigkeit von $f$, also (i). □

**Definition 1.56.** *Sei $X$ eine Menge und sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume mit zugehörigen Abbildungen $f_i : X_i \to X$. Dann heißt die feinste Topologie, bezüglich derer alle $f_i$ stetig sind, die **Finaltopologie** auf $X$ bezüglich $(f_i)_{i \in I}$.*

Offensichtlich gilt in der Situation von Definition 1.56

$$(f_i)_*(\mathcal{O}_i) := \{U \subseteq X \mid f_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i\} \quad \in \mathcal{T}op(X).$$

Nach Korollar 1.34 ist dann die Finaltopologie auf $X$ bezüglich $(f_i)_{i \in I}$ durch

$$\sup\{\mathcal{O} \in \mathcal{T}op(X) \mid \mathcal{O} \subseteq \bigcap_{i \in I} (f_i)_*(\mathcal{O}_i)\} = \inf_{i \in I} (f_i)_*(\mathcal{O}_i) \overset{(1.1)}{=} \bigcap_{i \in I} (f_i)_*(\mathcal{O}_i) \tag{1.4}$$

gegeben. Insbesondere ist eine Teilmenge $U \subseteq X$ genau dann offen bezüglich der Finaltopologie, wenn $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$.

**Proposition 1.57** (Stetigkeitskriterium für die Finaltopologie)**.** *Sei $X$ eine beliebige Menge und sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume mit zugehörigen Abbildungen $f_i : X_i \to X$. $X$ trage die Finaltopologie $\mathcal{O}$ bezüglich $(f_i)_{i \in I}$. Seien weiter $(X', \mathcal{O}')$ ein topologischer Raum und $g : X \to X'$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] & X' \\
X_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, "g \circ f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

(i) *$g$ ist stetig.*

(ii) *Für alle $i \in I$ ist die Verknüpfung $g \circ f_i$ stetig.*

*Beweis.* Die Abbildungen $f_i$ sind nach Konstruktion stetig. Gilt nun (i), ist also $g$ stetig, so sind offensichtlich auch alle Verknüpfungen $g \circ f_i$ stetig, es gilt also (ii).

Gelte nun umgekehrt (ii). Für ein beliebiges $O' \in \mathcal{O}'$ gilt dann

$$f_i^{-1}\big(g^{-1}(O')\big) = (g \circ f_i)^{-1}(O') \in \mathcal{O}_i \quad \text{für alle } i \in I,$$

so dass $g^{-1}(O')$ nach Konstruktion für alle $i \in I$ in $(f_i)_*(\mathcal{O}_i)$ liegt. Nach (1.4) folgt $g^{-1}(O') \in \mathcal{O}$ und somit die Stetigkeit von $g$, also (i). □

**Definition 1.58.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und*

$$p : \begin{cases} X & \twoheadrightarrow X/_\sim, \\ x & \mapsto [x]_\sim := \{y \in X \mid y \sim x\} \end{cases}$$

*die Projektionsabbildung. Die Finaltopologie $\tilde{\mathcal{O}}$ bezüglich $p$ heißt die* ***Quotiententopologie*** *oder* ***Identifizierungstopologie*** *auf $X/_\sim$. Nach (1.4) gilt*

$$\tilde{\mathcal{O}} = \{U \subseteq X/_\sim \mid p^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}.$$

*Wir nennen $(X/_\sim, \tilde{\mathcal{O}})$ einen* ***Quotientenraum*** *von $\mathcal{T}$.*

**Korollar 1.59** (Stetigkeitskriterium für die Quotiententopologie)**.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $p : X \to X/_\sim$ die Projektionsabbildung wie in Definition 1.58. Dann gilt: Genau dann ist eine Abbildung $f : X/_\sim \to X'$ stetig, wenn auch $f \circ p$ stetig ist.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f \circ p"'] & X/_\sim \arrow[d, "f"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

*Beweis.* Das ist ein Spezialfall von Proposition 1.57. □

**Beispiel 1.60.** *Sei $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und sei*

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad y \in \langle x \rangle_\mathbb{R} \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$

*Dann ist $\sim$ offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := X/_\sim$, versehen mit der Quotiententopologie, heißt der $n$-**dimensionale projektive Raum**. Für ${}^t(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ schreiben wir*

$$(x_0 : \ldots : x_n) := [{}^t(x_0, \ldots, x_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$

*Man kann zeigen, dass für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Abbildung*

$$h_i : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \\ {}^t(x_1, \ldots, x_n) & \mapsto (x_1 : \ldots : x_i : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n) \end{cases}$$

*injektiv, stetig und offen ist, so dass wir einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und einem offenen Unterraum $h_i(\mathbb{R}^n)$ von $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ erhalten. Wegen*

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=1}^{n} h_i(\mathbb{R}^n)$$

*besitzt $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ eine offene Überdeckung durch $n+1$ solcher offenen Unterräume. Jeder der Unterräume $h_i(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ist das Komplement einer Hyperebene*

$$H_i := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i = 0\}$$

*und es gilt $\overline{h_i(\mathbb{R}^n)} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, so dass $h_i(\mathbb{R}^n)$ nach Definition 1.16 dicht in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ist.*

**Satz 1.61** (Homomorphiesatz für topologische Räume)**.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{T}' = (X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $f : X \to X'$ eine stetige Abbildung. Für $x, y \in X$ setzen wir*

$$x \sim_f y \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y).$$

*Offensichtlich ist dann $\sim_f$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & X' \\ X/_{\sim_f} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & f(X) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

*kommutiert, wobei $p$ die Quotientenabbildung ist, $i$ die offensichtliche Inklusion und die Bijektion $\tilde{f}$ durch $[x]_{\sim_f} \mapsto f(x)$ definiert. Weiter gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Die Abbildungen $p$, $\tilde{f}$ und $i$ sind alle stetig.*

(b) *Genau dann ist $\tilde{f}$ ein Homöomorphismus, wenn*

$$f(U) \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} f(X) \quad \text{für alle } U \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X \text{ mit } p^{-1}\big(p(U)\big) = U \text{[5]}$$

*gilt.*

*Beweis.* Die Projektion $p$ ist nach Konstruktion der Quotiententopologie stetig und die Inklusion $i$ nach Konstruktion der Unterraumtopologie. Es ist aber auch $\tilde{f}$ stetig,

*denn:* Wegen der Kommutativität des Diagramms ist $f = i \circ \tilde{f} \circ p$ stetig, nach Korollar 1.59 auch $i \circ \tilde{f}$ und nach Proposition 1.53 auch $\tilde{f}$. #

Insgesamt folgt Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) nehmen wir zunächst an, $\tilde{f}$ sei ein Homöomorphismus und nach Proposition 1.29 also offen. Für jedes $U \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X$ mit $p^{-1}\big(p(U)\big) = U$ ist das Bild $p(U)$ nach Konstruktion der Quotiententopologie offen in $X/_{\sim_f}$. Wegen der Kommutativität des Diagramms folgt

$$f(U) = (i \circ \tilde{f} \circ p)(U) = \tilde{f}\big(p(U)\big) \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} f(X).$$

Umgekehrt ist für jedes $V \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X/_{\sim_f}$ wegen der Stetigkeit von $p$ das Urbild $U := p^{-1}(V)$ offen in $X$ und eine Vereinigung von Äquivalenzklassen bzgl. $\sim_f$, so dass nach Voraussetzung $f(U) \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} f(X)$ gilt. Mit der Surjektivität von $p$ und der Kommutativität des Diagramms folgt

$$\tilde{f}(V) = \tilde{f}\big(p(p^{-1}(V))\big) = (\tilde{f} \circ p)\big(p^{-1}(V)\big) = (\tilde{f} \circ p)(U) = (i \circ \tilde{f} \circ p)(U) = f(U),$$

also $\tilde{f}(V) \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} f(X)$. Es folgt, dass $\tilde{f}$ eine offene Abbildung und nach Proposition 1.29 somit auch ein Homöomorphismus ist. □

[5] Das heißt, $U$ ist Vereinigung von Äquivalenzklassen bzgl. $\sim_f$, also von ***Fasern*** $f^{-1}(\{x'\})$ mit $x' \in X'$.

**Bemerkung 1.62.** *In der Situation des Homomorphiesatzes 1.61 ist die Abbildung $\tilde{f}$ ohne die Zusatzvoraussetzung im Allgemeinen kein Homöomorphismus,*

*denn: Ist etwa*

$$X := \{0,1,2\}_{\text{disk}}, \quad X' := \{0,1,2\}_{\text{indisk}}, \quad f := \mathrm{id} : X \to X',$$

*so gilt offensichtlich $x \sim_f y \iff x = y$ für alle $x, y \in X$ und wir erhalten den Quotientenraum*

$$X/_{\sim_f} = \{\{0\},\{1\},\{2\}\}_{\text{disk}}.$$

*Betrachten wir nun die Abbildung*

$$\tilde{f} : \begin{cases} X/_{\sim_f} & \to X', \\ \{x\} & \mapsto x, \end{cases}$$

*so ist $\{\{1\}\}$ wegen $p^{-1}(\{\{1\}\}) = \{1\} \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X$ offen in $X/_{\sim_f}$ aber $\tilde{f}(\{\{1\}\}) = \{1\}$ nicht offen in $X'$. Die Abbildung $\tilde{f}$ ist somit nicht offen und nach Proposition 1.29 also auch kein Homöomorphismus.* #

**Beispiel 1.63.** *Ist*

$$X := \mathbb{R}, \quad X' := \mathbb{R}^2, \quad f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^2, \\ x & \mapsto {}^t(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), \end{cases}$$

*so gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$*

$$x \sim_f y \quad \iff \quad (\cos 2\pi x = \cos 2\pi y \text{ und } \sin 2\pi x = \sin 2\pi y) \quad \iff \quad x - y \in \mathbb{Z}.$$

*Nach Teil (a) des Homomorphiesatzes 1.61 gibt es dann eine stetige, bijektive Abbildung*

$$\tilde{f} : \begin{cases} X/_{\sim_f} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \to f(X) = \mathbb{S}^1, \\ [x]_{\sim_f} = x \bmod \mathbb{Z} & \mapsto {}^t(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x). \end{cases}$$

*Nach Teil (b) des Homomorphiesatzes 1.61 ist $\tilde{f}$ ein Homöomorphismus,*

*denn: Das Bild eines offenen Intervalls in $\mathbb{R}$ unter $f$ ist ein „offener Kreisbogen“ in $\mathbb{S}^1$, also der Durchschnitt einer offenen Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{S}^1$, und insbesondere (bezüglich der Unterraumtopologie) offen in $\mathbb{S}^1$. Da die offenen Intervalle nach Beispiel 1.38 eine Basis der Topologie in $\mathbb{R}$ bilden, lässt sich nach Definition 1.37 jedes beliebige $U \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} \mathbb{R}$ als Vereinigung offener Intervalle schreiben. Das Bild $f(U)$ einer solchen Menge ist daher eine Vereinigung offener Mengen in $\mathbb{S}^1$, es gilt also $f(U) \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} f(X)$.* #

Quotientenräume kann man dazu benutzen, um in einem gegebenen topologischen Raum Punkte miteinander zu identifizieren, also anschaulich miteinander zu verkleben. Um hier ein wenig freier agieren zu können, werfen wir einen genaueren Blick auf Äquivalenzrelationen:

**Definition 1.64.** *Sei $X$ eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine Relation auf $X$. Die bezüglich Inklusion kleinste Äquivalenzrelation auf $X$, die $R$ als Teilrelation enthält, nennen wir die* ***Äquivalenzhülle***

$$R^{\text{äq}} := \bigcap \{\sim \subseteq X \times X \mid \sim \text{ ist Äquivalenzrelation auf } X \text{ mit } R \subseteq \sim\}$$

*von $R$ oder auch die von $R$* ***erzeugte Äquivalenzrelation****.*

**Definition 1.65.** *Seien $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $R, R' \subseteq X$ und $h : R \to R'$ bijektiv. Sei weiter $\sim$ die durch $x \sim h(x)$ für alle $x \in R$ erzeugte Äquivalenzrelation. Dann nennen wir $X/_\sim$ zusammen mit der Quotiententopologie den Raum, der aus $X$ durch* ***Selbstverklebung*** *längs $h$ entsteht.*

**Bemerkung 1.66.** *Sei die Situation so wie in Definition 1.65.*

(a) *Sind $R$ und $R'$ disjunkt, so gilt für $x \in X$*

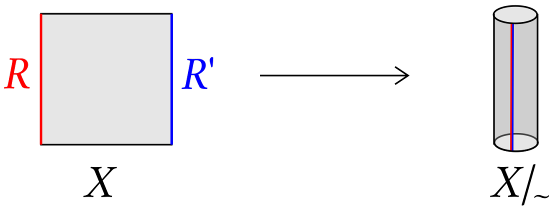
$$[x]_\sim = \begin{cases} \{x\} & \text{für } x \in X \setminus (R \cup R'), \\ \{x, h(x)\} & \text{für } x \in R, \\ \{h^{-1}(x), x\} & \text{für } x \in R'. \end{cases}$$

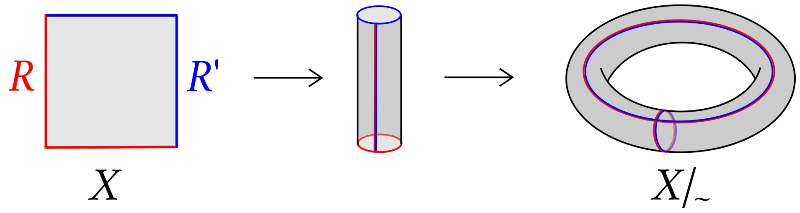
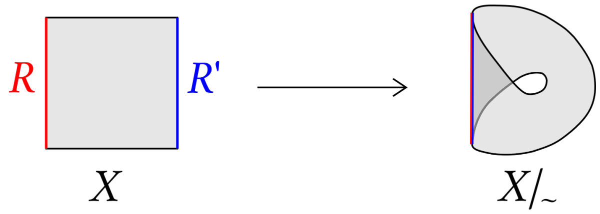
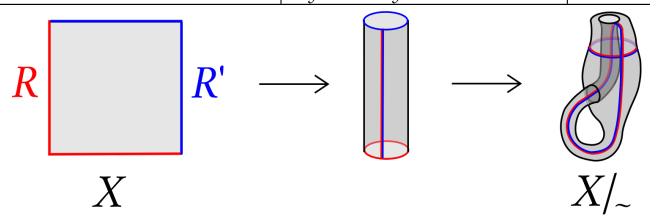
(b) *Ist $(R \cup R') \overset{\bullet}{\subseteq} X$, so ist für $U := X \setminus (R \cup R')$ die Einschränkung $p|_U^{p(U)}$ der Quotientenabbildung $p : X \to X/_\sim$ ein Homöomorphismus,*

*denn: Die Einschränkung $p|_U^{p(U)}$ ist bijektiv nach Konstruktion und stetig nach Proposition 1.53 und wegen der Stetigkeit von $p$. Nach Proposition 1.29 verbleibt die Offenheit von $p|_U^{p(U)}$ zu zeigen: Für ein beliebiges $V \overset{\circ}{\subseteq} U$ gilt wegen $U \overset{\circ}{\subseteq} X$ und Beispiel 1.51 auch $V \overset{\circ}{\subseteq} X$. Wegen $V \subseteq U$ und der Bijektivität von $p|_U^{p(U)}$ folgt $p^{-1}(p(V)) = V \overset{\circ}{\subseteq} X$ und nach Konstruktion der Quotiententopologie somit $p(V) \overset{\circ}{\subseteq} X/_\sim$. Nach Konstruktion der Unterraumtopologie folgt $p(V) \overset{\circ}{\subseteq} p(U)$ und somit die Offenheit von $p|_U^{p(U)}$.* #

*Hieraus folgt, dass $X/_\sim$ lokal bei den Punkten aus $p(U)$ so aussieht wie $X$.*

**Beispiel 1.67.** *Sei $I := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ das abgeschlossene Einheitsintervall. Dann gilt:*

| **X** | **R** | **R′** | $\mathbf{h : R \to R'}$ | $\mathbf{X/_\sim}$ |
|---|---|---|---|---|
| $I$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $0 \mapsto 1$ | $\cong \mathbb{S}^1$ |
|   | | | | |
| $I \times I$ | $\{0\} \times I$ | $\{1\} \times I$ | $\binom{0}{y} \mapsto \binom{1}{y}$ $\forall y \in I$ | *Zylindermantelfläche* |
|   | | | | |
| $I \times I$ | $(\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\})$ | $(\{1\} \times I) \cup (I \times \{1\})$ | $\binom{x}{0} \mapsto \binom{x}{1}$ $\forall x \in I$ <br> $\binom{0}{y} \mapsto \binom{1}{y}$ $\forall y \in I$ | *Torus* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|   | | | | |
| $I \times I$ | $\{0\} \times I$ | $\{1\} \times I$ | $\binom{0}{y} \mapsto \binom{1}{1-y} \quad \forall y \in I$ | ***Möbiusband*** |
|   | | | | |
| $I \times I$ | $(\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\})$ | $(\{1\} \times I) \cup (I \times \{1\})$ | $\binom{x}{0} \mapsto \binom{1-x}{1} \quad \forall x \in I$<br>$\binom{0}{y} \mapsto \binom{1}{y} \quad \forall y \in I$ | ***Klein'sche Flasche*** |
|   | | | | |

Von diesen Beispielen ist sicher die Klein'sche Flasche das spektakulärste. Im verlinkten externen Zusatzmaterial bekommen Sie amüsant veranschaulicht, wie die Verklebung in diesem Fall funktioniert und dass eine Klein'sche Flasche nicht in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden kann.

## 1.5 Produkte und Summen

**Definition 1.68.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$. Dann ist die* ***Produkttopologie*** *auf $X$ als die Initialtopologie bezüglich der Familie $(\pi_i)_{i\in I}$ der kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ definiert, also als die gröbste Topologie auf $X$, bezüglich derer alle $\pi_i$ stetig sind. Wenn nicht anders vermerkt, werden wir $X$ künftig stets mit der Produkttopologie versehen und den* ***Produktraum*** *der topologischen Räume $X_i$ nennen.*

Da die Situation von Definition 1.68 diejenige von Definition 1.48 spezialisiert, erhalten wir an dieser Stelle das folgende Korollar von Proposition 1.49:

**Korollar 1.69** (Stetigkeitskriterium für die Produkttopologie)**.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ der Produktraum bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$. Seien weiter $(X', \mathcal{O}')$ ein topologischer Raum und $g : X' \to X$ eine Abbildung. Dann* *sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\pi_i \circ g"'] & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

(i) *$g$ ist stetig.*

(ii) *Für alle $i \in I$ ist die Verknüpfung $\pi_i \circ g$ stetig.*

**Definition 1.70.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ der Produktraum bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$. Genau dann heißt eine Teilmenge $E \subseteq X$ eine* ***Elementarmenge****, wenn $E = \prod_{i\in I} U_i$ gilt mit*

$(E_1)$ *Für alle $i \in I$ gilt $U_i \Subset X_i$.*

$(E_2)$ *Für fast alle $i \in I$ ist $U_i = X_i$.*

Ist in der Situation von Definition 1.70 einer der topologischen Räume $X_i$ leer, so auch der Produktraum $X$ und wir sehen $\emptyset \subseteq \emptyset$ als Elementarmenge an.

**Proposition 1.71.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ der Produktraum bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$. Dann ist die Menge $\mathcal{E}$ der Elementarmengen von $X$ eine Basis der Produkttopologie.*

*Beweis.* Nach Definition 1.68 und (1.3) ist $\bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$ eine Subbasis der Produkttopologie. Weiter gilt für ein beliebiges $U_i \in \mathcal{O}_i$

$$\pi_i^{-1}(U_i) = \prod_{j\in I} V_j \quad \text{mit } V_j := \begin{cases} U_j & \text{für } j = i, \\ X_j & \text{für } j \neq i. \end{cases}$$

Die Mengen in $\mathcal{E}$ sind genau die endlichen Durchschnitte solcher Mengen und die Proposition folgt aus Korollar 1.40. □

**Korollar 1.72.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ der Produktraum bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$. Dann ist für jedes $x \in X$ die Menge*

$$\mathcal{E}(x) := \{U \in \mathcal{E} \mid x \in U\}$$

*eine Umgebungsbasis von $x$.*

*Beweis.* Folgt sofort aus Proposition 1.46 und Proposition 1.71. □

**Proposition 1.73.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ der Produktraum bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Für alle $i \in I$ sind die kanonischen Projektionen $\pi_i$ offen.*

(b) *Sind $U_i \subseteq X_i$ für alle $i \in I$, so gilt*

$$\overline{\prod_{i\in I} U_i} = \prod_{i\in I} \overline{U_i}.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung gelte $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$; sonst ist nichts zu zeigen.

Wir zeigen nun zunächst Behauptung (a). Nach Proposition 1.71 ist die Menge $\mathcal{E}$ der Elementarmengen von $X$ eine Basis der Produkttopologie und nach Proposition 1.42 ist die Projektion $\pi_i$ genau dann offen, wenn für eine beliebige Elementarmenge $E \in \mathcal{E}$ das Bild $\pi_i(E)$ offen in $X_i$ ist. Sei also $E \in \mathcal{E}$ gegeben. Nach Definition 1.70 gibt es dann eine endliche Teilmenge $I_{\text{fin}} \subseteq I$ und Teilmengen $U_i \Subset X_i$ für alle $i \in I_{\text{fin}}$ mit

$$E = \prod_{j\in I} V_j \quad \text{mit } V_j := \begin{cases} U_j & \text{für } j \in I_{\text{fin}}, \\ X_j & \text{für } j \notin I_{\text{fin}}. \end{cases}$$

Für ein beliebiges $i \in I$ folgt

$$\pi_i(E) = \begin{cases} U_i & \text{für } i \in I_{\text{fin}}, \\ X_i & \text{für } i \notin I_{\text{fin}} \end{cases} \quad \Subset X_i,$$

und somit die Offenheit von $\pi_i$, also Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) setzen wir $U := \prod_{i\in I} U_i$. Nach Korollar 1.72 und Teil (b) von Proposition 1.14 gilt

$$x \in \overline{U} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}(x) \text{ gilt } E \cap U \neq \emptyset \tag{1.5}$$

für ein beliebiges $x \in X$. Es folgt die Behauptung

$$\overline{U} = \prod_{i\in I} \overline{U_i},$$

*denn:* Sei dafür zunächst $x = (x_i)_{i\in I} \in \overline{U}$. Für ein beliebiges $i \in I$ und eine beliebige offene Umgebung $V_i \Subset X_i$ von $x_i$ setzen wir $V_j := X_j$ für alle $j \neq i$. Dann ist offensichtlich $\prod_{j\in I} V_j$ eine offene Umgebung von $x$ und in $\mathcal{E}(x)$ enthalten. Mit (1.5) folgt

$$\emptyset \neq \Big(\prod_{j\in I} V_j\Big) \cap U = \prod_{j\in I} (V_j \cap U_j)$$

und insbesondere $V_i \cap U_i \neq \emptyset$. Da $V_i \Subset X_i$ als offene Umgebung von $x_i$ beliebig gewählt war, können wir wieder Teil (b) von Proposition 1.14 anwenden und erhalten $x_i \in \overline{U_i}$. Insgesamt folgt $x \in \prod_{i\in I} \overline{U_i}$ und somit die erste Inklusion.

Sei nun umgekehrt $x \in \prod_{i\in I} \overline{U_i}$ und sei $E = \prod_{i\in I} V_i \in \mathcal{E}(x)$ beliebig. Nach Konstruktion ist $V_i$ für jedes $i \in I$ eine offene Umgebung von $x_i \in \overline{U_i}$; nach Teil (b) von Proposition 1.14 gilt also $V_i \cap U_i \neq \emptyset$. Es folgt

$$E \cap U = \prod_{i\in I} (V_i \cap U_i) \neq \emptyset$$

und wegen (1.5) und der Beliebigkeit von $E$ auch $x \in \overline{U}$, also die zweite Inklusion. #

$\square$

**Definition 1.74** (universelle Eigenschaft des Produktraums)**.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Wir sagen, ein topologischer Raum $(X', \mathcal{O}')$ zusammen mit einer Familie $(\pi'_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $\pi'_i : X' \to X_i$ erfüllt die **universelle Eigenschaft des Produktraums** zu $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$, wenn zu jedem topologischen Raum $(X'', \mathcal{O}'')$ und jeder Familie $(f_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $f_i : X'' \to X_i$ genau eine stetige Abbildung $f : X'' \to X'$ mit $\pi'_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$ existiert.*

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & X' \arrow[d, "\pi'_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

**Proposition 1.75.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Der Produktraum $X := \prod_{i\in I} X_i$ zusammen mit den kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Produktraums zu $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$.*

(b) *Erfüllt ein topologischer Raum $(X', \mathcal{O}')$ zusammen mit einer Familie $(\pi'_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $\pi'_i : X' \to X_i$ die universelle Eigenschaft des Produktraums zu $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homöomorphismus $g : X' \to X = \prod_{i\in I} X_i$ mit $\pi'_i = \pi_i \circ g$ für alle $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, dotted, "g"] \arrow[dr, "\pi'_i"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "///"] & & X \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Sei $(X'', \mathcal{O}'')$ ein beliebiger topologischer Raum und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_i : X'' \to X_i$. Die Abbildung

$$f : \begin{cases} X'' & \to X = \prod_{i\in I} X_i, \\ x'' & \mapsto (f_i(x''))_{i\in I} \end{cases}$$

erfüllt nach Konstruktion die Bedingung $\pi_i \circ f = f_i$ und ist stetig nach dem Stetigkeitskriterium für die Produkttopologie 1.69. Da andererseits aus $\pi_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$ sofort $f(x'') = (f_i(x''))_{i\in I}$ folgt, ist $f$ die einzige derartige Abbildung, so dass wir nachgewiesen haben, dass $X$ zusammen mit den Projektionen $\pi_i$ die universelle Eigenschaft des Produktraums zu $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ erfüllt.

Zum Beweis von Behauptung (b) betrachten wir nun einen topologischer Raum $(X', \mathcal{O}')$, der zusammen mit einer Familie $(\pi'_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $\pi'_i : X' \to X_i$ die universelle Eigenschaft des Produktraums zu $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ erfüllt. Setzen wir $X'' = X$ in der universellen Eigenschaft, so erhalten wir daher eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung

$$h : X \to X' \quad \text{mit } \pi'_i \circ h = \pi_i \text{ für alle } i \in I.$$

Umgekehrt erfüllt aber nach Teil (a) auch der Produktraum $X$ die universelle Eigenschaft. Setzen wir $X'' = X'$ in der universellen Eigenschaft, so erhalten wir eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung

$$g : X' \to X \quad \text{mit } \pi_i \circ g = \pi_i' \text{ für alle } i \in I.$$

Insgesamt ist die Verkettung $g \circ h : X \to X$ eine stetige Abbildung und genügt der Bedingung

$$\pi_i \circ (g \circ h) = (\pi_i \circ g) \circ h = \pi_i' \circ h = \pi_i.$$

Nach der nach Teil (a) gültigen universellen Eigenschaft des Produktraums $X$ für $X'' = X$ ist $g \circ h$ mit diesen Eigenschaften eindeutig; andererseits werden diese offensichtlich auch von der Identität $\mathrm{id}_X$ erfüllt. Es folgt $g \circ h = \mathrm{id}_X$, analog auch $h \circ g = \mathrm{id}_X$ und zusammen die Homöomorphie von $g$. □

**Bemerkung 1.76.** *Nach Proposition 1.75 ist der Produktraum bis auf eindeutige Homöomorphie eindeutig bestimmt. Die Philosophie dahinter ist, dass die universelle Eigenschaft selbst bereits alle topologischen Informationen enthält. Es ist daher möglich, Sätze über Produkträume unter Verwendung der universellen Eigenschaft und ohne Verwendung der expliziten Konstruktion der Produkttopologie zu beweisen, so etwa die Homöomorphie*

$$X_1 \times X_2 \times X_3 \cong \big(X_1 \times X_2\big) \times X_3 \cong X_1 \times \big(X_2 \times X_3\big).$$

Nachdem wir nun das Konzept des Produktraums studiert haben, wollen wir als nächstes den Summenraum einführen und untersuchen dafür die disjunkte Vereinigung gegebener topologischer Räume näher.

**Bemerkung 1.77.** *Für eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Mengen bezeichnet*

$$\coprod_{i\in I} X_i := \bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\})$$

*die **disjunkte Vereinigung** der $X_i$. Es gibt kanonische Inklusionen*

$$\iota_j : \begin{cases} X_j & \to \coprod_{i\in I} X_i, \\ x & \mapsto (x, j) \end{cases}$$

*für jedes $j \in I$. Insbesondere gilt*

$$\coprod_{i\in I} X_i = \bigsqcup_{i\in I} \iota_i(X_i).$$

*Häufig identifiziert man $X_i$ mit $\iota_i(X_i)$ und schreibt $x \in \coprod_{i\in I} X_i$ statt $\iota_i(x) \in \coprod_{i\in I} X_i$.*

**Definition 1.78.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X := \coprod_{i\in I} X_i$. Dann ist die **Summentopologie** auf $X$ als die Finaltopologie bezüglich der Familie $(\iota_i)_{i\in I}$ der kanonischen Inklusionen $\iota_i : X_i \to X$ definiert, also als die feinste Topologie auf $X$, bezüglich derer alle $\iota_i$ stetig sind. Wenn nicht anders vermerkt, werden wir $X$ künftig stets mit der Summentopologie versehen und den **Summenraum** (bzw. **Koproduktraum**) der topologischen Räume $X_i$ nennen.*

Da die Situation von Definition 1.78 diejenige von Definition 1.56 spezialisiert, erhalten wir an dieser Stelle das folgende Korollar von Proposition 1.57:

**Korollar 1.79** (Stetigkeitskriterium für die Summentopologie). *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X := \coprod_{i\in I} X_i$ der Summenraum bezüglich der kanonischen Inklusionen $\iota_i : X_i \to X$. Seien weiter $(X', \mathcal{O}')$ ein topologischer Raum und $g : X \to X'$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & X' \\ X_i \arrow[u, hook, "\iota_i"] \arrow[ur, "g\circ\iota_i"'] & \end{tikzcd}$$

(i) *$g$ ist stetig.*

(ii) *Für alle $i \in I$ ist die Verknüpfung $g \circ \iota_i$ stetig.*

**Bemerkung 1.80.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X := \coprod_{i\in I} X_i$ der Summenraum bezüglich der kanonischen Inklusionen $\iota_i : X_i \to X$. Für eine beliebige Teilmenge $U \subseteq X$ gilt dann*

$$U \overset{\circ}{\subseteq} X \quad \Longleftrightarrow \quad \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I, \tag{1.6}$$

*denn: Die linke Seite impliziert die rechte, da nach Konstruktion der Summentopologie die Inklusionen $\iota_i$ für alle $i \in I$ stetig sind. Die rechte Seite impliziert aber auch die linke, da die Summentopologie als die feinste Topologie mit dieser Eigenschaft definiert ist.* #

*Insbesondere gilt $\iota_i(X_i) \overset{\circ}{\subseteq} X$ für alle $i \in I$. Desweiteren sind die Inklusionen $\iota_i : X_i \to X$ alle offen,*

*denn: Für ein fest gewähltes $i \in I$ sei $U_i \overset{\circ}{\subseteq} X_i$ gegeben. Dann gilt*

$$\iota_j^{-1}\big(\iota_i(U_i)\big) = \begin{cases} U_i & \text{für } j = i, \\ \emptyset & \text{für } j \neq i \end{cases} \quad \in \mathcal{O}_j \text{ für alle } j \in I$$

*und somit $\iota_i(U_i) \overset{\circ}{\subseteq} X$ nach (1.6).* #

**Definition 1.81** (universelle Eigenschaft des Summenraums). *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Wir sagen, ein topologischer Raum $(X', \mathcal{O}')$ zusammen mit einer Familie $(\iota'_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $\iota'_i : X_i \to X'$ erfüllt die* ***universelle Eigenschaft des Summenraums*** *zu $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$, wenn zu jedem topologischen Raum $(X'', \mathcal{O}'')$ und jeder Familie $(f_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $f_i : X_i \to X''$ genau eine stetige Abbildung $f : X' \to X''$ mit $f \circ \iota'_i = f_i$ für alle $i \in I$ existiert.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dotted, "f"] & X'' \\ X_i \arrow[u, hook, "\iota'_i"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

**Proposition 1.82.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Der Summenraum $X := \coprod_{i\in I} X_i$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_i : X_i \to X$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Summenraums zu $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$.*

(b) *Erfüllt ein topologischer Raum $(X', \mathcal{O}')$ zusammen mit einer Familie $(\iota'_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $\iota'_i : X_i \to X'$ die universelle Eigenschaft des Summenraums zu $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homöomorphismus $g : X = \coprod_{i\in I} X_i \to X'$ mit $\iota'_i = g \circ \iota_i$ für alle $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dotted, "g"] & \arrow[d, phantom, "///"] & X' \\
& X_i \arrow[ul, hook', "\iota_i"] \arrow[ur, "\iota'_i"'] &
\end{tikzcd}$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Sei $(X'', \mathcal{O}'')$ ein beliebiger topologischer Raum und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_i : X_i \to X''$. Wegen $X = \bigsqcup_{i\in I} \iota_i(X_i)$ und der Injektivität der Inklusionen $\iota_i$ ist eine wohldefinierte Abbildung $f : X = \prod_{i\in I} X_i \to X''$ gegeben, wenn wir für alle $i \in I$

$$f\big(\iota_i(x_i)\big) := f_i(x_i) \quad \text{für } x_i \in X_i$$

setzen. Diese erfüllt die Bedingung $f \circ \iota_i = f_i$ nach Konstruktion und ist stetig nach Proposition 1.57. Da andererseits aus $f \circ \iota_i = f_i$ für alle $i \in I$ sofort $f\big(\iota_i(x_i)\big) = f_i(x_i)$ für alle $x_i \in X_i$ und alle $i \in I$ folgt, ist $f$ die einzige derartige Abbildung, so dass wir nachgewiesen haben, dass $X$ zusammen mit den Inklusionen $\iota_i$ die universelle Eigenschaft des Summenraums zu $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ erfüllt.

Behauptung (b) zeigt man analog zum Beweis von Proposition 1.75. □

**Proposition 1.83.** *Sei $\big((X_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume, sei $X := \coprod_{i\in I} X_i$ als Menge und sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathcal{O}$ ist die Summentopologie auf $X$.*

(ii) *Für alle $i \in I$ ist $\iota_i(X_i) \subseteq X$ offen und es gilt $\mathcal{O}_i = \iota_i^{-1}(\mathcal{O})$.*

(iii) *Für alle $i \in I$ ist $\iota_i(X_i) \subseteq X$ abgeschloffen und es gilt $\mathcal{O}_i = \iota_i^{-1}(\mathcal{O})$.*

(iv) *Für alle $i \in I$ ist $\iota_i$ offen und es gilt $\mathcal{O}_i = \iota_i^{-1}(\mathcal{O})$.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i). Nach Bemerkung 1.80 gilt dann einerseits direkt

$$\iota_i(X_i) \overset{\circ}{\subseteq} X$$

und andererseits

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq X \mid \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I\}. \tag{1.7}$$

Aus letzterem erhalten wir durch Urbildnehmen unter den jeweiligen Inklusionen $\iota_j$

$$\iota_j^{-1}(\mathcal{O}) = \{\iota_j^{-1}(U) \mid U \subseteq X \text{ mit } \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I\} \subseteq \mathcal{O}_j.$$

Umgekehrt gilt $U := \iota_j(U_j) \subseteq X$ mit $\iota_j^{-1}(U) = U_j \in \mathcal{O}_j$ für ein beliebiges $U_j \in \mathcal{O}_j$. Wegen $\iota_i^{-1}(U) = \emptyset \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \neq j$ folgt

$$\iota_j^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_j$$

und somit (ii).

Gelte nun (ii). Für ein beliebiges $j \in I$ gilt

$$\iota_j(X_j) = X \setminus \underbrace{\coprod_{i \in I \setminus \{j\}} \iota_i(X_i)}_{\Subset X} \Subset X$$

und zusammen mit (ii) somit (iii).

Nun gelte (iii). Für beliebige $i \in I$ und $U_i \in \mathcal{O}_i$ gibt es dann ein $U \in \mathcal{O}$ mit $U_i = \iota_i^{-1}(U)$. Es folgt

$$\iota_i(U_i) = \iota_i\big(\iota_i^{-1}(U)\big) = U \cap \iota_i(X_i) \Subset X$$

und somit die Offenheit von $\iota_i$, zusammen mit (iii) also (iv).

Gelte schließlich (iv). Zu zeigen gilt es (1.7). Sei dafür zunächst $U \in \mathcal{O}$. Dann gilt nach (iv) sofort $\iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ und somit die erste Inklusion. Ist umgekehrt $U \subseteq X$ mit $\iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$, so gilt

$$U = \coprod_{i \in I} \big(U \cap \iota_i(X_i)\big) = \coprod_{i \in I} \iota_i\big(\iota_i^{-1}(U)\big).$$

Letzteres ist in $\mathcal{O}$ enthalten, da $\iota_i^{-1}(U)$ in $\mathcal{O}_i$ liegt und $\iota_i$ nach (iv) offen ist. Es folgt die zweite Inklusion und insgesamt (1.7), also (i). □

**Definition 1.84.** *Seien $(X, \mathcal{O})$ und $(X', \mathcal{O}')$ topologische Räume, $R \subseteq X$ ein Unterraum und $h : R \to X'$ eine stetige Abbildung, die wir in diesem Kontext die **Anheftungsabbildung** nennen wollen. Sei weiter $X \amalg X'$ der Summenraum bezüglich der kanonischen Inklusionen $\iota : X \to (X \amalg X')$ und $\iota' : X' \to (X \amalg X')$ und sei $\sim$ die auf $X \amalg X'$ von $\iota(r) \sim \iota'(h(r))$ erzeugte Äquivalenzrelation. Dann heißt*

$$X' \cup_h X := \big(X \amalg X'\big)/_\sim$$

*der Raum, der aus $X'$ durch **Anheften** von $X$ via $h$ entsteht.*

**Bemerkung 1.85.** (a) *Da in der Situation von Definition 1.84 keine zwei Punkte von $X'$ miteinander identifiziert werden, ist die kanonische Abbildung*

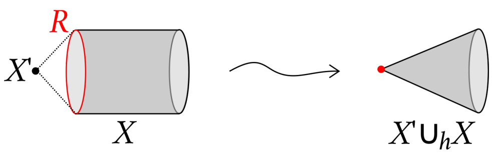
$$X' \overset{\iota'}{\hookrightarrow} X \amalg X' \to X' \cup_h X$$

*injektiv, so dass wir $X'$ als Teilmenge von $X' \cup_h X$ auffassen können. Vermöge der Stetigkeit von $h$ kann man nun zeigen, dass die Unterraumtopologie von $X' \subseteq X' \cup_h X$ mit der ursprünglichen Topologie auf $X'$ übereinstimmt, so dass $X'$ auf kanonische Weise ein Unterraum von $X' \cup_h X$ ist.*

(b) *Der angeheftete Raum $X$ überlebt die Anheftung im Allgemeinen nicht unbeschadet: Zwar ist $X \setminus R$ als Teilmenge von $X' \cup_h X$ noch vorhanden – und wenn $R$ etwa offen oder abgeschlossen ist, auch mit der richtigen Topologie – der topologische Raum $X$ selbst kann aber unter der kanonischen stetigen Abbildung*

$$X \overset{\iota}{\hookrightarrow} X \amalg X' \to X' \cup_h X$$

*sehr verändert werden: Ist etwa $X' = \{x'\}$ ein einzelner Punkt, so gilt $\iota(r) \sim \iota'(x')$ für alle $r \in R$, so dass in $X' \cup_h X$ ganz $R$ zu einem Punkt zusammengezogen wird.*



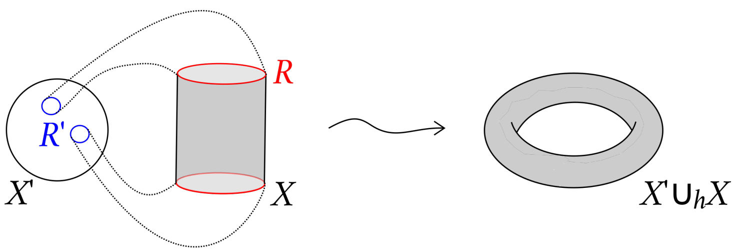

(c) *Ist allerdings $h$ ein Homöomorphismus von $R$ auf einen Teilraum $R' \subseteq X'$, so ist natürlich*

$$X' \cup_h X = X \cup_{h^{-1}} X'.$$

*Nach der obigen Überlegung sind in diesem Fall beide Räume $X, X'$ als kanonische Teilräume in $X' \cup_h X$ enthalten. Das Anheften ist in diesem Fall die Selbstverklebung des Summenraums $X \amalg X'$ längs $h$ gemäß Definition 1.65.*

Abschließend zu diesem Thema betrachten wir noch ein Beispiel, das die Idee des Anheftens schön veranschaulicht:

**Beispiel 1.86** (Anheften eines Henkels an eine 2-Sphäre). *Seien einerseits $X$ eine Kreiszylindermantelfläche und $R \subseteq X$ die Vereinigung der berandenden Kreise von $X$ und andererseits $X'$ eine 2-Sphäre, aus der zwei disjunkte Durchschnitte mit offenen 3-Bällen entfernt wurden, und $R' \subseteq X'$ die Vereinigung der Ränder dieser Durchschnitte. Für einen beliebigen Homöomorphismus $h : R \to R'$ ist der Raum, der durch Anheften von $X$ an $X'$ via $h$ entsteht, homöomorph zu einem Torus.*



# KAPITEL 2

# Eigenschaften topologischer Räume

## 2.1 Zusammenhang

**Definition 2.1.** *Ein topologischer Raum X heißt* ***zusammenhängend****, wenn er nicht der Summenraum zweier disjunkter nichtleerer Teilräume ist.*

**Proposition 2.2.** *Für einen topologischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist nicht zusammenhängend.*

(ii) *Es gibt nichtleere offene Teilmengen $\emptyset \neq O_1, O_2 \overset{\circ}{\subseteq} X$ mit $X = O_1 \sqcup O_2$.*

(iii) *Es gibt nichtleere abgeschlossene Teilmengen $\emptyset \neq A_1, A_2 \overset{\bullet}{\subseteq} X$ mit $X = A_1 \sqcup A_2$.*

(iv) *Es gibt eine abgeschloffene Teilmenge $\emptyset \neq U \subsetneq X$.*

(v) *Es gibt eine nichtkonstante stetige Abbildung $f : X \to \{0, 1\}_{\text{disk}}$.*

*Beweis.* Gilt (i), so gibt es nach Definition 2.1 zwei Teilräume

$$\emptyset \neq U_1, U_2 \subseteq X \quad \text{mit } U_1 \cap U_2 = \emptyset \text{ und } X = U_1 \amalg U_2 = U_1 \sqcup U_2.$$

Nach Proposition 1.83 gilt $U_1, U_2 \overset{\circ}{\subseteq} X$ und somit (ii).

Gelte nun (ii), gebe es also $\emptyset \neq O_1, O_2 \overset{\circ}{\subseteq} X$ mit $X = O_1 \sqcup O_2$. Setzen wir dann $A_i := X \setminus O_i$ für $i \in \{1, 2\}$, so gilt $\emptyset \neq A_1, A_2 \overset{\bullet}{\subseteq} X$ und $X = A_1 \sqcup A_2$, also (iii).

Gilt (iii), so gibt es $\emptyset \neq A_1, A_2 \overset{\bullet}{\subseteq} X$ mit $X = A_1 \sqcup A_2$. Setzen wir $U := A_1$, so ist $U$ abgeschlossen und nichtleer, wegen $X \setminus U = A_2$ aber auch offen und ungleich ganz $X$. Es folgt (iv).

Nun gelte (iv). Dann gibt es ein abgeschloffenes $\emptyset \neq U \subsetneq X$. Wir definieren eine Abbildung

$$f : \begin{cases} X & \to \{0,1\}_{\text{disk}}, \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in U, \\ 0 & \text{für } x \notin U. \end{cases} \end{cases}$$

Da nach Konstruktion $U$ und $X \setminus U$ beide offen und nichtleer sind, ist diese Abbildung stetig und nichtkonstant, so dass (v) folgt.

Gelte schließlich (v), so dass es eine nichtkonstante stetige Abbildung $f : X \to \{0,1\}_{\text{disk}}$ gibt. Dann gilt

$$X = f^{-1}(\{0\}) \sqcup f^{-1}(\{1\}),$$

wobei beide Urbilder nach Konstruktion offen und nichtleer sind. Nach Proposition 1.83 gilt daher

$$X = f^{-1}(\{0\}) \amalg f^{-1}(\{1\})$$

und also (i). □

**Beispiel 2.3.** (a) *In einem diskreten topologischen Raum sind die zusammenhängenden Teilräume die leere Menge $\emptyset$ sowie die einelementigen Teilräume.*

(b) *In einem indiskreten topologischen Raum sind alle Teilräume (inklusive des gesamten Raumes) zusammenhängend.*

**Proposition 2.4.** *Das Einheitsintervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.*

*Beweis.* Seien $O_1, O_2 \overset{\circ}{\subseteq} [0,1]$ mit $[0,1] = O_1 \sqcup O_2$. Nach Konstruktion gilt dann $O_1, O_2 \overset{\bullet}{\subseteq} [0,1] \overset{\bullet}{\subseteq} \mathbb{R}$ und mit Teil (b) von Beispiel 1.51 folgt $O_1, O_2 \overset{\bullet}{\subseteq} \mathbb{R}$. Zudem gilt

$$O_1 \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad 1 \in O_1,$$

*denn:* Nach dem Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen existiert für die nichtleere und beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq O_1 \subseteq [0,1]$ ein Supremum $x := \sup O_1$.

Gäbe es nun eine Umgebung $U$ von $x$ in $\mathbb{R}$ mit $U \cap O_1 = \emptyset$, so gäbe es nach Definition der metrischen Topologie auf $\mathbb{R}$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$ und insbesondere gälte

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap O_1 = \emptyset.$$

Wäre nun $x - \varepsilon < y$ für ein $y \in O_1$, so gälte nach Konstruktion von $x$ die Abschätzung $x - \varepsilon < y \leq x < x + \varepsilon$ und also $y \in U_\varepsilon(x)$. Das haben wir soeben ausgeschlossen, so dass $x - \varepsilon \geq y$ für alle $y \in O_1$ gilt, was wegen $x - \varepsilon < x$ und $x = \sup O_1$ aber ebenfalls nicht sein kann. Eine Umgebung $U$ wie angenommen kann es daher nicht geben und jede Umgebung von $x$ in $\mathbb{R}$ trifft die Menge $O_1$. Nach Teil (b) von Proposition 1.14 gilt daher

$$x \in \overline{O_1} = O_1,$$

wobei wir $O_1 \overset{\bullet}{\subseteq} \mathbb{R}$ ausgenutzt haben.

Wegen $O_1 \overset{\circ}{\subseteq} [0,1]$ gibt es ein $\tilde{O}_1 \overset{\circ}{\subseteq} \mathbb{R}$ mit $O_1 = \tilde{O}_1 \cap [0,1]$. Wegen $x \in O_1$ und der Definition der metrischen Topologie gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq \tilde{O}_1$. Wäre $x \neq 1$, so gälte $x < 1$ und ohne Einschränkung könnten wir auch $x + \varepsilon < 1$, also $x + \varepsilon \in [0,1]$, erreichen. Es folgte

$$x + \varepsilon \in \tilde{O}_1 \cap [0,1] = O_1$$

im Widerspruch zu $x = \sup O_1$. Es folgt $x = 1$ und also $1 \in O_1$. #

Analog zeigt man

$$O_2 \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad 1 \in O_2.$$

Da $O_1$ und $O_2$ nach Annahme disjunkt sind, kann die Zahl 1 nicht in beiden Mengen enthalten sein. Es folgt $O_1 = \emptyset$ oder $O_2 = \emptyset$; es gibt also keine Zerlegung von $[0,1]$ wie in Aussage (ii) von Proposition 2.2 und wir haben gezeigt, dass $[0,1]$ zusammenhängend ist. □

In Satz 2.18 werden wir allgemeiner sehen, dass die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ gerade die (offenen, halboffenen oder abgeschlossenen) Intervalle sind, wobei $\pm\infty$ als Intervallgrenzen zulässig sind.

**Proposition 2.5.** *Sei $X$ ein zusammenhängender topologischer Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Seien $X'$ ein weiterer topologischer Raum und $f : X \to X'$ eine stetige Abbildung. Dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend. Insbesondere ist Zusammenhang eine topologische Eigenschaft.*

(b) *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Dann ist auch $X/_\sim$ zusammenhängend.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung $X \neq \emptyset$ annehmen. Da das Bild konstanter Funktionen einelementig und somit trivialerweise zusammenhängend ist, können wir zudem ohne Einschränkung annehmen, $f$ sei nicht konstant.

Nehmen wir nun an, $f(X)$ wäre nicht zusammenhängend. Nach Proposition 2.2 gäbe es dann eine nichtkonstante stetige Abbildung $g : f(X) \to \{0,1\}_{\text{disk}}$. Folglich wäre auch die Verkettung $g \circ f : X \to \{0,1\}_{\text{disk}}$ nichtkonstant und stetig. Wieder mit Proposition 2.2 erhielten wir, dass auch $X$ nicht zusammenhängend wäre, was unserer Voraussetzung widerspricht. Es folgt, dass $f(X)$ zusammenhängt, also Behauptung (a).

Behauptung (b) folgt unmittelbar aus Aussage (a), da die Projektion $p : X \to X/_\sim$ stetig und surjektiv ist. □

**Beispiel 2.6.** *In Satz 2.18 werden wir zeigen, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (ausgestattet mit der Standardtopologie) ein zusammenhängender topologischer Raum sind. Die Abbildung*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^2, \\ x & \mapsto \binom{x}{x^2} \end{cases}$$

*ist stetig,*

*denn: Nach dem Stetigkeitskriterium für die Produkttopologie 1.69 ist $f$ genau dann stetig, wenn die Verkettungen $\pi_1 \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $\pi_2 \circ f : x \mapsto x^2$ stetig sind. Ersteres ist trivial und letzteres lässt sich mit dem Begriff der $\varepsilon$-$\delta$-Stetigkeit aus Bemerkung 1.26 leicht einsehen.* #

*Nach Proposition 2.5 ist daher die Standardparabel $f(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^2$ ebenfalls zusammenhängend.*

**Proposition 2.7.** *Für einen topologischen Raum $X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist zusammenhängend.*

(ii) *Für jeden diskreten Raum $D$ sind alle stetigen Abbildungen $f : X \to D$ konstant.*

*Beweis.* Sei zunächst $X$ zusammenhängend. Für einen beliebigen diskreten Raum $D$ und eine beliebige stetige Abbildung $f : X \to D$ ist dann $f(X)$ zusammenhängend nach Proposition 2.5. Nach Teil (a) von Beispiel 2.3 ist dann $f(X)$ entweder leer – dann ist auch $X$ leer – oder einelementig. In beiden Fällen ist $f$ konstant.

Ist umgekehrt $X$ nicht zusammenhängend, so existiert nach Proposition 2.2 eine nichtkonstante stetige Abbildung $f : X \to \{0, 1\}_{\text{disk}}$. □

**Proposition 2.8.** *Sei $X$ ein topologischer Raum, $X'$ ein zusammenhängender Unterraum und $U \subseteq X$ ein weiterer Unterraum mit $X' \subseteq U \subseteq \overline{X'}$. Dann ist auch $U$ zusammenhängend.*

*Ein Spezialfall dieser Aussage ist, dass der Abschluss eines zusammenhängenden Unterraums wieder zusammenhängend ist.*

*Beweis.* Der Abschluss von $X'$ in $U$ ist gegeben durch

$$\bigcap_{\substack{A \mathrel{\underline{\subset\!\!\bullet}} U \\ \text{mit } \overline{X}' \subseteq A}} A = \bigcap_{\substack{\tilde{A} \mathrel{\underline{\subset\!\!\bullet}} X \\ \text{mit } X' \subseteq (\tilde{A} \cap U)}} (\tilde{A} \cap U) \overset{X' \subseteq U}{=} \bigcap_{\substack{\tilde{A} \mathrel{\underline{\subset\!\!\bullet}} X \\ \text{mit } \overline{X}' \subseteq \tilde{A}}} (\tilde{A} \cap U) = \Bigg( \bigcap_{\substack{\tilde{A} \mathrel{\underline{\subset\!\!\bullet}} X \\ \text{mit } \overline{X}' \subseteq \tilde{A}}} \tilde{A} \Bigg) \cap U = \overline{X'} \cap U \overset{U \subseteq \overline{X'}}{=} U.$$

Wir können daher ohne Einschränkung den Spezialfall $X = U$ betrachten. Dann ist

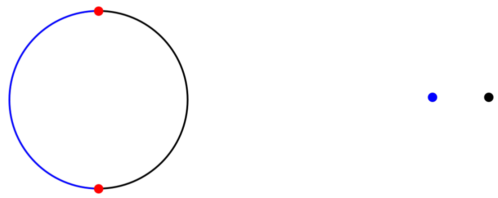
$$X' \subseteq U = \overline{X'} = X$$

und es gilt nachzuweisen, dass $\overline{X'}$ zusammenhängend ist. Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir dabei ohne Einschränkung $X' \neq \emptyset$ annehmen. Wir wählen nun einen beliebigen diskreten Raum $D$ und eine beliebige stetige Abbildung $f : \overline{X'} \to D$. Dann gilt

$$f(\overline{X'}) \overset{1.25}{\subseteq} \overline{f(X')} \overset{f(X') \mathrel{\underline{\subset\!\!\bullet}} D}{=} f(X') \overset{2.5}{=} \{d\} \quad \text{für ein } d \in D,$$

so dass $f$ konstant ist. Nach Proposition 2.7 ist daher $\overline{X'}$ zusammenhängend und die Proposition bewiesen. □

**Bemerkung 2.9.** *Durchschnitte und Vereinigungen zusammenhängender Teilmengen sind im Allgemeinen nicht zusammenhängend, siehe etwa im folgenden Anschauungsbeispiel in $\mathbb{R}^2$:*



*Die beiden abgeschlossenen Halbkreisbögen (links) bzw. Punkte (rechts) sind jeweils zusammenhängend, ihr Durchschnitt (links) bzw. ihre Vereinigung (rechts) aber nicht.*

**Proposition 2.10.** *In einem beliebigen topologischen Raum $X$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Ist $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilräume von $X$ mit $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$, so ist $\bigcup_{i\in I} X_i$ zusammenhängend.*

(b) *Ist $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie zusammenhängender Teilräume von $X$ mit $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ zusammenhängend.*

(c) *Ist $(X_i)_{i=1}^n$ eine endliche Familie zusammenhängender Teilräume von $X$ mit $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, so ist $\bigcup_{i=1}^n X_i$ zusammenhängend.*

*Beweis.* Zum Beweis von Behauptung (a) betrachten wir einen beliebigen diskreten Raum $D$ und eine beliebige stetige Abbildung $f : \bigcup_{i\in I} X_i \to D$. Nach Voraussetzung existiert ein $u \in \bigcap_{i\in I} X_i$. Sei zudem $x \in \bigcup_{i\in I} X_i$, etwa $x \in X_j$ für ein $j \in I$. Dann gilt $x, u \in X_j$. Nach Voraussetzung ist $X_j$ zusammenhängend. Da die Einschränkung $f|_{X_j}$ nach Proposition 1.53 stetig ist, ist sie daher nach Proposition 2.7 auch konstant; insbesondere gilt $f(x) = f(u)$. Da $x \in \bigcup_{i\in I} X_i$ beliebig gewählt war, ist die Abbildung $f$ selbst auch konstant. Da diese Argumentation nicht von der Wahl des diskreten Raums $D$ abhängt, folgt wieder mit Proposition 2.7, dass $\bigcup_{i\in I} X_i$ zusammenhängt, also Behauptung (a).

Wir überprüfen nun Behauptung (b) und zeigen dafür, dass die Teilräume

$$Y_n := \bigcup_{i=1}^n X_i \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

zusammenhängend sind. Dem ist tatsächlich so,

*denn:* Für $n = 1$ stimmt dies nach Voraussetzung. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$Y_{n+1} = Y_n \cup X_{n+1} \quad \text{und} \quad Y_n \cap X_{n+1} \supseteq X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset.$$

Da $X_{n+1}$ nach Voraussetzung zusammenhängt, folgt daher aus dem Zusammenhang von $Y_n$ mit Aussage (a) derjenige von $Y_{n+1}$. #

Nach Konstruktion gilt weiter

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n \supseteq X_1 \supseteq X_1 \cap X_2 \neq \emptyset.$$

Wieder können wir Aussage (a) anwenden und erhalten Behauptung (b).

Schließlich folgt Behauptung (c) sofort aus Aussage (b), wenn wir $X_i := X_n$ für alle $i > n$ setzen. □

**Satz 2.11.** *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer topologischer Räume. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $X := \prod_{i\in I} X_i$ *ist zusammenhängend.*

(ii) *Für alle $i \in I$ ist $X_i$ zusammenhängend.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i), sei also $X$ zusammenhängend (und nichtleer). Da nach Definition 1.68 die kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ für alle $i \in I$ stetig sind, ist somit nach Proposition 2.5 auch $\pi_i(X) = X_i$ zusammenhängend und es gilt also (ii).

Nun gelte umgekehrt (ii). Seien $a = (a_i)_{i\in I} \in X$ ein beliebiger Punkt, $(Y_j)_{j\in J}$ die Familie der zusammenhängenden Teilräume von $X$, die $a$ enthalten, und $Y := \bigcup_{j\in J} Y_j$. Nach Konstruktion gilt $\bigcap_{j\in J} Y_j \supseteq \{a\} \neq \emptyset$. Nach Teil (a) von Proposition 2.10 ist somit $Y$ zusammenhängend und nach Proposition 2.8 dann auch $\overline{Y}$. Weiter gilt

$$X = \overline{Y},$$

*denn:* Nach Proposition 1.14 gilt

$$X = \overline{Y} \iff \text{für alle } x \in X \text{ und alle } U \in \mathcal{U}(x) \text{ gilt } Y \cap U \neq \emptyset.$$

Nach Korollar 1.72 ist für jedes $x \in X$ durch $\mathcal{E}(x)$ eine Basis des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$ gegeben; in jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ist also ein $E \in \mathcal{E}(x)$ enthalten. Es folgt

$$\begin{aligned} X = \overline{Y} &\Longleftarrow \text{für alle } x \in X \text{ und alle } E \in \mathcal{E}(x) \text{ gilt } Y \cap E \neq \emptyset \\ &\iff \text{für alle } E \in \mathcal{E} \text{ gilt } Y \cap E \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Eine beliebige Elementarmenge $E \in \mathcal{E}$ lässt sich schreiben als $E = \prod_{i\in I} U_i$ mit $U_i \underset{\circ}{\subseteq} X_i$ und $U_i \subsetneq X_i$ für $i$ aus einer endlichen Menge $\{i_1, \ldots, i_n\}$. Für jedes $i$ aus dieser endlichen Menge wählen wir ein $b_i \in U_i$ und wir setzen

$$\begin{aligned} Z_1(E) &:= \{x = (x_i)_{i\in I} \in X \mid x_i = b_i \text{ für } i \in \emptyset,\ x_{i_1} \in X_{i_1} \text{ beliebig, } x_i = a_i \text{ sonst}\}, \\ Z_2(E) &:= \{x = (x_i)_{i\in I} \in X \mid x_i = b_i \text{ für } i \in \{i_1\},\ x_{i_2} \in X_{i_2} \text{ beliebig, } x_i = a_i \text{ sonst}\}, \\ &\ \vdots \\ Z_n(E) &:= \{x = (x_i)_{i\in I} \in X \mid x_i = b_i \text{ für } i \in \{i_1, \ldots, i_{n-1}\},\ x_{i_n} \in X_{i_n} \text{ beliebig, } x_i = a_i \text{ sonst}\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $Z_k(E) \cong X_{i_k}$, so dass $Z_k(E)$ für $k \in \{1, \dots, n\}$ zusammenhängend ist. Weiter gilt $Z_k(E) \cap Z_{k+1}(E) \neq \emptyset$ für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und mit Teil (c) von Proposition 2.10 erhalten wir, dass auch $Z(E) := \bigcup_{k=1}^{n} Z_k(E)$ zusammenhängend ist. Wegen $a \in Z_1(E) \subseteq Z(E)$ ist daher $Z(E)$ in der Familie $(Y_j)_{j \in J}$ enthalten und es gilt $Z(E) \subseteq Y$. Wir erhalten

$$X = \overline{Y} \quad \Longleftarrow \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E} \text{ gilt } Z(E) \cap E \neq \emptyset.$$

Nach Konstruktion gilt $Z_n(E) \cap E \neq \emptyset$, somit auch $Z(E) \cap E \neq \emptyset$ und insgesamt die Behauptung. #

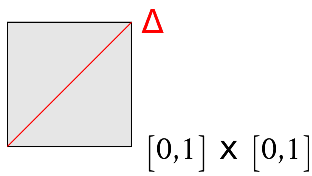
Zusammengenommen folgt, dass $X$ zusammenhängt, also (i) und somit der Satz. □

**Bemerkung 2.12.** *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer topologischer Räume und $U \subseteq \prod_{i \in I} X_i$, so dass $\pi_i(U)$ für alle $i \in I$ zusammenhängend ist. Da im Allgemeinen $U \neq \prod_{i \in I} \pi_i(U)$ gilt, ist $U$ in dieser Situation* nicht zwangsläufig *auch zusammenhängend. Wir geben hierfür ein Anschauungsbeispiel:*

*Sei $X = [0,1] \times [0,1]$ mit dem Einheitsintervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ und sei*

$$\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in X \mid x_1 = x_2 \right\}$$

*die **Diagonale**.*




*Die Bilder des Unterraums $U := X \setminus \Delta$ unter den kanonischen Projektionen erfüllen $\pi_1(U) = [0,1] = \pi_2(U)$ und sind nach Proposition 2.4 insbesondere zusammenhängend. Andererseits gilt*

$$U \neq X = [0,1] \times [0,1] = \pi_1(U) \times \pi_2(U)$$

*und $U$ selbst ist nicht zusammenhängend.*[1]

**Beispiel 2.13.** *Torus, Möbiusband und Klein'sche Flasche wie in Beispiel 1.67 sind zusammenhängend,*

*denn: Nach Proposition 2.4 ist das Einheitsintervall $[0,1]$ zusammenhängend, nach Satz 2.11 dann auch $[0,1] \times [0,1]$ und nach Teil (b) von Proposition 2.5 auch die Quotientenräume $([0,1] \times [0,1])/_\sim$ nach den jeweiligen Äquivalenzrelationen.* #

**Definition 2.14.** *Ein **Weg** in einem topologischen Raum $X$ ist eine stetige Abbildung $w : [0,1] \to X$. Hierbei heißt $w(0)$ der **Anfangspunkt** und $w(1)$ der **Endpunkt** von $w$ und man sagt, $w$ führe von $w(0)$ nach $w(1)$. Der topologische Raum $X$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es für alle $x, y \in X$ einen Weg in $X$ gibt, der von $x$ nach $y$ führt.*

[1] Man kann leicht zeigen, dass die nichtleeren, disjunkten Teilmengen $\{(x_1, x_2) \in X \mid x_1 \lessgtr x_2\} \subseteq X$ offen sind und sich zu $U$ vereinigen. Dass $U$ nicht zusammenhängt, folgt dann mit Proposition 2.2.

**Beispiel 2.15.** *Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

(a) *Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt* ***konvex****, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in X$ auch die Verbindungsstrecke $\{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0,1]\}$ komplett in $X$ enthalten ist. Ist dies der Fall, so ist für je zwei Punkte $x, y \in X$ durch*

$$w : \begin{cases} [0,1] & \to X, \\ \lambda & \mapsto (1-\lambda)x + \lambda y \end{cases}$$

*ein Weg in $X$ gegeben, der von $x$ nach $y$ führt, und $X$ ist wegzusammenhängend.*

(b) *Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt* ***sternförmig****, wenn es einen Punkt $x^* \in X$ gibt, so dass zu jedem Punkt $x \in X$ auch die Verbindungsstrecke $\{(1-\lambda)x + \lambda x^* \mid \lambda \in [0,1]\}$ komplett in $X$ enthalten ist. Ist dies der Fall, so ist für je zwei Punkte $x, y \in X$ durch*

$$w : \begin{cases} [0,\frac{1}{2}] & \to X, \\ \lambda & \mapsto (1-2\lambda)x + 2\lambda x^* \end{cases} \quad \text{und} \quad w : \begin{cases} [\frac{1}{2},1] & \to X, \\ \lambda & \mapsto (1-(2\lambda-1))x^* + (2\lambda-1)y \end{cases}$$

*ein Weg in $X$ gegeben, der von $x$ nach $y$ führt, und $X$ ist wegzusammenhängend.*

**Satz 2.16.** *Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung können wir $X \neq \emptyset$ annehmen. Ist $y \in X$, so gibt es nach Definition 2.14 zu jedem $x \in X$ einen Weg $w_x$ von $y$ nach $x$. Es gilt dann

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} w_x([0,1]) \subseteq X$$

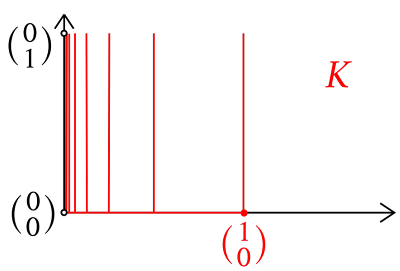
und also auch

$$X = \bigcup_{x \in X} w_x([0,1]).$$

Zudem ist nach Konstruktion $\bigcap_{x \in X} w_x([0,1]) \supseteq \{y\} \neq \emptyset$. Da $[0,1]$ nach Proposition 2.4 zusammenhängend ist, gilt dies für alle $x \in X$ wegen der Stetigkeit von $w_x$ und Proposition 2.5 auch für $w_x([0,1])$ und nach Teil (a) von Proposition 2.10 auch für $X$. □

**Beispiel 2.17.** *Nicht jeder zusammenhängende topologische Raum ist wegzusammenhängend: So ist etwa der „Kamm"*

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \right\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

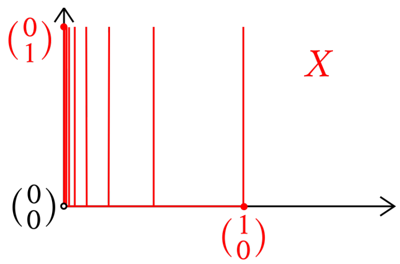


*eine abzählbare Vereinigung zusammenhängender topologischer Räume,*[2] *die sich so durchnummerieren lassen, dass wir Teil (b) von Proposition 2.10 anwenden können.*[3] *Insbesondere ist $K$ zusammenhängend. Weiter gilt*

$$\overline{K} = K \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

*und somit trivialerweise*

$$K \subseteq X := \overline{K} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \overline{K}.$$




*Nach Proposition 2.8 ist daher mit $K$ auch $X$ zusammenhängend. Da es aber offensichtlich keinen Weg von $\binom{0}{1}$ nach $\binom{1}{0}$ gibt, ist $X$ nicht wegzusammenhängend.*

**Satz 2.18.** *Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist zusammenhängend.*

(ii) *$X$ ist wegzusammenhängend.*

(iii) *$X$ ist ein (offenes, halboffenes oder abgeschlossenes) Intervall, wobei $\pm\infty$ als Intervallgrenzen zulässig sind.*

*Beweis.* Dass Intervalle als konvexe Mengen wegzusammenhängend sind, haben wir in Beispiel 2.15 eingesehen, und dass wegzusammenhängende Räume zusammenhängend sind, haben wir in Satz 2.16 bewiesen.

Für den Beweis des Satzes genügt es daher zu zeigen, dass jede nichtleere zusammenhängende Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall im Sinne von (iii) ist. Da sich für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x\}$ als Intervall $[x, x]$ schreiben lässt, können wir dabei ohne Einschränkung $|X| \geq 2$ annehmen. Sei also $X \subseteq \mathbb{R}$ eine zusammenhängende Teilmenge mit $|X| \geq 2$. Dann gilt

$$x, y \in X \text{ mit } x < y \quad \Longrightarrow \quad [x, y] \subseteq X, \tag{2.1}$$

[2] Intervalle in $\mathbb{R}$ sind als konvexe Mengen nach Beispiel 2.15 wegzusammenhängend und somit nach Satz 2.16 auch zusammenhängend. Die betrachteten topologischen Räume sind als Bilder solcher Intervalle unter stetigen Einbettungsabbildungen $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ nach Teil (a) von Proposition 2.5 ebenfalls zusammenhängend.

[3] Hierzu wählt man immer abwechselnd die waagrechte Strecke und die jeweils nächste senkrechte Strecke, wobei die senkrechten Strecken durch $n = 0, 1, 2, \ldots$ angeordnet seien.

*denn:* Gälte $[x,y] \not\subseteq X$, so gäbe es ein $z \in \mathbb{R} \setminus X$ mit $x < z < y$ und wir könnten $X$ disjunkt zerlegen in

$$X = \big(X \cap (-\infty, z)\big) \sqcup \big(X \cap (z, \infty)\big).$$

Beide Mengen wären nach Konstruktion offen und nichtleer, da $x$ in der ersten Menge und $y$ in der zweiten Menge enthalten wäre. Mit Proposition 2.2 folgte entgegen unserer Annahme, das $X$ nicht zusammenhinge. Es folgt $[x,y] \subseteq X$ und somit die Behauptung. #

Sei nun $z \in (\inf X, \sup X)$, wobei wir $-\infty$ als Infimum und $+\infty$ als Supremum zulassen. Nach Definition von Infimum und Supremum gibt es dann $x, y \in X$ mit $\inf X \le x < z < y \le \sup X$. Insbesondere gilt

$$z \in [x,y] \overset{(2.1)}{\subseteq} X \quad \text{für alle } z \in (\inf X, \sup X)$$

und also

$$(\inf X, \sup X) \subseteq X.$$

Es folgt, dass $X$ ein Intervall im Sinne von (iii) ist; ob $X$ offen, halboffen oder abgeschlossen ist, hängt dabei davon ab, ob das Infimum bzw. das Supremum von $X$ in $X$ enthalten sind. □

**Korollar 2.19** (allgemeiner Zwischenwertsatz)**.** *Seien $X$ ein zusammenhängender topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, $x, y \in X$ mit $f(x) \le f(y)$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \le c \le f(y)$. Dann existiert ein $z \in X$ mit $f(z) = c$.*

*Beweis.* Da $X$ zusammenhängend ist, gilt dies wegen der Stetigkeit von $f$ und Teil (a) von Proposition 2.5 auch für $f(X) \subseteq \mathbb{R}$. Nach Satz 2.18 ist daher $f(X)$ ein Intervall; insbesondere gilt $c \in [f(x), f(y)] \subseteq f(X)$. □

In Satz 2.16 haben wir gesehen, dass jeder wegzusammenhängende topologische Raum auch zusammenhängend ist, und in Beispiel 2.17, dass umgekehrt nicht jeder zusammenhängende topologische Raum auch wegzusammenhängend ist. In Satz 2.18 haben wir allerdings eingesehen, dass im speziellen Fall nichtleerer Teilräume der reellen Zahlen eine Äquivalenz zwischen den beiden Begriffen besteht. In Satz 2.23 werden wir zeigen, dass dies an einer besonderen Eigenschaft von $\mathbb{R}$ liegt. Zuvor wollen wir diese aber erst einführen.

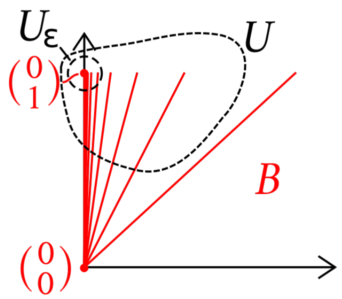
**Definition 2.20.** *Ein topologischer Raum $X$ heißt* ***lokal (weg-)zusammenhängend****, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus offenen, (weg-)zusammenhängenden Umgebungen von $x$ gibt.*

**Bemerkung 2.21.** *Nach Definition 2.20 und Satz 2.16 ist offenbar jeder lokal wegzusammenhängende topologische Raum lokal zusammenhängend.*

**Beispiel 2.22.** *Nicht jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist lokal wegzusammenhängend und nicht jeder zusammenhängende topologische Raum ist lokal zusammenhängend,* *denn: Das „Buch“*

$$B := \underbrace{\left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\right\}}_{=:S_0} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left\{\begin{pmatrix}\frac{y}{2^n}\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\right\}}_{=:S_n}$$

*ist als Vereinigung von (wegzusammenhängenden) Strecken, die den Punkt $\binom{0}{0}$ gemeinsam haben, offensichtlich wegzusammenhängend und nach Satz 2.16 also auch zusammenhängend. Zum Beweis der Behauptung genügt es nun zu zeigen, dass $B$ nicht lokal zusammenhängend ist, da nach Bemerkung 2.21 dann folgt, dass $B$ auch nicht lokal wegzusammenhängend ist. Hierfür genügt es wiederum zu zeigen, dass es eine Umgebung $U$ des Punktes $\binom{0}{1} \in B$ gibt, in der keine zusammenhängende Umgebung von $\binom{0}{1}$ enthalten ist. Die Topologie auf $B$ ist die von $\mathbb{R}^2$ induzierte Teilraumtopologie, so dass jedes $U \in \mathcal{U}(\binom{0}{1})$ eine Menge der Form $U_\varepsilon := U_\varepsilon(\binom{0}{1}) \cap B$ mit einem $\varepsilon > 0$ enthält, die unendlich viele der Strecken $S_n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ trifft. Es folgt, dass jedes $U \in \mathcal{U}(\binom{0}{1})$ unendlich viele der Strecken $S_n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ trifft.*




*Wir betrachten nun eine fest gewählte Menge $U \in \mathcal{U}(\binom{0}{1})$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, jeder Punkt von $U$ habe einen Mindestabstand $d \in (0, \frac{1}{2})$ von $\binom{0}{0}$ und schneiden $U$ sonst mit $B \setminus \overline{U_d(\binom{0}{0})}$. Es gilt dann*

$$U = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (U \cap S_n) \quad \text{mit } U \cap S_n \ne \emptyset \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}_0.$$

*Ist $m$ das Minimum der $n \in \mathbb{N}$ mit $U \cap S_n \ne \emptyset$, so lässt sich in $\mathbb{R}^2$ elementargeometrisch der Abstand zwischen $U \cap S_m$ und $(U \cap S_0) \sqcup \bigsqcup_{n=m+1}^{\infty}(U \cap S_n)$ nach unten abschätzen.*[4] *Wählen wir eine feste untere Schranke für diesen Abstand, betrachten für beide Mengen die offenen Umgebungen, die aus denjenigen Punkten bestehen, deren Abstand zu einem beliebigen Punkt der jeweiligen Menge höchstens ein Drittel der gewählten unteren Schranke beträgt, und schneiden diese offenen Umgebungen mit $B$, so erhalten wir eine disjunkte Zerlegung von $U$ in nichtleere offene Teilmengen. Nach Proposition 2.2 ist $U$ also nicht zusammenhängend.* #

*Andererseits ist auch nicht jeder lokal wegzusammenhängende topologische Raum wegzusammenhängend und nicht jeder lokal zusammenhängende topologische Raum zusammenhängend,*

[4]Eine mögliche untere Schranke ist beispielsweise $\sqrt{2} \cdot d \cdot \sqrt{1 - \cos(\arctan 2^{m+1} - \arctan 2^m)}$.

*denn:* *Nach Konstruktion der metrischen Topologie 1.7 ist jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig lokal wegzusammenhängend und nach Bemerkung 2.21 also auch lokal zusammenhängend. Die Behauptung folgt, da es offene Teilmengen in $\mathbb{R}^n$ gibt, die nicht zusammenhängend und somit nach Satz 2.16 auch nicht wegzusammenhängend sind, so etwa geeignete disjunkte Vereinigungen zweier offener $n$-Bälle.* #

**Satz 2.23.** *Sei $X$ ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist zusammenhängend.*

(ii) *$X$ ist wegzusammenhängend.*

*Beweis.* Da wir in Satz 2.16 bereits gezeigt haben, dass wegzusammenhängende topologische Räume stets zusammenhängend sind, genügt es zum Beweis des Satzes zu zeigen, dass zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende topologische Räume wegzusammenhängend sind.

Sei also $X$ ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Ohne Einschränkung gelte $X \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $u \in X$ und wir setzen

$$U := \{x \in X \mid \text{ es gibt einen Weg von } u \text{ nach } x\} \neq \emptyset.$$

Dann ist $U$ offen,

*denn:* Da $X$ nach Voraussetzung lokal wegzusammenhängend ist, existiert zu jedem $x \in U$ eine offene, wegzusammenhängende Umgebung $V_x$ von $x$ in $X$. Für ein beliebiges $y \in V_x$ gibt es daher einen Weg von $x$ nach $y$ in $X$. Da es nach Konstruktion von $U$ aber auch einen Weg von $u$ nach $x$ in $U \subseteq X$ gibt, existiert in Verkettung dieser Wege einen Weg von $u$ nach $y$ in $X$. Wieder nach Konstruktion von $U$ folgt $y \in U$ und somit $V_x \subseteq U$. Es folgt $U \in \mathcal{U}(x)$ und also $x \in \mathring{U}$ nach Teil (a) von Proposition 1.14. Da $x \in U$ beliebig gewählt war, erhalten wir $U = \mathring{U}$ und somit die Offenheit von $U$ nach Bemerkung 1.12. #

$U$ ist aber auch abgeschlossen,

*denn:* Da $X$ nach Voraussetzung lokal wegzusammenhängend ist, existiert zu jedem $x \in X \setminus U$ eine offene, wegzusammenhängende Umgebung $V_x$ von $x$ in $X$. Läge ein beliebiges $y \in V_x$ in $U$, so führte nach Konstruktion von $U$ ein Weg von $u$ nach $y$ in $X$ und in Verkettung auch ein Weg von $u$ nach $x$ in $X$, was im Widerspruch zu unserer Annahme $x \in U$ implizierte. Es folgt $y \in W \setminus U$ für alle $y \in V_x$, also $V_x \subseteq X \setminus U$. Mit der analogen Argumentation wie im Beweis der Offenheit von $U$ folgt die Offenheit von $X \setminus U$ und somit die Abgeschlossenheit von $U$. #

Insgesamt ist $U$ eine nichtleere, abgeschloffene Teilmenge des zusammenhängenden topologischen Raums $X$. Nach Proposition 2.2 gilt daher $U = X$ und $X$ ist wegzusammenhängend nach Konstruktion von $U$. □

**Definition 2.24.** *In einem topologischen Raum $X$ heißt zu einem beliebigen Punkt $x \in X$ die Menge*

$$K(x) := \bigcup_{\substack{x \in U \subseteq X \\ \text{zusammenhängend}}} U$$

*die **Zusammenhangskomponente** von $x$.*

**Proposition 2.25.** *Sei $X$ ein nichtleerer topologischer Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Für alle $x \in X$ ist $K(x)$ zusammenhängend und abgeschlossen.*

(b) *$X$ ist die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten, es gilt also*

$$X = \bigcup_{x \in X} K(x) \quad \textit{und} \quad \textit{für alle } x, y \in X \textit{ gilt entweder } K(x) = K(y) \textit{ oder } K(x) \cap K(y) = \emptyset.$$

(c) *Hat $X$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, so ist $X$ der Summenraum derselben.*

(d) *Ist $U \subseteq X$ abgeschloffen mit $x \in U$, so gilt $K(x) \subseteq U$. Ist $U$ zusätzlich zusammenhängend, so gilt $K(x) = U$.*

*Beweis.* Wegen

$$K(x) \overset{2.24}{=} \bigcup_{\substack{x \in U \subseteq X \\ \text{zusammenhängend}}} U \quad \text{und} \quad \bigcap_{\substack{x \in U \subseteq X \\ \text{zusammenhängend}}} U \supseteq \{x\} \neq \emptyset$$

folgt mit Teil (a) von Proposition 2.10 der Zusammenhang von $K(x)$. Nach Proposition 2.8 ist dann auch $\overline{K(x)}$ zusammenhängend und wegen $x \in \overline{K(x)}$ folgt mit Definition 2.24 sofort

$$\overline{K(x)} \subseteq K(x) \subseteq \overline{K(x)}$$

und somit die Abgeschlossenheit von $K(x)$. Insgesamt haben wir so Behauptung (a) gezeigt.

Zum Nachweis von Behauptung (b) stellen wir zunächst fest, dass $X$ trivialerweise die Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten ist und wir nur noch die Disjunktheit zeigen müssen. Dafür betrachten wir $x, y \in X$ mit $K(x) \cap K(y) \neq \emptyset$. Da $K(x)$ und $K(y)$ nach Aussage (a) zusammenhängen, ist dann nach Teil (a) von Proposition 2.10 auch $K(x) \cup K(y)$ zusammenhängend. Mit $x \in K(x) \cup K(y)$ und Definition 2.24 folgt $K(x) \cup K(y) \subseteq K(x)$ und insbesondere $K(y) \subseteq K(x)$. Analog zeigt man $K(x) \subseteq K(y)$ und also $K(x) = K(y)$ und erhält insgesamt Behauptung (b).

Hat $X$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten $K_1, \ldots, K_n$ mit einem $n \in \mathbb{N}$, so ist nach Aussage (a) für ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ die endliche Vereinigung

$$\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K_j \quad \overset{\bullet}{\subseteq} X$$

abgeschlossen und also

$$K_i \overset{\text{(b)}}{=} X \setminus \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K_j \quad \overset{\circ}{\subseteq} X$$

offen. Behauptung (c) folgt nun mit Proposition 1.83.

Abschließend zeigen wir nun Behauptung (d) und betrachten dafür eine abgeschloffene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $x \in U$. Gälte $K(x) \nsubseteq U$, so wäre

$$K(x) = \big(K(x) \cap U\big) \sqcup \big(K(x) \cap (X \setminus U)\big)$$

eine disjunkte Zerlegung von $K(x)$ in nichtleere, offene Teilräume von $K(x)$, was im Widerspruch zum in Aussage (a) gezeigten Zusammenhang von $K(x)$ stünde und also nicht sein kann. Folglich gilt $K(x) \subseteq U$. Ist $U$ zusätzlich zusammenhängend, so gilt $K(x) \subseteq U \subseteq K(x)$ und also $K(x) = U$ nach Definition 2.24. Insgesamt haben wir Behauptung (d) gezeigt. □

**Beispiel 2.26.** *Im Teilraum*

$$X := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \quad \subseteq \mathbb{R}$$

*ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{\frac{1}{n}\}$ offensichtlich zusammenhängend und abgeschloffen und somit nach Teil (d) von Proposition 2.25 eine Zusammenhangskomponente von $X$. Da $X$ nach Teil (b) von Proposition 2.25 die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten ist, folgt, dass auch $\{0\}$ eine Zusammenhangskomponente von $X$ ist. Die Zusammenhangskomponente $\{0\}$ ist nicht offen in $X$,*

*denn: Sonst gäbe es eine offene Umgebung $U$ von $0$ in $\mathbb{R}$ mit $U \cap X = \{0\}$, was nicht sein kann, da $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und es also für jedes $\varepsilon > 0$ ein Element $0 \neq \frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0) \cap X$ gibt.* #

*Insgesamt haben wir eingesehen, dass $X$ abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, von denen genau eine nicht offen ist.*

In der folgenden Proposition 2.27 zeigen wir, dass in lokal zusammenhängenden topologischen Räumen stets alle Zusammenhangskomponenten offen sind:

**Proposition 2.27.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist lokal zusammenhängend.*

(ii) *Für alle $\emptyset \neq U \Subset X$ sind die Zusammenhangskomponenten offen.*

*Ist dies der Fall, so sind insbesondere die Zusammenhangskomponenten von $X$ offen und $X$ ist der Summenraum seiner Zusammenhangskomponenten.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei $X \neq \emptyset$.

Nun gelte zunächst (i), sei also $X$ lokal zusammenhängend. Weiter sei $K$ eine Zusammenhangskomponente einer Menge $\emptyset \neq U \Subset X$ und sei $x \in K$. Nach (i) existiert dann eine offene, zusammenhängende Umgebung $V \subseteq U$ von $x$, insbesondere gilt $x \in V \subseteq K \subseteq U$. Wegen $U \Subset X$ ist $V$ auch in $U$ offen, so dass $K$ eine Umgebung von $x$ in $U$ ist und somit $x \in \mathring{K}$ nach nach Teil (a) von Proposition 1.14. Da $x \in K$ beliebig gewählt war, erhalten wir $K = \mathring{K}$ und somit die Offenheit von $K$ in $U$ nach Bemerkung 1.12. Hiermit ist (ii) gezeigt.

Nun gelte umgekehrt (ii), sei $x \in X$ beliebig und $U$ eine offene Umgebung von $x$. Nach (ii) ist die Zusammenhangskomponente von $x$ in $U$ offen in $U$ und wegen $U \Subset X$ auch offen in $X$. Es folgt, dass $x$ eine Umgebungsbasis aus offenen, zusammenhängenden Umgebungen besitzt. Da $x \in X$ beliebig gewählt war, folgt (i). □

Abschließend für diesen Abschnitt wollen wir uns nun noch ein Werkzeug beschaffen, mit dem wir zeigen können, dass bestimmte topologische Räume nicht zueinander homöomorph sind.

**Proposition 2.28.** *Seien $X, X'$ topologische Räume mit $X \neq \emptyset$ und $f : X \to X'$ ein Homöomorphismus. Dann induziert $f$ eine Bijektion*

$$\tilde{f} : \begin{cases} \{\textit{Zusammenhangskomponenten von } X\} & \to \{\textit{Zusammenhangskomponenten von } X'\}, \\ K & \mapsto f(K). \end{cases}$$

*Beweis.* Nach Teil (a) von Proposition 2.25 ist jede beliebige Zusammenhangskomponente $K$ von $X$ zusammenhängend. Nach Teil (a) von Proposition 2.5 ist daher auch das Bild $f(K)$ von $K$ unter der stetigen Abbildung $f$ zusammenhängend. Für ein beliebiges $x' \in f(K)$ ist folglich ganz $f(K)$ in der Zusammenhangskomponente $K'(x')$ von $x'$ in $X'$ enthalten. Da $f$ bijektiv ist, erhalten wir daraus

$$K = f^{-1}\big(f(K)\big) \subseteq f^{-1}\big(K'(x')\big)$$

und da $f^{-1}$ stetig ist, ist $f^{-1}\big(K'(x')\big)$ nach Teil (a) von Proposition 2.5 wieder zusammenhängend. Da $K$ als Zusammenhangskomponente von $X$ gewählt war, folgt $K = f^{-1}\big(K'(x')\big)$ und also $f(K) = K'(x')$. Da $X$ und $X'$ nach Teil (b) von Proposition 2.25 jeweils die disjunkte Vereinigung ihrer Zusammenhangskomponenten sind und $f$ bijektiv ist, folgt die Bijektivität auch von $\tilde{f}$. $\square$

**Bemerkung 2.29.** *Nach Proposition 2.28 ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eine topologische Invariante. Offensichtlich eignet sie sich jedoch nicht zur Unterscheidung zusammenhängender Räume. Ein hierbei hilfreicher Trick ist, geeignete Teilmengen zu entfernen, denn ist $f : X \to X'$ ein Homöomorphismus, so für jede Teilmenge $U \subseteq X$ auch*

$$f|_{X \setminus U}^{X' \setminus f(U)} : X \setminus U \to X' \setminus f(U).$$

**Beispiel 2.30.** (a) *Für $n \geq 2$ beliebig gilt $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}$,*

*denn: Einerseits ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen nach Proposition 2.2 nicht zusammenhängend, hat also mehr als eine Zusammenhangskomponente. Andererseits ist $\mathbb{R}^n \setminus \{x'\}$ für ein beliebiges $x' \in \mathbb{R}^n$ als offensichtlich wegzusammenhängende Menge nach Satz 2.16 auch zusammenhängend und hat also genau eine Zusammenhangskomponente. Gäbe es einen Homöomorphismus $f$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$, so nach Bemerkung 2.29 auch einen von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$, was wegen der unterschiedlichen Anzahl von Zusammenhangskomponenten nach Proposition 2.28 aber nicht sein kann.* #

(b) $[0,1) \not\cong (0,1)$,

*denn: Einerseits ist $[0,1) \setminus \{0\} = (0,1)$ nach Satz 2.18 zusammenhängend, hat also genau eine Zusammenhangskomponente. Andererseits ist $(0,1) \setminus \{x'\}$ für ein beliebiges $x' \in (0,1)$ als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen nach Proposition 2.2 nicht zusammenhängend, hat also mehr als eine Zusammenhangskomponente. Gäbe es einen Homöomorphismus $f$ von $[0,1)$ nach $(0,1)$, so nach Bemerkung 2.29 auch einen von $[0,1) \setminus \{0\}$ nach $(0,1) \setminus \{f(0)\}$, was wegen der unterschiedlichen Anzahl von Zusammenhangskomponenten nach Proposition 2.28 aber nicht sein kann.* #

(c) *Sei für alle $n \geq 2$ mit $\mathrm{St}_n \subseteq \mathbb{R}^2$ die Vereinigung von $n$ paarweise verschiedenen Geraden durch einen gemeinsamen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet. Dann gilt $\mathrm{St}_n \not\cong \mathrm{St}_m$ für je zwei $n, m \geq 2$ mit $n \neq m$,*

*denn: Einerseits hat $\mathrm{St}_n \setminus \{x\} = (0,1)$ offensichtlich genau $2n$ Zusammenhangskomponenten. Andererseits hat $\mathrm{St}_m \setminus \{x'\}$ für ein beliebiges $x' \in \mathrm{St}_m$ entweder genau $2m \neq 2n$ Zusammenhangskomponenten – nämlich dann, wenn $x'$ der Punkt ist, in dem sich die $m$ paarweise verschiedenen Geraden von $\mathrm{St}_m$ treffen – oder genau $2 \neq 2n$ Zusammenhangskomponenten – nämlich immer sonst. Gäbe es einen Homöomorphismus $f$ von $\mathrm{St}_n$ nach $\mathrm{St}_m$, so nach Bemerkung 2.29 auch einen von $\mathrm{St}_n \setminus \{x\}$ nach $\mathrm{St}_m \setminus \{f(x)\}$, was wegen der unterschiedlichen Anzahl von Zusammenhangskomponenten nach Proposition 2.28 aber nicht sein kann.* #

## 2.2 Konvergenz

Ein wichtiger Begriff in der Analysis ist die Konvergenz von Folgen. Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in einem metrischen Raum $(X, d)$ gilt bekanntlich:

$$\begin{aligned} & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{\textit{ konvergiert}} \text{ gegen } x \in X, \text{ in Zeichen: } \lim_{n\to\infty} x_n = x \\ :\Longleftrightarrow \quad & \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ mit } d(x_n, x) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N \qquad (2.2) \\ \Longleftrightarrow \quad & \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n \in U_\varepsilon(x) \text{ für alle } n \geq N. \end{aligned}$$

In der letzten Formulierung lässt sich dies auf beliebige topologische Räume übertragen.

**Definition 2.31.** *Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in einem topologischen Raum $X$ sagen wir:*

$$\begin{aligned} & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{\textit{ konvergiert}} \textit{ gegen } x \in X, \textit{ in Zeichen: } \lim_{n\to\infty} x_n = x \\ :\Longleftrightarrow \quad & \textit{für alle } U \in \mathcal{U}(x) \textit{ gibt es ein } N = N(U) \in \mathbb{N} \textit{ mit } x_n \in U \textit{ für alle } n \geq N. \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.32.** *In allgemeinen topologischen Räumen ist der Konvergenzbegriff weniger aussagekräftig als in metrischen Räumen. So kann eine Folge auch gegen mehrere Punkte konvergieren,*

*denn: Für jeden Punkt $x$ in einem nichtleeren indiskreten Raum $X_{\mathrm{indisk}}$ gilt $\mathcal{U}(x) = \{X_{\mathrm{indisk}}\}$, so dass in $X_{\mathrm{indisk}}$ jede Folge gegen jeden Punkt konvergiert.* #

Analog zum Vorgehen in der Analysis definieren wir:

**Definition 2.33.** *Seien $X, X'$ topologische Räume, $f : X \to X'$ eine Abbildung und $x \in X$ ein Punkt. Dann sagen wir:*

$$\begin{aligned} f \textit{ ist } \textbf{\textit{folgenstetig}} \textit{ in } x \quad :\Longleftrightarrow \quad & \textit{für jede gegen } x \textit{ konvergente Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \\ & \textit{konvergiert } (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X' \textit{ gegen } f(x). \end{aligned}$$

In der Analysis zeigt man an dieser Stelle das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Abbildung zwischen metrischen Räumen in einem Punkt. In der Sprache von Bemerkung 1.26 lautet dieses: Für metrische Räume $(X, d), (X', d')$, eine Abbildung $f : X \to X'$ und einen Punkt $x \in X$ gilt:

$$f \text{ ist } \varepsilon\text{-}\delta\text{-stetig in } x \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist folgenstetig in } x.$$

In allgemeinen topologischen Räumen gilt das Folgenkriterium nicht:

**Proposition 2.34.** *Seien $X, X'$ topologische Räume, $f : X \to X'$ eine Abbildung und $x \in X$ ein Punkt. Wir betrachten die beiden Aussagen:*

(i) *$f$ ist stetig in $x$.*

(ii) *$f$ ist folgenstetig in $x$.*

*Dann gilt: Aussage (i) impliziert Aussage (ii), aber nicht umgekehrt.*

*Beweis.* Gelte zunächst Aussage (i), sei also $f$ stetig in $x$, so dass nach Definition 1.24 für jedes $U' \in \mathcal{U}(f(x))$ zwangsläufig $f^{-1}(U') \in \mathcal{U}(x)$ gilt. Nun betrachten wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Nach Definition 2.31 gibt es dann für alle $U' \in \mathcal{U}(f(x))$ ein $N = N(f^{-1}(U')) \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in f^{-1}(U')$ und also $f(x_n) \in U'$ für alle $n \geq N$. Wieder nach Definition 2.31 folgt somit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, also Aussage (ii).

Um zu zeigen, dass Aussage (i) nicht aus Aussage (ii) folgt, genügt es offenbar, topologische Räume $X, X'$, einen Punkt $x \in X$ und eine in $x$ folgenstetige aber nicht stetige Abbildung $f : X \to X'$ anzugeben. Die Menge der Funktionen $[0, 1] \to [-1, 1]$ lässt sich als Produktraum $\prod_{i\in[0,1]}[-1, 1]$ auffassen. Wir wählen als topologischen Raum $X$ den Unterraum der stetigen Funktionen darin.[5] Wir wollen die Konvergenz von Folgen in $X$ verstehen. Sei dafür allgemein $\big((x_{n,i})_{i\in I}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Produktraum $\prod_{i\in I} X_i$ und $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ ein Punkt. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n,i})_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n,i} \to x_i \text{ für alle } i \in I,$$

*denn:* Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (x_{n,i})_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} \\
\overset{2.31}{\Longleftrightarrow}\ & \text{für alle } U \in \mathcal{U}\big((x_i)_{i\in I}\big) \text{ gibt es ein } N = N(U) \in \mathbb{N} \text{ mit } (x_{n,i})_{i\in I} \in U \text{ für alle } n \geq N \\
\overset{1.72}{\Longleftrightarrow}\ & \text{für alle } E \in \mathcal{E}\big((x_i)_{i\in I}\big) \text{ gibt es ein } N = N(E) \in \mathbb{N} \text{ mit } (x_{n,i})_{i\in I} \in E \text{ für alle } n \geq N \\
\overset{1.70}{\Longleftrightarrow}\ & \forall j \in I,\ x_j \in U_j \Subset X_j\ \exists N = N(U_j) \in \mathbb{N} : (x_{n,i})_{i\in I} \in \pi_j^{-1}(U_j) \text{ für alle } n \geq N \\
\Longleftrightarrow\ & \forall j \in I,\ U_j \in \mathcal{U}(x_j)\ \exists N = N(U_j) \in \mathbb{N} : x_{n,j} \in U_j \text{ für alle } n \geq N \\
\overset{2.31}{\Longleftrightarrow}\ & \lim_{n\to\infty} x_{n,j} \to x_j \text{ für alle } j \in I.
\end{aligned}$$

#

[5] Als Menge stimmt $X$ dann mit der Einheitskugel im Banachraum $\mathcal{C}([0, 1])$ überein – die Topologie ist jedoch eine völlig andere.

Die Konvergenz von Folgen in unserem Raum von Funktionen $X$ ist also nichts anderes als die gewöhnliche punktweise Konvergenz; genauer gilt für eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und einen Punkt $\varphi \in X$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(i) = \varphi(i) \text{ für alle } i \in [0,1].$$

Als topologischen Raum $X'$ wählen wir nun den Raum $L^2([0,1])$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf $[0,1]$. Die Topologie auf $X'$ ist dann die durch die $L^2$-Norm $\|\cdot\|_{L^2}$ induzierte metrische Topologie und die Konvergenz von Folgen in $X'$ wie in (2.2) definiert. Da stetige Funktionen auf Kompakta stets quadratintegrierbar sind, lässt sich $X$ kanonisch in $X'$ einbetten. Die zugehörige Einbettungsabbildung $\iota : X \to X'$ ist folgenstetig in jedem $\varphi \in X$,

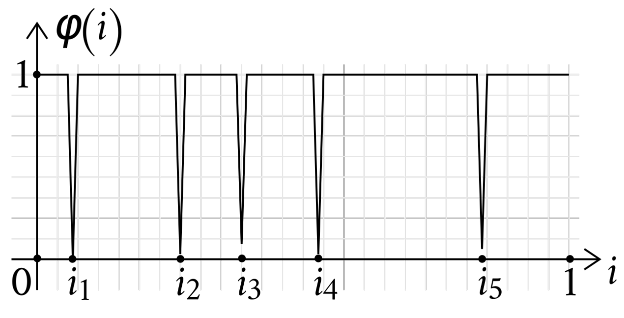
*denn:* Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise gegen $\varphi \in X$ konvergente Folge von Funktionen in $X$. Das $\iota$-Bild der Folge in $X'$ stimmt identisch mit der ursprünglichen Folge überein. Da die Funktionen $\varphi_n$ für alle $n$ betragsmäßig durch die konstante Funktion $\varphi_1 \equiv 1$ beschränkt sind, können wir den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2} = 0$$

und insbesondere die Konvergenz gegen $\varphi$ der Bildfolge in $X'$. Die Behauptung folgt nun mit Definition 2.33. #

Andererseits ist $\iota$ in der in $X$ enthaltenen konstanten Funktion $\varphi_0 \equiv 0$ nicht stetig,

*denn:* Eine Umgebungsbasis von $\varphi_0$ in $X$ ist nach Korollar 1.72 durch die Elementarmengen in $\mathcal{E}(\varphi_0)$ gegeben, eine Umgebungsbasis von $\varphi_0$ im metrischen Raum $X'$ offensichtlich durch $\{U_\varepsilon(\varphi_0) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$. Wäre $\iota$ stetig in $\varphi_0$, so gäbe es daher nach Proposition 1.47 für jedes $\varepsilon > 0$ ein $E \in \mathcal{E}(\varphi_0)$ mit $E \subseteq U_\varepsilon(\varphi_0)$. Andererseits gibt es nach Definition 1.70 für jedes fest gewählte $E \in \mathcal{E}(\varphi_0)$ eine endliche Teilmenge $[0,1]_{\text{fin}} = \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq [0,1]$, außerhalb derer die Funktionswerte von $\varphi \in E$ frei – und insbesondere beliebig nahe an der Eins – wählbar sind.




Für jedes noch so kleine $\delta > 0$ gibt es daher in $E$ Funktionen $\varphi$ mit

$$\int_0^1 \varphi(i)^2 \,\mathrm{d}i > 1 - \delta.$$

Somit ist für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ kein $E \in \mathcal{E}(\varphi_0)$ in $U_\varepsilon(\varphi_0)$ enthalten, was im Widerspruch zu unserer zuvor gezeigten Aussage steht. Es folgt, dass $\iota$ in $\varphi_0$ nicht stetig sein kann. #

Insgesamt haben wir ein gültiges Gegenbeispiel konstruiert und somit gezeigt, dass Aussage (i) nicht aus Aussage (ii) folgt. □

In Satz 2.79 werden wir nach dem Studium geeigneter Abzählbarkeitseigenschaften Bedingungen angeben, unter welchen das Folgenkriterium gilt. Indem wir genauso vorgehen wie im Kontext der $\varepsilon$-$\delta$-Stetigkeit und den Begriff der Folgenstetigkeit in die Sprache der Filter übersetzen, wird es uns aber zunächst in Proposition 2.39 gelingen, in allgemeinen topologischen Räumen ein Analogon des Folgenkriteriums anzugeben. In Anlehnung an Definition 1.32 definieren wir dafür zunächst:

**Definition 2.35.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Für zwei Filter $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ auf $X$ sagen wir:*

$$\mathcal{F} \text{ ist } \textbf{\textit{feiner}} \text{ als } \mathcal{F}' \text{ (bzw. } \mathcal{F}' \text{ ist } \textbf{\textit{gröber}} \text{ als } \mathcal{F}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}.$$

Nun können wir einen Konvergenzbegriff einführen.

**Definition 2.36.** *Seien $X$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$ und $x \in X$ ein Punkt. Dann sagen wir:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \textbf{\textit{ konvergiert}} \text{ gegen } x \text{ (in Zeichen: } \mathcal{F} \to x) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ ist feiner als der Umgebungsfilter } \mathcal{U}(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}. \end{aligned}$$

*Gibt es für einen Filter $\mathcal{F}$ auf $X$ ein $x \in X$ mit $\mathcal{F} \to x$, so nennen wir $\mathcal{F}$ **konvergent**.*

**Beispiel 2.37.** (a) *Seien $X$ ein beliebiger topologischer Raum und $x \in X$ ein beliebiger Punkt. Dann konvergiert der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ nach Definition 2.36 trivialerweise gegen $x$.*

(b) *Sei $X_{\text{indisk}}$ der indiskrete Raum auf einer beliebigen Menge $X$. Dann ist für einen beliebigen Punkt $x \in X$ der Umgebungsfilter durch $\mathcal{U}(x) = \{X\}$ gegeben. Nach Teil (a) konvergiert der Filter $\{X\}$ in diesem Fall also entgegen unserer Anschauung gegen jedes beliebige $x \in X$. In Proposition 2.92 werden wir zeigen, dass unter zusätzlicher Annahme geeigneter Trennungseigenschaften in einem topologischen Raum jeder konvergente Filter gegen genau einen Punkt konvergiert.*

(c) *Sei $X_{\text{indisk}}$ der indiskrete Raum auf einer beliebigen Menge $X$, $\mathcal{F}$ ein beliebiger Filter auf $X$ und $x \in X_{\text{indisk}}$ ein beliebiger Punkt. Dann konvergiert $\mathcal{F}$ gegen $x$,*

*denn: Nach Teil (b) gilt $\mathcal{U}(x) = \{X\}$, so dass jeder Filter $\mathcal{F}$ auf $X_{\text{indisk}}$ feiner als $\mathcal{U}(x)$ ist. Die Behauptung folgt nun mit Definition 2.36.* #

**Proposition 2.38.** *Seien $X, X'$ Mengen, $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$ und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann ist*

$$f_*\mathcal{F} := \{U' \subseteq X' \mid \text{es gibt ein } F \in \mathcal{F} \text{ mit } f(F) \subseteq U\}$$

*ein Filter auf $X'$ mit Basis $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ und heißt der **Bildfilter** von $\mathcal{F}$ unter $f$.*

*Beweis.* Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{B} := \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis ist. Tatsächlich erfüllt $\mathcal{B}$ Axiom $(FB_1)$,

*denn:* Wegen $f(X) \in \mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B} \neq \emptyset$ und wegen $\emptyset \notin \mathcal{F}$ gilt $\emptyset \notin \mathcal{B}$. #

Zudem erfüllt $\mathcal{B}$ Axiom $(FB_2)$,

*denn:* Nach Definition von $\mathcal{B}$ gibt es für beliebige $B, B' \in \mathcal{B}$ Filterelemente $F, F' \in \mathcal{F}$ mit $B = f(F)$ und $B' = f(F')$. Nach $(F_3)$ gilt $F \cap F' \in \mathcal{F}$ und somit einerseits $f(F \cap F') \in \mathcal{B}$ nach Definition von $\mathcal{B}$. Andererseits gilt

$$f(F \cap F') \subseteq f(F) \cap f(F') = B \cap B'$$

und zusammen somit die Behauptung. #

Insgesamt haben wir die Proposition nachgewiesen. □

**Proposition 2.39.** *Seien $X, X'$ topologische Räume, $x \in X$ und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$f$ ist stetig in $x$.*

(ii) *Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf $X$ mit $\mathcal{F} \to x$ gilt $f_*\mathcal{F} \to f(x)$.*

(iii) *$f_*\mathcal{U}(x) \to f(x)$.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i), sei also $f$ stetig in $x$. Sei nun weiter $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$ mit $\mathcal{F} \to x$, also mit $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ nach Definition 2.36. Dann gilt auch

$$\mathcal{U}(f(x)) \subseteq f_*\mathcal{F},$$

*denn:* Sei $U \in \mathcal{U}(f(x))$ beliebig. Wegen der Stetigkeit von $f$ in $x$ gilt dann $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Da trivialerweise auch $f\big(f^{-1}(U)\big) \subseteq U$ gilt, folgt $U \in f_*\mathcal{F}$ nach Definition des Bildfilters 2.38 und insgesamt die Behauptung. #

Nach Definition 2.36 folgt $f_*\mathcal{F} \to f(x)$ und somit Aussage (ii).

Dass aus (ii) Aussage (iii) folgt, ist trivial.

Schließlich gelte (iii). Dann folgt

$$U \in \mathcal{U}\big(f(x)\big) \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x),$$

*denn:* Wegen $f_*\mathcal{U}(x) \to f(x)$ und Definition 2.36 gilt $\mathcal{U}\big(f(x)\big) \subseteq f_*\mathcal{U}(x)$. Jedes $U \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$ liegt also auch in $f_*\mathcal{U}(x)$. Nach Definition des Bildfilters 2.38 gibt es daher ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(V) \subseteq U$. Nach Urbildnehmen unter $f$ erhalten wir $V \subseteq f^{-1}(U)$ mit $V \in \mathcal{U}(x)$ und also $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$ nach Axiom $(F_2)$. #

Nach Definition 1.24 ist das die Stetigkeit von $f$ in $x$ und also Aussage (i). □

**Proposition 2.40.** *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ der Produktraum bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$. Weiter sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$ und $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ ein Punkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathcal{F} \to x$.

(ii) $(\pi_i)_*\mathcal{F} \to x_i$ *für alle* $i \in I$.

*Beweis.* Gelte zunächst (i), also $\mathcal{F} \to x$. Nach Konstruktion der Produktopologie sind die Projektionen $\pi_i$ für alle $i \in I$ stetig. Nach Proposition 2.39 gilt daher $(\pi_i)_*\mathcal{F} \to \pi_i(x) = x_i$ für alle $i \in I$, also (ii).

Gelte umgekehrt (ii), also $(\pi_i)_*\mathcal{F} \to x_i$ für alle $i \in I$. Es gilt $\mathcal{F} \to x$ zu zeigen, was nach Definition 2.36 äquivalent zu $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ ist. Nach Korollar 1.72 ist die Menge $\mathcal{E}(x)$ der Elementarmengen in $X$, die $x$ enthalten, eine Umgebungsbasis von $x$, so dass es genügt $\mathcal{E}(x) \subseteq \mathcal{F}$ zu zeigen. Ein beliebiges $E \in \mathcal{E}(x)$ ist von der Form

$$E = \prod_{i \in I} U_i \quad \text{mit } U_i \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I,$$

so dass es eine endliche Menge $I_{\text{fin}} \subseteq I$ gibt mit $U_i = X_i$ für alle $i \in I \setminus I_{\text{fin}}$. Wegen $x \in E$ und $U_i \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X_i$ ist $U_i$ für alle $i \in I$ eine Umgebung von $x_i$. Nach (ii) und Definition 2.36 gilt also $U_i \in (\pi_i)_*\mathcal{F}$ für alle $i \in I$ und nach Proposition 2.38 gibt es ein $F_i \in \mathcal{F}$ mit $\pi_i(F_i) \subseteq U_i$ und also auch $F_i \subseteq \pi_i^{-1}(U_i)$ für alle $i \in I$. Es folgt

$$E = \bigcap_{i \in I_{\text{fin}}} \pi_i^{-1}(U_i) \supseteq \bigcap_{i \in I_{\text{fin}}} F_i \quad \ni \mathcal{F}$$

und somit $E \in \mathcal{F}$ nach $(F_2)$. □

In der Analysis zeigt man das folgende Kriterium für Berührpunkte: Für einen metrischen Raum $(X, d)$, eine Teilmenge $X' \subseteq X$ und einen Punkt $x \in X$ gilt

$$x \in \overline{X'} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine Folge } (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } X' \text{ mit } x'_n \to x.$$

In der folgenden Proposition 2.41 übersetzen wir diese Aussage in die Sprache der Filter und verallgemeinern sie so auf allgemeine topologische Räume:

**Proposition 2.41.** *Seien* $X$ *ein topologischer Raum,* $X' \subseteq X$ *eine Teilmenge und* $x \in X$ *ein Punkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $x \in \overline{X'}$.

(ii) *Es gibt einen Filter auf* $X$*, der eine Basis in* $X'$ *besitzt und gegen* $x$ *konvergiert.*

*Beweis.* Für den Beweis können wir offensichtlich ohne Einschränkung $X' \neq \emptyset$ annehmen.

Gelte zunächst (i), sei also $x$ ein Berührpunkt von $X'$. Dann ist

$$\mathcal{B} := \{X' \cap U \mid U \in \mathcal{U}(x)\} \subseteq \mathcal{P}(X')$$

eine Filterbasis,

*denn:* Nach Teil (b) von Proposition 1.14 gilt $X' \cap U \neq \emptyset$ für ein beliebiges $U \in \mathcal{U}(x)$ und somit $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Da der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ nach Axiom $(F_1)$ nichtleer ist, folgt $\mathcal{B} \neq \emptyset$, so dass insgesamt $\mathcal{B}$ Axiom $(FB_1)$ erfüllt. Da der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ nach Axiom $(F_3)$ zudem paarweise Durchschnitte seiner Elemente enthält, gilt

$$(X' \cap U) \cap (X' \cap V) = X' \cap (U \cap V) \quad \in \mathcal{B} \qquad \text{für beliebige } (X' \cap U), (X' \cap V) \in \mathcal{B},$$

so dass $\mathcal{B}$ insbesondere Axiom $(FB_2)$ erfüllt. #

Der nach dem Filterbasiskriterium 1.45 zu $\mathcal{B}$ gehörige Filter ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{F \subseteq X \mid \text{ es gibt ein } B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subseteq F\} \\ &= \{F \subseteq X \mid \text{ es gibt ein } U \in \mathcal{U}(x) \text{ mit } (X' \cap U) \subseteq F\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt dann $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ und nach Definition 2.36 konvergiert $\mathcal{F}$ gegen $x$. Insgesamt haben wir Aussage (ii) hergeleitet.

Sei nun umgekehrt $\mathcal{F}$ ein Filter wie in (ii) und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X')$ eine Basis von $\mathcal{F}$. Wegen $\mathcal{F} \to x$ gilt $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ nach Definition 2.36, so dass ein beliebiges $U \in \mathcal{U}(x)$ auch in $\mathcal{F}$ enthalten ist. Nach Definition 1.43 und $(FB_1)$ gibt es daher ein $\emptyset \neq B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X')$ mit $B \subseteq U$. Insgesamt folgt

$$\emptyset \neq B = (B \cap U) \subseteq (X' \cap U).$$

Da $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig gewählt war folgt Aussage (i) nach Teil (b) von Proposition 1.14. □

**Definition 2.42.** *Seien $X$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$ und $x \in X$ ein Punkt. Dann sagen wir:*

$$x \textit{ ist ein } \textbf{\textit{Berührpunkt}} \textit{ von } \mathcal{F} \quad :\Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}.$$

**Proposition 2.43.** *Seien $X$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$ und $x \in X$ ein Punkt. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Konvergiert $\mathcal{F}$ gegen $x$, so ist $x$ ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$.*

(b) *Ist $x$ ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$, so gibt es einen Filter $\hat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$ mit $\hat{\mathcal{F}} \to x$.*

*Beweis.* Zum Beweis von Behauptung (a) betrachten wir ein beliebiges $U \in \mathcal{U}(x)$. Wegen $\mathcal{F} \to x$ und Definition 2.36 gilt dann $U \in \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ und mit $(F_1)$ und $(F_3)$ für $\mathcal{F}$ also

$$\emptyset \neq U \cap F \in \mathcal{F} \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}.$$

Da $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig gewählt war, folgt mit Teil (b) von Proposition 1.14

$$x \in \overline{F} \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}$$

und mit Definition 2.42 somit, dass $x$ Berührpunkt von $\mathcal{F}$ ist, also Behauptung (a).

Wir zeigen nun Behauptung (b). Sei dafür $x$ ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$. Dann ist

$$\mathcal{B} := \{U \cap F \mid U \in \mathcal{U}(x) \text{ und } F \in \mathcal{F}\}$$

eine Filterbasis,

*denn:* Nach Definition 2.42 und Teil (b) von Proposition 1.14 gilt

$$U \cap F \neq \emptyset \quad \text{für alle } U \in \mathcal{U}(x) \text{ und alle } F \in \mathcal{F}.$$

Da $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{F}$ als Filter nach $(F_1)$ beide nicht leer sind, folgt hieraus, dass $\mathcal{B}$ Axiom $(FB_1)$ erfüllt. Da $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{F}$ als Filter Axiom $(F_3)$ genügen, erfüllt $\mathcal{B}$ auch $(FB_2)$. #

Der nach dem Filterbasiskriterium 1.45 zu $\mathcal{B}$ gehörige Filter $\hat{\mathcal{F}}$ ist nach Konstruktion feiner als $\mathcal{F}$ und feiner als $\mathcal{U}(x)$. Behauptung (b) folgt mit Definition 2.36. □

**Definition 2.44.** *Sei $X$ eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$. Dann sagen wir:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ ist ein } \textbf{Ultrafilter} \text{ auf } X \quad :\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{F} \text{ ist ein maximales Element in der Menge aller Filter auf } X \\ \Longleftrightarrow \quad & \text{für alle Filter } \mathcal{G} \text{ auf } X \text{ mit } \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F} \text{ gilt } \mathcal{G} = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Aus Proposition 2.43 und Definition 2.44 folgt sofort:

**Korollar 2.45.** *Seien $X$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $X$ und $x \in X$ ein Punkt. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *$x$ ist ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$.*

(ii) *$\mathcal{F} \to x$.*

**Beispiel 2.46.** *Seien $X$ eine Menge und $x \in X$ ein Punkt. Dann ist*

$$\mathcal{F} := \{U \subseteq X \mid x \in U\}$$

*ein Ultrafilter,*

*denn: Man sieht leicht, dass $\mathcal{F}$ die Axiome $(F_1)$-$(F_3)$ erfüllt und also ein Filter ist. Wäre nun $\mathcal{G}$ ein weiterer Filter auf $X$ mit $\mathcal{G} \supsetneq \mathcal{F}$, so gäbe es ein $U \in \mathcal{G}$ mit $x \notin U$. Wegen $\{x\} \in \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$ und der Gültigkeit von $(F_3)$ in $\mathcal{G}$ folgte dann $\emptyset = U \cap \{x\} \in \mathcal{G}$, was der Gültigkeit von $(F_1)$ in $\mathcal{G}$ widerspräche und somit nicht sein kann.* #

**Proposition 2.47** (Verfeinerungskriterium)**.** *Seien $X$ eine Menge, $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$ und $U \subseteq X$ mit $X \setminus U \notin \mathcal{F}$. Dann gibt es einen Filter $\hat{\mathcal{F}}$ auf $X$ mit $\hat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$ und $U \in \hat{\mathcal{F}}$.*

*Beweis.* Die Menge

$$\mathcal{B} := \mathcal{F} \cup \{U \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$$

ist eine Filterbasis,

*denn:* Es gilt $\mathcal{B} \neq \emptyset$, da $\mathcal{F}$ nach $(F_1)$ nichtleer ist. Und gälte $\emptyset \in \mathcal{B}$, so gäbe es ein $F \in \mathcal{F}$ mit $U \cap F = \emptyset$ und also $F \subseteq X \setminus U$. Nach $(F_2)$ folgte dann entgegen unserer Voraussetzung $X \setminus U \in \mathcal{F}$. Es gilt daher $\emptyset \notin \mathcal{B}$ und insgesamt erfüllt $\mathcal{B}$ Axiom $(FB_1)$.

Seien nun $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$V_1 \cap V_2 = \begin{cases} V_1 \cap V_2 & \text{für } V_1, V_2 \in \mathcal{F}, \\ V_1 \cap (U \cap F_2) = U \cap (V_1 \cap F_2) & \text{für } V_1 \in \mathcal{F},\ V_2 = U \cap F_2 \text{ mit } F_2 \in \mathcal{F}, \\ (U \cap F_1) \cap (U \cap F_2) = U \cap (F_1 \cap F_2) & \text{für } V_1 U \cap F_1,\ V_2 = U \cap F_2 \text{ mit } F_1, F_2 \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Da $\mathcal{F}$ Axiom $(F_3)$ erfüllt, liegt somit $V_1 \cap V_2$ in allen drei Fällen in $\mathcal{B}$, so dass $\mathcal{B}$ Axiom $(FB_2)$ erfüllt. #

Der nach dem Filterbasiskriterium 1.45 zu $\mathcal{B}$ gehörige Filter $\hat{\mathcal{F}}$ ist nach Konstruktion feiner als $\mathcal{F}$ und enthält $U = U \cap X$. □

**Proposition 2.48** (Ultrafilterkriterium). *Für eine Menge $X$ und einen Filter $\mathcal{F}$ auf $X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter auf $X$.*

(ii) *Für jedes $U \subseteq X$ ist (entweder) $U \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus U \in \mathcal{F}$.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i), sei $\mathcal{F}$ also ein Ultrafilter. Sei weiter $U \subseteq X$ beliebig. Wären $U$ und $X \setminus U$ beide in $\mathcal{F}$ enthalten, so auch $\emptyset = U \cap (X \setminus U)$, da $\mathcal{F}$ als Filter Axiom $(F_3)$ erfüllt. Ohne Einschränkung liege also $X \setminus U$ nicht in $\mathcal{F}$. Nach dem Verfeinerungskriterium 2.47 gibt es dann einen Filter $\hat{\mathcal{F}}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \hat{\mathcal{F}}$ und $U \in \hat{\mathcal{F}}$. Da $\mathcal{F}$ Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \hat{\mathcal{F}}$ nach Definition 2.44. Insbesondere gilt dann $U \in \mathcal{F}$ und wir haben (ii) gezeigt.

Gelte umgekehrt (ii), sei also für jedes $U \subseteq X$ entweder $U$ oder $X \setminus U$ in $\mathcal{F}$ enthalten. Sei weiter $\mathcal{G}$ ein Filter auf $X$ mit $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ und sei $U \in \mathcal{G}$ beliebig. Gälte $U \notin \mathcal{F}$, so wäre nach Voraussetzung $X \setminus U \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ und also $\emptyset = U \cap (X \setminus U) \in \mathcal{G}$, was nicht sein kann, da $\mathcal{G}$ als Filter Axiom $(F_1)$ erfüllt. Daher gilt $U \in \mathcal{F}$ und somit $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Nach Definition 2.44 ist somit $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, es gilt also (i). □

**Korollar 2.49.** *Seien $X, X'$ Mengen, $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $X$ und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann ist der Bildfilter $f_*\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $X'$.*

*Beweis.* Sei $U' \subseteq X'$ beliebig. Nach dem Ultrafilterkriterium 2.48 für den Filter $f_*\mathcal{F}$ genügt es zu zeigen, dass entweder $U'$ oder $X' \setminus U'$ in $f_*\mathcal{F}$ liegt. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und mit dem Ultrafilterkriterium 2.48 für $\mathcal{F}$ liegt entweder $U := f^{-1}(U')$ oder $X \setminus U$ in $\mathcal{F}$. Im Fall $U \in \mathcal{F}$ gilt

$$f(U) = f(f^{-1}(U')) \subseteq U'$$

und also $U' \in f_*\mathcal{F}$ nach $(F_2)$. Im Fall $X \setminus U \in \mathcal{F}$ gilt

$$f(X \setminus U) = f(X \setminus f^{-1}(U')) = f(f^{-1}(X' \setminus U')) \subseteq X' \setminus U'$$

und also $X' \setminus U' \in f_*\mathcal{F}$ nach $(F_2)$. □

**Satz 2.50.** *Seien $X$ eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$. Dann gibt es einen Ultrafilter $\hat{\mathcal{F}}$ auf $X$, der $\mathcal{F}$ enthält.*

*Beweis.* Die Menge
$$\mathcal{M}_{\supseteq \mathcal{F}} := \{\mathcal{G} \text{ Filter auf } X \mid \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}\}$$
ist halbgeordnet durch „$\subseteq$“ und nichtleer wegen $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{\supseteq \mathcal{F}}$. Für eine beliebige totalgeordnete Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}_{\supseteq \mathcal{F}}$ ist dann
$$\mathcal{S}(\mathcal{M}) := \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{M}} \mathcal{G}$$
eine obere Schranke in $\mathcal{M}_{\supseteq \mathcal{F}}$,

*denn:* Nach Konstruktion gilt $\mathcal{S}(\mathcal{M}) \supseteq \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ für alle $\mathcal{G} \in \mathcal{M}_{\supseteq \mathcal{F}}$, so dass es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ ein Filter auf $X$ ist.

$\mathcal{S}(\mathcal{M})$ erfüllt Axiom $(F_1)$, da $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ eine Vereinigung von Filtern ist und diese $(F_1)$ genügen, also $\emptyset \notin \mathcal{S}(\mathcal{M})$ und $X \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ gilt.

$\mathcal{S}(\mathcal{M})$ erfüllt Axiom $(F_2)$, denn nach Konstruktion von $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ gibt es für jedes $S \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ ein $\mathcal{G} \in \mathcal{M}$ mit $S \in \mathcal{G}$. Da $\mathcal{G}$ Axiom $(F_2)$ genügt, folgt $U \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{M})$ für jedes $S \subseteq U \subseteq X$.

$\mathcal{S}(\mathcal{M})$ erfüllt Axiom $(F_3)$, denn für beliebige $S_1, S_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ gibt es nach Konstruktion Filter $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{M}$ mit $S_1 \in \mathcal{G}_1$ und $S_2 \in \mathcal{G}_2$. Da $\mathcal{M}$ nach Voraussetzung totalgeordnet ist, können wir ohne Einschränkung $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ annehmen und erhalten $S_1, S_2 \in \mathcal{G}_2$. Da $\mathcal{G}_2$ als Filter Axiom $(F_3)$ genügt, gilt schließlich $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{M})$. #

Insgesamt haben wir hiermit verifiziert, dass wir in unserer Situation das aus der Linearen Algebra bekannte Zorn'sche Lemma anwenden dürfen und erhalten, dass $\mathcal{M}_{\supseteq \mathcal{M}}$ ein maximales Element $\hat{\mathcal{F}}$ enthält; dieses ist ein Ultrafilter. □

**Korollar 2.51.** *Seien $X$ eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$. Dann gilt*
$$\mathcal{F} = \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \text{ Ultra-} \\ \text{filter auf } X}} \mathcal{G}.$$

*Beweis.* Nach Satz 2.50 ist die rechte Seite nichtleer und nach Konstruktion ist dann die linke Seite in der rechten Seite enthalten.

Um umgekehrt zu zeigen, dass die rechte Seite in der linken Seite enthalten ist, genügt es offenbar zu zeigen, dass es für jedes $U \subseteq X$ mit $U \notin \mathcal{F}$ einen Ultrafilter $\mathcal{G}$ auf $X$ mit $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ und $U \notin \mathcal{G}$ gibt. Sei also $U \subseteq X$ mit $U = X \setminus (X \setminus U) \notin \mathcal{F}$. Nach dem Verfeinerungskriterium 2.47 gibt es dann einen Filter $\hat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$ auf $X$, der $X \setminus U$ enthält, und nach Satz 2.50 gibt es dann einen Ultrafilter $\mathcal{G} \supseteq \hat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$ auf $X$, der ebenfalls $X \setminus U$ enthält. Da $\mathcal{G}$ als Filter die Axiome $(F_1)$ und $(F_3)$ erfüllt, folgt $U \notin \mathcal{G}$ und somit die Behauptung. □

## 2.3 Kompaktheit

**Definition 2.52.** *Seien $X$ ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ eine Teilmenge und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von $X$. Dann sagen wir:*

$$
\begin{aligned}
&(U_i)_{i\in I} \text{ heißt } \textbf{Überdeckung} \text{ von } U &&:\Longleftrightarrow && U \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.\\
&(U_i)_{i\in I} \text{ heißt } \textbf{offene} \text{ Überdeckung von } U &&:\Longleftrightarrow && U \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \text{ mit offenen } U_i \text{ für alle } i \in I.\\
&(U_i)_{i\in I} \text{ heißt } \textbf{endliche} \text{ Überdeckung von } U &&:\Longleftrightarrow && U \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \text{ mit einer endlichen Menge } I.
\end{aligned}
$$

*Eine Überdeckung $(U_i)_{i\in J}$ von $U$ mit $J \subseteq I$ nennen wir eine* ***Teilüberdeckung*** *von $(U_i)_{i\in I}$.*

In der Analysis zeigt man den Satz von Heine-Borel,[6] laut dem für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann beschränkt und abgeschlossen ist, wenn jede offene Überdeckung von $U$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. In allgemeinen topologischen Räumen ist diese Aussage nicht korrekt, inspiriert uns jedoch zu folgender Definition:

**Definition 2.53.** *Ein topologischer Raum $X$ heißt* ***(überdeckungs-)kompakt****, wenn jede offene Überdeckung von $X$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

**Bemerkung 2.54.** *In der Literatur nennt man gelegentlich die von uns in Definition 2.53 eingeführte Eigenschaft „quasikompakt" und fordert für Kompaktheit noch die zusätzliche Gültigkeit geeigneter Trennungseigenschaften.*

**Proposition 2.55.** *Seien $X$ ein topologischer Raum und $U \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *$U$ ist kompakt.*

(ii) *Für jede offene Überdeckung von $U$ in $X$ existiert eine endliche Teilüberdeckung.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i) und sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $U$ in $X$, gelte also $U \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \Subset X$ für alle $i \in I$. Dann gilt

$$U = U \cap \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I}(U \cap U_i).$$

Nach (i) ist $U$ kompakt und nach den Definitionen 2.52 und 2.53 gibt es daher eine endliche Teilmenge $I_{\text{fin}} \subseteq I$ mit

$$U = \bigcup_{i\in I_{\text{fin}}} (U \cap U_i)$$

[6] In der Analysis definiert man zumeist Kompaktheit durch Beschränktheit und Abgeschlossenheit und weist mit dem Satz von Heine-Borel dann die Eigenschaft nach, mit der wir in der folgenden Definition 2.53 den Kompaktheitsbegriff einführen. Wir verfahren umgekehrt und zeigen den Satz von Heine-Borel nach dem Studium geeigneter Trennungseigenschaften im weiteren Verlauf dieses Kapitels als Satz 2.95.

und also $U \subseteq \bigcup_{i \in I_{\text{fin}}} U_i$. Da $(U_i)_{i \in I}$ als offene Überdeckung von $U$ beliebig gewählt war, folgt Aussage (ii).

Gelte umgekehrt (ii) und sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $U$ (in $U$), gelte also $U \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} U$ für alle $i \in I$. Nach Konstruktion der Unterraumtopologie 1.50 gibt es dann für jedes $i \in I$ eine Teilmenge $O_i \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X$ mit $U_i = O_i \cap U$. Es folgt $U \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ und nach (ii) gibt es sogar eine endliche Teilmenge $I_{\text{fin}} \subseteq I$ mit $U \subseteq \bigcup_{i \in I_{\text{fin}}} O_i$. Insgesamt erhalten wir so

$$U = U \cap \bigcup_{i \in I_{\text{fin}}} O_i = \bigcup_{i \in I_{\text{fin}}} (U \cap O_i) = \bigcup_{i \in I_{\text{fin}}} U_i$$

und nach Definition 2.53 die Kompaktheit von $U$, also Aussage (i). □

**Beispiel 2.56.** (a) *Ist $X$ eine Menge und $\mathcal{O}$ eine endliche Topologie auf $X$, so ist $(X, \mathcal{O})$ kompakt. Insbesondere sind $X_{\text{indisk}}$ und jeder endliche Teilraum eines beliebigen topologischen Raumes kompakt.*

(b) *Der diskrete Raum $X_{\text{disk}}$ zu einer gegebenen Menge $X$ ist genau dann kompakt, wenn $X$ endlich ist,*

*denn: Dass endliche topologische Räume kompakt sind, haben wir schon in Aussage (a) eingesehen. Umgekehrt besitzt für $X_{\text{disk}}$ kompakt die offene Überdeckung $X_{\text{disk}} = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ eine endliche Teilüberdeckung, so dass $X$ endlich sein muss.* #

**Proposition 2.57.** *Das Einheitsintervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt.*

*Beweis.* Wir betrachten $[0, 1]$ als Unterraum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Sei nun $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ und sei

$$X := \{x \in [0, 1] \mid [0, x] \text{ lässt sich durch endlich viele } U_i \text{ überdecken}\} \quad \subseteq \mathbb{R}.$$

Dann ist $X$ von der Form $[0, t)$ oder $[0, t]$ mit $0 \leq t \leq 1$,

*denn:* Offensichtlich gilt $0 \in X$. Sind weiter $x \in X$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y \leq x$, so folgt $y \in X$ nach Konstruktion von $X$. Die Behauptung folgt nun wie in Satz 2.18. #

Die meisten dieser Intervalle kommen für $X$ jedoch nicht infrage:

**Fall 1: $X = [0, t)$ für ein $0 < t \leq 1$.** Nach Voraussetzung gäbe es dann ein $j \in I$ mit $t \in U_j$ und daher auch ein $\varepsilon > 0$ mit $[t - \varepsilon, t] \subseteq U_j \cap [0, 1]$. Wegen $t - \varepsilon \in X$ ließe sich $[0, t - \varepsilon]$ durch endlich viele $U_i$ überdecken. Fügten wir $U_j$ zu diesen endlich vielen Mengen hinzu, so erhielten wir nach Konstruktion eine endliche Überdeckung von $[0, t]$, so dass entgegen unserer Annahme auch $t$ in $X$ läge. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
**Fall 2: $X = [0, t]$ für ein $0 \leq t < 1$.** Nach Voraussetzung gäbe es dann ein $j \in I$ mit $t \in U_j$ und daher auch ein $\varepsilon > 0$ mit $[t, t + \varepsilon] \subseteq U_j \cap [0, 1]$. Wegen $t \in X$ ließe sich $[0, t]$ durch endlich viele $U_i$ überdecken. Fügten wir $U_j$ zu diesen endlich vielen Mengen hinzu, so erhielten wir nach Konstruktion eine endliche Überdeckung von $[0, t + \varepsilon]$, so dass entgegen unserer Annahme auch $t + \varepsilon$ in $X$ läge. Dieser Fall kann also ebenfalls nicht eintreten.
Es folgt $X = [0, 1]$ und insbesondere $1 \in X$. Nach Konstruktion von $X$ folgt dann die Proposition. □

Analog zum Vorgehen in der Analysis definినieren wir einen weiteren Kompaktheitsbegriff:

**Definition 2.58.** *Ein topologischer Raum $X$ heißt* ***folgenkompakt****, wenn jede Folge in $X$ eine konvergente Teilfolge hat.*

Ein klassisches Ergebnis der Analysis besagt, dass kompakte metrische Räume folgenkompakt sind – ein bekannter Spezialfall hiervon für kompakte Unterräume der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist der Satz von Bolzano-Weierstraß. In allgemeinen topologischen Räumen gibt es keinen einfachen Zusammenhang zwischen Kompaktheit und Folgenkompaktheit:

**Beispiel 2.59.** *Kompaktheit und Folgenkompaktheit implizieren sich gegenseitig nicht. Um das zu zeigen, geben wir jeweils ein Gegenbeispiel an:*

(a) ***Nicht jeder kompakte topologische Raum ist folgenkompakt:*** *Nach Teil (b) von Beispiel 2.56 ist der endliche diskrete Raum $\{0,1\}_{\text{disk}}$ kompakt. Nach dem Satz von Tychonow, den wir in Kürze und ohne auf dieses Beispiel Bezug zu nehmen als Satz 2.63 zeigen werden, ist dann auch die Menge $X$ der Funktionen $[0,1] \to \{0,1\}$, die wir wie im Beweis von Proposition 2.34 mit der Produkttopologie versehen, kompakt. Aber dieser kompakte topologische Raum $X$ ist nicht folgenkompakt,*

*denn: Analog zu unseren Überlegungen im Beweis von Proposition 2.34 ist die Konvergenz von Folgen in unserem Produktraum $X$ nichts anderes als die gewöhnliche punktweise Konvergenz. Zum Beweis unserer Behauptung genügt es daher zu zeigen, dass es eine Folge in $X$ gibt, so dass für jede Teilfolge die Folge der zugehörigen Funktionswerte in einem jeweils geeigneten Punkt in $[0,1]$ nicht konvergiert.*

*Im Dualsystem ist die Darstellung eines beliebigen $x \in [0,1]$ eine unendliche Folge $(a_i(x))_{i=1}^{\infty}$ von Nullen und Einsen mit*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) 2^{-i}.$$

*Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ erhalten wir so ein wohldefiniertes Element $a_i \in X$ und insgesamt eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $X$. Jeder Teilfolge $(a_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ordnen wir nun via*

$$a_i(y) := \begin{cases} 1 & \text{für } i = i_k \text{ mit } k \in 2\mathbb{N}-1, \\ 0 & \text{für } i = i_k \text{ mit } k \in 2\mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*ein $y \in [0,1]$ zu. Nach Konstruktion konvergiert dann die Folge $(a_{i_k}(y))_{k\in\mathbb{N}}$ der Funktionswerte am Punkt $y \in [0,1]$ nicht und wir haben die Behauptung gezeigt.* #

(b) ***Nicht jeder folgenkompakte topologische Raum ist kompakt:*** *Die erste überabzählbare Ordinalzahl $\omega_1$ ist definitionsgemäß die überabzählbare Menge aller (höchstens) abzählbaren Ordinalzahlen. Auf dieser Menge ist durch die $\in$-Relation offensichtlich eine Wohlordnung „$<$“ definiert. Durch letztere wird auf $\omega_1$ eine Topologie definiert, die* ***Ordnungstopologie*** *bezüglich „$<$“,* *denn: Sei ganz allgemein $X$ eine Menge mit einer Totalordnung „$<$“. Wir betrachten zwei Symbole $\pm\infty$ mit $-\infty < x < +\infty$ für alle $x \in X$ und erweitern $X$ zu $\overline{X} := X \sqcup \{\pm\infty\}$. Die Menge*

$$\mathcal{B} := \{(a,b) \mid a,b \in \overline{X} \text{ mit } a < b\}$$

*erfüllt offensichtlich die Axiome $(B_1)$ und $(B_2)$ und ist nach dem Basiskriterium 1.39 also Basis einer eindeutig bestimmten Topologie auf $X$.* #

*Ist nun $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\omega_1$, so ist die bezüglich „$<$“ kleinste Ordinalzahl $\mu \in \omega_1$ mit der Eigenschaft, dass nur endlich viele Folgenglieder größer als $\mu$ sind, ein Häufungspunkt dieser Folge,*

*denn: Da abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen wieder abzählbar sind, gibt es eine Ordinalzahl aus $\omega_1$, so dass nur endlich viele Glieder von $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ größer sind. Wegen der Wohlgeordnetheit von $\omega_1$ bezüglich „$<$“ hat die Menge solcher Ordinalzahlen ein kleinstes Element $\mu$. Wäre $\mu$ nun kein Häufungspunkt, so gäbe es eine Umgebung von $\mu$, in der nur endlich viele Folgenglieder lägen. Nach Definition 1.5 können wir ohne Einschränkung annehmen, diese Umgebung wäre offen, und nach Definition der Ordnungstopologie sogar, dass sie von der Gestalt $(\alpha,\beta)$ mit $\alpha,\beta \in \overline{\omega_1}$ und $\alpha < \mu < \beta$ wäre. Nach Definition von $\mu$ läge in $(\alpha,\mu)$ kein Folgenglied, so dass es nur endlich viele Folgenglieder größer als $\alpha < \mu$ gäbe. Das steht im Widerspruch dazu, dass wir $\mu$ als die kleinste Ordinalzahl mit dieser Eigenschaft gewählt hatten. Es muss also $\mu$ ein Häufungspunkt von $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sein.* #

*In Konsequenz hat $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge und nach Definition 2.58 ist $\omega_1$ zusammen mit der Ordnungstopologie ein folgenkompakter topologischer Raum.*

*Aber $\omega_1$ ausgestattet mit der Ordnungstopologie ist nicht kompakt,*

*denn: Die Familie der offenen Mengen $(-\infty,\alpha)$, wobei $\alpha$ die (höchstens) abzählbaren Ordinalzahlen durchläuft, überdeckt $\omega_1$, denn es gilt*

$$\omega_1 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \{\alpha\} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} (-\infty,\alpha).$$

*Jede beliebige endliche Teilfamilie enthält aber nur abzählbar viele Elemente von $\omega_1$, so dass $\omega_1$ nicht kompakt ist.* #

In Satz 2.80 werden wir nach dem Studium geeigneter Abzählbarkeitseigenschaften Bedingungen angeben, unter denen aus Kompaktheit Folgenkompaktheit folgt. Indem wir den Begriff der Folgenkompaktheit in die Sprache der Filter übersetzen, wird es uns aber zunächst im folgenden Kompaktheitskriterium 2.60 gelingen, in allgemeinen topologischen Räumen ein Analogon dieser Aussage anzugeben:

**Satz 2.60** (Kompaktheitskriterium). *Sei $X$ ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist kompakt.*

(ii) *Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von $X$ mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$, dann gibt es eine endliche Teilmenge $I_{\text{fin}} \subseteq I$ mit $\bigcap_{i\in I_{\text{fin}}} A_i = \emptyset$.*

(iii) *Jeder Filter aus $X$ hat einen Berührpunkt.*

(iv) *Jeder Ultrafilter auf $X$ konvergiert.*

*Beweis.* Die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii) ergibt sich unmittelbar daraus, dass bei Komplementbildung offene in abgeschlossene Teilmengen überführt werden und umgekehrt.

Um aus Aussage (ii) Aussage (iii) zu folgern, nehmen wir nun an, es gälte Aussage (ii) aber nicht Aussage (iii). Wegen letzterem gäbe es dann einen Filter $\mathcal{F}$ auf $X$ ohne Berührpunkt und nach Definition 2.42 gälte

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} = \emptyset.$$

Nach (ii) gäbe es sogar eine endliche Teilmenge $\mathcal{F}_{\text{fin}} \subseteq \mathcal{F}$ mit

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}_{\text{fin}}} \overline{F} = \emptyset.$$

Andererseits erfüllt $\mathcal{F}$ Axiom $(F_2)$, so dass mit $F \in \mathcal{F}_{\text{fin}} \subseteq \mathcal{F}$ auch sein Abschluss $\overline{F}$ in $\mathcal{F}$ enthalten ist. Da $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ endlich ist und $\mathcal{F}$ auch Axiom $(F_3)$ erfüllt, folgt $\bigcap_{F\in\mathcal{F}_{\text{fin}}} \overline{F} \in \mathcal{F}$ und somit im Widerspruch zum oben Gezeigten

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}_{\text{fin}}} \overline{F} \neq \emptyset$$

nach Axiom $(F_1)$. Unsere Annahme kann also nicht richtig sein, und aus Aussage (ii) folgt Aussage (iii).

Gelte nun Aussage (iii) und sein $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $X$. Dann hat $\mathcal{F}$ einen Berührpunkt $x$ und nach Teil (b) von Proposition 2.43 gibt es einen Filter $\hat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$ mit $\hat{\mathcal{F}} \to x$. Nach Definition 2.44 folgt $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ und somit $\mathcal{F} \to x$, also Aussage (iv).

Gelte schließlich Aussage (iv). Wir nehmen an, es gäbe eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Mengen in $X$ mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$, so dass der Durchschnitt jeweils endlich vieler solcher Mengen nichtleer ist. Die Menge

$$\mathcal{B} := \{\text{endliche Durchschnitte von Mengen aus } (A_i)_{i\in I}\}$$

wäre dann eine Filterbasis,

*denn:* Nach Konstruktion gälte $\emptyset \notin \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \neq \emptyset$, also $(FB_1)$. Da $(FB_2)$ offensichtlich ebenfalls erfüllt wäre, folgt die Behauptung. #

Sei $\mathcal{F}$ der nach dem Filterbasiskriterium 1.45 zu $\mathcal{B}$ gehörige Filter auf $X$. Nach Satz 2.50 gäbe es nun einen Ultrafilter $\hat{\mathcal{F}}$ auf $X$ mit $\subseteq \hat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F} \supseteq \mathcal{B}$. Nach Konstruktion von $\mathcal{B}$ folgte

$$\bigcap_{F\in\hat{\mathcal{F}}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{B\in\mathcal{B}} \overline{B} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} = \bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset,$$

so dass $\hat{\mathcal{F}}$ nach Definition 2.42 keinen Berührpunkt hätte. Andererseits konvergiert nach (iv) jeder Ultrafilter auf $X$, es gäbe also ein $x \in X$ mit $\hat{\mathcal{F}} \to x$. Nach Proposition 2.43 wäre dann $x$ ein Berührpunkt von $\hat{\mathcal{F}}$, was nach unseren vorherigen Überlegungen nicht sein kann. Eine Familie wie oben angenommen kann es daher nicht geben, so dass Aussage (ii) erfüllt ist. □

**Korollar 2.61.** *Sei $X$ ein kompakter topologischer Raum und sei $A \mathrel{\overset{\bullet}{\subseteq}} X$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann ist auch $A$ kompakt.*

*Beweis.* Wegen $A \mathrel{\overset{\bullet}{\subseteq}} X$ gilt für alle $U \subseteq A$ nach Teil (b) von Beispiel 1.51:

$$U \mathrel{\overset{\bullet}{\subseteq}} A \quad \Longleftrightarrow \quad U \mathrel{\overset{\bullet}{\subseteq}} X.$$

Nach Aussage (ii) des Kompaktheitskriteriums 2.60 vererbt sich somit die Kompaktheit von $X$ auf $A$. □

**Proposition 2.62.** *Seien $X$ ein kompakter topologischer Raum und $f : X \to X'$ eine stetige Abbildung in einen weiteren topologischen Raum $X'$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *$f(X)$ ist kompakt.*

(b) *Ist $X'$ diskret, so ist $f(X)$ endlich.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Sei dafür $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Weil die Mengen $f^{-1}(U_i)$ wegen der Stetigkeit von $f$ offen in $X$ sind und

$$X = f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$$

gilt, ist $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X$. Wegen der Kompaktheit von $X$ gibt es eine endliche Teilmenge $I_{\text{fin}} \subseteq I$ mit

$$X = \bigcup_{i\in I_{\text{fin}}} f^{-1}(U_i).$$

Es folgt

$$f(X) = f\Big(\bigcup_{i\in I_{\text{fin}}} f^{-1}(U_i)\Big) = \bigcup_{i\in I_{\text{fin}}} f(f^{-1}(U_i)) \subseteq \bigcup_{i\in I_{\text{fin}}} U_i,$$

so dass wir mit $(U_i)_{i\in I_{\text{fin}}}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(X)$ gefunden haben. Es folgt die Kompaktheit von $f(X)$ und somit Behauptung (a).

Nun beweisen wir Behauptung (b). Wegen der Diskretheit von $X'$ ist nach Konstruktion der Unterraumtopologie auch $f(X)$ diskret. Wegen der Kompaktheit von $X$ und Aussage (a) ist $f(X)$ zudem kompakt. Mit Teil (b) von Beispiel 2.56 folgt nun Behauptung (b). □

**Satz 2.63** (Satz von Tychonow)**.** *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer topologischer Räume und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ der Produktraum bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist kompakt.*

(ii) *$X_i$ ist kompakt für alle $i \in I$.*

*Beweis.* Gelte zunächst Aussage (i), sei also $X$ kompakt. Nach Konstruktion der Produkttopologie ist für jedes $i \in I$ die (surjektive) kanonische Projektion $\pi_i : X \to X_i$ stetig. Nach Teil (a) von Proposition 2.62 ist daher $X_i$ kompakt für alle $i \in I$, es gilt also Aussage (ii).

Gelte umgekehrt Aussage (ii), seien also die $X_i$ für alle $i \in I$ kompakt. Sei $\mathcal{F}$ ein beliebiger Ultrafilter auf $X$. Nach Korollar 2.49 ist dann für jedes $i \in I$ der Bildfilter $(\pi_i)_*\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $X_i$. Wegen der Kompaktheit von $X_i$ und dem Kompaktheitskriterium 2.60 konvergiert somit $(\pi_i)_*\mathcal{F}$ für alle $i \in I$ und nach Proposition 2.40 konvergiert dann auch $\mathcal{F}$. Da der Ultrafilter $\mathcal{F}$ beliebig gewählt war, können wir wieder das Kompaktheitskriterium 2.60 anwenden und erhalten die Kompaktheit von $X$, also Aussage (i). □

**Definition 2.64.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Dann sagen wir:*

$$X \text{ ist } \textbf{lokalkompakt} \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{jedes } x \in X \text{ besitzt eine kompakte Umgebung.}$$

**Bemerkung 2.65.** *In der Literatur gibt es verschiedene, von Definition 2.64 abweichende Definitionen der Lokalkompaktheit. Sie stimmen alle überein, wenn man noch die zusätzliche Gültigkeit geeigneter Trennungseigenschaften voraussetzt.*

**Beispiel 2.66.** (a) *Jeder kompakte topologische Raum $X$ ist auch lokalkompakt,*

*denn: Für jedes $x \in X$ ist das Kompaktum $X$ eine offene Umgebung.* #

(b) *Für $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist $\mathbb{R}^n$ lokalkompakt, jedoch nicht kompakt,*

*denn: Sei $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Nach Proposition 2.57 ist das Einheitsintervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Da für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Translation $y \mapsto y + x_i - \frac{1}{2}$ stetig ist, ist mit Teil (a) von Proposition 2.62 auch $[x_i - \frac{1}{2}, x_i + \frac{1}{2}]$ kompakt. Nach dem Satz von Tychonow 2.63 ist dann auch*

$$U := \prod_{i=1}^{n} [x_i - \frac{1}{2}, x_i + \frac{1}{2}]$$

*kompakt. Offensichtlich gilt $x \in U_{\frac{1}{2}}(x) \subseteq U$, so dass $U$ eine kompakte Umgebung von $x$ ist. Da $x$ beliebig gewählt war, folgt die Lokalkompaktheit von $\mathbb{R}^n$.*

*Um zu zeigen, dass $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt ist, genügt es nach dem Kompaktheitskriterium 2.60 zu zeigen, dass es einen Filter auf $\mathbb{R}^n$ gibt, der keinen Berührpunkt hat. Tatsächlich ist*

$$\mathcal{U}(\infty) := \{U \subseteq X \mid U_\varepsilon(\infty) \subseteq U \text{ für ein } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\} \quad \text{mit } U_\varepsilon(\infty) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > \frac{1}{\varepsilon}\}$$

*ein Filter,[7] der wegen*

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}(\infty)} \overline{U} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}} \overline{U_\varepsilon(\infty)} = \emptyset$$

*keinen Berührpunkt in $\mathbb{R}^n$ aufweist. Wir können uns $\mathcal{U}(\infty)$ als den Umgebungsfilter eines nicht in $\mathbb{R}^n$ enthaltenen Elements „$\infty$" vorstellen, das den (eindeutigen) Berührpunkt dieses Filters darstellt. Ein Ansatz zur Behebung des Problems der fehlenden Kompaktheit von $\mathbb{R}^n$ ist daher, dieses*

[7] Das zeigt man komplett analog zum Beweis von Beispiel 1.9.

*Element hinzuzunehmen und zu hoffen, dass der derart ergänzte topologische Raum kompakt ist. Diese Idee werden wir im Rest dieses Abschnitts weiterverfolgen.* #

**Definition 2.67.** *Sei X ein topologischer Raum. Genau dann heißt ein topologischer Raum $\tilde{X}$ eine* ***Kompaktifizierung*** *von X, wenn die folgenden Axiome gelten:*

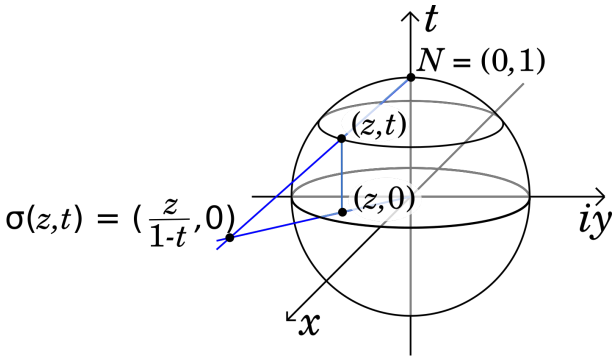
$(K_1)$ *$\tilde{X}$ ist kompakt.*

$(K_2)$ *X ist homöomorph zu einem dichten Unterraum von $\tilde{X}$.*

**Beispiel 2.68.** *Ein gegebener topologischer Raum kann durchaus unterschiedliche Kompaktifizierungen aufweisen. Dies führen wir in diesem Beispiel für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ anhand des topologischen Raums $\mathbb{R}^n$ vor. Um uns die Arbeit leichter zu machen, mogeln wir ein wenig und nutzen dabei aus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ nach dem erst später bewiesenen Satz von Heine-Borel 2.95 kompakt ist. Es gelten dann die folgenden Aussagen:*

(a) *Für einen beliebigen, in diesem Kontext auch als „Nordpol" bezeichneten Punkt N aus dem Kompaktum $\mathbb{S}^n$ ist $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{N\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathbb{S}^n$ eine* ***Einpunktkompaktifizierung*** *von $\mathbb{R}^n$ ist. Ein Umgebungsfilter von N ist dann durch das homöomorphe Urbild des Filters $\mathcal{U}(\infty)$ aus Beispiel 2.66 gegeben.*

*Ein in der Funktionentheorie studierter Spezialfall hiervon ist die Homöomorphie zwischen der Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ ohne ihren Nordpol und der komplexen Ebene $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.*




*Dort beweist man diesen Aussage durch explizite Konstruktion eines Homöomorphismus $\sigma : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$. Wir geben in Satz 2.70 eine allgemeine Methode zur Konstruktion einer – dann schon als solcher verifizierten – Einpunktkompaktifizierung an.*

(b) *Der n-dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ aus Beispiel 1.60 ist eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$, denn: Die Abbildung*

$$p_i : \begin{cases} \mathbb{S}^{n+1} & \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \\ {}^t(x_1, \dots, x_{n+1}) & \mapsto (x_1 : \dots : x_{n+1}) \end{cases}$$

*ist offensichtlich surjektiv und stetig. Wegen der Kompaktheit von $\mathbb{S}^{n+1}$ und Teil (a) von Proposition 2.62 folgt daher die Kompaktheit von $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ und somit Axiom $(K_1)$. Axiom $(K_2)$ haben wir schon in Beispiel 1.60 nachgewiesen.* #

**Definition 2.69.** *Sei $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Wir wählen einen Punkt $\infty$, der nicht zu $X$ gehört, und setzen*

$$X_\infty := X \cup \{\infty\},$$
$$\mathcal{O}_\infty := \mathcal{O} \cup \mathcal{H} \quad \text{mit } \mathcal{H} := \{V \subseteq X_\infty \mid \infty \in V \text{ und } X \setminus V \text{ kompakt und abgeschlossen in } X\}.$$

*Dann heißt $\mathcal{T}_\infty := (X_\infty, \mathcal{O}_\infty)$ die **Alexandrow-Kompaktifizierung** von $\mathcal{T}$.*

Nun gilt es zu zeigen, dass die Alexandrow-Kompaktifizierung eines topologischen Raums auch tatsächlich eine Kompaktifizierung ist.

**Satz 2.70** (Satz von Alexandrow)**.** *Sei $X$ ein topologischer Raum und sei $X_\infty$ die Alexandrow-Kompaktifizierung von $X$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Die Alexandrow-Kompaktifizierung $X_\infty$ von $X$ ist ein kompakter topologischer Raum, der $X$ als Teilraum enthält.*

(b) *Ist $X$ nicht kompakt, so ist $X_\infty$ eine Kompaktifizierung von $X$.*

*Beweis.* Die nach Definition 2.69 zur Alexandrow-Kompaktifizierung $X_\infty$ gehörige Menge $\mathcal{O}_\infty$ ist tatsächlich eine Topologie auf $X_\infty$,

*denn:* Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{O}_\infty$ Axiom $(T_1^{(O)})$ erfüllt. Einerseits gilt $\emptyset \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\infty$, andererseits gilt $\infty \in X_\infty$ und $X \setminus X_\infty = \emptyset$ kompakt und abgeschlossen in $X$, so dass $X_\infty$ als Element von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{O}_\infty$ enthalten ist. Insgesamt haben wir somit gezeigt, dass $\mathcal{O}_\infty$ Axiom $(T_1^{(O)})$ erfüllt.

Zum Beweis von $(T_2^{(O)})$ genügt es

$$W := U \cup \bigcup_{i \in I} V_i \quad \in \mathcal{O}_\infty \qquad \text{für alle } U \in \mathcal{O}, (V_i)_{i \in I} \text{ mit } I \neq \emptyset \text{ und } V_i \in \mathcal{H} \text{ für alle } i \in I$$

zu zeigen. Wegen $I \neq \emptyset$ gilt $\infty \in W$. Weiter ist

$$X \setminus W = (X \setminus U) \cup \bigcap_{i \in I} (X \setminus V_i)$$

als Durchschnitt in $X$ abgeschlossener Mengen selbst wieder abgeschlossen in $X$. Schließlich liegt $X \setminus W$ für ein geeignetes $i \in I$ im Kompaktum $X \setminus V_i$. Da $X \setminus W$ und $X \setminus V_i$ beide abgeschlossen in $X$ sind, ist $X \setminus W$ nach Teil (b) von Beispiel 1.51 auch abgeschlossen in $X \setminus V_i$. Nach Korollar 2.61 ist $X \setminus W$ als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums selbst kompakt, so dass wir insgesamt $X \setminus W \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{O}_\infty$ und somit Axiom $(T_2^{(O)})$ gezeigt haben.

Zum Beweis von Axiom $(T_3^{(O)})$ betrachten wir zwei Mengen $U, V \in \mathcal{O}_\infty$. Im Fall $U, V \in \mathcal{O}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\infty$, da $\mathcal{O}$ Axiom $(T_3^{(O)})$ erfüllt. Im Fall $U \in \mathcal{O}$ und $V \in \mathcal{H}$ – oder natürlich analog genau umgekehrt – gilt nach Voraussetzung $X \setminus V \Subset X$, also $X \setminus (X \setminus V) \subseteq X$ und somit

$$U \cap V = (U \cap X) \cap V = U \cap (X \cap V) = U \cap \big(X \setminus (X \setminus V)\big) \quad \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\infty.$$

Im Fall $U, V \in \mathcal{H}$ ist schließlich $\infty \in U \cap V$. Nach Voraussetzung sind zudem $X \setminus U$ und $X \setminus V$ beide kompakt und abgeschlossen in $X$, so dass dies auch auf ihre Vereinigung

$$X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$$

zutrifft. Es ist daher $U \cap V \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{O}_\infty$, so dass wir insgesamt die Gültigkeit von Axiom $(T_3^{(O)})$ in $\mathcal{O}_\infty$ nachgewiesen haben. #

Der ursprüngliche topologische Raum $X$ ist ein topologischer Unterraum von $X_\infty$,

*denn:* Nach Definition 1.50 ist die Unterraumtopologie bezüglich $X_\infty$ auf $X$ gegeben durch

$$\mathcal{O}_\infty|_X = \{V \cap X \mid V \in \mathcal{O}_\infty\} = \{V \setminus \{\infty\} \mid V \in \mathcal{O}_\infty\}.$$

Wegen $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\infty$ gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\infty|_X$. Umgekehrt gilt für alle $V \in \mathcal{O}_\infty$ wie schon zuvor bemerkt $V \cap X = X \setminus (X \setminus V) \in \mathcal{O}$ und somit auch die Inklusion $\mathcal{O}_\infty|_X \subseteq \mathcal{O}$. #

Schließlich ist die Alexandrow-Kompaktifizierung $X_\infty$ auch kompakt,

*denn:* Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von $X_\infty$. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $\infty \in U_j$, insbesondere gilt $U_j \in \mathcal{H}$. Es folgt dann

$$X \setminus U_j = X_\infty \setminus U_j = \Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) \setminus U_j = \bigcup_{i\in I}(U_i \setminus U_j) \subseteq \bigcup_{i\in I}(U_i \setminus \{\infty\}).$$

Wegen $U_i \setminus \{\infty\} = U_i \cap X \in \mathcal{O}$ ist $(U_i \setminus \{\infty\})_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X \setminus U_j$ in $X$. Wegen $U_j \in \mathcal{H}$ ist $X \setminus U_j$ kompakt, so dass es eine endliche Teilmenge $I_{\text{fin}} \subseteq I$ gibt mit

$$X \setminus U_j \subseteq \bigcup_{i\in I_{\text{fin}}} (U_i \setminus \{\infty\}) \subseteq \bigcup_{i\in I_{\text{fin}}} U_i$$

und folglich

$$X \subseteq U_j \cup \bigcup_{i\in I_{\text{fin}}} U_i.$$

Wegen $\infty \in U_j$ und $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ ergibt sich hieraus

$$X_\infty = U_j \cup \bigcup_{i\in I_{\text{fin}}} U_i$$

und somit die Behauptung. #

Insgesamt haben wir nun Behauptung (a) bewiesen.

Zum Beweis von Behauptung (b) überlegen wir zunächst:

$$\{\infty\} \in \mathcal{O}_\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \{\infty\} \in \mathcal{H} \quad\Longleftrightarrow\quad X = X \setminus \{\infty\} \text{ kompakt.}$$

Sei nun $X$ nicht kompakt, gelte also $\{\infty\} \notin \mathcal{O}_\infty$. Dann ist $X_\infty \setminus \{\infty\} = X$ nicht abgeschlossen in $X_\infty$ und zwangsläufig gilt $\overline{X} = X_\infty$. Behauptung (b) folgt nun mit den Definitionen 1.16 und 2.67. □

## 2.4 Die Abzählbarkeitsaxiome

In der Topologie gibt es zwei Endlichkeitsbedingungen an die betrachteten Räume, die als erstes bzw. zweites Abzählbarkeitsaxiom bezeichnet werden. Räume, die ein Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, können aus topologischer Sicht als „klein" gelten. Eingeführt wurden die Abzählbarkeitseigenschaften von Felix Hausdorff in seiner Monografie *Grundzüge der Mengenlehre* aus dem Jahr 1914.

**Definition 2.71.** *Sei $\mathcal{T} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Gilt dann*

$(A_1)$ *Für alle $x \in X$ existiert eine (höchstens) abzählbare Umgebungsbasis.*

*so sagen wir, X erfülle das* ***erste Abzählbarkeitsaxiom****. Gilt dagegen*

$(A_2)$ *Es existiert eine (höchstens) abzählbare Basis von $\mathcal{O}$.*

*so sagen wir, X erfülle das* ***zweite Abzählbarkeitsaxiom****.*

**Bemerkung 2.72.** *Nach Definition 1.50 können wir eine Umgebungsbasis bzw. eine Basis der Topologie in einen Unterraum herunterschneiden und erhalten wieder eine Umgebungsbasis bzw. eine Basis der Topologie. Erfüllt daher ein gegebener topologischer Raum X Axiom $(A_1)$ bzw. Axiom $(A_2)$, so erfüllt auch jeder Unterraum von X Axiom $(A_1)$ bzw. Axiom $(A_2)$.*

**Proposition 2.73.** *Jeder toplogische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom $(A_2)$ erfüllt, genügt auch dem ersten Abzählbarkeitsaxiom $(A_1)$.*

*Beweis.* Nach Teil (a) von Proposition 1.46 bedingt die Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie eines topologischen Raumes in jedem Punkt die Existenz einer abzählbaren Umgebungsbasis. Aus dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom $(A_2)$ folgt daher das erste Abzählbarkeitsaxiom $(A_1)$. □

Mithilfe dieser beiden Aussage erhalten wir eine Klasse von Beispielen für topologische Räume, die beide Abzählbarkeitsaxiome erfüllen:

**Beispiel 2.74.** *Jeder Unterraum $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig erfüllt Axiom $(A_1)$ und Axiom $(A_2)$,*

*denn: Offensichtlich ist*

$$\{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ und } x \in \mathbb{Q}^n\}$$

*eine abzählbare Basis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathbb{R}^n$ Axiom $(A_2)$ erfüllt. Nach Bemerkung 2.72 trifft das auch auf alle Unterräume $X \subseteq \mathbb{R}^n$ zu und nach Proposition 2.73 erfüllt jedes $X \subseteq \mathbb{R}^n$ dann auch Axiom $(A_1)$.* #

Wir wollen nun ein Beispiel eines topologischen Raums angeben, der $(A_1)$ aber nicht $(A_2)$ erfüllt und beginnen mit zwei Bemerkungen.

**Bemerkung 2.75.** *Jeder metrische Raum erfüllt Axiom* $(A_1)$ *und jeder kompakte metrische Raum auch Axiom* $(A_2)$,

*denn: Sei* $(X, d)$ *ein metrischer Raum. Für einen beliebigen Punkt* $x \in X$ *ist dann offensichtlich*

$$\{U_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

*eine abzählbare Umgebungsbasis von* $x$*, vgl. auch Teil (c) von Beispiel 1.44, so dass* $X$ *Axiom* $(A_1)$ *erfüllt.*

*Sei nun* $(X, d)$ *zusätzlich kompakt. Wir setzen für* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{U}_{\frac{1}{n}} := \{U_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in X\}.$$

*Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *wird* $X$ *durch die offenen Mengen aus* $\mathcal{U}_{\frac{1}{n}}$ *überdeckt. Aufgrund der Kompaktheit von* $X$ *existiert für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *eine endliche Teilmenge* $\mathcal{V}_{\frac{1}{n}} \subseteq \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}$ *mit*

$$X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}} V.$$

*Wir setzen*

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}$$

*Die Menge* $\mathcal{B}$ *ist abzählbar und besteht aus offenen Teilmengen von* $X$*. Sie ist auch eine Basis der Topologie von* $X$*: Sei dazu* $U \underset{\circ}{\subseteq} X$ *und* $x \in X$*. Dann existiert ein* $N_x \in \mathbb{N}$ *mit* $U_{\frac{1}{N_x}}(x) \subseteq U$*. Wegen*

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{V}_{\frac{1}{2N_x}}} V$$

*gibt es ein* $y_x \in X$ *mit* $x \in U_{\frac{1}{2N_x}}(y_x)$ *und* $U_{\frac{1}{2N_x}}(y_x) \in \mathcal{V}_{\frac{1}{2N_x}}$*. Für jedes* $z \in U_{\frac{1}{2N_x}}(y_x)$ *ist*

$$d(x, z) \leq d(x, y_x) + d(y_x, z) < \frac{1}{2N_x} + \frac{1}{2N_x} = \frac{1}{N_x}.$$

*Wir erhalten* $x \in U_{\frac{1}{2N_x}}(y_x) \subseteq U_{\frac{1}{N_x}}(x) \subseteq U$ *und schließlich*

$$U = \bigcup_{x \in U} U_{\frac{1}{2N_x}}(y_x).$$

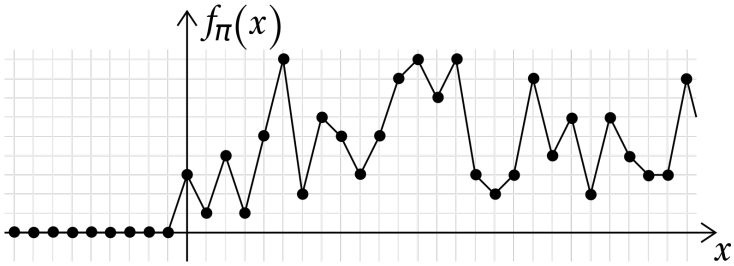
#

**Bemerkung 2.76.** *Hat ein topologischer Raum* $X$ *einen überabzählbaren diskreten Unterraum, so erfüllt er nicht Axiom* $(A_2)$,

*denn: Nehmen wir an,* $X$ *hätte einen überabzählbaren, diskreten Unterraum* $X'$ *und erfüllte Axiom* $(A_2)$*. Nach Bemerkung 2.72 erfüllte dann auch* $X'$ *Axiom* $(A_2)$*. Da die diskrete Topologie auf der überabzählbaren Menge* $X'$ *aber keine abzählbare Basis haben kann, kann das nicht sein.* #

**Beispiel 2.77.** *Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ der beschränkten stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ erfüllt Axiom $(A_1)$ aber nicht Axiom $(A_2)$,*

*denn: Als normierter Raum ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ insbesondere ein metrischer Raum und erfüllt nach Bemerkung 2.75 somit Axiom $(A_1)$. Um zu zeigen, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Axiom $(A_2)$ nicht erfüllt, genügt es nach Bemerkung 2.76 einen überabzählbaren, diskreten Unterraum von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ anzugeben. Ist für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ die eindeutige Dezimaldarstellung durch $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) \cdot 10^n$ gegeben, so ordnen wir dafür jedem $x \in \mathbb{R}_{>0}$ eine beliebige, aber festgewählte Funktion $f_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $f_x(n) = a_n(x)$ zu.*[8]




*Da sich je zwei $x \neq y \in \mathbb{R}_{>0}$ an mindestens einer Dezimalstelle unterscheiden, gilt $\|x - y\|_\infty \geq 1$ für alle $x \neq y \in \mathbb{R}_{>0}$. Analog zum Beweis von Beispiel 1.52 folgt somit, dass die überabzählbare Menge $\{f_x \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\}$ ein diskreter Unterraum von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist, und wir haben die Behauptung gezeigt.* #

Es gibt aber auch topologische Räume, die keines der beiden Abzählbarkeitsaxiome erfüllen:

**Beispiel 2.78.** *Sei $I$ eine überabzählbare Menge und sei für jedes $i \in I$ ein topologischer Raum $X_i$ mit einer zugehörigen offenen Menge $\emptyset \neq U_i \subsetneq X_i$ gegeben. Dann erfüllt der Produktraum $X = \prod_{i \in I} X_i$ weder Axiom $(A_1)$ noch Axiom $(A_2)$,*

*denn: Zu jedem $i \in I$ wählen wir ein $x_i \in U_i$ und betrachten den Punkt $x := (x_i)_{i \in I} \in X$. Angenommen, $x$ hätte eine abzählbare Umgebungsbasis. Nach Definition 1.43 und Korollar 1.72 gäbe es dann auch eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{E}_{\text{count}}(x) \subseteq \mathcal{E}(x)$. Für jedes $E \in \mathcal{E}$ unterscheidet sich der $i$-te Faktor in nur endlich vielen $i \in I$ von $X_i$. Wegen der Abzählbarkeit von $\mathcal{E}_{\text{count}}(x)$ gäbe es daher nur abzählbar viele $i \in I$, so dass sich für ein $E \in \mathcal{E}_{\text{count}}(x)$ der $i$-te Faktor von $X_i$ unterscheidet. Wegen der Überabzählbarkeit von $I$ gäbe es folglich überabzählbar viele $i \in I$, so dass für alle $E \in \mathcal{E}_{\text{count}}(x)$ der $i$-te Faktor mit $X_i$ identisch ist. Für ein solches $i$ enthielte dann die offene Umgebung $\pi_i^{-1}(U_i)$ von $x$ kein $E \in \mathcal{E}_{\text{count}}(x)$, was im Widerspruch dazu steht, dass $\mathcal{E}_{\text{count}}(x)$ eine Umgebungsbasis von $x$ ist.* #

Wir wollen nun untersuchen, welche Auswirkungen die Abzählbarkeitsaxiome auf die Topologie haben. Axiom $(A_1)$ hat mit der Konvergenz von Folgen zu tun, wie wir sie schon in Abschnitt 2.2 untersucht haben. Eine wichtige Feststellung dort war Proposition 2.34, dass also das Folgenkriterium für Stetigkeit für Abbildungen zwischen allgemeinen topologischen Räumen nicht gilt. Mit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom lässt sich dieser Missstand heilen:

[8] Eine mögliche Wahl ist etwa die Funktion, die wir erhalten, wenn wir die angegebenen Stützstellen linear verbinden, wobei wir die Notation so verstehen, dass für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \ll 0$ der Koeffizient $a_n(x)$ verschwindet.

**Satz 2.79** (Folgenkriterium für Stetigkeit in einem Punkt). *Seien $X, X'$ topologische Räume, so dass $X$ das erste Abzählbarkeitsaxiom $(A_1)$ erfüllt, $f : X \to X'$ eine Abbildung und $x \in X$ ein Punkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$f$ ist stetig in $x$.*

(ii) *$f$ ist folgenstetig in $x$.*

*Beweis.* Nach Proposition 2.34 genügt es zu zeigen, dass Aussage (ii) Aussage (i) impliziert. Seien dafür $X, X'$ topologische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung, die in einem Punkt $x \in X$ folgenstetig ist. Weiter sei

$$\mathcal{B}_{\text{count}}(x) = \{B_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \subseteq \mathcal{U}(x)$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von $x$ in $X$. Wir betrachten nun ein $U' \in \mathcal{U}(f(x))$ und müssen nach Definition 1.24 zeigen, dass es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq U'$ gibt. Nehmen wir an, kein $U \in \mathcal{U}(x)$ erfüllte diese Bedingung, insbesondere kein endlicher Durchschnitt $B_1(x) \cap \ldots \cap B_n(x)$ von Mengen in $\mathcal{B}_{\text{count}}(x)$. Dann gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B_1(x) \cap \ldots \cap B_n(x)$ mit $f(x_n) \notin U'$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergierte gegen $x$,

*denn:* Da $\mathcal{B}_{\text{count}}(x)$ eine Umgebungsbasis von $x$ in $X$ ist, gibt es für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $B_i(x) \subseteq U$. Nach Konstruktion gälte dann $x_n \in U$ für alle $n \geq i$. Die Behauptung folgte nun direkt aus Definition 2.31. #

Andererseits konvergierte die Folge $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ – ebenfalls nach Definition 2.31 – nicht gegen $f(x)$, da kein Folgeglied in $U' \in \mathcal{U}(f(x))$ läge. Im Widerspruch zu unserer Voraussetzung wäre somit $f$ nicht folgenstetig in $x$. Es folgt, dass es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq U'$ geben muss, also die Stetigkeit von $f$ in $x$. □

Wichtiger als die Folgenstetigkeit ist der Begriff der Folgenkompaktheit, wie wir ihn in Abschnitt 2.3 untersucht haben. Eine wichtige Feststellung war Beispiel 2.59, dass sich also Kompaktheit und Folgenkompaktheit in beliebigen topologischen Räumen gegenseitig nicht bedingen. Mit $(A_1)$ lässt sich auch dieses Problem mildern:

**Satz 2.80.** *Jeder kompakte topologische Raum $X$, der das erste Abzählbarkeitsaxiom $(A_1)$ erfüllt, ist folgenkompakt.*

*Beweis.* Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$. Dann muss es einen Punkt $x_0 \in X$ geben, so dass in jeder Umgebung von $x_0$ in $X$ unendlich viele Glieder von $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ liegen,

*denn:* Wäre dem nicht so, dann besäße jeder Punkt aus $X$ eine – ohne Einschränkung offene – Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder enthielte. Sei nun $X = \bigcup_{x\in X} U(x)$ mit $U(x) \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in X$ eine Überdeckung von $X$ aus solchen offenen Umgebungen. Da $X$ kompakt ist, existiert dann eine endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup_{i=1}^{r} U(x_i)$. Nach Annahme lägen nun in jedem $U(x_i)$ und damit auch in $X$ nur endlich viele Folgenglieder, was nicht sein kann. #

Da $X$ Axiom $(A_1)$ erfüllt, hat $x_0$ eine abzählbare Umgebungsbasis

$$\mathcal{B}_{\text{count}}(x_0) := \{B_k(x_0) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Sei $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $x_{i_k} \in B_1(x_0) \cap \ldots \cap B_k(x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Analog zu der Argumentation im Beweis des Folgenkriteriums 2.79 folgt, dass diese Teilfolge gegen $x_0$ konvergiert und insgesamt also die Folgenkompaktheit von $X$. $\square$

**Korollar 2.81.** *Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(a) *$X$ ist kompakt.*

(b) *$X$ ist folgenkompakt.*

*Beweis.* Nach Bemerkung 2.75 erfüllt $X$ Axiom $(A_1)$. Wir können daher Satz 2.80 anwenden und erhalten, dass jeder kompakte metrische Raum folgenkompakt ist.

Sei nun umgekehrt $X$ ein folgenkompakter metrischer Raum mit einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Zu jedem $x \in X$ und jedem $i \in I$ mit $x \in U_i$ setzen wir

$$R_i(x) := \sup\{r \in \mathbb{R}_{>0} \mid U_r(x) \subseteq U_i\}.$$

Zu jedem $x \in X$ existiert dann ein $i(x) \in I$, so dass $R_{i(x)}(x) > 1$ gilt oder $U_{2R_{i(x)}(x)}(x)$ in keinem $U_i$ mit $i \in I$ enthalten ist,

*denn:* Sei $x \in X$ fest gewählt. Gilt $R_i(x) > 1$ für ein $i \in I$ mit $x \in U_i$, so wählen wir $i(x) := i$ und erhalten $R_{i(x)}(x) > 1$. Für den Rest der Argumentation können wir daher annehmen, für alle $i \in I$ mit $x \in U_i$ gelte $R_i(x) \leq 1$. Die offensichtlich nichtleere Menge

$$\{R_i(x) \mid i \in I \text{ mit } x \in U_i\} \quad \subseteq \mathbb{R}_{>0}$$

ist daher nach oben beschränkt und besitzt nach dem Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen ein Supremum. Insbesondere existiert dann ein $i(x) \in I$ mit $x \in U_{i(x)}$, so dass $R_{i(x)}(x)$ größer als die Hälfte dieses Supremums ist. Die offene Kugel $U_{2R_{i(x)}(x)}(x)$ hat dann einen größeren Radius als alle (konzentrischen) offenen Kugeln $U_{R_i(x)}(x)$ mit $i \in I$ und $x \in U_i$ und ist deshalb in keinem dieser $U_i$ enthalten. Die Behauptung folgt, da $U_{2R_{i(x)}(x)}(x)$ in den $U_i$ mit $x \notin U_i$ von vorneherein nicht enthalten sein kann. #

Nehmen wir nun an, die offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ hätte keine endliche Teilüberdeckung. Dann könnten wir induktiv eine Folge $(x_i)_{i\in I}$ mit

$$x_{i+1} \notin U_{i(x_1)} \cup \ldots \cup U_{i(x_i)}$$

wählen. Nach Konstruktion wäre dann der Abstand eines Folgenglieds $x_i$ zu jedem seiner Nachfolger größer als 1 oder aber so groß, dass die offene Kugel mit dem doppelten Abstand als Radius in keine der Überdeckungsmengen passte. Da wir $X$ als folgenkompakt vorausgesetzt haben, gäbe es zudem eine konvergente Teilfolge von $(x_{i_k})_{k\in I}$ mit einem Grenzwert $x \in X$. Sei $0 < r < 1$ eine Zahl mit $U_r(x) \subseteq U_{i(x)}$. Wegen der Konvergenz der Teilfolge lägen deren Glieder für $k \gg 0$ sogar in $U_{\frac{1}{2}}(x) \cap U_{\frac{r}{5}}(x)$, was nach Konstruktion der Folge nicht möglich ist. Daher muss unsere Annahme, die beliebig gewählte offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ hätte keine endliche Teilüberdeckung, falsch sein. Der folgenkompakte metrische Raum $X$ ist daher auch (überdeckungs-)kompakt. $\square$

Soviel zum ersten Abzählbarkeitsaxiom $(A_1)$. Welche Auswirkungen das zweite Abzählbarkeitsaxiom $(A_2)$ hat, wollen wir an dieser Stelle nicht ausführen, und merken nur an, dass wir es in Abschnitt 2.6 für die Definition des immens wichtigen Begriffs der Mannigfaltigkeit heranziehen werden. Viele bedeutende Sätze der Differentialtopologie wären ohne $(A_2)$ nicht mehr richtig.

## 2.5 Die Trennungsaxiome

Die Trennungsaxiome sind Axiome in dem Sinn, dass man bei der Definition eines topologischen Raums einige dieser Bedingungen zusätzlich fordern kann, um einen stärker eingeschränkten Begriff des topologischen Raums zu erhalten. Die moderne Herangehensweise besteht allerdings darin, die Axiome des topologischen Raums ein für alle Mal zu fixieren – wie wir das in Abschnitt 1.1 getan haben – und dann von bestimmten Arten topologischer Räume zu sprechen. Der Name „Trennungsaxiom" für diese Bedingungen hat sich aber bis heute erhalten.

**Definition 2.82.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Für Teilmengen $U, V \subseteq X$ sagen wir:*

$$\begin{aligned} & U, V \textit{ sind } \textbf{\textit{durch offene Mengen trennbar}} \\ :\Longleftrightarrow\quad & \textit{es gibt offene Teilmengen } O_U, O_V \overset{\circ}{\subseteq} X \textit{ mit } U \subseteq O_U,\ V \subseteq O_V \textit{ und } O_U \cap O_V = \emptyset. \end{aligned}$$

*und*

$$\begin{aligned} & U, V \textit{ sind } \textbf{\textit{durch eine stetige Funktion trennbar}} \\ :\Longleftrightarrow\quad & \textit{es gibt eine stetige Funktion } f : X \to [0,1] \textit{ mit } f(U) = \{0\} \textit{ und } f(V) = \{1\}. \end{aligned}$$

**Definition 2.83.** *Mit der Nomenklatur aus Definition lassen sich in einem beliebigen topologischen Raum $X$ folgende **Trennungsaxiome** formulieren:*

- $(T_2)$ *Je zwei verschiedene Punkte in $X$ lassen sich durch offene Mengen trennen.*
- $(T_3)$ *Jeder Punkt in $X$ und jede abgeschlossene Teilmenge von $X$, die den Punkt nicht enthält, lassen sich durch offene Mengen trennen.*
- $(T_{3a})$ *Jeder Punkt in $X$ und jede abgeschlossene Teilmenge von $X$, die den Punkt nicht enthält, lassen sich durch eine stetige Funktion trennen.*
- $(T_4)$ *Je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von $X$ lassen sich durch offene Mengen trennen.*
- $(T_{4a})$ *Je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von $X$ lassen sich durch eine stetige Funktion trennen.*

*Es ist klar, dass die Trennungsaxiome topologische Eigenschaften sind, dass also mit $X$ auch alle zu $X$ homöomorphen topologischen Räume diese Eigenschaft aufweisen. Für alle $n \in \{2, 3, 3a, 4, 4a\}$ sagen wir dann:*

$$X \textit{ ist ein } (T_n)\textbf{\textit{-Raum}} \quad :\Longleftrightarrow \quad X \textit{ erfüllt } (T_n).$$

*Gängige Benamungen sind zudem:*

- *Ein topologischer Raum $X$ mit Axiom $(T_2)$ heißt ein **Hausdorff-Raum**.*
- *Ein topologischer Raum $X$ mit den Axiomen $(T_2)$ und $(T_3)$ heißt **regulär**.*
- *Ein topologischer Raum $X$ mit den Axiomen $(T_2)$ und $(T_{3a})$ heißt **vollständig regulär**.*
- *Ein topologischer Raum $X$ mit den Axiomen $(T_2)$ und $(T_4)$ heißt **normal**.*
- *Ein topologischer Raum $X$, bei dem alle Unterräume normal sind, heißt **vollständig normal**.*

Weitere Trennungsaxiome wie etwa $(T_0)$, $(T_1)$ oder $(T_5)$ sind weniger wichtig und werden von uns daher nicht studiert. In den folgenden Unterabschnitten wollen wir kurz topologische Räume untersuchen, in denen bestimmte Trennungsaxiome gelten.

### 2.5.1 Hausdorff-Räume

Von den genannten Trennungsaxiomen ist die Hausdorff-Eigenschaft $(T_2)$ die mit Abstand bedeutendste. Wir werden sie in diesem Unterabschnitt ausführlich studieren. Zunächst betrachten wir einige Beispiele, angefangen bei den erwarteten:

**Beispiel 2.84.** *Sei $X$ eine beliebige Menge. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Der diskrete Raum $X_{\text{disk}}$ ist stets Hausdorff'sch,*

*denn: Für beliebige $x, y \in X_{\text{disk}}$ gilt $\{x\}, \{y\} \subseteq X$. Je zwei verschiedene Punkte $x \neq y \in X_{\text{disk}}$ lassen sich daher stets durch offene Mengen trennen.* #

(b) *Ist der indiskrete Raum $X_{\text{indisk}}$ Hausdorff'sch, so gilt $|X| < 2$,*

*denn: Gilt $|X| \geq 2$, so gibt es zwei verschiedene Punkte $x \neq y \in X_{\text{indisk}}$. Nach Konstruktion der indiskreten Topologie gilt aber $\mathcal{U}(x) = \{X_{\text{indisk}}\} = \mathcal{U}(y)$, so dass sich $x$ und $y$ nicht durch offene Mengen trennen lassen.* #

Das folgende Beispiel zeigt, dass sich eine fest vorgegebene Menge sowohl mit einer Hausdorff'schen als auch mit einer nicht-Hausdorff'schen Topologie ausstatten lassen kann:

**Beispiel 2.85.** *Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$. Statten wir diesen mit der Standardtopologie aus, so ist er Hausdorff'sch,*

*denn: Für beliebige $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $\varepsilon := \frac{1}{3} \cdot \|x - y\|$. Dann lassen sich $x$ und $y$ offensichtlich durch die offenen Mengen $U_\varepsilon(x)$ und $U_\varepsilon(y)$ trennen.* #

*Andererseits lässt sich $\mathbb{R}^n$ auch mit der in der Algebraischen Geometrie gebräuchlichen **Zariski-Topologie** ausstatten,*[9] *indem wir setzen:*

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist **Zariski-abgeschlossen*** $:\Longleftrightarrow$ *$A$ ist gemeinsame Nullstellenmenge endlich vieler*

[9] Es lässt sich leicht überprüfen, dass die Menge der Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ die Axiome $(T_1^{(A)})$ – $(T_3^{(A)})$ erfüllt und so tatsächlich eine Topologie definiert.

*Polynome aus* $\mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]$.

*Die Zariski-Topologie auf* $\mathbb{R}^n$ *ist nicht Hausdorff'sch,*

*denn: Wir führen den Beweis an dieser Stelle nur für* $n = 1$. *Die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von* $\mathbb{R}$ *sind bekanntlich* $\mathbb{R}$ *selbst und alle endlichen Teilmengen von* $\mathbb{R}$. *Sind daher* $U, V \subseteq \mathbb{R}$ *Zariski-offen und nichtleer, so gibt es endliche Mengen* $E, F \subseteq \mathbb{R}$ *mit* $U = \mathbb{R} \setminus E$ *und* $V = \mathbb{R} \setminus F$. *Es folgt*

$$U \cap V = \mathbb{R} \setminus (E \cup F) \neq \emptyset.$$

*Je zwei nichtleere, Zariski-offene Teilmengen der reellen Zahlen schneiden sich also. Insbesondere lassen sich keine zwei voneinander verschiedenen Punkte durch offene Mengen trennen.* #

Aus einer leicht herzuleitenden aber wichtigen Eigenschaft von Hausdorff-Räumen können wir Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Trennungseigenschaften herleiten. Diese ist:

**Bemerkung 2.86.** *In Hausdorff-Räumen sind alle Punkte abgeschlossen,*

*denn: Seien* $X$ *ein Hausdorff-Raum und* $x \in X$ *ein beliebiger Punkt. Dann lässt sich* $\{x\}$ *von jeder weiteren einelementigen Menge* $\{y\}$ *mit* $y \in X$ *durch offene Mengen trennen, für alle* $y \in X$ *gibt es also* $O_{x,y}, O_y \overset{\circ}{\subseteq} X$ *mit* $x \in O_{x,y}$, $y \in O_y$ *und* $O_{x,y} \cap O_y = \emptyset$. *Insbesondere gilt* $x \notin O_y$ *für alle* $O_y$ *mit* $y \in X$ *und somit*

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} O_y \quad \overset{\bullet}{\subseteq} X.$$

#

Aus Bemerkung 2.86 folgt unmittelbar:

**Korollar 2.87.** *Sei* $X$ *ein Hausdorff-Raum. Dann gelten die Aussagen:*

(a) *Ist* $X$ *ein* $(T_4)$*-Raum, so auch ein* $(T_3)$*-Raum. Insbesondere sind normale Räume regulär.*

(b) *Ist* $X$ *ein* $(T_{4a})$*-Raum, so auch ein* $(T_{3a})$*-Raum.*

Nun wollen wir studieren, wie sich die Hausdorff-Eigenschaft mit den bislang eingeführten Konstruktionen verträgt und welche Auswirkungen sie auf die in den letzten Abschnitten eingeführten Eigenschaften topologischer Räume hat:

**Bemerkung 2.88.** *Unterräume von Hausdorff-Räumen sind Hausdorff'sch,*

*denn: Das folgt sofort aus den Definitionen 1.50 und 2.83 für die Unterraumtopologie und die Hausdorff-Eigenschaft* $(T_2)$. #

**Bemerkung 2.89.** *Stetige Bilder von Hausdorff-Räumen sind nicht immer Hausdorff'sch,*

*denn: Für eine beliebige Menge* $X$ *mit* $|X| > 1$ *ist die Identität* $\mathrm{id} : X_{\mathrm{disk}} \to X_{\mathrm{indisk}}$ *stetig und surjektiv, aber nach Beispiel 2.84 ist* $X_{\mathrm{indisk}}$ *im Gegensatz zu* $X_{\mathrm{disk}}$ *nicht Hausdorff'sch.* #

**Proposition 2.90.** *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer topologischer Räume und sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ der Produktraum bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist Hausdorff'sch.*

(ii) *$X_i$ ist Hausdorff'sch für alle $i \in I$.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i), sei also $X$ Hausdorff'sch. Seien $i \in I$ und $a := (a_j)_{j\in I} \in X$ beliebig, aber fest gewählt. Dann betrachten wir die Abbildung

$$f_i : \begin{cases} X_i & \to X, \\ x_i & \mapsto (x_j)_{j\in I} \end{cases} \quad \text{mit } x_j := \begin{cases} x_i & \text{für } j = i, \\ a_j & \text{für } j \neq i. \end{cases}$$

Diese ist offensichtlich injektiv und außerdem stetig,

*denn:* Für alle $j \in I$ ist offensichtlich die Verkettung

$$\pi_j \circ f_i : \begin{cases} X_i & \to X_j, \\ x_i & \mapsto \begin{cases} x_i & \text{für } j = i, \\ a_j & \text{für } j \neq i \end{cases} \end{cases}$$

stetig. Die Stetigkeit von $f_i$ folgt mit dem Stetigkeitskriterium für die Produktopologie 1.69. #

Durch Einschränken auf das Bild erhalten wir die bijektive stetige Abbildung

$$f_i|^{f_i(X_i)} : X_i \to f_i(X_i).$$

Die Umkehrabbildung derselben ist nach Konstruktion

$$\pi_i|_{f_i(X_i)} : f_i(X_i) \to X_i$$

und ist offensichtlich ebenfalls stetig. Es folgt, dass $X_i$ zum Unterraum $f_i(X_i) \subseteq X$ homöomorph ist. Da $f_i(X_i)$ als Unterraum des Hausdorff-Raums $X$ nach Bemerkung 2.88 ebenfalls Hausdorff'sch ist, ist demnach auch $X_i$ Hausdorff'sch. Da $i \in I$ beliebig gewählt war, haben wir somit Aussage (ii) gezeigt.

Gelte nun umgekehrt (ii), seien also sämtliche Räume $X_i$ Hausdorff'sch. Seien weiter $x = (x_i)_{i\in I}, y = (y_i)_{i\in I} \in X$ zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $x_j \neq y_j$. Da wir den zugehörigen Faktor $X_j$ als Hausdorff'sch vorausgesetzt haben, gibt es $U_j, V_j \overset{\circ}{\subseteq} X_j$ mit $x_j \in U_j, y_j \in V_j$ und $U_j \cap V_j = \emptyset$. Wir setzen nun

$$U := \prod_{i\in I} U_i \quad \text{mit } U_i = X_i \text{ für } i \neq j,$$
$$V := \prod_{i\in I} V_i \quad \text{mit } V_i = X_i \text{ für } i \neq j.$$

Als Elementarmengen sind $U$ und $V$ offene Teilmengen von $X$ und nach Konstruktion gelten $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Da $x \neq y \in X$ beliebig gewählt waren, haben wir somit gezeigt, dass $X$ ein Hausdorff-Raum ist. Das ist Aussage (i). □

Die Hausdorff-Eigenschaft führt auch dazu, dass Teilmengen eines topologischen Raums, die durch stetige Gleichungen mit Bild in einem Hausdorff-Raum gegeben sind, abgeschlossen sind:

**Proposition 2.91.** *Seien $X$ ein beliebiger topologischer Raum, $X'$ ein Hausdorff-Raum und $f, g : X \to X'$ stetige Abbildungen. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Die Diagonale $\Delta_{X'} := \{(x', x') \in X' \times X' \mid x' \in X'\}$ ist abgeschlossen in $X' \times X'$.*

(b) *Die Menge $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen in $X$.*

(c) *Der **Graph** $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ von $f$ ist abgeschlossen in $X \times X'$.*

(d) *Gibt es eine dichte Teilmenge $U \subseteq X$ mit $f|_U = g|_U$, so gilt bereits $f = g$.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Es gilt

$$\begin{aligned}
X' \text{ Hausdorff'sch} \quad &\overset{(T_2)}{\iff} \quad \forall x' \neq y' \in X' \ \exists x' \in U' \overset{\circ}{\subseteq} X', y' \in V' \overset{\circ}{\subseteq} X' : U' \cap V' = \emptyset \\
&\iff \quad \forall x' \neq y' \in X' \ \exists x' \in U' \overset{\circ}{\subseteq} X', y' \in V' \overset{\circ}{\subseteq} X' : (U' \times V') \cap \Delta_{X'} = \emptyset \\
&\iff \quad \forall x' \neq y' \in X' \ \exists (x', y') \in E = U' \times V' \text{ Elementarmenge des Pro-} \\
&\qquad\quad \text{duktraums } X' \times X' \text{ mit } U', V' \overset{\circ}{\subseteq} X' \text{ und } E \cap \Delta_{X'} = \emptyset \\
&\iff \quad \forall (x', y') \in (X' \times X') \setminus \Delta_{X'} \ \exists (x', y') \in E \text{ Elementarmenge von} \\
&\qquad\quad X' \times X' \text{ mit } E \cap \Delta_{X'} = \emptyset. \\
&\overset{1.71}{\iff} \quad (X' \times X') \setminus \Delta_{X'} \overset{\circ}{\subseteq} X' \times X' \\
&\iff \quad \Delta_{X'} \overset{\bullet}{\subseteq} X' \times X',
\end{aligned}$$

so dass wir sogar etwas mehr als behauptet bewiesen haben, aber eben insbesondere auch Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) betrachten wir die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} X & \to X' \times X', \\ x & \mapsto (f(x), g(x)). \end{cases}$$

Wegen des Stetigkeitskriteriums für die Produktopologie 1.69 und der Stetigkeit von $\pi_1 \circ \varphi = f$ und $\pi_2 \circ \varphi = g$ ist $\varphi$ stetig. Mit Proposition 1.25 und der in Aussage (a) gezeigten Abgeschlossenheit von $\Delta_{X'}$ folgt

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = \{x \in X \mid \varphi(x) \in \Delta_{X'}\} = \varphi^{-1}(\Delta_{X'}) \overset{\bullet}{\subseteq} X$$

und somit Behauptung (b).

Zum Beweis von Behauptung (c) betrachten wir die Abbildung

$$\psi : \begin{cases} X \times X' & \to X' \times X', \\ (x, y) & \mapsto (f(x), y). \end{cases}$$

Wegen des Stetigkeitskriteriums für die Produktopologie 1.69 und der Stetigkeit von $\pi_1 \circ \psi = f \circ \pi_1$ und $\pi_2 \circ \psi = \pi_2$ ist $\psi$ stetig. Mit Proposition 1.25 und der in Aussage (a) gezeigten Abgeschlossenheit von $\Delta_{X'}$ folgt

$$G_f = \{(x, y) \in X \times X' \mid f(x) = y\} = \{x \in X \mid \psi(x) \in \Delta_{X'}\} = \psi^{-1}(\Delta_{X'}) \subseteq_{\bullet} X$$

und somit Behauptung (c).

Schließlich zeigen wir Behauptung (d). Dafür betrachten wir die bereits in Teil (b) untersuchte Menge

$$V := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\},$$

die nach Voraussetzung $U \subseteq V \subseteq X$ mit der gegebenen dichten Teilmenge $U \subseteq X$ erfüllt. Es folgt

$$X \overset{1.16}{=} \overline{U} \overset{1.12}{\subseteq} \overline{V} \overset{\text{(b)}}{=} V$$

und somit $V = X$. Das zeigt Behauptung (d). □

In Hausdorff-Räumen besagt die Konvergenz von Folgen und Filtern aus Abschnitt 2.2 endlich das, was wir uns die ganze Zeit über schon vorgestellt haben:

**Proposition 2.92.** *Sei $X$ ein Hausdorff-Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Jede konvergente Folge in $X$ konvergiert gegen genau einen Punkt.*

(b) *Jeder konvergente Filter auf $X$ konvergiert gegen genau einen Punkt.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Sei dafür $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ für zwei Punkte $x, y \in X$. Nach Definition 2.31 gibt es daher für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ und jedes $V \in \mathcal{U}(y)$ ein $N = N(U, V) \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U \cap V$ für alle $n \geq N$; insbesondere gilt $U \cap V \neq \emptyset$. Da $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ beliebig gewählt waren, ergibt sich, dass sich $x$ und $y$ nicht durch offene Mengen trennen lassen. Da $X$ Hausdorff'sch ist, folgt $x = y$ und also Behauptung (a).

Der Beweis von Behauptung (b) ist im Prinzip derselbe wie der für Aussage (a); es lohnt sich allerdings der Vergleich der Details. Sei diesmal $\mathcal{F}$ ein konvergenter Filter auf $X$ mit $\mathcal{F} \to x$ und $\mathcal{F} \to y$ für zwei Punkte $x, y \in X$. Dann gilt $\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(y) \subseteq \mathcal{F}$ und also auch $\mathcal{U}(x) \cup \mathcal{U}(y) \subseteq \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ als Filter Axiom $(F_3)$ erfüllt liegt somit für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und alle $V \in \mathcal{U}(y)$ der Durchschnitt $U \cap V$ ebenfalls in $\mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ zudem Axiom $(F_1)$ genügt, folgt $U \cap V \neq \emptyset$. Da $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ beliebig gewählt waren, ergibt sich, dass sich $x$ und $y$ nicht durch offene Mengen trennen lassen. Da $X$ Hausdorff'sch ist, folgt $x = y$ und also Behauptung (b). □

Die schöne Synchronität in den Beweisen soll nicht vergessen machen, dass wir unsere Gründe hatten, in Abschnitt 2.2 die Konvergenz von Filtern statt derjenigen von Folgen zu betrachten. Tatsächlich lässt sich Proposition 2.92 nur für Filter umkehren:

**Proposition 2.93.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Konvergiert jede konvergente Folge in $X$ gegen genau einen Punkt, so muss $X$ dennoch nicht Hausdorff'sch sein.*

(b) *Konvergiert jeder konvergente Filter auf $X$ gegen genau einen Punkt, so ist $X$ Hausdorff'sch.*

*Beweis.* Zum Beweis von Behauptung (a) müssen wir einen topologischen Raum $X$ angeben, der nicht Hausdorff'sch ist und in dem dennoch jede konvergente Folge gegen genau einen Punkt konvergiert. Wir betrachten dafür $X = \mathbb{R}$ mit der ***coabzählbaren Topologie***[10]

$$\mathcal{O}_{\text{cocount}} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ ist abzählbar}\}.$$

Der topologische Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{cocount}})$ ist nicht Hausdorff'sch, da der Durchschnitt zweier beliebiger Umgebungen bezüglich dieser Topologie überabzählbar und somit insbesondere nichtleer ist. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $X$ und gelte $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ für ein $x \in X$. Nach Konstruktion der coabzählbaren Topologie ist $\mathbb{R} \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n \neq x\} \in \mathcal{O}_{\text{cocount}}$ eine offene Umgebung von $x$. Nach Definition 2.31 gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n$ für alle $n \geq N$ in dieser offenen Umgebung liegt. Es folgt, dass sich nur endlich viele Folgenglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $x$ unterscheiden können. Eine Folge, die bis auf endlich viele Glieder konstant den Wert $x$ annimmt, konvergiert aber auch nur gegen $x$, denn für jedes $y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$ ist $\mathbb{R} \setminus \{x\} \in \mathcal{O}_{\text{cocount}}$ eine offene Umgebung. Da also im nicht-Hausdorff'schen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{cocount}})$ jede konvergente Folge gegen genau einen Punkt konvergiert, haben wir Behauptung (a) gezeigt.

Um Behauptung (b) zu beweisen, nehmen wir an, $X$ sei nicht Hausdorff'sch, und zeigen, dass es dann auf $X$ einen konvergenten Filter gibt, der gegen mindestens zwei verschiedene Punkte konvergiert. Sei $X$ also nicht Hausdorff'sch. Dann gibt es Punkte $x \neq y \in X$, die sich nicht durch offene Mengen trennen lassen, und für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ ist der Durchschnitt $U \cap V$ nichtleer. Nach dem Filterbasiskriterium 1.45 ist die Menge

$$\mathcal{B} := \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}(x), V \in \mathcal{U}(y)\}$$

eine Filterbasis auf $X$; die Gültigkeit von $(FB_1)$ folgt dabei aus der vorherigen Überlegung und die Gültigkeit von $(FB_2)$ ist offensichtlich. Ist $\mathcal{F}$ der zu $\mathcal{B}$ gehörige Filter, so gilt $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}(x), \mathcal{U}(y)$ und somit $\mathcal{F} \to x$ und $\mathcal{F} \to y$. Somit haben wir einen Filter auf $X$ gefunden, der gegen die verschiedenen Punkte $x, y \in X$ konvergiert, und Behauptung (b) ist bewiesen. □

Im Umfeld des Kompaktheitsbegriffs ermöglicht die Hausdorff-Eigenschaft gleich eine ganze Reihe interessanter neuer Ergebnisse:

**Proposition 2.94.** *Seien $X$ ein Hausdorff-Raum und $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Für einen beliebigen Punkt $x \in X \setminus K$ lassen sich $K$ und $\{x\}$ durch offene Mengen trennen.*

(b) *$K$ ist abgeschlossen in $X$.*

[10] Es lässt sich leicht überprüfen, dass die Menge der $O \in \mathcal{O}$ die Axiome $(T_1^{(O)})$ – $(T_3^{(O)})$ erfüllt und so tatsächlich eine Topologie definiert.

*Beweis.* Sei $x \in X \setminus K$ fest gewählt. Da $X$ Hausdorff'sch ist, existieren für jedes $y \in K$ offene Umgebungen

$$y \in U_y \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X \text{ und } x \in V_y \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X \quad \text{mit } U_y \cap V_y = \emptyset.$$

Nach Konstruktion ist $(U_y)_{y \in K}$ eine offene Überdeckung von $K$, so dass wegen der Kompaktheit von $K$ eine endliche Teilmenge $K_{\text{fin}} \subseteq K$ mit

$$K \subseteq O_K := \bigcup_{y \in K_{\text{fin}}} U_y \quad \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X$$

existiert. Weiter erfüllt die wegen der Endlichkeit von $K_{\text{fin}}$ offene Umgebung

$$x \in O_x := \bigcap_{y \in K_{\text{fin}}} V_y \quad \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X$$

von $x$ nach Konstruktion $O_x \cap O_K = \emptyset$. Nach Definition 2.82 lassen sich also $\{x\}$ und $K$ durch offene Mengen trennen, so dass wir Behauptung (a) gezeigt haben.

Zum Beweis von Behauptung (b) bemerken wir zunächst, dass es nach Aussage (a) für jedes $x \in X \setminus K$ offene Teilmengen

$$O_x, O_K \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X \quad \text{mit } x \in O_x,\ K \subseteq O_K \text{ und } O_x \cap K \subseteq O_x \cap O_K = \emptyset$$

gibt. Es folgt $O_x \subseteq X \setminus K$ und also $x \in (X \overset{\circ}{\setminus} K)$. Da $x \in X \setminus K$ beliebig gewählt war, erhalten wir $X \setminus K \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X$ und also auch $K \mathrel{\underset{\bullet}{\subseteq}} X$. Damit ist Behauptung (b) gezeigt. □

**Satz 2.95** (Satz von Heine-Borel). *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist kompakt.*

(ii) *$X$ ist beschränkt und abgeschlossen.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i), sei also $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Nach Beispiel 2.85 ist $\mathbb{R}^n$ Hausdorff'sch, so dass mit Teil (b) von Proposition 2.94 die Abgeschlossenheit von $X$ folgt. Das Kompaktum $X$ ist aber auch beschränkt,

*denn:* Offensichtlich ist durch $(U_k(0))_{k \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n$, und somit auch von $X$, gegeben. Wegen der Kompaktheit von $X$ gibt es dann eine endliche Teilmenge $\mathbb{N}_{\text{fin}} \subseteq \mathbb{N}$ mit

$$X \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}_{\text{fin}}} U_m(0) = U_{\max \mathbb{N}_{\text{fin}}}(0).$$

#

Insgesamt haben wir gezeigt, dass $X$ abgeschlossen und beschränkt ist, also (ii).

Gelte nun umgekehrt (ii), sei also $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Wegen der Beschränktheit von $X$ gibt es dann ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $X \subseteq [-a, a]^n$. Die Teilmenge $[-a, a]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt und abgeschlossen, *denn:* Nach Proposition 2.57 ist das Einheitsintervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Ähnlich wie im Beweis von Beispiel 1.27 sieht man leicht $[-a,a] \cong [0,1]$ ein, was nach Teil (a) von Proposition 2.62 die Kompaktheit von $[-a,a]$ bedingt. Nach dem Satz von Tychonow 2.63 ist dann auch das Produkt $[-a,a]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und nach Teil (b) von Proposition 2.94 auch abgeschlossen. #

Aus $X \overset{\bullet}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ und $X \subseteq [-a,a]^n \overset{\bullet}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ folgt mit Teil (b) von Beispiel 1.51 unmittelbar $X \overset{\bullet}{\subseteq} [-a,a]^n$. Wegen der Kompaktheit von $[-a,a]^n$ und Korollar 2.61 ist daher $X$ kompakt, es gilt also Aussage (i). □

**Korollar 2.96** (Satz von Maximum und Minimum). *Seien $X$ ein nichtleerer kompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existieren $\max_{x\in X} f(x)$ und $\min_{x\in X} f(x)$ in $f(X)$.*

*Beweis.* Nach Teil (a) von Proposition 2.62 ist $f(X)$ kompakt, nach dem Satz von Heine-Borel 2.95 somit abgeschlossen und beschränkt. Wegen der Beschränktheit von $f(X)$ und dem Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen existieren $\sup_{x\in X} f(x)$ und $\inf_{x\in X} f(x)$ und wegen der Abgeschlossenheit von $X$ sind diese Größen in $f(X)$ enthalten. □

**Proposition 2.97.** *Seien $X$ ein kompakter topologischer Raum, $X'$ ein Hausdorff-Raum und $f : X \to X'$ eine stetige Abbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *$f$ ist abgeschlossen.*

(b) *Ist $f$ zusätzlich bijektiv, so ist $f$ ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Zum Beweis von Behauptung (a) betrachten wir eine abgeschlossene Teilmenge $A \overset{\bullet}{\subseteq} X$. Wegen der Kompaktheit von $X$ und Korollar 2.61 ist dann $A \subseteq X$ kompakt. Nach Proposition 2.62 ist dann auch $f(A) \subseteq X'$ kompakt. Da $X'$ Hausdorff'sch ist und nach Teil (b) von Proposition 2.94 ist schließlich $f(A) \overset{\bullet}{\subseteq} X'$ abgeschlossen. Da $A \overset{\bullet}{\subseteq} X$ beliebig gewählt war, folgt die Abgeschlossenheit von $f$ und somit Behauptung (a).

Behauptung (b) folgt sofort aus Aussage (a) und Proposition 1.29. □

**Satz 2.98** (Homomorphiesatz für kompakte Räume). *Seien $X$ ein kompakter topologischer Raum, $X'$ ein Hausdorff-Raum und $f : X \to X'$ eine stetige Abbildung. Dann ist die im Homomorphiesatz für topologische Räuem 1.61 definierte Abbildung*

$$\tilde{f} : X/_{\sim_f} \to f(X)$$

*ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Nach dem Homomorphiesatz für topologische Räume 1.61 ist die Abbildung $\tilde{f}$ stetig und bijektiv. Die Quotientenabbildung $p : X \to X/_{\sim_f}$ ist nach Konstruktion der Quotiententopologie stetig und surjektiv, so dass $X/_{\sim_f}$ wegen der Kompaktheit von $X$ und Proposition 2.62 ebenfalls kompakt ist. Da $X'$ Hausdorff'sch ist und nach Bemerkung 2.88 ist auch $f(X)$ wieder Hausdorff'sch. Insgesamt dürfen wir nun also Teil (b) von Proposition 2.97 anwenden und erhalten die Homöomorphie von $\tilde{f}$. □

**Proposition 2.99.** *Die Alexandrow-Kompaktifizierung eines lokalkompakten Hausdorff-Raumes ist selbst wieder Hausdorff'sch.*

*Beweis.* Seien $X$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, $X_\infty$ seine Alexandrow-Kompaktifizierung und $x \neq y \in X_\infty$. Wir wollen zeigen, dass sich $x$ und $y$ durch (in $X_\infty$) offene Mengen trennen lassen, und unterscheiden dafür zwei Fälle der Lage von $x, y \in X_\infty$:

**Fall 1: $x, y \in X$.** Da $X$ Hausdorff'sch ist, lassen sich $x$ und $y$ dann durch (in $X$) offene Mengen trennen. Die Behauptung in diesem Fall folgt, da in $X$ offene Mengen nach Definition 2.69 auch in $X_\infty$ offen sind.

**Fall 2: $x \in X, y = \infty$ (oder analog umgekehrt).** Wegen der Lokalkompaktheit von $X$ gibt es eine kompakte Umgebung $K \subseteq X$ von $x$. Nach Definition 1.5 enthält $K$ eine in $X$ offene Umgebung $O_x$ von $x$, die nach Definition 2.69 auch in $X_\infty$ offen ist. Andererseits ist $X$ Hausdorff'sch, so dass $K$ nach Proposition 2.94 abgeschlossen in $X$ ist. Setzen wir daher $\infty \in O_\infty := X_\infty \setminus K \subseteq X_\infty$, so ist das Komplement $X \setminus O_\infty = K$ kompakt und abgeschlossen und nach Definition 2.69 ist $O_\infty$ eine in $X_\infty$ offene Umgebung von $\infty$. Wegen

$$O_x \cap O_\infty \subseteq K \cap (X_\infty \setminus K) = \emptyset$$

lassen sich also $x$ und $y = \infty$ in $X_\infty$ durch die offenen Mengen $O_x$ und $O_\infty$ trennen und die Behauptung folgt auch in diesem Fall. □

In Hinsicht auf die Beziehung der verschiedenen Trennungsaxiome untereinander und insbesondere als Überleitung zu den folgenden Unterabschnitten ist abschließend für diesen Unterabschnitt noch der folgende Satz interessant:

**Satz 2.100.** *Kompakte Hausdorff-Räume sind regulär und normal.*

*Beweis.* Sei $X$ ein kompakter Hausdorff-Raum.

Wir zeigen zunächst die Regularität von $X$ und betrachten dafür $A \mathrel{\overset{\bullet}{\subseteq}} X$ und $x \in X \setminus A$. Wegen der Kompaktheit von $X$ und Korollar 2.61 ist $A$ kompakt. Nach Teil (a) von Proposition 2.94 lassen sich daher $A$ und $\{x\}$ durch offene Mengen trennen. Da $A \mathrel{\overset{\bullet}{\subseteq}} X$ und $x \in X \setminus A$ beliebig gewählt waren, haben wir somit nachgewiesen, dass $X$ Axiom $(T_3)$ erfüllt. Da $X$ Hausdorff'sch ist, folgt die Regularität.

Nun weisen wir die Normalität von $X$ nach und betrachten dafür $\emptyset \neq A, B \mathrel{\overset{\bullet}{\subseteq}} X$ mit $A \cap B = \emptyset$. Wegen der Kompaktheit von $X$ und Korollar 2.61 sind $A$ und $B$ kompakt. Nach Teil (a) von Proposition 2.94 lassen sich daher für jedes $x \in B$ das Kompaktum $A$ und $\{x\}$ durch offene Mengen trennen; es gibt also $O_{A,x}, O_x \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X$ mit $A \subseteq O_{A,x}$, $x \in O_x$ und $O_{A,x} \cap O_x = \emptyset$. Lassen wir $x$ ganz $B$ durchlaufen, erhalten wir so eine offene Überdeckung

$$B \subseteq \bigcup_{x \in B} O_x.$$

Wegen der Kompaktheit von $B$ gibt es eine endliche Teilmenge $B_{\text{fin}} \subseteq B$ mit

$$B \subseteq O_B := \bigcup_{x \in B_{\text{fin}}} O_x \quad \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X.$$

Weiter erfüllt die wegen der Endlichkeit von $B_{\text{fin}}$ offene Menge

$$A \subseteq O_A := \bigcap_{x \in B_{\text{fin}}} O_{A,x} \quad \overset{\circ}{\subseteq} X$$

nach Konstruktion $O_A \cap O_B = \emptyset$. Nach Definition 2.82 lassen sich also $A$ und $B$ durch offene Mengen trennen. Da $\emptyset \neq A, B \overset{\bullet}{\subseteq} X$ mit $A \cap B = \emptyset$ beliebig gewählt waren, haben wir somit nachgewiesen, dass $X$ Axiom $(T_4)$ erfüllt. Da $X$ Hausdorff'sch ist, folgt die Normalität. □

### 2.5.2 Reguläre Räume

**Proposition 2.101.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist ein $(T_3)$-Raum.*

(ii) *Für jedes $x \in X$ ist die Menge der abgeschlossenen Umgebungen von $x$ in $X$ eine Umgebungsbasis von $x$.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i), sei also $X$ ein $(T_3)$-Raum. Weiter seien $x \in X$ ein beliebiger Punkt und $U \subseteq X$ eine beliebige Umgebung von $x$. Zum Beweis von Aussage (ii) gilt es nun eine abgeschlossene Umgebung von $x$ zu finden, die in $U$ enthalten ist. Nach Definition 1.5 gibt es ein $x \in V \subseteq U$ mit $V \overset{\circ}{\subseteq} X$. Für dieses folgt $x \notin X \setminus V$ und $X \setminus V \overset{\bullet}{\subseteq} X$. Da $X$ nach Voraussetzung Axiom $(T_3)$ erfüllt, gibt es somit

$$O_x, O_{X \setminus V} \overset{\circ}{\subseteq} X \quad \text{mit } x \in O_x,\ X \setminus V \subseteq O_{X \setminus V} \text{ und } O_x \cap O_{X \setminus V} = \emptyset.$$

Nach Konstruktion ist $X \setminus O_{X \setminus V}$ abgeschlossen und enthält daher mit $O_x$ auch seinen Abschluss $\overline{O_x}$. Es folgt

$$x \in O_x \subseteq \overline{O_x} \subseteq X \setminus O_{X \setminus V} \subseteq X \setminus (X \setminus V) = V \subseteq U,$$

so dass $\overline{O_x}$ eine abgeschlossene Umgebung von $x$ ist, die in $U$ enthalten ist. Wir haben somit Aussage (ii) hergeleitet.

Gelte nun umgekehrt (ii). Weiter seien $x \in X$ und $x \notin A \overset{\bullet}{\subseteq} X$ gegeben. Dann ist nach Konstruktion $X \setminus A$ eine offene Umgebung von $x$ in $X$ und enthält nach (ii) eine abgeschlossene Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$. Wir erhalten $\mathring{U}, X \setminus U \overset{\circ}{\subseteq} X$ mit $x \in \mathring{U}$, $A = X \setminus (X \setminus A) \subseteq X \setminus U$ und $\mathring{U} \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Da $x \in X$ und $x \in A \overset{\bullet}{\subseteq} X$ beliebig gewählt waren, folgt, dass $X$ Axiom $(T_3)$ erfüllt, also (i). □

**Korollar 2.102.** *Unterräume von regulären Räumen sind regulär.*

*Beweis.* Da wir mit Bemerkung 2.88 bereits wissen, dass Unterräume von Hausdorff-Räumen Hausdorff'sch sind, genügt es zum Beweis des Korollars zu zeigen, dass sich die Gültigkeit von Axiom $(T_3)$ auf Unterräume vererbt.

Seien also $X$ ein $(T_3)$-Raum, $X' \subseteq X$ ein Unterraum, $x' \in X'$ ein Punkt und $U' \subseteq X'$ eine Umgebung von $x'$ in $X'$. Nach Proposition 2.101 ist dann die Menge der abgeschlossenen Umgebungen von $x'$ in $X$ eine Umgebungsbasis von $x'$, insbesondere existiert eine (in $X$) abgeschlossene Umgebung $A' \subseteq U'$ von $x'$. Nach Konstruktion der Unterraumtopologie 1.50 übersetzen sich diese Eigenschaften nach $X'$, so dass wegen der freien Wahl von $x' \in X'$ und der Umgebung $U' \subseteq X'$ von $x'$ und wieder nach Proposition 2.101 auch $X'$ Axiom $(T_3)$ erfüllt. □

**Korollar 2.103.** *Lokalkompakte Hausdorff-Räume sind regulär.*

*Beweis.* Die Alexandrow-Kompaktifizierung $X_\infty$ von $X$ ist nach dem Satz von Alexandrow 2.70 kompakt und nach Proposition 2.99 Hausdorff'sch. Nach Satz 2.100 ist $X_\infty$ also regulär. Das Korollar folgt mit Korollar 2.102. □

**Korollar 2.104.** *Sei $X$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Dann ist für jedes $x \in X$ die Menge der kompakten Umgebungen von $x$ eine Umgebungsbasis von $x$.*

*Beweis.* Seien $X$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $x \in X$ ein beliebiger Punkt. Nach Korollar 2.103 ist dann $X$ regulär und nach Proposition 2.101 ist die Menge der abgeschlossenen Umgebungen von $x$ eine Umgebungsbasis von $x$ in $X$. Für ein beliebiges $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es demnach eine Umgebung $A \overset{\bullet}{\subseteq} X$ von $x$, die in $U$ enthalten ist. Da $X$ lokalkompakt ist, besitzt zudem $x$ eine kompakte Umgebung $K \subseteq X$. Es folgt

$$x \in (A \cap K) \subseteq A \subseteq U,$$

wobei $A \cap K$ als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums $K$ nach Korollar 2.61 selbst kompakt und als Durchschnitt zweier Umgebungen von $x$ selbst eine solche ist. □

Als Spezialfall der regulären Räume wollen wir nun vollständig reguläre Räume genauer studieren. Die folgende Proposition legitimiert diese Idee:

**Proposition 2.105.** *Axiom $(T_{3a})$ impliziert Axiom $(T_3)$. Insbesondere ist jeder vollständig reguläre topologische Raum regulär.*

*Beweis.* Sei $X$ ein $(T_{3a})$-Raum und seien $x \in X$ und $x \notin A \overset{\bullet}{\subseteq} X$ beliebig. Dann lassen sich $\{x\}$ und $A$ durch eine stetige Funktion trennen, es gibt also eine stetige Funktion

$$f : X \to [0,1] \quad \text{mit } f(x) = 0 \text{ und } f(A) = \{1\}.$$

Wegen $[0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1] \overset{\circ}{\subseteq} [0,1]$ und der Stetigkeit von $f$ gilt $f^{-1}([0, \frac{1}{2})), f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \overset{\circ}{\subseteq} X$ und nach Konstruktion gilt

$$x \in f^{-1}([0, \frac{1}{2})), A \subseteq f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \text{ und } f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \cap f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset.$$

Die Mengen $\{x\}$ und $A$ lassen sich also durch offene Mengen trennen. Da $x \in X$ und $x \notin A \overset{\bullet}{\subseteq} X$ beliebig gewählt waren, erhalten wir die Gültigkeit von Axiom $(T_3)$ in $X$ und also die Proposition. □

**Proposition 2.106.** *Unterräume von vollständig regulären Räumen sind vollständig regulär.*

*Beweis.* Da wir mit Bemerkung 2.88 bereits wissen, dass Unterräume von Hausdorff-Räumen Hausdorff'sch sind, genügt es zum Beweis des Korollars zu zeigen, dass sich die Gültigkeit von Axiom $(T_{3a})$ auf Unterräume vererbt.

Seien also $X$ ein $(T_{3a})$-Raum, $X' \subseteq X$ ein beliebiger Unterraum, $A' \overset{\bullet}{\subseteq} X'$ eine abgeschlossene Teilmenge und $x' \in X' \setminus A'$. Nach Definition der Unterraumtopologie gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $A \overset{\bullet}{\subseteq} X$ mit $A' = A \cap X'$ und wegen $x' \in X'$ gilt $x' \in X \setminus A$. Da $X$ Axiom $(T_{3a})$ erfüllt, lassen sich $x'$ und $A$ durch eine stetige Funktion trennen, es gibt also eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(x') = 0$ und $f(A) = \{1\}$. Die nach Proposition 1.53 stetige eingeschränkte Funktion $f|_{X'} : X' \to [0,1]$ erfüllt nach Konstruktion $f|_{X'}(x') = 0$ und $f|_{X'}(A') = \{1\}$. Im Unterraum $X'$ lassen sich also $x'$ und $A'$ durch eine stetige Funktion trennen. Da die abgeschlossene Teilmenge $A' \overset{\bullet}{\subseteq} X'$ und der Punkt $x' \in X' \setminus A'$ beliebig gewählt waren, haben wir die Gültigkeit von Axiom $(T_{3a})$ im beliebig gewählten Unterraum $X' \subseteq X$ nachgewiesen. Die Proposition folgt. □

Vollständig analog zum Beweis von Korollar 2.103 folgt:

**Korollar 2.107.** *Lokalkompakte Hausdorff-Räume sind vollständig regulär.*

Vollständig reguläre Räume haben eine unerwartete Charakterisierung:

**Satz 2.108.** *Ein topologischer Raum ist genau dann vollständig regulär, wenn er homöomorph zu einem Unterraum eines* ***Würfels*** *$W_I = \prod_{i \in I}[0,1]$ ist.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir das folgende Lemma:

**Lemma 2.109.** *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein vollständig regulärer Raum und sei $(f_i)_{i \in I}$ die Familie der stetigen Abbildungen $X \to [0,1]$. Dann ist $\mathcal{O}$ die Initialtopologie bezüglich $(f_i)_{i \in I}$.*

*Beweis.* Sei $\mathcal{O}'$ die Initialtopologie auf $X$ bezüglich $(f_i)_{i \in I}$, also die gröbste Topologie auf $X$, bezüglich derer alle $f_i$ stetig sind. Nach Konstruktion von $\mathcal{O}$ folgt dann sofort $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$. Weiter gilt $W_i := f_i^{-1}([0,1)) \in \mathcal{O}'$ für alle $i \in I$ nach Konstruktion der Initialtopologie und wegen $[0,1) \overset{\circ}{\subseteq} [0,1]$. Aber die Menge $\{W_i\}_{i \in I}$ ist eine Basis von $\mathcal{O}$,

*denn:* Der topologische Raum $X$ erfüllt Axiom $(T_{3a})$. Für ein beliebiges $O \in \mathcal{O}$ und ein beliebiges $x \in O$ lassen sich daher $\{x\}$ und $X \setminus O$ durch eine stetige Funktion trennen, es gibt also ein $f_{j,x}$ aus der Familie $(f_i)_{i \in I}$ mit $f_{j,x}(x) = 0$ und $f_{j,x}(X \setminus O) = \{1\}$. Da somit $f_{j,x}$ außerhalb von $O$ nur den Wert 1 annimmt, folgt

$$x \in W_{j,x} := f_{j,x}^{-1}([0,1)) \subseteq O,$$

also

$$O = \bigcup_{x \in O} W_{j,x}$$

und nach Definition 1.37 insgesamt die Behauptung. #

Es folgt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ und insgesamt das Lemma. □

Nun können wir auch den Satz beweisen:

*Beweis von Satz 2.108.* Beliebige Unterräume beliebiger Würfel $W_I = \prod_{i \in I}[0,1]$ sind vollständig regulär,

*denn:* Nach Proposition 2.57 ist das Einheitsintervall $[0,1]$ kompakt und nach Beispiel 2.85 und Bemerkung 2.88 auch Hausdorff'sch. Nach dem Satz von Tychonow 2.63 und Proposition 2.90 ist darum jeder beliebige Würfel $W_I$ kompakt und Hausdorff'sch. Nach Beispiel 2.66 ist jeder kompakte topologische Raum lokalkompakt, so dass $W_I$ nach Korollar 2.107 vollständig regulär ist. Nach Proposition 2.106 trifft dies dann auch auf alle Unterräume von $W_I$ zu. #

Sei umgekehrt $X$ ein vollständig regulärer topologischer Raum und sei $(f_i)_{i \in I}$ wie in Lemma 2.109 die Familie der stetigen Abbildungen $X \to [0,1]$. Die induzierte Abbildung

$$f := (f_i)_{i \in I} : \begin{cases} X & \to W_I = \prod_{i \in I}[0,1], \\ x & \mapsto \big(f_i(x)\big)_{i \in I} \end{cases}$$

ist stetig nach dem Stetigkeitskriterium für die Produkttopologie 1.69. Die Abbildung $f$ ist aber auch injektiv,

*denn:* Seien $x \neq y \in X$ gegeben. Im Hausdorff-Raum $X$ ist nach Bemerkung 2.86 die einpunktige Menge $\{y\}$ abgeschlossen. Da $X$ ein $(T_{3a})$-Raum ist, lassen sich somit $\{x\}$ und $\{y\}$ durch eine stetige Funktion trennen, es gibt also ein $f_j$ aus der Familie $(f_i)_{i \in I}$ mit $f_j(x) = 0$ und $f_j(y) = 1$. Nach Konstruktion von $f$ folgt $f(x) \neq f(y)$ und insgesamt die Injektivität von $f$. #

Die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(X) \to X$ ist stetig,

*denn:* Der Würfel $W_I$ ist der Produktraum bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_i : W_I \to [0,1]$ für alle $i \in I$. Nach Konstruktion gilt $f_i = \pi_i \circ f$ und also auch $\pi_i|_{f(X)} = f_i \circ f^{-1}$ für alle $i \in I$. Nach Lemma 2.109 trägt $X$ die Initialtopologie bezüglich $(f_i)_{i \in I}$. Nach dem Stetigkeitskriterium für die Initialtopologie 1.49 ist daher $f^{-1}$ genau dann stetig, wenn dies auf $\pi_i|_{f(X)}$ für alle $i \in I$ zutrifft. Die Behauptung folgt, da nach Konstruktion der Produkttopologie für alle $i \in I$ die kanonischen Projektionen $\pi_i$ stetig sind und nach Proposition 1.53 auch die Einschränkungen $\pi_i|_{f(X)}$. #

Insgesamt haben wir gezeigt, dass $f$ ein Homöomorphismus von $X$ auf den Unterraum $f(X) \subseteq W_I$ ist. □

**Korollar 2.110.** *Ein vollständig regulärer topologischer Raum erfüllt genau dann das zweite Abzählbarkeitsaxiom $(A_2)$, wenn er homöomorph zu einem Unterraum von $W_{\mathbb{N}}$ ist.*

*Beweis.* Wegen der in Proposition 2.57 gezeigten Kompaktheit des Einheitsintervalls $[0,1]$ und dem Satz von Tychonow 2.63 ist $W_{\mathbb{N}}$ ein kompakter metrischer Raum. Nach den Bemerkungen

2.75 und 2.72 erfüllt daher $W_{\mathbb{N}}$ und jeder seiner Unterräume Axiom $(A_2)$. Dies zeigt die erste Implikation des Korollars.

Für die andere Implikation betrachten wir nun einen vollständig regulären topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$, der Axiom $(A_2)$ erfüllt, und eine abzählbare Basis $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{O}$. Dann ist in jeder weiteren Basis $\{C_i \mid i \in I\}$ von $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis enthalten,

*denn:* Wir betrachten die (abzählbare) Menge

$$T := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{ es gibt ein } i \in I \text{ mit } B_m \subseteq C_i \subseteq B_n\},$$

wählen zu jedem $(m,n) \in T$ ein festes solches $C_i$ aus und nennen es $C_{mn}$. Nach Definition 1.37 ist jede offene Menge in $X$ eine Vereinigung gewisser $B_n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, dass

$$\{C_{mn} \mid (m,n) \in T\} \subseteq \{C_i \mid i \in I\}$$

eine Basis von $\mathcal{O}$ ist, genügt es daher nachzuweisen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $B_n$ die Vereinigung der darin enthaltenen $C_{mn}$ ist. Sei nun also $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt und $x \in B_n$ beliebig. Nach Definition 1.37 ist $B_n$ eine Vereinigung gewisser $C_i$ mit $i \in I$, es gilt also

$$x \in C_i \subseteq B_n \quad \text{für ein } i \in I$$

und analog

$$x \in B_m \subseteq C_i \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}.$$

Es folgt $(m,n) \in T$, also $C_i = C_{mn}$ und $x \in B_m \subseteq C_{mn} \subseteq B_n$. Wir haben daher gezeigt, dass es für jedes $x \in B_n$ ein $C_{mn}$ mit $x \in C_{mn} \subseteq B_n$ gibt und dass $B_n$ deshalb die Vereinigung dieser $C_{mn}$ ist. #

Ist nun $(f_i)_{i\in I}$ die Familie der stetigen Abbildungen $X \to [0,1]$, so ist wie im Beweis von Lemma 2.109 durch

$$\{W_i\}_{i\in I} \quad \text{mit } W_i := f_i^{-1}([0,1))$$

eine Basis von $\mathcal{O}$ gegeben. Nach dem soeben Gezeigten gibt es somit eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $f_n : X \to [0,1]$, so dass auch

$$\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit } W_n := f_n^{-1}([0,1))$$

eine Basis von $\mathcal{O}$ ist. Das Korollar folgt, da die Beweise von Lemma 2.109 und Satz 2.108 unverändert auch mit dieser Basis von $\mathcal{O}$ richtig bleiben. □

### 2.5.3 Normale Räume

Im Gegensatz zur Hausdorff-Eigenschaft (vgl. Proposition 2.90) vererbt sich Normalität nicht auf beliebige Produkte:

**Beispiel 2.111.** *Produkte von normalen topologischen Räumen sind nicht immer normal,*

*denn: Als diskreter Raum ist $\mathbb{N}_{\text{disk}}$ offensichtlich normal; das Argument hierfür ist komplett analog zum Beweis von Teil (a) von Beispiel 2.84. Wir betrachten nun das Produkt*

$$X := \prod_{i\in[0,1]} X_i \quad \text{mit } X_i := \mathbb{N}_{\text{disk}} \text{ für alle } i \in [0,1]$$

*und wollen zeigen, dass $X$ nicht normal ist. Dafür studieren wir in $X$ für $N \in \{1,2\}$ die Teilmengen*

$$A_N := \{x = (x_i)_{i\in[0,1]} \in X \mid \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \setminus \{N\} \text{ gibt es höchstens ein } i \in [0,1] \text{ mit } x_i = n\}.$$

*Wegen*

$$X \setminus A_N = \bigcup_{\substack{i\neq j\in[0,1]\\ n\in\mathbb{N}\setminus\{N\}}} \left(\pi_i^{-1}(n) \cap \pi_j^{-1}(n)\right) \quad \overset{\circ}{\subseteq} X \quad \text{für } N \in \{1,2\}$$

*gilt $A_1, A_2 \overset{\bullet}{\subseteq} X$ und wegen der Überabzählbarkeit von $[0,1]$ auch $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Zum Beweis unserer Behauptung genügt es zu zeigen, dass sich $A_1$ und $A_2$ nicht durch offene Mengen trennen lassen. Dafür untersuchen wir beliebige, aber für den Rest des Beweises fest vorgegebene $O_1, O_2 \overset{\circ}{\subseteq} X$ mit $A_1 \subseteq O_1$ und $A_2 \subseteq O_2$ und zeigen, dass diese einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.*

*Jedes Paar $(I_{\text{fin}}, x)$ aus einer endlichen Teilmenge $I_{\text{fin}} \subseteq [0,1]$ und einem Punkt $x = (x_i)_{i\in[0,1]} \in X$ definiert eine Elementarmenge*

$$E_{I_{\text{fin}}}(x) := \bigcap_{i\in I_{\text{fin}}} \pi_i^{-1}(x_i) \quad \in \mathcal{E}(x).$$

*Wir werden diese Schreibweise im Laufe des Beweises mehrfach benutzen.*

*Wir definieren zunächst induktiv eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x^{(n)} \in A_1$ und wählen als Induktionsanfang*

$$\begin{aligned} x^{(1)} &:= (x_i^{(1)})_{i\in[0,1]} \in A_1 && \text{mit } x_i^{(1)} := 1 \text{ für alle } i \in [0,1], \\ I_1 &:= \{i_\nu\}_{\nu=1}^{1} \subseteq [0,1] && \text{mit } E_{I_1}(x^{(1)}) = \pi_{i_1}^{-1}(x_{i_1}) = \pi_{i_1}^{-1}(1) \subseteq O_1, \end{aligned}$$

*wobei es eine solche endliche Menge $I_1 \subseteq [0,1]$ gibt, da $\mathcal{E}(x^{(1)})$ nach Korollar 1.72 eine Umgebungsbasis von $x^{(1)}$ in $X$ ist und Korollar 1.40 gilt. Sind nun für ein $n \in \mathbb{N}$ ein Punkt $x^{(n)} \in A_1$ und eine endliche Teilmenge $I_n = \{i_\nu\}_{\nu=1}^{n} \subseteq [0,1]$ gegeben, so setzen wir*

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &:= (x_i^{(n+1)})_{i\in[0,1]} \in A_1 && \text{mit } x_i^{(n+1)} := \begin{cases} \nu & \text{für } i = i_\nu \in I_n, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \text{ für alle } i \in [0,1], \\ I_{n+1} &:= \{i_\nu\}_{\nu=1}^{n+1} \subseteq [0,1]^{11} && \text{mit } E_{I_{n+1}}(x^{(n+1)}) \subseteq O_1, \end{aligned}$$

*wobei die Wahl mit dem allerselben Argument möglich ist wie im Induktionsanfang.*

*Wir setzen nun zusätzlich*

$$y := (y_i)_{i\in[0,1]} \in A_2 \qquad \text{mit } y_i := \begin{cases} \nu & \text{für } i = i_\nu \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n, \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[11] Diese Bedingung beinhaltet $I_{n+1} = I_n \cup \{i_{n+1}\} \supseteq I_n$.

*Da $\mathcal{E}(y)$ nach Korollar 1.72 eine Umgebungsbasis von $y$ in $X$ ist, gibt es eine endliche Menge $J_{\text{fin}} \subseteq [0,1]$ mit $E_{J_{\text{fin}}}(y) \subseteq O_2$ und also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $J_{\text{fin}} \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = J_{\text{fin}} \cap I_m$. Mit diesem $m$ setzen wir*

$$z := (z_i)_{i\in[0,1]} \in X \qquad \text{mit } z_i := \begin{cases} \nu & \text{für } i = i_\nu \in I_m, \\ 1 & \text{für } i \in I_{m+1} \setminus I_m, \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Es gilt dann*

$$z_i = y_i = \nu \qquad \text{für } i = i_\nu \in J_{\text{fin}} \cap I_m = J_{\text{fin}} \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,$$

$$z_i = y_i = 2 \qquad \text{für } i \in J_{\text{fin}} \setminus I_m$$

*und also $z \in E_{J_{\text{fin}}}(y) \subseteq O_2$. Andererseits gilt auch*

$$z_i = x_i^{(m+1)} = \nu \qquad \text{für } i = i_\nu \in I_m,$$
$$z_i = x_i^{(m+1)} = 1 \qquad \text{für } i \in I_{m+1} \setminus I_m$$

*und also $z \in E_{I_{m+1}}(x^{(m+1)}) \subseteq O_1$. Es folgt $z \in O_1 \cap O_2$ und also $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Da $O_1, O_2 \Subset X$ mit $A_1 \subseteq O_1$ und $A_2 \subseteq O_2$ beliebig gewählt waren, folgt damit die Behauptung.* #

Im Gegensatz zu den bisher untersuchten Trennungseigenschaften (vgl. Bemerkung 2.88, Korollar 2.102 und Proposition 2.106) vererbt sich Normalität zudem nicht auf Unterräume:

**Beispiel 2.112.** *Unterräume von normalen topologischen Räumen sind nicht immer normal,*

*denn: Wie bereits im Beweis von Satz 2.108 eingesehen, ist der Würfel $W_{[0,1]}$ kompakt und Hausdorff'sch und nach Satz 2.100 somit normal.*

*Der Unterraum*

$$X' := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0,1]$$

*ist offensichtlich homöomorph zu $\mathbb{N}_{\text{disk}}$. Folglich ist der Unterraum $\prod_{i\in[0,1]} X' \subseteq W_{[0,1]}$ homöomorph zum Raum $\prod_{i\in[0,1]} \mathbb{N}_{\text{disk}}$, von dem wir bereits in Beispiel 2.111 gezeigt haben, dass er nicht normal ist.* #

Letzteres Vererbungsproblem ist natürlich der Grund, warum wir auch den eigenen Begriff der vollständigen Normalität eingeführt haben. Es gibt aber auch Eigenschaften im Kontext der Normalität, die schöner sind als in der Situation der regulären bzw. vollständig regulären Räume. So sind etwa die Begriffe der Trennbarkeit je zweier disjunkter, abgeschlossener Teilmengen durch offene Mengen einerseits und durch stetige Funktionen andererseits sind äquivalent; das ist das berühmte

**Satz 2.113** (Lemma von Urysohn). *Die Axiome $(T_4)$ und $(T_{4a})$ sind äquivalent.*

*Beweis.* Dass Axiom $(T_{4a})$ Axiom $(T_4)$ bedingt, zeigt man komplett analog zu Proposition 2.105.

Die umgekehrte Implikation ist deutlich schwerer zu zeigen. Wir betrachten einen topologischen Raum $X$, der Axiom $(T_4)$ erfüllt. Dann gilt die ***Zwischenschiebeeigenschaft***

Zu jedem $A \subseteq X$ und jedem $O \subseteq X$ mit $A \subseteq O$ gibt es ein $U \subseteq X$ mit $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O$,

*denn:* Da $X$ Axiom $(T_4)$ erfüllt, können wir die disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $A$ und $X \setminus O$ durch offene Mengen trennen, es gibt also

$$O_A, O_{X\setminus O} \subseteq X \quad \text{mit } A \subseteq O_A,\ X \setminus O \subseteq O_{X\setminus O} \text{ und } O_A \cap O_{X\setminus O} = \emptyset.$$

Insbesondere gilt $O_A \subseteq X \setminus O_{X\setminus O}$ und nach Bemerkung 1.12 somit auch

$$\overline{O_A} \subseteq \overline{X \setminus O_{X\setminus O}} = X \setminus O_{X\setminus O} \subseteq X \setminus (X \setminus O) = O.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir $U := O_A$ setzen.[12] #

Seien ab sofort $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ fest vorgegeben. Wir wollen nun die obige Zwischenschiebeeigenschaft nutzbringend einsetzen und betrachten dafür die Menge

$$D := \{\frac{r}{2^k} \mid r, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 0 \leq r \leq 2^k\}$$

der ***dyadischen Zahlen*** im Einheitsintervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Offenbar ist $D$ dicht in $[0,1]$ und abzählbar, wobei wir die Abzählung

$$\underbrace{0, 1}_{k=0}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{k=1}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}}_{k=2}, \underbrace{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}}_{k=3}, \ldots$$

fixieren wollen. Bezeichne $\tau_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ das $n$-te Element dieser Aufzählung. Dann gibt es $O_{\tau_n} \subseteq X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

- $A \subseteq O_0,\ O_1 \subseteq X \setminus B$,
- für alle $a, b \in \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ gilt: $a < b \implies \overline{O_a} \subseteq O_b$,[13]

*denn:* Wir beweisen die Behauptung induktiv. Für den Induktionsanfang wählen wir vermittels der zwei Mal angewendeten Zwischenschiebeeigenschaft $O_0, O_1 \subseteq X$ mit

$$A \subseteq O_0 \subseteq \overline{O_0} \subseteq X \setminus B \quad \text{und} \quad \overline{O_0} \subseteq O_1 \subseteq \overline{O_1} \subseteq X \setminus B.$$

[12] Das ist analog zur ersten Beweisrichtung von Proposition 2.101 und wird von uns nur deshalb nicht als entsprechende Proposition ausformuliert, weil wir keinen Begriff für Umgebungen abgeschlossener Mengen eingeführt haben.

[13] Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned} n = 3: &\quad A \subseteq O_0 \subseteq \overline{O_0} \subseteq O_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{O_{\frac{1}{2}}} \subseteq O_1 \subseteq X \setminus B, \\ n = 4: &\quad A \subseteq O_0 \subseteq \overline{O_0} \subseteq O_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{O_{\frac{1}{4}}} \subseteq O_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{O_{\frac{1}{2}}} \subseteq O_1 \subseteq X \setminus B. \end{aligned}$$

Nun gelte $n \geq 3$. Wir zeigen den Induktionsschritt und nehmen dafür an, es seien bereits $O_{\tau_1}, \ldots, O_{\tau_{n-1}} \overset{\circ}{\subseteq} X$ mit

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \overline{O_a} \subseteq O_b \quad \text{für alle } a, b \in \{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$$

bestimmt. Seien jetzt

$$\begin{aligned} c &\in \{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\} \text{ maximal mit } c < \tau_n, \\ d &\in \{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\} \text{ minimal mit } \tau_n < d. \end{aligned}$$

Dann ist insbesondere $c < d$ und nach Voraussetzung gilt $\overline{O_c} \subseteq O_d$. Nach der Zwischenschiebeeigenschaft gibt es daher ein $O_{\tau_n} \overset{\circ}{\subseteq} X$ mit

$$\overline{O_c} \subseteq O_{\tau_n} \subseteq \overline{O_{\tau_n}} \subseteq O_d.$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass diese Wahl von $O_{\tau_n}$ tatsächlich die Bedingung

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \overline{O_a} \subseteq O_b \quad \text{für alle } a, b \in \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$$

erfüllt. #

Es folgt

$$\tau < \sigma \quad \Longrightarrow \quad \overline{O_\tau} \subseteq O_\sigma \qquad \text{für alle } \tau, \sigma \in D, \tag{2.3}$$

*denn:* Schreiben wir $\tau = \tau_k$ und $\sigma = \tau_\ell$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$, so gilt mit $n := \max\{k, \ell\}$

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \overline{O_a} \subseteq O_b \quad \text{für alle } a, b \in \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$$

und insbesondere $\overline{O_\tau} \subseteq O_\sigma$. #

Zum Nachweis von Axiom $(T_{4a})$ definieren wir nun die Funktion

$$f : \begin{cases} X & \to \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \begin{cases} \inf\{\tau \in D \mid x \in O_\tau\} & \text{für } x \in O_1, \\ 1 & \text{für } x \notin O_1. \end{cases} \end{cases}$$

Es gelten dann $f(B) = \{1\}$ wegen $O_1 \subseteq X \setminus B$ und $f(A) = \{0\}$ wegen $A \subseteq O_0$. Es verbleibt somit die Stetigkeit von $f$ zu zeigen. Offensichtlich ist

$$\{[0, c) \mid 0 < c \leq 1\} \cup \{(c, 1] \mid 0 \leq c < 1\}$$

eine Subbasis der metrischen Topologie auf $[0, 1]$. Nach Teil (a) von Proposition 1.42 genügt es daher

$$f^{-1}\big([0, c)\big) \overset{\circ}{\subseteq} X \qquad \text{für } c \in [0, 1), \tag{2.4}$$
$$f^{-1}\big((c, 1]\big) \overset{\circ}{\subseteq} X \qquad \text{für } c \in (0, 1] \tag{2.5}$$

nachzuweisen. Tatsächlich gilt

$$f^{-1}\big([0,c)\big) = \bigcup_{\substack{\tau\in D\\ 0\le\tau<c}} O_\tau \quad \text{für } c\in[0,1),$$

*denn:* Sei zunächst $x \in f^{-1}\big([0,c)\big)$. Wegen $f(x) < 1$ gilt dann $x \in O_1$ und somit

$$0 \le f(x) = \inf\{\tau \in D \mid x \in O_\tau\} < c.$$

Da $D$ dicht in $[0,1]$ liegt und wegen (2.3) gibt es dann ein $\sigma \in D$ mit

$$0 \le f(x) \le \sigma < c \quad \text{und} \quad x \in O_\sigma.$$

Hieraus folgt offenbar die erste Inklusion der Behauptung.

Ist nun umgekehrt $x \in \bigcup_{\substack{\tau\in D\\ 0\le\tau<c}} O_\tau$, so gibt es ein $\tau \in D$ mit $0 \le \tau < c$ und $x \in O_\tau$. Hieraus folgt unmittelbar

$$f(x) = \inf\{\tau \in D \mid x \in O_\tau\} < c,$$

also $x \in f^{-1}\big([0,c)\big)$ und somit die zweite Inklusion der Behauptung. #

Hieraus folgt natürlich sofort (2.4). Andererseits gilt auch

$$f^{-1}\big((c,1]\big) = \bigcup_{\substack{\tau\in D\\ c<\tau\le 1}} \big(X \setminus \overline{O_\tau}\big) \quad \text{für } c\in(0,1],$$

*denn:* Sei zunächst $x \in f^{-1}\big((c,1]\big)$ und also $c \le f(x) < 1$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

**Fall 1:** $x \notin O_1$. Weil $D$ dicht in $[0,1]$ ist, existiert dann ein $\tau \in D$ mit $c < \tau < f(x) = 1$. Nach (2.3) folgt $\overline{O_\tau} \subseteq O_1$ und insbesondere $x \in X \setminus \overline{O_\tau}$. Hieraus folgt offenbar die erste Inklusion der Behauptung im ersten Fall.

**Fall 2:** $x \in O_1$. Weil $D$ dicht in $[0,1]$ ist, existieren dann $\sigma, \tau \in D$ mit

$$c < \sigma < \tau < f(x) = \inf\{\tau' \in D \mid x \in O_{\tau'}\} \le 1.$$

Es folgt $x \notin O_\tau$ und mit (2.3) auch $x \in X \setminus \overline{O_\sigma}$. Hieraus erhalten wir die erste Inklusion der Behauptung im zweiten Fall.

Ist nun umgekehrt $x \in \bigcup_{\substack{\tau\in D\\ c<\tau\le 1}} \big(X \setminus \overline{O_\tau}\big)$, so gibt es ein $\tau \in D$ mit $c < \tau \le 1$ und $x \notin \overline{O_\tau}$. Für ein beliebiges $\sigma \in D$ mit $\sigma < \tau$ gilt nach Konstruktion $O_\sigma \subseteq \overline{O_\sigma} \subseteq O_\tau \subseteq \overline{O_\tau}$ und folglich insbesondere $x \notin O_\sigma$. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

**Fall 1:** $x \in O_1$. Dann folgt $c < \tau \le \inf\{\tau' \in D \mid x \in O_{\tau'}\} = f(x) \le 1$ und also $x \in f^{-1}\big((c,1]\big)$.

**Fall 2:** $x \notin O_1$. Dann ist direkt $c < f(x) = 1$ und also auch hier $x \in f^{-1}\big((c,1]\big)$. #

Hieraus folgt (2.5), also die Stetigkeit von $f$ und somit, dass $X$ Axiom $(T_{4a})$ erfüllt. □

Mithilfe des Lemmas von Urysohn 2.113 lassen sich insbesondere auch solche topologische Räume genauer beschreiben, auf denen sich eine zur Topologie passende Metrik definieren lässt. Dieses als Metrisierungssatz von Urysohn bekannte Ergebnis wird als Satz 2.118 diesen Abschnitt abschließen. Es ist zuvor allerdings noch einiges an Vorbereitung vonnöten:

**Definition 2.114.** *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **metrisierbar**, wenn es auf $X$ eine Metrik gibt, so dass $\mathcal{O}$ die zugehörige metrische Topologie auf $X$ ist.*

Offensichtlich gilt:

**Bemerkung 2.115.** *Unterräume metrisierbarer topologischer Räume sind metrisierbar.*

**Proposition 2.116.** *Abzählbare Produkte metrisierbarer topologischer Räume sind metrisierbar.*

*Beweis.* Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie metrisierbarer topologischer Räume und sei $X := \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ der zugehörige Produktraum. Nach Voraussetzung lässt sich für jedes $i \in \mathbb{N}$ auf $X_i$ eine Metrik $d_i$ definieren. Dann ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ durch

$$d_i' : \begin{cases} X_i \times X_i & \to \mathbb{R}, \\ (x_i, y_i) & \mapsto \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)} \end{cases}$$

eine zu $d_i$ äquivalente Metrik auf $X_i$ gegeben,[14]

*denn:* Da $d_i$ diese Eigenschaften erfüllt, ist auch $d_i'$ positiv definit und symmetrisch. Die Dreiecksungleichung für $d_i'$ folgt aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichung für $d_i$ und dem monotonen Wachstum der reellen Funktion $f(t) = \frac{t}{1+t}$ für $t \geq 0$. Zusammengenommen ist $d_i'$ also eine Metrik auf $X_i$.

Weiter gilt offensichtlich

$$\frac{1}{2} \cdot \min\{1, d_i(x_i, y_i)\} \leq d_i'(x_i, y_i) = \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} \leq d_i(x_i, y_i) \quad \text{für alle } x_i, y_i \in X_i.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ folgt hieraus sofort

$$U_\varepsilon(x_i) = \{y_i \in X_i \mid d_i(x_i, y_i) < \varepsilon\} \subseteq \{y_i \in X_i \mid d_i'(x_i, y_i) < \varepsilon\} = U_\varepsilon'(x_i) \quad \text{für alle } x_i \in X_i$$

und für alle $\frac{1}{2} \geq \varepsilon > 0$ ebenso

$$U_\varepsilon'(x_i) = \{y_i \in X_i \mid d_i'(x_i, y_i) < \varepsilon\} \subseteq \{y_i \in X_i \mid d_i(x_i, y_i) < 2\varepsilon\} = U_{2\varepsilon}(x_i) \quad \text{für alle } x_i \in X_i.$$

Die Äquivalenz der Metriken bzw. der durch sie induzierten Topologien folgt nach Beispiel 1.7, da es somit für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass die bezüglich $d_i$ definierte $\varepsilon$-Umgebung um einen gegebenen Punkt die bezüglich $d_i'$ definierte $\delta$-Umgebung dieses Punktes liegt, und die Umkehrung genauso richtig ist. #

[14] Die Metriken $d_i'$ und $d_i$ definieren also dieselbe Topologie auf $X_i$.

Wir erhalten durch

$$d'\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\cdot d_i'(x_i,y_i) \quad \text{für alle } (x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$$

eine Metrik auf $X$ und die metrische Topologie bezüglich $d'$ ist gerade die Produkttopologie auf $X$,

*denn:* Die Eigenschaften der Metrik folgen unmittelbar aus den Metrikeigenschaften der $d_i'$. Mit der Ungleichung

$$d'\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \geq 2^{-i}\cdot d_i'(x_i,y_i) \quad \text{für alle } i\in\mathbb{N}$$

folgt die Stetigkeit aller Projektionen $\pi_i : X \to X_i$, so dass die Produkttopologie nach Definition 1.68 gröber ist als die von $d'$ erzeugte. Sei nun umgekehrt $O \subseteq X$ offen bezüglich $d'$ und sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in O$ beliebig. Nach Definition der metrischen Topologie gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in O$ für alle $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $d'\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) < \varepsilon$. Für jedes $j\in\mathbb{N}$ mit $\sum_{i=j+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt

$$\tilde{O} := \prod_{i=1}^{j} U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \times \prod_{i=j+1}^{\infty} X_i \quad \in \mathcal{E}\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\big)$$

und für $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \tilde{O}$ folgt

$$d'\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot\sum_{i=1}^{j} 2^{-i} + \sum_{i=j+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in O$. Somit enthält jedes bezüglich $d'$ offene $O \subseteq X$ zu jedem $(x_i)_{i\in I} \in O$ eine Elementarmenge von $X$ als Umgebung, lässt sich also als Vereinigung von Elementarmengen schreiben und ist daher offen in der Produkttopologie. Es folgt, dass die Produkttopologie feiner ist als die von $d'$ erzeugte Topologie und insgesamt die Behauptung. #

□

**Proposition 2.117.** *Metrisierbare topologische Räume sind normal.*

*Beweis.* Sei $(X,\mathcal{O})$ ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann gibt es eine Metrik $d$ auf $X$, so dass $\mathcal{O}$ die metrische Topologie bezüglich $d$ ist. Der Beweis der Hausdorff-Eigenschaft in Beispiel 2.85 lässt sich leicht auf metrische Räume verallgemeinern, so dass es im Weiteren ausreicht nachzuprüfen, dass $X$ Axiom $(T_4)$ erfüllt.

Es gilt nun noch nachzuweisen, dass $X$ Axiom $(T_4)$ erfüllt, dass sich also in $X$ je zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $A, B \overset{\bullet}{\subseteq} X$ durch offene Mengen trennen lassen. Dafür setzen wir

$$d(x,B) := \inf\{d(x,y) \mid y\in B\} \quad \text{für } x\in A \text{ fest gewählt} \tag{2.6}$$

und stellen fest, dass wegen $x \notin B$ und der Abgeschlossenheit von $B$ offensichtlich $d(x,B) > 0$ gilt. Wir erhalten

$$A \subseteq O_A := \bigcup_{x\in A} U_{\frac{d(x,B)}{2}}(x) \overset{\circ}{\subseteq} X.$$

Offenkundig lässt sich in gleicher Manier ein

$$B \subseteq O_B := \bigcup_{y \in B} U_{\frac{d(y,A)}{2}}(y) \overset{\circ}{\subseteq} X$$

finden. Zum Beweis der Proposition verbleibt, die Disjunktheit von $O_A$ und $O_B$ nachzuweisen. Diese gilt tatsächlich,

*denn:* Offensichtlich genügt es hierfür

$$U_{\frac{d(x,B)}{2}}(x) \cap U_{\frac{d(y,A)}{2}}(y) = \emptyset \quad \text{für alle } x \in A \text{ und alle } y \in B$$

zu zeigen. Nach Konstruktion gilt aber

$$d(x,y) \geq d(x,B) \quad \text{und} \quad d(x,y) = d(y,x) \geq d(y,A)$$

und also

$$d(x,y) \geq \frac{d(x,B)}{2} + \frac{d(y,A)}{2},$$

woraus sich mit der Dreiecksungleichung für $d$ die Behauptung ergibt. #

□

**Satz 2.118** (Metrisierungssatz von Urysohn)**.** *Sei $X$ ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom $(A_2)$ erfüllt. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist metrisierbar.*

(ii) *$X$ ist vollständig regulär.*

*Beweis.* Sei $X$ ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Ist $X$ metrisierbar, so nach Proposition 2.117 normal und erfüllt daher nach dem Lemma von Urysohn 2.113 die Axiome $(T_2)$ und $(T_{4a})$. Mit Korollar 2.87 folgt schließlich, dass $X$ vollständig regulär ist.

Ist $X$ umgekehrt vollständig regulär, so ist $X$ nach Korollar 2.110 homöomorph zu einem Unterraum von $W_{\mathbb{N}}$. Nach Bemerkung 2.115 ist das Einheitsintervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ metrisierbar. Nach Proposition 2.116 trifft dies dann auch auf $W_{\mathbb{N}}$ und wieder nach Bemerkung 2.115 somit auch auf $X$ zu. □

### 2.5.4 Beziehungen zwischen Trennungseigenschaften

Abschließend für diesen Abschnitt fassen wir die von uns nachgewiesenen Beziehungen zwischen Trennungseigenschaften in einem Diagramm zusammen:

$$\begin{tikzcd}
\text{vollständig normal} \arrow[d, Rightarrow] & \text{metrisierbar} \arrow[dl, Rightarrow, "2.117"'] & \text{homöom. zu Unterraum von } W_{\mathbb{N}} \arrow[dd, Leftrightarrow, dotted, "2.110 + (A_2)"] \\
\text{normal} \arrow[r, Leftrightarrow, "2.113"'] \arrow[d, Rightarrow, "2.87"] & (T_2)+(T_{4a}) \arrow[d, Rightarrow, "2.87"] & \\
\text{regulär} \arrow[d, Rightarrow] & \text{vollständig regulär} \arrow[l, Rightarrow, "2.105"'] \arrow[uu, dotted, bend right, "2.118 + (A_2)"'] \arrow[r, Leftrightarrow, "2.108"] & \text{homöom. zu Unterraum eines } W_I \\
\text{Hausdorff'sch} \arrow[uu, dotted, bend left, "2.100 + \text{kompakt}"] \arrow[ur, dotted, "2.107 + \text{lokalkompakt}"'] & &
\end{tikzcd}$$

## 2.6 Parakompaktheit und Lokaleuklidizität

**Definition 2.119.** *Sei X ein topologischer Raum. Eine Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X heißt **lokalendlich**, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt, die $U \cap U_i \neq \emptyset$ für nur endlich viele $i \in I$ erfüllt.*

**Definition 2.120.** *Sei X ein topologischer Raum. Für zwei Überdeckungen $(U_i)_{i\in I}$ und $(V_j)_{j\in J}$ von X sagen wir:*

$$\begin{aligned} & (U_i)_{i\in I} \text{ ist } \textbf{feiner} \text{ als } (V_j)_{j\in J} \ \big(\text{bzw. } (V_j)_{j\in J} \text{ ist } \textbf{gröber} \text{ als } (U_i)_{i\in I}\big) \\ :\Longleftrightarrow \quad & \text{Für alle } i \in I \text{ gibt es ein } j \in J \text{ mit } U_i \subseteq V_j. \end{aligned}$$

**Definition 2.121.** *Sei X ein topologischer Raum. Wir sagen:*

$$X \text{ ist } \textbf{parakompakt} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Zu jeder offenen Überdeckung } (V_j)_{j\in J} \text{ von } X \text{ existiert eine} \\ \text{lokalendliche, offene Überdeckung } (U_i)_{i\in I} \text{ von } X\text{, die feiner} \\ \text{als } (V_j)_{j\in J} \text{ ist.} \end{array}$$

Das offensichtliche Beispiel für parakompakte topologische Räume ist:

**Beispiel 2.122.** *Kompakte topologische Räume sind parakompakt,*

*denn: In einem kompakten topologischen Raum besitzt jede offen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung. Die Behauptung folgt, da endliche offene Überdeckungen auch lokalendlich sind und Teilüberdeckungen trivialerweise feiner als die ursprüngliche Überdeckung sind.* #

Tatsächlich ist Parakompaktheit aber eine weitverbreitete Eigenschaft:

**Satz 2.123** (Satz von Stone)**.** *Metrisierbare topologische Räume sind parakompakt.*

*Beweis.* Sei $X$ ein metrisierbarer topologischer Raum und sei $d$ eine Metrik auf $X$, die die Topologie von $X$ induziert. Weiter sei $\mathbf{U} := (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X$. Dann besitzt $X$ eine offene Überdeckung $\mathbf{V}$ von $X$, die sich als (höchstens) abzählbare Vereinigung lokalendlicher Familien[15] schreiben lässt und die feiner als $\mathbf{U}$ ist,

*denn:* Ohne Einschränkung sei die Indexmenge $I$ wohlgeordnet. Unter Ausnutzung der in (2.6) eingeführten Schreibweise für den Abstand eines Punktes zu einer Menge in einem metrischen Raum setzen wir für jedes $i \in I$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$A_{n,i} := \{x \in U_i \mid d(x, X \setminus U_i) \geq \frac{1}{2^n}\}.$$

Da $X \setminus U_i$ abgeschlossen ist, gilt $U_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,i}$. Weiter definieren wir

$$B_{n,i} := \{x \in A_{n,i} \mid x \notin A_{n+1,j} \text{ für alle } j < i\},$$
$$U_{n,i} := \{x \in X \mid d(x, B_{n,i}) < \frac{1}{2^{n+3}})\}.$$

Nach Konstruktion ist $U_{n,i} \overset{\circ}{\subseteq} X$ offen. Weiter gilt $U_{n,i} \subseteq U_i$, da es für jedes $x \in U_{n,i}$ ein $y \in B_{n,i} \subseteq A_{n,i}$ mit $d(x,y) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ gibt und also

$$d(x, X \setminus U_i) \geq d(y, X \setminus U_i) - d(x,y) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

gilt, also $x \in U_i$.

Für ein beliebiges $x \in X$ sei nun $i \in I$ der kleinste Index mit $x \in U_i$. Wegen $U_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,i}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{n,i}$. Nach Definition von $i$ liegt $x$ dann bereits in $B_{n,i}$ und insbesondere in $U_{n,i}$. Setzen wir $\mathbf{V}_n := (U_{n,i})_{i\in I}$, so ist demnach $\mathbf{V} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{V}_n$ eine offene Überdeckung von $X$. Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass $\mathbf{V}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ lokalendlich ist. Dafür betrachten wir $i < j \in I$ und $x \in B_{n,i}$ sowie $y \in B_{n,j}$. Es gelten dann nach Konstruktion $x \notin A_{n+1,j}$ und $y \in A_{n,j}$, also

$$d(x, X \setminus U_j) < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{und} \quad d(y, X \setminus U_j) \geq \frac{1}{2^n}.$$

Es folgt $d(x,y) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$ und somit auch $d(B_{n,i}, B_{n,j}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$. Nach Definition der Mengen $U_{n,i}$ und $U_{n,j}$ ergibt sich $d(U_{n,i}, U_{n,j}) \geq \frac{1}{2^{2^{n+2}}}$, so dass die offene Kugel mit Radius $\frac{1}{2^{n+2}}$ um einen beliebigen Punkt $x \in X$ höchstens eine der Mengen $U_{n,i}$ mit $i \in I$ schneiden kann. Das zeigt die Lokalendlichkeit von $\mathbf{V}_n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und insgesamt somit die Behauptung. #

Tatsächlich gibt es bereits eine lokalendliche Überdeckung $\mathbf{V}'$ von $X$, die feiner als $\mathbf{U}$ ist,

*denn:* Über

$$X_n := \bigcup_{U_{n,i}\in\mathbf{V}_n} U_{n,i} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

[15] Eine Familie von Teilmengen von $X$ heißt ***lokalendlich***, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung gibt, die mit nur endlich vielen Elementen dieser Familie nichtleeren Durchschnitt hat (vgl. Definition 2.119).

$$Y_N := \bigcup_{n=0}^{N} X_n \qquad \text{für alle } N \in \mathbb{N}$$

definieren wir induktiv eine Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$A_0 := Y_0 \quad \text{und} \quad A_n := Y_n \setminus Y_{n-1} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $n$ mit $x \in A_n = Y_n \setminus Y_{n-1} \subseteq X_n$, und da $\mathbf{V}_n$ trivialerweise $X_n$ überdeckt, gibt es ein $U_{n,i} \in \mathbf{V}_n$ mit $x \in U_{n,i}$, also $x \in A_n \cap U_{n,i}$. Es folgt, dass

$$\mathbf{V}' := (A_n \cap U_{n,i})_{n\in\mathbb{N}, U_{n,i}\in\mathbf{V}_n}$$

eine Überdeckung von $X$ ist. Nach Konstruktion ist $\mathbf{V}'$ feiner als $\mathbf{V}$ und somit auch feiner als $\mathbf{U}$. Die Lokalendlichkeit bei einem gegebenen $x \in X$ ergibt sich wie folgt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbf{V}_n$ lokalendlich und für alle $N \in \mathbb{N}$ ist $Y_N$ offen. Es gibt daher eine in $Y_N$ enthaltene Umgebung $V_n(x) \in \mathcal{U}(x)$ von $x$, die nur endlich viele Elemente von $\mathbf{V}_n$ trifft. Da die Umgebung $V(x) := \bigcap_{n=0}^{N} V_n(x)$ von $x$ nach Konstruktion keine der Mengen $A_n$ mit $n > N$ schneidet, folgt, dass $V(x)$ überhaupt nur endlich viele Elemente von $\mathbf{V}'$ trifft. #

Es folgt, dass es auch eine abgeschlossene lokalendliche Überdeckung $\mathbf{V}''$ von $X$ gibt, die feiner als $\mathbf{U}$ ist,

*denn:* Für alle $x \in X$ wählen wir ein $U(x) \in \mathbf{U}$ mit $x \in U(x)$. Nach Proposition 2.117 ist $X$ als metrisierbarer Raum normal und nach Korollar 2.87 somit auch regulär. Nach Proposition 2.101 gibt es daher für jedes $x \in X$ eine offene Menge $W(x)$ mit

$$x \in W(x) \subseteq \overline{W(x)} \subseteq U(x).$$

Offensichtlich ist $\mathbf{W} := (W(x))_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von $X$, die feiner ist als $\mathbf{U}$. Wenden wir die bisherigen Überlegungen auf $\mathbf{W}$ statt $\mathbf{U}$ an, so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die lokalendliche Überdeckung $\mathbf{V}'$ von $X$ nicht nur feiner als $\mathbf{U}$ ist, sondern auch feiner als $\mathbf{W}$. Offensichtlich ist dann

$$\mathbf{V}'' := (\overline{V})_{V\in\mathbf{V}'}$$

eine abgeschlossene Überdeckung von $X$. Nach Konstruktion ist für alle $V \in \mathbf{V}'$ der Abschluss $\overline{V}$ im Abschluss $\overline{W}$ eines $W \in \mathbf{W}$ und somit in einem $U \in \mathbf{U}$ enthalten. Die Überdeckung $\mathbf{V}''$ ist also feiner als $\mathbf{U}$. Wie wir im Beweis von Teil (b) von Proposition 1.14 eingesehen haben, schneidet eine offene Menge eine weitere Menge genau dann, wenn sie deren Abschluss schneidet, so dass sich die Lokalendlichkeit von $\mathbf{V}'$ auf $\mathbf{V}''$ überträgt. #

Schließlich folgt die Parakompaktheit von $X$,

*denn:* Für jedes $x \in X$ sei $W(x)$ eine offene Umgebung von $x$, die nur endlich viele $V \in \mathbf{V}'$ trifft. Dann ist $\mathbf{W} := (W(x))_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von $X$. Wenden wir die bisherigen Überlegungen auf $\mathbf{W}$ statt auf $\mathbf{U}$ an, so erhalten wir eine abgeschlossene lokalendliche Überdeckung $\mathbf{A}$ von $X$, die feiner als $\mathbf{W}$ ist. Da jedes $W(x)$ nur endlich viele $V \in \mathbf{V}'$ trifft, schneidet auch jedes $A \in \mathbf{A}$ nur endlich viele $V \in \mathbf{V}'$. Weil für jedes $V \in \mathbf{V}'$ die Menge

$$\{A \in \mathbf{A} \mid A \cap V = \emptyset\}$$

lokalendlich ist, gilt

$$\overline{\bigcup\{A \in \mathbf{A} \mid A \cap V = \emptyset\}} = \bigcup\{\overline{A} \in \mathbf{A} \mid A \cap V = \emptyset\} = \bigcup\{A \in \mathbf{A} \mid A \cap V = \emptyset\}.$$

Es folgt, dass

$$\tilde{V} := X \setminus \left(\bigcup\{A \in \mathbf{A} \mid A \cap V = \emptyset\}\right)$$

offen ist und somit $\tilde{\mathbf{V}}' := (\tilde{V})_{V \in \mathbf{V}'}$ eine offene Überdeckung von $X$. Wir zeigen nun, dass diese Überdeckung lokalendlich ist, und betrachten dazu ein beliebiges $x \in X$. Wegen der Lokalendlichkeit von $\mathbf{A}$ gibt es dann eine Umgebung $T(x)$ von $x$ in $X$, die nur endlich viele Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{A}$ trifft. Da $\mathbf{A}$ eine Überdeckung von $X$ ist, folgt dann $T(x) \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Folglich kann $T(x) \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ nur dann gelten, wenn $A_\nu \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ für mindestens ein $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Dann gilt aber auch $A_\nu \cap V \neq \emptyset$. Da $\mathbf{A}$ feiner als $\mathbf{W}$ ist, trifft $A_\nu$ nur endlich viele $V \in \mathbf{V}'$. Deshalb gilt $T(x) \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ für nur endlich viele $\tilde{V} \in \tilde{\mathbf{V}}'$, was die Lokalendlichkeit beweist.

Wählen wir nun zu einem beliebigen $V \in \mathbf{V}'$ ein $U_V \in \mathbf{U}$ mit $V \subseteq U_V$, so ist $(U_V \cap \tilde{V})_{V \in \mathbf{V}'}$ eine offene, lokalendliche Überdeckung von $X$, die feiner als $\mathbf{U}$ ist, wobei die Überdeckungseigenschaft unmittelbar mit $V \subseteq U_V \cap \tilde{V}$ folgt. Insgesamt haben wir somit die Parakompaktheit von $X$ hergeleitet. #

□

**Korollar 2.124.** *Lokalkompakte Hausdorff-Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom $(A_2)$ erfüllen, sind parakompakt.*

*Beweis.* Nach Korollar 2.107 sind lokalkompakte Hausdorff-Räume vollständig regulär. Nach dem Metrisierungssatz von Urysohn 2.118 ist ein vollständig regulärer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom $(A_2)$ erfüllt, metrisierbar. Das Korollar folgt, da metrisierbare topologische Räume nach dem Satz von Stone 2.123 parakompakt sind. □

**Proposition 2.125.** *Parakompakte Hausdorff-Räume sind normal.*

*Beweis.* Sei $X$ ein parakompakter Hausdorff-Raum. Wir zeigen zunächst, dass $X$ regulär ist. Dies gilt tatsächlich,

*denn:* Seien $A \overset{\bullet}{\subseteq} X$ und $x \in X \setminus A$ gegeben. Da $X$ Hausdorff'sch ist, finden wir für jedes $y \in A$ offene Teilmengen

$$O_{x,y}, O_y \overset{\circ}{\subseteq} X \quad \text{mit } x \in O_{x,y},\ y \in O_y \text{ und } O_{x,y} \cap O_y = \emptyset.$$

Nach Konstruktion ist dann

$$X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{y \in A} O_y$$

eine offene Überdeckung von $X$. Wegen der Parakompaktheit von $X$ existiert eine lokalendliche, offene Überdeckung, die feiner als diese offene Überdeckung ist. Entfernen wir aus dieser lokalendlichen, offenen Überdeckung alle Elemente, die $A$ nicht schneiden, so erhalten wir eine lokalendliche, offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $A$, so dass für alle $i \in I$ ein $y \in A$ mit $U_i \subseteq O_y$ existiert.

Wegen der Lokalendlichkeit der $(U_i)_{i\in I}$ zugrunde liegenden offenen Überdeckung von $X$ gibt es eine offene Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ von $x$ in $X$ und eine endliche Teilmenge

$$I_{\text{fin}} \subseteq I \quad \text{mit } U \cap U_i = \emptyset \text{ für alle } i \in I \setminus I_{\text{fin}}.$$

Wir wählen nun für alle $i \in I_{\text{fin}}$ ein $y_i \in A$ mit $U_i \subseteq O_{y_i}$ und setzen

$$A_{\text{fin}} := \{y_i \mid i \in I_{\text{fin}}\}.$$

Offensichtlich sind dann

$$O_x := U \cap \bigcap_{y\in A_{\text{fin}}} O_{x,y} \quad \text{und} \quad O_A := \bigcup_{i\in I} U_i$$

offene Mengen, die nach Konstruktion $x \in O_x$ und $A \subseteq O_A$ erfüllen. Die Disjunktheit $O_x \cap O_A = \emptyset$ gilt ebenfalls, da $U \cap U_i \neq \emptyset$ genau für $i \in I_{\text{fin}}$ gilt, die zugehörigen Mengen $U_i \subseteq O_{y_i} \subseteq X \setminus O_{x,y_i}$ erfüllen und wir mit den betreffenden Mengen $O_{x,y_i}$ geschnitten haben.

Insgesamt haben wir die abgeschlossene Teilmenge $A \overset{\bullet}{\subseteq} X$ und den Punkt $x \in X \setminus A$ durch offene Mengen getrennt. Da diese beliebig gewählt waren, folgt die Gültigkeit von Axiom $(T_3)$ und mit der bereits vorausgesetzten Hausdorff-Eigenschaft die Regularität von $X$. #

Um nun die Normalität von $X$ zu zeigen, betrachten wir zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $A, B \overset{\bullet}{\subseteq} X$. Nach der soeben gezeigten Regularität von $X$ existieren zu jedem $x \in A$ offene Teilmengen $O_x, O_{B,x} \overset{\circ}{\subseteq} X$ mit

$$O_x, O_{B,x} \overset{\circ}{\subseteq} X \quad \text{mit } x \in O_x,\ B \subseteq O_{B,x} \text{ und } O_x \cap O_{B,x} = \emptyset.$$

Nach Konstruktion ist dann

$$X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{x\in A} O_x$$

eine offene Überdeckung von $X$. Wegen der Parakompaktheit von $X$ existiert eine lokalendliche, offene Überdeckung, die feiner als diese offene Überdeckung ist. Entfernen wir aus dieser lokalendlichen, offenen Überdeckung alle Elemente, die $A$ nicht schneiden, so erhalten wir eine lokalendliche, offene Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von $A$, so dass für alle $i \in I$ ein $x \in A$ mit $V_i \subseteq O_x$ existiert. Nach Konstruktion ist dann

$$O_A := \bigcup_{i\in I} V_i$$

eine offene Teilmenge von $X$ mit $A \subseteq O_A$.

Für jedes $y \in B$ gibt es eine offene Umgebung $O_y$ mit $O_y \cap O_A = \emptyset$,

*denn:* Sei $y \in B$ gegeben. Wegen der Lokalendlichkeit der $(V_i)_{i\in I}$ zugrunde liegenden offenen Überdeckung von $X$ gibt es dann eine offene Umgebung $U$ von $y$ und eine endliche Teilmenge

$$I_{\text{fin}} \subseteq I \quad \text{mit } U \cap V_i = \emptyset \text{ für alle } i \in I \setminus I_{\text{fin}}.$$

Wir wählen nun für alle $i \in I_{\text{fin}}$ ein $x_i \in A$ mit $V_i \subseteq O_{x_i}$ und setzen

$$A_{\text{fin}} := \{x_i \mid i \in I_{\text{fin}}\}.$$

Dann erfüllt

$$O_y := U \cap \bigcap_{x_i \in A_{\text{fin}}} O_{B,x_i}$$

die Behauptung. #

Nach Konstruktion ist

$$O_B := \bigcup_{y \in B} O_y$$

eine offene Teilmenge von $X$ mit $B \subseteq O_B$ und $O_B \cap O_A = \emptyset$. Insgesamt haben wir die disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $A, B \Subset X$ durch offene Mengen getrennt. Da diese beliebig gewählt waren, folgt die Gültigkeit von Axiom $(T_4)$ und mit der bereits vorausgesetzten Hausdorff-Eigenschaft die Normalität von $X$. □

In der Differentialtopologie spielt der Begriff der Partition der Eins eine wichtige Rolle. In Satz 2.127 werden wir einsehen, dass Parakompaktheit und die Existenz geeigneter Partionen der Eins äquivalente Eigenschaften sind:

**Definition 2.126.** *Eine **Partition der Eins** über einem topologischen Raum $X$ ist eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ stetiger Funktionen $X \to [0,1]$ mit*

$(PE_1)$ *Für alle $x \in X$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f_i|_U \not\equiv 0$ für nur endlich viele $i \in I$.*

$(PE_2)$ *$\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ für alle $x \in X$.*

*Ist zudem $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $X$ und ist für jedes $i \in I$ der jeweilige **Träger***

$$\operatorname{supp}(f_i) := \overline{\{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}}$$

*in $U_i$ enthalten, so sagen wir, $(f_i)_{i \in I}$ sei der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ **untergeordnet**.*

**Satz 2.127.** *In einem Hausdorff-Raum $X$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist parakompakt.*

(ii) *$X$ besitzt zu jeder offenen Überdeckung eine untergeordnete Partition der Eins.*

*Beweis.* Sei $X$ ein Hausdorff-Raum.

Gelte nun zunächst Aussage (ii) und sei $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von $X$. Dann gibt es über $X$ eine $(U_i)_{i \in I}$ untergeordnete Partition der Eins $(f_i)_{i \in I}$. Setzen wir nun

$$V_i := \{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\} \quad \text{für alle } i \in I,$$

so gelten nach Konstruktion

$$V_i \Subset X \quad \text{und} \quad V_i \subseteq \operatorname{supp}(f_i) \subseteq U_i.$$

Da es nach $(PE_2)$ für jedes $x \in X$ mindestens ein $i \in I$ mit $f_i(x) \neq 0$ gibt, ist somit durch $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X$ gegeben, die feiner als $(U_i)_{i\in I}$ ist. Nach $(PE_1)$ ist diese offene Überdeckung auch lokalendlich. Da die offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $X$ beliebig gewählt war, haben wir somit die Parakompaktheit von $X$ gezeigt, also Aussage (i).

Gelte nun umgekehrt (i), sei also $X$ parakompakt, und sei $(U_i)_{i\in I}$ eine ohne Einschränkung lokalendliche offene Überdeckung von $X$. Nach Proposition 2.125 ist $X$ als parakompakter Hausdorff-Raum regulär, so dass nach Proposition 2.101 für jedes $x \in X$ die Menge der abgeschlossenen Umgebungen von $x$ in $X$ eine Umgebungsbasis von $x$ bildet. Wir finden daher für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $V_x$, deren Abschluss $\overline{V_x}$ ganz in einer der Mengen $U_i$ enthalten ist. Dann ist $(V_x)_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von $X$ und da $X$ parakompakt ist, existiert eine lokalendliche, offene Überdeckung $(V'_j)_{j\in J}$, die feiner als diese ist. Setzen wir nun

$$U'_i := \bigcup_{\substack{j\in J\\ \overline{V'_j}\subseteq U_i}} V'_j \quad \text{für alle } i \in I,$$

so ist $(U'_i)_{i\in I}$ offensichtlich wieder eine offene Überdeckung und es gilt

$$\overline{U'_i} \subseteq U_i \quad \text{für alle } i \in I,$$

*denn:* Sei $x \in \overline{U'_i}$. Nach Teil (b) von Proposition 1.14 und Konstruktion von $U'_i$ trifft jede Umgebung von $x$ mindestens eines der $V'_j$ mit $\overline{V'_j} \subseteq U_i$. Wegen der Lokalendlichkeit von $(V'_j)_{j\in J}$ gibt es aber eine ausreichend kleine Umgebung von $x$ und eine endliche Teilmenge $J_{\text{fin}} \subseteq J$, so dass die Umgebung nur die $V'_j$ mit $j \in J_{\text{fin}}$ trifft. Wieder mit Teil (b) von Proposition 1.14 folgt

$$x \in \overline{\bigcup_{j\in J_{\text{fin}}} V'_j} = \bigcup_{j\in J_{\text{fin}}} \overline{V'_j} \subseteq U_i.$$

Da $x \in \overline{U'_i}$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. #

Hieraus folgt insbesondere, dass $(U'_i)_{i\in I}$ lokalendlich ist.

Diesen Verfeinerungsprozess können wir nun noch einmal auf die offene Überdeckung $(U'_i)_{i\in I}$ anwenden und erhalten eine offene Überdeckung $(U''_i)_{i\in I}$ mit

$$\overline{U''_i} \subseteq U'_i \quad \text{für alle } i \in I.$$

Nach Proposition 2.125 ist $X$ als parakompakter Hausdorff-Raum normal und nach dem Lemma von Urysohn 2.113 lassen sich in $X$ daher disjunkte, abgeschlossene Teilmengen durch stetige Funktionen trennen. Für jedes $i \in I$ gibt es also eine stetige Funktion

$$g_i : X \to [0,1] \quad \text{mit } g_i(\overline{U''_i}) = \{1\} \text{ und } g_i(X \setminus U'_i) = \{0\}.$$

Mit der Lokalendlichkeit der offenen Überdeckung $(U_i')_{i\in I}$ erhalten wir Axiom $(PE_1)$ für die Familie $(g_i)_{i\in I}$. Es folgt unmittelbar, dass die Summe $g := \sum_{i\in I} g_i$ in jedem $x \in X$ endlich ist, und somit die Stetigkeit von $g$. Da auch $(U_i'')_{i\in I}$ eine offen Überdeckung von $X$ ist, ist $g$ überall echt positiv. Setzen wir nun

$$f_i := g_i/g \quad \text{für alle } i \in I,$$

so ist nach Konstruktion $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie stetiger Funktionen $X \to [0,1]$, die Axiom $(PE_1)$ und Axiom $(PE_2)$ erfüllt, also eine Partition der Eins über $X$. Weiter gilt

$$\operatorname{supp}(f_i) \subseteq \overline{U_i'} \subseteq U_i \quad \text{für alle } i \in I,$$

so dass $(f_i)_{i\in I}$ der offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnet ist. Da die ohne Einschränkung lokalendliche, offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $X$ beliebig gewählt war, folgt Aussage (ii). □

Abschließend für dieses Kapitel studieren wir mit den Mannigfaltigkeiten eine enorm wichtige Klasse topologischer Räume, in denen sich viele der bisher eingeführten Eigenschaften topologischer Räume wiederfinden. Allgemeiner definieren wir zunächst:

**Definition 2.128.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Wir sagen:*

$$\begin{aligned} X \text{ ist } \textbf{\textit{lokaleuklidisch}} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } x \in X \text{ gibt es ein } x \in U \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X, \text{ ein } n \in \mathbb{N} \\ &\phantom{:\Longleftrightarrow} \quad \text{und ein } V \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} \mathbb{R}^n \text{ mit } U \cong V \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } x \in X \text{ gibt es ein } x \in U \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X \text{ und ein } n \in \mathbb{N} \\ &\phantom{:\Longleftrightarrow} \quad \text{mit } U \cong \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

*Die natürliche Zahl $n$ heißt hierbei die **lokale Dimension** von $X$ in $x$. Nehmen die lokalen Dimensionen für alle Punkte $x \in X$ den Wert $n \in \mathbb{N}$ an, so nennen wir $X$ $n$-**lokaleuklidisch**.*

**Bemerkung 2.129.** *Sei $X$ ein zusammenhängender lokaleuklidischer topologischer Raum. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $X$ $n$-lokaleuklidisch ist,*

*denn: Da sonst nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, $X$ sei nichtleer, es gebe also ein $x_0 \in X$. Nach Definition 2.128 existiert für jedes $x \in X$ ein $U(x) \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X$, ein $n(x) \in \mathbb{N}$ und ein $V(x) \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} \mathbb{R}^{n(x)}$ mit $U(x) \cong V(x)$. Betrachten wir nun die Mengen*

$$\begin{aligned} O_1 &:= \{x \in X \mid n(x) = n(x_0)\}, \\ O_2 &:= \{x \in X \mid n(x) \neq n(x_0)\} = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\neq n(x_0)}} \{x \in X \mid n(x) = n\}. \end{aligned}$$

*Nach Konstruktion gilt dann*

$$O_1 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad O_1 \sqcup O_2 = X.$$

*Weiter ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{x \in X \mid n(x) = n\}$ offen, da offensichtlich mit jedem $x$ daraus auch die zugehörige offene Umgebung $U(x)$ ganz darin enthalten ist. Es folgt die Offenheit von $O_1$ und $O_2$ und mit dem Zusammenhang von $X$ schließlich $X = O_1$, also die Behauptung.* #

**Definition 2.130.** *Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist eine **$n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit** ein $n$-lokaleuklidischer Hausdorff-Raum $X$, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom $(A_2)$ erfüllt.*

**Beispiel 2.131.** (a) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind alle offenen Unterräume von $\mathbb{R}^n$ reelle Mannigfaltigkeiten,*

*denn: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offener Unterraum. Nach Beispiel 2.74 erfüllt $X$ dann das zweite Abzhählbarkeitsaxiom $(A_2)$ und nach Beispiel 2.85 und Bemerkung 2.88 ist $X$ Hausdorff'sch. Die $n$-Lokaleuklidizität gilt, weil nach Teil (a) von Beispiel 1.51 und wegen der Offenheit von $X$ in $\mathbb{R}^n$ jede offene Umgebung eines Punktes $x \in X$ auch in $\mathbb{R}^n$ offen ist.* #

(b) *Nicht jeder für ein $n \in \mathbb{N}$ $n$-lokaleuklidische topologische Raum ist auch eine reelle Mannigfaltigkeit,*

*denn: Die als Anheftung wie in 1.84 definierte „Gerade mit zwei Ursprüngen“*

$$G := \mathbb{R} \cup_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}} \mathbb{R}$$

*ist offensichtlich 1-lokaleuklidisch, aber nicht Hausdorff'sch, da sich die beiden Kopien des Ursprungs nicht durch offene Mengen trennen lassen.* #

In einem allgemeinen topologischen Raum alle Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit zu überprüfen, kann recht aufwändig sein. Für das zweite Abzählbarkeitsaxiom gilt allerdings das folgende Kriterium:[16]

**Lemma 2.132.** *Sei $X$ ein lokaleuklidischer Hausdorff-Raum. Hat $X$ eine abzählbare Überdeckung aus kompakten Teilmengen, so erfüllt $X$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom $(A_2)$.*

*Beweis.* Da $X$ lokaleuklidisch ist, besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U(x)$, die zu einem offenen Teilraum eines $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ homöomorph ist. Nach Beispiel 2.74 erfüllt jedes solche $U(x)$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom $(A_2)$, seine Topologie besitzt also eine abzählbare Basis $\mathcal{B}_{\text{count}}^{U(x)}$.

Sei nun $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ eine abzählbare Überdeckung aus kompakten Teilmengen $K_i \subseteq X$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist durch

$$K_i \subseteq \bigcup_{x \in K_i} U(x)$$

eine offene Überdeckung von $K_i$ gegeben, die wegen der Kompaktheit von $K_i$ eine endliche Teilüberdeckung

$$K_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{r_i} U(x_j)$$

aufweist. Auf diese Weise erhalten wir eine abzählbare offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{r_i} U(x_j)$$

[16] Wir fordern hier in leichter Verallgemeinerung nicht, dass $X$ für ein $n \in \mathbb{N}$ $n$-lokaleuklidisch ist.

und folglich mit

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{r_i} \mathcal{B}_{\text{count}}^{U(x_j)}$$

eine abzählbare Basis der Topologie von $X$. $\square$

**Satz 2.133.** *Sei $X$ ein zusammenhängender, lokaleuklidischer Hausdorff-Raum. Nach Bemerkung 2.129 ist $X$ dann $n$-lokaleuklidisch mit einem geeigneten $n \in \mathbb{N}$. Weiter sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ erfüllt Axiom $(A_2)$, ist also eine $n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit.*

(ii) *$X$ ist parakompakt.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i), sei $X$ also eine $n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit. Aufgrund der Lokaleuklidizität ist $X$ dann offenbar lokalkompakt und als Hausdorff-Raum daher nach Korollar 2.107 vollständig regulär. Zudem erfüllt $X$ Axiom $(A_2)$ und ist nach dem Metrisierungssatz von Urysohn 2.118 somit metrisierbar. Mit dem Satz von Stone 2.123 folgt die Parakompaktheit von $X$, also Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt (ii), sei also $X$ parakompakt. Wegen der $n$-Lokaleuklidizität von $X$ gibt es eine offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ von $X$ mit $V_j \cong \mathbb{R}^n$ für alle $j \in J$. Für alle $j \in J$ wählen wir nun einen Homöomorphismus $f_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ fest aus. Dann ist die Menge aller Urbilder

$$\{f_j^{-1}(U_\varepsilon(v)) \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ und } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

ebenfalls eine offene Überdeckung von $X$. Alle Elemente dieser Überdeckung haben einen kompakten Abschluss in $X$,

*denn:* Für alle $U_\varepsilon(v)$ mit $v \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der Abschluss $\overline{U_\varepsilon(v)}$ beschränkt und nach dem Satz von Heine-Borel 2.95 somit kompakt. Mit der Homöomorphie der $f_j$ und Proposition 1.25 überträgt sich diese Eigenschaft auf die Elemente der Überdeckung. #

Wegen der Parakompaktheit von $X$ gibt es eine lokalendliche Überdeckung $\mathbf{U} := (U_i)_{i \in I}$ von $X$, die feiner als diese Überdeckung ist. Dabei ist für jedes $i \in I$ der Abschluss $\overline{U_i}$ kompakt,

*denn:* Da $\mathbf{U}$ feiner als die zuvor betrachtete Überdeckung ist, ist jedes $U_i$ in einer offenen Menge $V$ enthalten, deren Abschluss $\overline{V}$ kompakt ist. Mit Bemerkung 1.12 und Teil (b) von Beispiel 1.51 folgt $\overline{U_i} \subseteq \overline{V}$ und mit Korollar 2.61 die Behauptung. #

Sei nun $U_{i_1} \in \mathbf{U}$ beliebig. Für jedes weitere Element $U \in \mathbf{U}$ gibt es eine natürliche Zahl $r$ und $U_{i_2}, \ldots, U_{i_r} = U \in \mathbf{U}$ mit

$$U_{i_\varrho} \cap U_{i_{\varrho+1}} \neq \emptyset \quad \text{für alle } \varrho \in \{1, \ldots, r-1\},$$

*denn:* Als lokaleuklidischer topologischer Raum ist $X$ lokal wegzusammenhängend. Nach Satz 2.23 ist $X$ als zusammenhängender topologischer Raum somit auch wegzusammenhängend. Für beliebige $x_{i_1} \in U_{i_1}$ und $x \in U$ gibt es daher einen Weg $w : [0,1] \to X$ von $x_{i_1}$ nach $x$. Wegen der Stetigkeit von $w$ und nach Teil (a) von Proposition 2.62 ist mit $[0,1]$ auch $w([0,1])$ kompakt, so dass die offene Überdeckung $\mathbf{U}$ von $w([0,1])$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Diese erfüllt die geforderten Eigenschaften. #

Indem wir jedem $U \in \mathbf{U}$ die minimale solche natürliche Zahl $r$ zuweisen, erhalten wir eine Abbildung $\mathbf{U} \to \mathbb{N}$. Die Fasern dieser Abbildung sind endlich,

*denn:* Sei für jedes $r \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{U}_{\leq r}$ das Urbild der Menge $\{1, \dots, r\} \subseteq \mathbb{Z}$ bezeichnet. Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass für jedes $r \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathbf{U}_{\leq r}$ nur endlich viele Elemente hat. Offensichtlich gilt $\mathbf{U}_{\geq 1} = \{U_{i_1}\}$, insbesondere ist $\mathbf{U}_{\geq 1}$ endlich. Nehmen wir nun an, für ein festes $r \in \mathbb{N}$ habe $\mathbf{U}_{\geq r}$ nur endlich viele Elemente. Dann ist $\bigcup_{U \in \mathbf{U}_{\leq r}} \overline{U}$ als Vereinigung endlich vieler Kompakta kompakt und

$$K_r := \overline{\bigcup_{U \in \mathbf{U}_{\leq r}} U} \subseteq \bigcup_{U \in \mathbf{U}_{\leq r}} \overline{U}$$

als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums nach Korollar 2.61 ebenso. Wegen der Lokalendlichkeit von $\mathbf{U}$ gibt es für jedes $x \in K_r$ eine offene Umgebung $U(x)$, die nur endlich viele Elemente von $\mathbf{U}$ schneidet. Die Menge dieser offenen Umgebungen $U(x)$ mit $x \in K_r$ bildet eine offene Überdeckung von $K_r$, die wegen der Kompaktheit von $K_r$ eine endliche Teilüberdeckung aufweist. Es folgt, dass auch $K_r$ nur endlich viele Elemente von $\mathbf{U}$ schneidet. Da sämtliche Elemente von $\mathbf{U}_{\leq r+1}$ nach Konstruktion nichtleeren Durchschnitt mit $K_r$ haben, erhalten wir so die Endlichkeit von $\mathbf{U}_{\leq r+1}$. #

Nach Konstruktion kann $X$ als die Vereinigung der kompakten Mengen $\overline{U_i}$ mit $U_i \in \mathbf{U}$ geschrieben werden. Nach der obigen Überlegung ist $\mathbf{U}$ und somit die Anzahl dieser kompakten Mengen abzählbar. Nach Lemma 2.132 erfüllt $X$ somit Axiom $(A_2)$, also Aussage (i). □

Aus den Sätzen 2.127 und 2.133 folgt sofort:

**Korollar 2.134.** *Sei $X$ für ein $n \in \mathbb{N}$ eine $n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit. Dann besitzt $X$ zu jeder offenen Überdeckung eine untergeordnete Partition der Eins.*

## KAPITEL 3

# Homotopietheorie

## 3.1 Homotopie

**Definition 3.1.** *Seien $X, X'$ topologische Räume und seien $f, g : X \to X'$ stetige Abbildungen. Eine* ***Homotopie*** *zwischen $f$ und $g$ ist eine stetige Abbildung*

$$H : X \times [0,1] \to X' \quad \text{mit } H(x,0) = f(x) \text{ und } H(x,1) = g(x) \text{ für alle } x \in X.$$

*Wir sagen:*

$$f, g \text{ sind } \textbf{homotop} \text{ (in Zeichen: } f \simeq g) \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine Homotopie zwischen } f \text{ und } g.$$

**Proposition 3.2.** *Für je zwei topologische Räume $X, X'$ ist Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen*

$$\mathcal{C}(X, X') := \{f : X \to X' \mid f \text{ stetig}\}.$$

*Beweis.* Für ein beliebiges $f \in \mathcal{C}(X, X')$ ist offensichtlich

$$H : \begin{cases} X \times [0,1] & \to X', \\ (x,t) & \mapsto f(x) \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen $f$ und sich selbst. Es folgt die Reflexivität von „$\simeq$“.

Für $f, g \in \mathcal{C}(X, X')$ sei eine Homotopie $H$ zwischen $f$ und $g$ gegeben, es gelte also $f \simeq g$. Dann ist

$$H' : \begin{cases} X \times [0,1] & \to X', \\ (x,t) & \mapsto H(x, 1-t) \end{cases}$$

offensichtlich stetig und erfüllt

$$H'(x,0) = H(x,1) = g(x) \quad \text{und} \quad H'(x,1) = H(x,0) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Es folgt $g \simeq f$ und also die Symmetrie von „$\simeq$“.

Für $f, g, h \in \mathcal{C}(X, X')$ seien Homotopien $H$ zwischen $f$ und $g$ und $H'$ zwischen $g$ und $h$ gegeben, es gelten also $f \simeq g$ und $g \simeq h$. Dann ist

$$H'' : \begin{cases} X \times [0,1] & \to X', \\ (x,t) & \mapsto \begin{cases} H(x,2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H'(x,2t-1) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{cases}$$

wohldefiniert wegen $H(x,1) = g(x) = H'(x,0)$ und nach Proposition 1.55 auch stetig wegen $X \times [0, \frac{1}{2}], X \times [\frac{1}{2}, 1] \overset{\bullet}{\subseteq} X \times [0,1]$. Zudem gilt

$$H''(x,0) = H(x,0) = f(x) \quad \text{und} \quad H''(x,1) = H'(x,1) = h(x) \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Es folgt $f \simeq h$ und also die Transitivität von „$\simeq$“. □

**Proposition 3.3.** *Seien $X, X', X''$ topologische Räume sowie $f, g : X \to X'$ und $f', g' : X' \to X''$ stetige Abbildungen mit $f \simeq g$ und $f' \simeq g'$. Dann gilt auch $f' \circ f \simeq g' \circ g$.*

*Beweis.* Sei $H$ eine Homotopie zwischen $f$ und $g$ und $H'$ eine Homotopie zwischen $f'$ und $g'$. Dann ist

$$H'' : \begin{cases} X \times [0,1] & \to X'', \\ (x,t) & \mapsto H'\big(H(x,t), t\big) \end{cases}$$

offensichtlich stetig und erfüllt für alle $x \in X$

$$\begin{aligned} H''(x,0) &= H'\big(H(x,0), 0\big) = H'(f(x), 0) = f'(f(x)), \\ H''(x,1) &= H'\big(H(x,1), 1\big) = H'(g(x), 1) = g'(g(x)). \end{aligned}$$

Es folgt $f' \circ f \simeq g' \circ g$, also die Proposition. □

**Definition 3.4.** *Seien $X, X'$ topologische Räume und $f : X \to X'$ eine stetige Abbildung. Dann sagen wir:*

*$f$ ist **nullhomotop*** $:\iff$ *es gibt ein $x' \in X'$, so dass $f$ homotop zur konstanten Abbildung*

$$c_{x'} : \begin{cases} X \to X', \\ x \mapsto x' \end{cases} \quad \textit{ist.}$$

**Beispiel 3.5.** *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig. Dann ist $\mathrm{id}_X$ nullhomotop,*

*denn: Für einen Sternmittelpunkt $x^* \in X$ ist offensichtlich*

$$H : \begin{cases} X \times [0,1] & \to X, \\ (x,t) & \mapsto tx^* + (1-t)x. \end{cases}$$

*eine Homotopie zwischen $\mathrm{id}_X$ und $c_{x^*}$.* #

**Definition 3.6.** *Seien $X, X'$ topologische Räume und $f : X \to X'$ eine stetige Abbildung. Dann sagen wir:*

$$\begin{aligned} & f \text{ ist eine } \textbf{Homotopieäquivalenz} \text{ zwischen } X \text{ und } X' \\ :\Longleftrightarrow\quad & \text{es gibt eine stetige Abbildung } g : X' \to X \text{ mit } g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \text{ und } f \circ g \simeq \mathrm{id}_{X'}. \end{aligned}$$

*In dieser Situation heißt $g$ **homotopieinvers** zu $f$. Die topologischen Räume $X, X'$ heißen **homotopieäquivalent** (in Zeichen: $X \simeq X'$), wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen gibt.*

**Bemerkung 3.7.** (a) *Homotopieinverse sind bis auf Homotopie eindeutig bestimmt,*

*denn: Sind $g, g' : X' \to X$ homotopieinvers zu $f$, so gilt*

$$g = g \circ \mathrm{id}_{X'} \overset{3.3}{\simeq} g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' \overset{3.3}{\simeq} \mathrm{id}_X \circ g' = g'.$$

#

(b) *Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume,*

*denn: Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich; Transitivität folgt leicht mit Proposition 3.3.* #

**Bemerkung 3.8.** *Seien $X, X'$ zwei topologische Räume. Dann gilt*

$$\begin{aligned} X \cong X' \quad &\Longrightarrow \quad X \simeq X', \\ X \cong X' \quad &\not\Longleftarrow \quad X \simeq X', \end{aligned}$$

*denn: Dass Homöomorphie Homotopieäquivalenz impliziert, ist offensichtlich. Zum Beweis der zweiten Aussage geben wir ein Gegenbeispiel an: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $X' = \mathbb{S}^n$. Dann gilt einerseits $X \ncong X'$, da $X$ nach dem Satz von Heine-Borel 2.95 nicht kompakt ist, $X'$ aber schon. Um zu zeigen, dass andererseits $X \simeq X'$ gilt, betrachten wir die stetigen Abbildungen*

$$i : \begin{cases} \mathbb{S}^n & \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \\ x & \mapsto x \end{cases} \quad \text{und} \quad r : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \to \mathbb{S}^n, \\ x & \mapsto \frac{x}{\|x\|}. \end{cases}$$

*Für diese gilt zunächst*

$$(r \circ i)(x) = r(x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{S}^n,$$

*und wir erhalten $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$. Die stetige Abbildung*

$$H : \begin{cases} (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times [0,1] & \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \\ (x,t) & \mapsto (t + \frac{1-t}{\|x\|})x \end{cases}$$

*erfüllt*

$$H(x,0) = \frac{x}{\|x\|} = (i \circ r)(x) \quad \text{und} \quad H(x,1) = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}(x),$$

*und wir erhalten $i \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$. Es folgt, dass $i$ und $r$ homotopieinvers sind, und insgesamt die Homotopieäquivalenz $X \simeq X'$.* #

**Definition 3.9.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Dann sagen wir:*

$$X \text{ ist } \textbf{kontrahierbar} \quad :\Longleftrightarrow \quad X \text{ ist homotopieäquivalent zu einem einpunktigen Raum.}$$

**Proposition 3.10.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$X$ ist kontrahierbar.*

(ii) *$\mathrm{id}_X$ ist nullhomotop.*

*Beweis.* Gelte zunächst (i), sei also $X$ kontrahierbar. Sei weiter $X' = \{x'\}$ ein einpunktiger Raum mit $X \simeq X'$. Nach Definition gibt es dann stetige Abbildungen

$$f : X \to X' \text{ und } g : X' \to X \text{ mit } g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \text{ und } f \circ g \simeq \mathrm{id}_{X'}.$$

Wegen der Einpunktigkeit von $X'$ gilt aber auch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x') \quad \text{für alle } x \in X.$$

Zusammen ergibt sich $\mathrm{id}_X \simeq c_{g(x')}$ und somit die Nullhomotopie von $\mathrm{id}_X$, also Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt (ii), sei also $\mathrm{id}_X$ nullhomotop. Dann gibt es ein $x' \in X$ mit $\mathrm{id}_X \simeq c_{x'}$. Wir setzen nun $X' := \{x'\}$ und betrachten die stetigen Abbildungen

$$f : \begin{cases} X & \to X', \\ x & \mapsto x' \end{cases} \quad \text{und} \quad g : \begin{cases} X' & \to X, \\ x' & \mapsto x'. \end{cases}$$

Dann gelten $f \circ g = \mathrm{id}_{X'}$ und $g \circ f = c_{x'} \simeq \mathrm{id}_X$. Es folgt die Homotopieäquivalenz $X \simeq X' = \{x'\}$ und somit die Kontrahierbarkeit von $X$, also Aussage (i). □

**Beispiel 3.11.** *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig. Dann ist $X$ kontrahierbar,*

*denn: Nach Beispiel 3.5 ist $\mathrm{id}_X$ nullhomotop und nach Proposition 3.10 somit $X$ kontrahierbar.* #

**Definition 3.12.** *Seien $X, X'$ topologische Räume, $A \subseteq X$ ein Unterraum und $f, g : X \to X'$ stetige Abbildungen. Wir sagen dann:*

$$\begin{aligned} & f \text{ ist } \textbf{relativ zu } A \textbf{ homotop} \text{ zu } g \text{ (in Zeichen: } f \simeq g \operatorname{rel} A) \\ :\Longleftrightarrow \quad & \text{es gibt eine Homotopie } H : X \times [0,1] \to X' \text{ zwischen } f \text{ und } g \\ & \text{mit } H(a,t) = H(a,0) \text{ für alle } a \in A, t \in [0,1]. \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.13.** *Seien $X, X', X''$ topologische Räume, $A \subseteq X$ ein Unterraum und $f, g \in \mathcal{C}(X, X')$ sowie $f', g' \in \mathcal{C}(X', X'')$ stetige Abbildungen. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *$f \simeq g \operatorname{rel} A$ impliziert $f|_A = g|_A$,*

*denn: Nach Konstruktion gilt $f(a) = H(a,0) = H(a,1) = g(a)$ für alle $a \in A$.* #

(b) *Ist speziell $X' \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex für ein $n \in \mathbb{N}$, so impliziert $f|_A = g|_A$ auch umgekehrt $f \simeq g \operatorname{rel} A$,*

*denn: Wegen der Konvexität von $X'$ ist die offensichtlich stetige Abbildung*

$$H : \begin{cases} X \times [0,1] & \to X', \\ (x,t) & \mapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{cases}$$

*wohldefiniert. Nach Konstruktion gelten $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ und wegen $f|_A = g|_A$ außerdem*

$$H(a,t) = (1-t)f(a) + tg(a) = f(a) = H(a,0) \quad \textit{für alle } a \in A, t \in [0,1].$$

*Es folgt die behauptete relative Homotopie.* #

(c) *„$\simeq \operatorname{rel} A$" ist eine Äquivalenzrelation auf $C(X, X')$,*

*denn: analog zum Beweis von Proposition 3.2* #

(d) *$f \simeq g \operatorname{rel} A$ und $f' \simeq g' \operatorname{rel} f(A) \overset{(a)}{=} g(A)$ implizieren $(f' \circ f) \simeq (g' \circ g) \operatorname{rel} A$,*

*denn: analog zum Beweis von Proposition 3.3* #

**Beispiel 3.14.** *Seien $X$ ein topologischer Raum und $w, w' : [0,1] \to X$ zwei Wege in $X$ mit demselben Anfangspunkt. Dann gilt $w \simeq w' \operatorname{rel}\{0\}$,*

*denn: Nach Teil (b) von Bemerkung 3.13 erfüllt die stetige Abbildung*

$$c_0 : \begin{cases} [0,1] & \to [0,1], \\ t & \mapsto 0 \end{cases}$$

*die relative Homotopie*

$$c_0 \simeq \mathrm{id}_{[0,1]} \operatorname{rel}\{0\}.$$

*Mit Teil (d) von Bemerkung 3.13 folgt*

$$w = (w \circ \mathrm{id}_{[0,1]}) \simeq (w \circ c_0) \operatorname{rel}\{0\}.$$

*Es ist*

$$(w \circ c_0) : \begin{cases} [0,1] & \to X, \\ t & \mapsto w(0) = w'(0) \end{cases}$$

*und somit $(w \circ c_0) = (w' \circ c_0)$. Es folgt*

$$w \simeq (w' \circ c_0) \simeq (w' \circ \mathrm{id}_{[0,1]}) = w' \operatorname{rel}\{0\}.$$

#

**Bemerkung 3.15.** *Seien $X$ ein topologischer Raum, $w, w' : [0,1] \to X$ Wege in $X$ mit $w'(0) = w(1)$ und $x \in X$ ein Punkt. Dann schreiben wir*

$$w \star w' : \begin{cases} [0,1] & \to X, \\ t & \mapsto \begin{cases} w(2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ w'(2t-1) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{cases}$$

*für die **Verknüpfung** von $w$ und $w'$, wobei wir sicherheitshalber darauf hinweisen wollen, dass bei dieser Verknüpfung erst $w$ und dann $w'$ durchlaufen wird, die Reihenfolge also anders notiert wird als etwa bei der Hintereinanderausführung von Funktionen. Für einen weiteren topologischen Raum $X'$ und eine stetige Funktion $f : X \to X'$ gilt dann*

$$f \circ (w \star w') = (f \circ w) \star (f \circ w').$$

*Weiter notieren wir wie schon zuvor*

$$c_x : \begin{cases} [0,1] & \to X, \\ t & \mapsto x \end{cases}$$

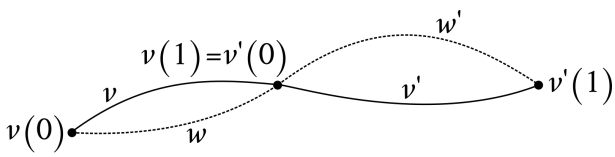
*für den **konstanten Weg** mit Wert $x \in X$ und*

$$w^- : \begin{cases} [0,1] & \to X, \\ t & \mapsto w(1-t) \end{cases}$$

*für den **inversen Weg** zu $w$, wobei wir diese Namensgebung erst in den Propositionen 3.17 und 3.20 motivieren werden.*

**Proposition 3.16.** *Seien $X$ ein topologischer Raum, $v, v', w, w' : [0,1] \to X$ Wege in $X$ mit $v'(0) = v(1)$, $v \simeq w$ $\mathrm{rel}\{0,1\}$ und $v' \simeq w'$ $\mathrm{rel}\{0,1\}$. Dann gilt*

$$(v \star v') \simeq (w \star w') \ \mathrm{rel}\{0,1\}.$$




*Beweis.* Sei $H$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ zwischen $v$ und $w$ und $H'$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ zwischen $v'$ und $w'$. Dann ist die stetige Abbildung

$$H^\star : \begin{cases} [0,1] \times [0,1] & \to X, \\ (s,t) & \mapsto \begin{cases} H(2s,t) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ H'(2s-1,t) & \text{für } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \end{cases}$$

wohldefiniert wegen

$$H(1,t) = H(1,0) = v(1) = v'(0) = H'(0,0) = H'(0,t) \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Weiter gilt für alle $s \in [0,1]$

$$H^\star(s,0) = \begin{cases} H(2s,0) & \text{für } s \in [0,\frac{1}{2}], \\ H'(2s-1,0) & \text{für } s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} \qquad H^\star(s,1) = \begin{cases} H(2s,1) & \text{für } s \in [0,\frac{1}{2}], \\ H'(2s-1,1) & \text{für } s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$
$$= \begin{cases} v(2s) & \text{für } s \in [0,\frac{1}{2}], \\ v'(2s-1) & \text{für } s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} \qquad = \begin{cases} w(2s) & \text{für } s \in [0,\frac{1}{2}], \\ w'(2s-1) & \text{für } s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$
$$= (v \star v')(s), \qquad = (w \star w')(s)$$

und somit $(v \star v') \simeq (w \star w')$ via $H$. Wegen

$$H^\star(0,t) = H(0,t) = H(0,0) = v(0),$$
$$H^\star(1,t) = H'(1,t) = H'(1,0) = v'(1)$$

folgt somit wie behauptet

$$(v \star v') \simeq (w \star w') \ \mathrm{rel}\{0,1\}.$$

□

**Proposition 3.17.** *Seien $X$ ein topologischer Raum, $w, w', w'' : [0,1] \to X$ Wege in $X$ mit $w'(0) = w(1)$ und $w''(0) = w'(1)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\big((w \star w') \star w''\big) \simeq \big(w \star (w' \star w'')\big) \ \mathrm{rel}\{0,1\}$.

(b) $(c_{w(0)} \star w) \simeq w \simeq (w \star c_{w(1)}) \ \mathrm{rel}\{0,1\}$.

(c) $(w \star w^-) \simeq c_{w(0)} \ \mathrm{rel}\{0,1\}$ *und* $(w^- \star w) \simeq c_{w(1)} \ \mathrm{rel}\{0,1\}$.

*Beweis.* Zum Beweis von Behauptung (a) betrachten wir die offenkundig stetige und wohldefinierte Abbildung

$$f : \begin{cases} [0,3] & \to X, \\ s & \mapsto \begin{cases} w(s) & \text{für } s \in [0,1], \\ w'(s-1) & \text{für } s \in [1,2], \\ w''(s-2) & \text{für } s \in [2,3] \end{cases} \end{cases}$$

und für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die stetige Abbildung

$$\ell_{a,b} : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R}, \\ s & \mapsto sb + (1-s)a \end{cases}$$

mit $\ell_{a,b}(0) = a$ und $\ell_{a,b}(1) = b$. Mithilfe dieser Abbildungen schreiben wir

$$w = f \circ \ell_{0,1}, \quad w' = f \circ \ell_{1,2} \quad \text{und} \quad w'' = f \circ \ell_{2,3}$$

und erhalten einerseits

$$(w \star w') \star w'' = \big((f \circ \ell_{0,1}) \star (f \circ \ell_{1,2})\big) \star (f \circ \ell_{2,3})$$

$$\begin{aligned} &\overset{3.15}{=} \big(f \circ (\ell_{0,1} \star \ell_{1,2})\big) \star (f \circ \ell_{2,3}) \\ &\overset{3.15}{=} f \circ \big((\ell_{0,1} \star \ell_{1,2}) \star \ell_{2,3}\big) \end{aligned}$$

sowie andererseits ganz analog

$$w \star (w' \star w'') \ = f \circ \big(\ell_{0,1} \star (\ell_{1,2} \star \ell_{2,3})\big).$$

Nach Teil (d) von Bemerkung 3.13 genügt es zum Beweis von Behauptung (a) somit die relative Homotopie

$$\big((\ell_{0,1} \star \ell_{1,2}) \star \ell_{2,3}\big) \simeq \big(\ell_{0,1} \star (\ell_{1,2} \star \ell_{2,3})\big) \ \mathrm{rel}\{0,1\}$$

von Wegen in der konvexen Teilmenge $[0,3] \subseteq \mathbb{R}$ zu zeigen. Da aber beide Wege von 0 nach 3 verlaufen, folgt dies direkt aus Teil (b) von Bemerkung 3.13.

Zum Beweis von Behauptung (b) bestimmen wir zunächst

$$\begin{aligned} &w \circ (c_0 \star \mathrm{id}_{[0,1]}) \overset{3.15}{=} (w \circ c_0) \star (w \circ \mathrm{id}_{[0,1]}) = c_{w(0)} \star w, \\ &w \circ \mathrm{id}_{[0,1]} = w. \end{aligned}$$

Offensichtlich sind $c_0 \star \mathrm{id}_{[0,1]}$ und $\mathrm{id}_{[0,1]}$ beides Wege in der konvexen Teilmenge $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt 1. Nach Teil (b) von Bemerkung 3.13 folgt somit

$$(c_0 \star \mathrm{id}_{[0,1]}) \simeq \mathrm{id}_{[0,1]} \ \mathrm{rel}\{0,1\}$$

und nach Teil (d) von Bemerkung 3.13 auch

$$\big(w \circ (c_0 \star \mathrm{id}_{[0,1]})\big) \simeq (w \circ \mathrm{id}_{[0,1]}) \ \mathrm{rel}\{0,1\}.$$

Mit unseren Vorüberlegungen erhalten wir hieraus sofort

$$(c_{w(0)} \star w) \simeq w \ \mathrm{rel}\{0,1\},$$

die andere Teilbehauptung zeigt man ganz analog.

Es verbleibt Behauptung (c) nachzuweisen. In der Notation von Teil (a) gilt $w^- = w \circ \ell_{1,0}$ und somit

$$\begin{aligned} &(w \star w^-) = \big((w \circ \ell_{0,1}) \star (w \circ \ell_{1,0})\big) \overset{3.15}{=} \big(w \circ (\ell_{0,1} \star \ell_{1,0})\big), \\ &c_{w(0)} = (w \circ c_0). \end{aligned}$$

Offensichtlich sind $\ell_{0,1} \star \ell_{1,0}$ und $c_0$ beides Wege in der konvexen Teilmenge $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ mit Anfangs- und Endpunkt 0. Nach Teil (b) von Bemerkung 3.13 folgt somit

$$(\ell_{0,1} \star \ell_{1,0}) \simeq c_0 \ \mathrm{rel}\{0,1\}$$

und nach Teil (c) von Bemerkung 3.13 auch

$$\big(w \circ (\ell_{0,1} \star \ell_{1,0})\big) \simeq (w \circ c_0) \ \mathrm{rel}\{0,1\}.$$

Mit unseren Vorüberlegungen erhalten wir hieraus sofort

$$(w \star w^-) \simeq c_{w(0)} \ \mathrm{rel}\{0,1\},$$

die andere Teilbehauptung zeigt man ganz analog. □

## 3.2 Die Fundamentalgruppe

**Definition 3.18.** *Ein **topologischer Raum mit Basispunkt** ist ein Paar $(X, x_0)$ aus einem topologischen Raum $X$ und einem Punkt $x_0 \in X$. Eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen zwei topologischen Räumen mit Basispunkt $(X, x_0)$ und $(X', x'_0)$ heißt **basispunkterhaltend**, wenn sie $f(x_0) = x'_0$ erfüllt. Wir schreiben in diesem Fall $f : (X, x_0) \to (X', x'_0)$.*

**Definition 3.19.** *Sei $(X, x_0)$ ein topologischer Raum mit Basispunkt. Ein Weg $w : [0, 1] \to X$ in $X$ mit $w(0) = w(1) = x_0$ heißt eine **Schleife** (bzw. ein **geschlossener Weg**) bei $x_0$. Ist $w$ eine Schleife bei $x_0$, dann bezeichne*

$$[w] := [w]_{x_0}$$

*die Äquivalenzklasse von $w$ bezüglich der Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$.*

**Proposition 3.20.** *Sei $(X, x_0)$ ein topologischer Raum mit Basispunkt. Dann ist auf der Menge*

$$\pi_1(X, x_0) := \{[w]_{x_0} \mid w \text{ ist Schleife bei } x_0\}$$

*durch*

$$[w]_{x_0} \cdot [w']_{x_0} := [w \star w']_{x_0}$$

*eine Verknüpfung erklärt, die $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Gruppe mit neutralem Element $[c_{x_0}]_{x_0}$ macht. Diese Gruppe heißt die **Fundamentalgruppe** von $X$ mit Basispunkt $x_0$.*

*Beweis.* Den Beweis für diese Proposition haben wir klammheimlich schon in Abschnitt 3.1 erbracht: Die Verknüpfung „$\cdot$" ist wohldefiniert nach Proposition 3.16 und assoziativ nach Teil (a) von Proposition 3.17. Nach Teil (b) derselben Proposition ist $[c_{x_0}]_{x_0}$ das neutrale Element bezüglich „$\cdot$" und nach Teil (c) ist $[w^-]_{x_0}$ das zu $[w]_{x_0}$ inverse Element bezüglich „$\cdot$". □

**Proposition 3.21.** *Seien $(X, x_0)$, $(X', x'_0)$ topologische Räume mit Basispunkt und $f : (X, x_0) \to (X', x'_0)$ stetig. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$\pi_1(f) : \begin{cases} \pi_1(X, x_0) & \to \pi_1(X', x'_0), \\ [w]_{x_0} & \mapsto [f \circ w]_{x'_0} \end{cases}$$

*ein Gruppenhomomorphismus.*

*Beweis.* Zunächst einmal ist $\pi_1(f)$ wohldefiniert,

*denn:* Für jede Schleife $w : [0, 1] \to X$ bei $x_0$ ist $f \circ w$ eine Schleife bei $x'_0$, da $f$ basispunkterhaltend ist. Zudem übersetzt sich für zwei Schleifen $w, w'$ bei $x_0$ die relative Homotopie $w \simeq w'$ rel$\{0, 1\}$ mit Bemerkung 3.15 zu $(f \circ w) \simeq (f \circ w')$ rel$\{0, 1\}$. #

Dass $\pi_1(f)$ ein Gruppenhomomorphismus ist, rechnen wir leicht nach. Tatsächlich gilt für je zwei Schleifen $w, w'$ bei $x_0$:

$$\pi_1(f)([w]_{x_0} \cdot [w']_{x_0}) = \pi_1(f)([w \star w']_{x_0}) = [f \circ (w \star w')]_{x'_0}$$

$$\overset{3.15}{=} [(f \circ w) \star (f \circ w')]_{x_0'} = [f \circ w]_{x_0'} \cdot [f \circ w']_{x_0'}$$
$$= \pi_1(f)([w]_{x_0}) \cdot \pi_1(f)([w']_{x_0}).$$

□

**Proposition 3.22.** *Seien* $(X, x_0), (X', x_0'), (X'', x_0'')$ *topologische Räume mit Basispunkt und* $f, g : (X, x_0) \to (X', x_0')$ *sowie* $f' : (X', x_0') \to (X'', x_0'')$ *stetig. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $f \simeq g \operatorname{rel}\{x_0\}$ *impliziert* $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.

(b) $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(c) $\pi_1(f' \circ f) = \pi_1(f') \circ \pi_1(f)$.

*Beweis.* Behauptung (a) ist korrekt, da für ein beliebiges $[w]_{x_0} \in \pi_1(X, x_0)$ nach Voraussetzung

$$\pi_1(f)([w]_{x_0}) = [f \circ w]_{x_0'} \overset{3.13\,(d)}{=} [f' \circ w]_{x_0'} = \pi_1(f')([w]_{x_0})$$

gilt.

Behauptung (b) folgt mit

$$\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)})([w]_{x_0}) = [\mathrm{id}_{(X,x_0)} \circ w]_{x_0} = [w]_{x_0} \quad \text{für alle } [w]_{x_0} \in \pi_1(X, x_0).$$

Behauptung (c) ergibt sich, da für alle $[w]_{x_0} \in \pi_1(X, x_0)$

$$\pi_1(f' \circ f)([w]_{x_0}) = [(f' \circ f) \circ w]_{x_0''} \overset{3.17\,(a)}{=} [f' \circ (f \circ w)]_{x_0''}$$
$$= \pi_1(f')([f \circ w]_{x_0'}) = \pi_1(f')\big(\pi_1(f)([w]_{x_0})\big)$$
$$= (\pi_1(f') \circ \pi_1(f))([w]_{x_0})$$

gilt. □

**Proposition 3.23.** *Seien* $(X, x_0), (X', x_0')$ *topologische Räume mit Basispunkt und*

$$f : (X, x_0) \to (X', x_0') \quad \textit{sowie} \quad g : (X', x_0') \to (X, x_0)$$

*stetig mit*

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)} \operatorname{rel}\{x_0\} \quad \textit{und} \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(X',x_0')} \operatorname{rel}\{x_0'\}.$$

*Dann ist* $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X', x_0')$ *ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Aus der Voraussetzung $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)} \operatorname{rel}\{x_0\}$ folgt

$$\pi_1(g) \circ \pi_1(f) \overset{3.22\,(c)}{=} \pi_1(g \circ f) \overset{3.22\,(a)}{=} \pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) \overset{3.22\,(b)}{=} \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}.$$

Aus der Voraussetzung $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(X',x_0')} \operatorname{rel}\{x_0'\}$ ergibt sich analog

$$\pi_1(f) \circ \pi_1(g) = \mathrm{id}_{\pi_1(X',x_0')}.$$

□

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, wie genau die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes vom gewählten Basispunkt abhängt.

**Proposition 3.24.** *Seien $X$ ein topologischer Raum, $x_0, x_1 \in X$ zwei Punkte und $p$ ein Weg in $X$ von $x_0$ nach $x_1$. Weiter sei die Abbildung*

$$h_p : \begin{cases} \pi_1(X, x_1) & \to \pi_1(X, x_0), \\ [w]_{x_1} & \mapsto [p \star w \star p^-]_{x_0} \end{cases}$$

*gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *$h_p$ ist ein Gruppenhomomorphismus.*

(b) *Für jeden Weg $p'$ in $X$ mit $p' \simeq p \operatorname{rel}\{0,1\}$ gilt $h_p = h_{p'}$.*

(c) $h_{c_{x_0}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(d) *Für jeden Weg $p'$ in $X$ mit $p'(0) = x_1$ gilt $h_{p\star p'} = h_p \circ h_{p'}$.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Die Abbildung $h_p$ ist wohldefiniert, da nach Proposition 3.16 für je zwei Schleifen $w, w'$ bei $x_1$ mit $w \simeq w' \operatorname{rel}\{0,1\}$ die relative Homotopie

$$p \star w \star p^- \simeq p \star w \star p^- \operatorname{rel}\{0,1\}$$

folgt. Die Homomorphie erhalten wir, da für je zwei Schleifen $w, w'$ bei $x_1$

$$\begin{aligned} h_p([w]_{x_1} \cdot [w']_{x_1}) &= h_p([w \star w']_{x_1}) = [p \star w \star w' \star p^-]_{x_0} \\ &= [p \star w \star p^- \star p \star w' \star p^-]_{x_0} = [p \star w \star p^-]_{x_0} \cdot [p \star w' \star p^-]_{x_0} \\ &= h_p(w) \cdot h_p(w') \end{aligned}$$

gilt.

Zum Beweis von Behauptung (b) betrachten wir einen Weg $p'$ in $X$ mit $p' \simeq p \operatorname{rel}\{0,1\}$. Für diesen gilt dann auch $(p')^- \simeq p^- \operatorname{rel}\{0,1\}$ und somit nach Proposition 3.16 für alle Schleifen $w$ bei $x_1$

$$h_p([w]_{x_1}) = [p \star w \star p^-]_{x_0} = [p' \star w \star (p')^-]_{x_0} = h_{p'}([w]_{x_1}).$$

Behauptung (c) erhalten wir, da für alle Schleifen $w$ bei $x_0$

$$h_{c_{x_0}}([w]_{x_0}) = [c_{x_0} \star w \star c_{x_0}^-]_{x_0} \overset{3.17\,(b)}{=} [w \star c_{x_0}^-]_{x_0} = [w \star c_{x_0}]_{x_0} \overset{3.17\,(b)}{=} [w]_{x_0}$$

gilt.

Schließlich zeigen wir Behauptung (d) und betrachten dafür $p'$ einen Weg mit $p'(0) = x_1$. Dann gilt für alle Schleifen $w$ bei $p'(1)$

$$h_{p\star p'}([w]_{p'(1)}) = [p \star p' \star w \star (p \star p')^-]_{x_0} = [p \star p' \star w \star (p')^- \star p^-]_{x_0} = h_p\big(h_{p'}([w]_{p'(1)})\big).$$

□

Um weiter fortzufahren erinnern wir an eine Definition aus der Algebra:

**Definition 3.25.** *Seien $G$ eine Gruppe und $g \in G$ ein fest gewähltes Element. Dann ist die Abbildung*

$$\mathrm{int}_g : \begin{cases} G & \to G, \\ h & \mapsto ghg^{-1} \end{cases}$$

*offensichtlich ein Automorphismus von $G$. Ein Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ heißt ein **innerer Automorphismus**, wenn es ein $g \in G$ mit $\sigma = \mathrm{int}_g$ gibt.*

**Proposition 3.26.** *Seien $X$ ein topologischer Raum, $x_0, x_1 \in X$ zwei Punkte und $p$ ein Weg in $X$ von $x_0$ nach $x_1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Der Gruppenhomomorphismus $h_p : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ aus Proposition 3.24 ist ein Isomorphismus.*

(b) *Ist $q$ ein weiterer Weg in $X$ von $x_0$ nach $x_1$, so ist $v := q \star p^-$ eine Schleife bei $x_0$ und es gilt*

$$h_q([w]_{x_1}) = [v]_{x_0} \cdot h_p([w]_{x_1}) \cdot [v]_{x_0}^{-1} = \left(\mathrm{int}_{[v]_{x_0}} \circ h_p\right)([w]_{x_1}) \quad \textit{für alle } [w]_{x_1} \in \pi_1(X, x_1),$$

*die Gruppenisomorphismen $h_p$ und $h_q$ unterscheiden sich also nur um einen inneren Automorphismus von $\pi_1(X, x_0)$.*

*Beweis.* Behauptung (a) erhalten wir aus

$$\begin{aligned} h_p \circ h_{p^-} &\overset{3.24\,(d)}{=} h_{p \star p^-} \overset{3.24\,(b)}{=} h_{c_{x_0}} \overset{3.24\,(c)}{=} \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}, \\ h_{p^-} \circ h_p &\overset{3.24\,(d)}{=} h_{p^- \star p} \overset{3.24\,(b)}{=} h_{c_{x_1}} \overset{3.24\,(c)}{=} \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_1)}. \end{aligned}$$

Behauptung (b) folgt, denn für alle $[w]_{x_1}$ gilt:

$$\begin{aligned} h_q([w]_{x_1}) &= [q \star w \star q^-]_{x_0} = [q \star (p^- \star p) \star w \star (p^- \star p) \star q^-]_{x_0} \\ &= [(q \star p^-) \star (p \star w \star p^-) \star (p \star q^-)]_{x_0} \\ &= [q \star p^-]_{x_0} \cdot [p \star w \star p^-]_{x_0} \cdot [p \star q^-]_{x_0} \\ &= [v]_{x_0} \cdot h_p([w]_{x_1}) \cdot [v]_{x_0}^{-1}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.27.** *Seien $X, X'$ topologische Räume und $x_0 \in X$ ein Punkt. Seien weiter $f, g \in C(X, X')$ zueinander homotop vermittels der Homotopie $H : X \times [0,1] \to X'$. Betrachten wir nun den Weg*

$$p : \begin{cases} [0,1] & \to X', \\ t & \mapsto H(x_0, t) \end{cases}$$

*und setzen*

$$x_0' := p(0) = H(x_0, 0) = f(x_0) \quad \textit{sowie} \quad x_1' := p(1) = H(x_0, 1) = g(x_0),$$

*so gilt*

$$\pi_1(f) = h_p \circ \pi_1(g),$$

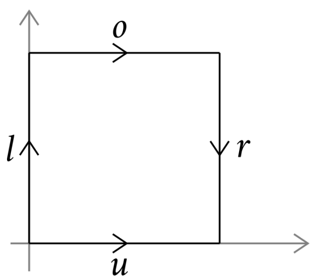
*es kommutiert also das Diagramm von Gruppenhomomorphismen*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X', x_1') \arrow[dd, "\cong"', "h_p"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\pi_1(g)"] \arrow[dr, "\pi_1(f)"'] & \\
 & \pi_1(X', x_0').
\end{tikzcd}$$

*Ist insbesondere eine der Abbildungen $\pi_1(f), \pi_1(g)$ ein Isomorphismus, dann auch die andere.*

*Beweis.* Wir betrachten die Wege

$$l : \begin{cases} [0,1] & \to [0,1] \times [0,1], \\ s & \mapsto (0,s), \end{cases} \qquad o : \begin{cases} [0,1] & \to [0,1] \times [0,1], \\ s & \mapsto (s,1) \end{cases}$$
$$r : \begin{cases} [0,1] & \to [0,1] \times [0,1], \\ s & \mapsto (1,1-s), \end{cases} \qquad u : \begin{cases} [0,1] & \to [0,1] \times [0,1], \\ s & \mapsto (s,0) \end{cases}$$




im Kompaktum $[0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Nach Teil (b) von Bemerkung 3.13 erfüllen diese

$$l \star o \star r \simeq u \text{ rel}\{0,1\}. \tag{3.1}$$

Für eine beliebige Schleife $w$ in $X$ bei $x_0$ und alle $s \in [0,1]$ gelten

$$\begin{aligned}
\big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ l\big)(s) &= \big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]})\big)(0,s) = H\big((w(0),s)\big) = H(x_0,s) = p(s), \\
\big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ o\big)(s) &= \big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]})\big)(s,1) = H\big((w(s),1)\big) = g(w(s)), \\
\big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ r\big)(s) &= \big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]})\big)(1,1-s) = H\big((w(1),1-s)\big) = p^-(s), \\
\big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ u\big)(s) &= \big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]})\big)(s,0) = H\big((w(s),0)\big) = f(w(s))
\end{aligned}$$

und also

$$H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ l = p,$$

$$
\begin{aligned}
&H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ o = g \circ w,\\
&H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ r = p^-,\\
&H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ u = f \circ w.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt direkt

$$
\begin{aligned}
f \circ w &= H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ u \\
&\overset{(3.1)}{\simeq} \big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]})\big) \circ (l \star o \star r) && \mathrm{rel}\{0,1\} \\
&\overset{3.15}{\simeq} \big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ l\big) \star \big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ o\big) \star \big(H \circ (w \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ r\big) && \mathrm{rel}\{0,1\} \\
&= p \star (g \circ w) \star p^-.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten für eine beliebige Schleife $w$ in $X$ bei $x_0$

$$
\pi_1(f)([w]_{x_0}) = [f \circ w]_{x_0'} = [p \circ (g \circ w) \circ p^-]_{x_0'} = h_p([g \circ w]_{x_1'}) = h_p\big(\pi_1(g)([w]_{x_0})\big)
$$

und somit die Proposition. □

**Proposition 3.28.** *Seien $X, X'$ topologische Räume, $f : X \to X'$ eine Homotopieäquivalenz und $x_0 \in X$ ein Punkt. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$
\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X', f(x_0))
$$

*ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Sei $g : X' \to X$ ein Homotopieinverses zu $f$. Wir betrachten die Verkettung

$$
\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\pi_1^{(x_0)}(f)} \pi_1(X', f(x_0)) \xrightarrow{\pi_1(g)} \pi_1\big((X, g(f(x_0)))\big) \xrightarrow{\pi_1^{(g(f(x_0)))}(f)} \pi_1\big(X', f(g(f(x_0)))\big),
$$

wobei wir die erste und die dritte Abbildung zur Unterscheidung mit dem jeweils zutreffenden Basispunkt kennzeichnen. Hierbei ist

$$
\pi_1(g) \circ \pi_1^{(x_0)}(f) \overset{3.22\,(c)}{=} \pi_1(g \circ f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1\big(X, g(f(x_0))\big)
$$

ein Isomorphismus,

*denn:* Wegen $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ kommutiert nach Proposition 3.27 das in der dortigen Notation geschriebene Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_1\big(X, g(f(x_0))\big) \arrow[dd, "h_p", "\cong"'] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\pi_1(g \circ f)"] \arrow[dr, "\pi_1(\mathrm{id}_X)"'] & \\
 & \pi_1(X, x_0).
\end{tikzcd}
$$

Die Behauptung folgt nun mit der Isomorphie von

$$\pi_1(\mathrm{id}_X) \overset{3.22\,(b)}{=} \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)} : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0).$$

#

Analog folgert man aus der Homotopie $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{X'}$ die Isomorphie

$$\pi_1^{(g(f(x_0)))}(f) \circ \pi_1(g) \overset{3.22\,(c)}{=} \pi_1(f \circ g) : \pi_1(X', f(x_0)) \to \pi_1(X', f(g(f(x_0)))).$$

Aus der ersten Isomorphie folgt sofort die Surjektivität von $\pi_1(g)$, aus der zweiten die Injektivität. Aus der Isomorphie von $\pi_1(g \circ f)$ und $\pi_1(g)$ folgt diejenige von $\pi_1^{(x_0)}(f)$ und also die Proposition. □

**Korollar 3.29.** *Für einen kontrahierbaren topologischer Raum mit Basispunkt $(X, x_0)$ gilt*

$$\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]_{x_0}\},$$

*die Fundamentalgruppe ist also trivial.*

*Beweis.* Da $X$ kontrahierbar ist, gibt es einen einpunktigen topologischen Raum $X' = \{x_0'\}$ mit $X \simeq X'$. Nach Proposition 3.28 folgt

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X', x_0') = \{[c_{x_0'}]_{x_0'}\}$$

und also das Korollar. □

**Beispiel 3.30.** *Seien $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig und $x_0 \in X$. Dann ist $\pi_1(X, x_0)$ trivial. Speziell ist somit insbesondere $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ trivial.*

Diese Resultate werfen die Frage nach Beispielen für *nichttriviale* Fundamentalgruppen auf, die wir im kommenden Abschnitt mit Satz 3.40 positiv beantworten werden.

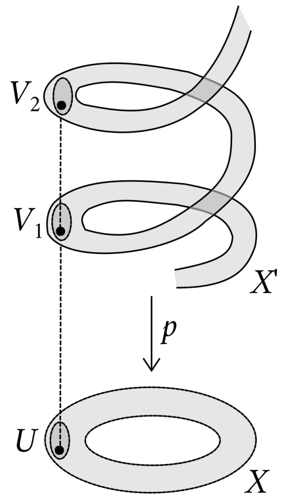
## 3.3 Überlagerungen

**Definition 3.31.** *Seien $\tilde{X}, X$ topologische Räume und $p : \tilde{X} \to X$ stetig und surjektiv. Dann sagen wir:*

*$U \subseteq X$ ist **gleichmäßig überlagert** durch $p$*

$:\Longleftrightarrow$ *es gibt eine Familie $(V_j)_{j \in J}$ offener Teilmengen von $\tilde{X}$ mit*

- *$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$,*
- *für alle $j \in J$ ist $p|_{V_j}^{U} : V_j \to U$ ein Homöomorphismus.*




*Man nennt die Teilmengen $V_j \subseteq \tilde{X}$ die **Blätter** über $U$. Diese sind nur dann eindeutig bestimmt, wenn $U$ zusammenhängend ist, und sind dann die Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$.*

*$p$ ist eine **Überlagerung***

$:\Longleftrightarrow$ *für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U$, die gleichmäßig durch $p$ überlagert ist*

$\Longleftrightarrow$ *es gibt eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $X$, so dass jedes $U_i$ gleichmäßig durch $p$ überlagert ist.*

*Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und ist $X$ zusammenhängend, so haben alle Fasern die gleiche Mächtigkeit. Haben die Fasern die Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$, so nennt man $p$ eine $n$-**blättrige Überlagerung**.*

**Bemerkung 3.32.** *In der Literatur existieren unterschiedliche Definitionen für den Begriff der Überlagerung. So fordern manche Autoren keine Surjektivität, andere verlangen dagegen noch zusätzliche Eigenschaften der Räume $\tilde{X}, X$.*

*In der Funktionentheorie begegnet man natürlich der Situation, dass eine gegebene holomorphe Funktion an einer Nullstelle lokal mehrere holomorphe Wurzeln aufweist, so etwa die Funktion*

$$p : \begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto z^2. \end{cases}$$

*an der Stelle $z = 0$. Die betreffenden Punkte im Bild nennt man **Verzweigungspunkte**. Verzweigte Funktionen sind keine Überlagerungen im Sinne von Definition 3.31, da Verzweigungspunkte offensichtlich keine gleichmäßig durch $p$ überlagerte, offene Umgebung besitzen. Um verzweigte Abbildungen dennoch als Überlagerungen betrachten zu können, weitet man den Begriff der Überlagerung in der Theorie der Riemann'schen Flächen etwas auf und studiert sogenannte „verzweigte“ Überlagerungen.*

**Beispiel 3.33.** (a) *Sei $X$ ein topologischer Raum und $I$ eine beliebige Indexmenge. Dann ist die offensichtlich stetige und surjektive Abbildung*

$$p : \begin{cases} X \times I_{\text{disk}} & \to X, \\ (x,i) & \mapsto x \end{cases}$$

*eine Überlagerung,*

*denn: Einerseits gilt*

$$p^{-1}(X) = \bigsqcup_{i \in I} \underbrace{(X \times \{i\})}_{=:V_i},$$

*andererseits ist $p|_{V_i} : V_i \to X$ ein Homöomorphismus.* #

*Ist speziell $I$ endlich, so ist $p$ eine $|I|$-blättrige Überlagerung.*

(b) *Die offensichtlich stetige und surjektive Abbildung*

$$p : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{S}^1, \\ t & \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix} \end{cases}$$

*ist eine Überlagerung,*

*denn: Für ein beliebiges $x = \binom{\cos 2\pi t}{\sin 2\pi t} \in \mathbb{S}^1$ setzen wir*

$$U := \{ \begin{pmatrix} \cos 2\pi s \\ \sin 2\pi s \end{pmatrix} \mid s \in (r - \frac{1}{4}, r + \frac{1}{4}) \} = p\big((r - \frac{1}{4}, r + \frac{1}{4})\big).$$

*Da die Topologie auf $\mathbb{S}^1$ von der metrischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ induziert wird, ist $U$ eine offene Umgebung von $x$. Weiter gilt*

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} \underbrace{(r - \frac{1}{4} + i, r + \frac{1}{4} + i)}_{=:V_i}.$$

*Nach Konstruktion und wegen der $2\pi$-Periodizität von Sinus und Kosinus ist dann für alle $i \in \mathbb{Z}$ die Einschränkung*

$$p|_{V_i}^{U} : \begin{cases} V_i & \to p(V_i) = p\big((r - \frac{1}{4}, r + \frac{1}{4})\big), \\ t & \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix} \end{cases}$$

*ein Homöomorphismus.* #

**Definition 3.34.** *Seien $\tilde{X}, X, X'$ topologische Räume, $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $f \in \mathcal{C}(X', X)$ und $\tilde{f} \in \mathcal{C}(X', \tilde{X})$. Dann sagen wir:*

$$\tilde{f} \text{ ist eine } \textbf{\textit{Hochhebung}} \text{ von } f \quad :\Longleftrightarrow \quad p \circ \tilde{f} = f.$$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

**Satz 3.35** (Homotopiehochhebungseigenschaft)**.** *Seien $\tilde{X}, X, X'$ topologische Räume, $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $H : X' \times [0,1] \to X$ stetig, $f : H(\cdot, 0) : X' \to X$ und $\tilde{f} : X' \to \tilde{X}$ eine Hochhebung von $f$. Dann gibt es genau eine Hochhebung*

$$\tilde{H} : X' \times [0,1] \to \tilde{X} \text{ von } H \quad \text{mit } \tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}.$$

*Beweis.* Sei für diesen Beweis $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von $X$ durch gleichmäßig überlagerte Teilmengen.

Sei $x_0' \in X'$ gegeben. Dann gibt es eine Umgebung $U'$ von $x_0'$ und eine Hochhebung

$$\tilde{H} : U' \times [0,1] \to \tilde{X} \text{ von } H|_{U' \times [0,1]} : (U' \times [0,1]) \to X \quad \text{mit} \quad \tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}|_{U'}, \tag{3.2}$$

*denn:* Sei $t \in [0,1]$. Wegen

$$X' \times [0,1] = H^{-1}(X) = H^{-1}\big(\bigcup_{i \in I} U_i\big) = \bigcup_{i \in I} H^{-1}(U_i)$$

gibt es dann ein $i \in I$ mit

$$(x_0', t) \in H^{-1}(U_i) \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} X' \times [0,1].$$

Daher gibt es auch eine offene Umgebung $U_t'$ von $x_0'$ und $a_t, b_t \in \mathbb{R}$ mit

$$(x_0', t) \in U_t' \times (a_t, b_t)_{[0,1]} \subseteq H^{-1}(U_i),$$

wobei $(a_t, b_t)_{[0,1]} := (a_t, b_t) \cap [0,1]$ und somit auch $H(U_t' \times [a_t, b_t]_{[0,1]}) \subseteq U_i$ gelte. Es folgt

$$\{x_0'\} \times [0,1] = \bigcup_{t \in [0,1]} \{(x_0', t)\} \subseteq \bigcup_{t \in [0,1]} \big(U_t' \times (a_t, b_t)_{[0,1]}\big).$$

Nach Proposition 2.57 ist $\big(\{x_0'\} \times [0,1]\big) \cong [0,1]$ kompakt, und es gibt eine endliche Teilmenge $[0,1]_{\text{fin}} \subseteq [0,1]$ mit

$$\{x_0'\} \times [0,1] \subseteq \bigcup_{t \in [0,1]_{\text{fin}}} \big(U_t' \times (a_t, b_t)_{[0,1]}\big).$$

Zusammengefasst erhalten wir für den Durchschnitt $U' := \bigcap_{t \in [0,1]_{\text{fin}}} U_t'$:

- $U'$ ist eine offene Umgebung von $x_0'$.
- $(\{x_0'\} \times [0,1]) \subseteq \bigcup_{t \in [0,1]_{\text{fin}}} \big(U' \times (a_t, b_t)_{[0,1]}\big) = U' \times \bigcup_{t \in [0,1]_{\text{fin}}} (a_t, b_t)_{[0,1]}$.
- Für jedes $t \in [0,1]_{\text{fin}}$ existiert ein $i \in I$ mit $H(U' \times (a_t, b_t)_{[0,1]}) \subseteq U_i$.

Insbesondere (!) gibt es daher ein $m \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen

$$0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1 \quad \text{sowie} \quad i_0, \ldots, i_{m-1} \in I$$

mit

$$
\begin{aligned}
(\{x_0'\} \times [0,1]) &\subseteq \bigcup_{\mu=0}^{m-1} (U' \times [t_\mu, t_{\mu+1}]), \\
H(U' \times [t_\mu, t_{\mu+1}]) &\subseteq U_{i_\mu} \text{ für alle } \mu \in \{0,\ldots,m-1\}.
\end{aligned}
$$

Zum induktiven Beweis der Behauptung nehmen wir nun an, für ein $\mu \in \{0,\ldots,m-1\}$ sei eine Hochhebung $\tilde{H}$ von $H|_{U'\times[0,t_\mu]}$ mit $\tilde{H}(\cdot,0) = \tilde{f}|_{U'}$ bereits konstruiert und beginnen diese Induktion mit $\tilde{H}$ auf $U' \times \{0\}$ via $\tilde{H}(x',0) := \tilde{f}(x')$ für alle $x' \in U'$. Es gilt dann

$$(p \circ \tilde{H})(x_0', t_\mu) = H(x_0', t_\mu) \in U_{i_\mu} \quad \text{und also} \quad \tilde{H}(x_0', t_\mu) \in p^{-1}(U_{i_\mu}).$$

Daher gibt es ein $\tilde{H}(x_0', t_\mu) \in \tilde{U}_{i_\mu} \mathrel{\underset{\circ}{\subseteq}} \tilde{X}$, so dass $p_\mu := p|_{\tilde{U}_{i_\mu}}^{U_{i_\mu}}$ ein Homöomorphismus ist.

Das Problem ist nun, dass im Allgemeinen $\tilde{H}(U' \times \{t_\mu\})$ nicht in $\tilde{U}_{i_\mu}$ enthalten ist. Wir ersetzen daher ohne Einschränkung $U' \times \{t_\mu\}$ durch $\tilde{H}|_{U'\times\{t_\mu\}}^{-1}(\tilde{U}_{i_\mu})$ und erhalten eine verkleinerte offene Umgebung $U'$ von $x_0'$ mit $\tilde{H}(U' \times \{t_\mu\}) \subseteq \tilde{U}_{i_\mu}$.

Nun definieren wir

$$\tilde{H} : \begin{cases} U' \times [0, t_{\mu+1}] & \to \tilde{X}, \\ (x', t) & \mapsto \begin{cases} \tilde{H}(x', t) & \text{für } t \in [0, t_\mu], \\ p_\mu^{-1}\big(H(x', t)\big) & \text{für } t \in [t_\mu, t_{\mu+1}]. \end{cases} \end{cases}$$

Diese Abbildung $\tilde{H}$ ist wohldefiniert, da mit $H(U' \times [t_\mu, t_{\mu+1}]) \subseteq U_{i_\mu}$ und

$$H(x', t_\mu) = p\big(\underbrace{\tilde{H}(x', t_\mu)}_{\in \tilde{U}_{i_\mu} \text{ nach Vorüberlegung}}\big) = p_\mu\big(\tilde{H}(x', t_\mu)\big)$$

auch $p_\mu^{-1}\big(H(x', t_\mu)\big) = \tilde{H}(x', t_\mu)$ gilt, und stetig nach Proposition 1.55.

Nach $m < \infty$ Schritten erhalten wir so eine Umgebung $U'$ von $x_0'$ und eine Hochhebung $\tilde{H}$ wie behauptet. #

Im Spezialfall $X' = \{x_0'\}$ der Einelementigkeit von $X'$ ist die Hochhebung aus (3.2) eindeutig,

*denn:* Betrachten wir zwei Hochhebungen

$$\tilde{H}, \tilde{H}' : (\{x_0'\} \times [0,1]) \to \tilde{X} \text{ von } H : (\{x_0\} \times [0,1]) \to X \quad \text{mit } \tilde{H}(x_0', 0) = \tilde{f}(x_0') = H'(\tilde{x}_0', 0).$$

Wie im Beweis von (3.2) gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen

$$0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1 \quad \text{sowie} \quad i_0, \ldots, i_{m-1} \in I$$

mit

$$H(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}]) \subseteq U_{i_\mu} \text{ für alle } \mu \in \{0,\ldots,m-1\}.$$

Zum induktiven Beweis der Behauptung nehmen wir

$$\tilde{H}|_{\{x_0'\}\times[0,t_\mu]} = \tilde{H}'|_{\{x_0'\}\times[0,t_\mu]}$$

an und beginnen diese Induktion mit der konstruktionsgemäßen Identität $\tilde{H}(x_0',0) = \tilde{H}'(x_0',0)$. Nach Satz 2.18 ist $\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}] \cong [t_\mu, t_{\mu+1}]$ zusammenhängend und nach Teil (a) von Proposition 2.5 trifft dies auch auf die stetigen Bilder $\tilde{H}(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}])$ und $\tilde{H}'(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}])$ zu. Nach Konstruktion gilt zudem

$$(p \circ \tilde{H})(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}]) = (p \circ \tilde{H}')(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}]) = H(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}]) \subseteq U_{i_\mu}$$

und also

$$\tilde{H}(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}]), \tilde{H}'(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}]) \subseteq p^{-1}(U_{i_\mu}).$$

Insgesamt liegen $\tilde{H}(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}])$ und $\tilde{H}'(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}])$ jeweils komplett in genau einem Blatt über $U_{i_\mu}$. Wegen $\tilde{H}(x_0', t_\mu) = \tilde{H}'(x_i', t_\mu)$ stimmen diese Blätter überein, nennen wir dieses $\tilde{U}_{i_\mu}$. Aus

$$(p \circ \tilde{H})(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}]) = (p \circ \tilde{H}')(\{x_0'\} \times [t_\mu, t_{\mu+1}])$$

und der Injektivität der Einschränkung $p|_{\tilde{U}_{i_\mu}}$ folgt

$$\tilde{H}|_{\{x_0'\}\times[t_\mu,t_{\mu+1}]} = \tilde{H}'|_{\{x_0'\}\times[t_\mu,t_{\mu+1}]}$$

und somit insgesamt

$$\tilde{H}|_{\{x_0'\}\times[0,t_{\mu+1}]} = \tilde{H}'|_{\{x_0'\}\times[0,t_{\mu+1}]}.$$

Nach $m < \infty$ Schritten erhalten wir die behauptete Eindeutigkeit. #

Die Einschränkungen der auf Mengen der Form $U' \times [0,1]$ konstruierten Hochhebungen aus (3.2) auf Mengen der Form $\{x_0'\} \times [0,1]$ sind nach dem soeben Gezeigten eindeutig, insbesondere stimmen die jeweiligen Hochhebungen auf den Durchschnitten der betroffenen Mengen vom Typ $U' \times [0,1]$ überein. Insgesamt erhalten wir so eine wohldefinierte Hochhebung

$$\tilde{H} : X' \times [0,1] \to \tilde{X} \text{ von } H \quad \text{mit} \quad \tilde{H}(\cdot,0) = \tilde{f}.$$

Nach Proposition 1.55 ist diese stetig, da die Einschränkungen auf Mengen der Form $U' \times [0,1]$ stetig sind. Sie ist auch eindeutig, da die Einschränkungen auf Mengen der Form $\{x_0'\} \times [0,1]$ eindeutig bestimmt sind. □

**Korollar 3.36** (Weghochhebungseigenschaft)**.** *Seien $\tilde{X}, X$ topologische Räume, $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $w$ ein Weg in $X$, $x_0 = w(0)$ und $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$. Dann gibt es genau eine Hochhebung*

$$\tilde{w} : [0,1] \to \tilde{X} \text{ von } w \quad \text{mit } \tilde{w}(0) = \tilde{x}_0.$$

*Beweis.* Wir zeigen das Korollar als direkte Anwendung von Satz 3.35 auf einen Einpunktraum $X' = \{x'_0\}$. Dafür setzen wir:

$$H : \begin{cases} \{x'_0\} \times [0,1] & \to X, \\ (x'_0, t) & \mapsto w(t) \end{cases} \quad \text{und} \quad f := H(\cdot, 0) : \begin{cases} \{x'_0\} & \to X, \\ x'_0 & \mapsto w(0) = x_0. \end{cases}$$

Wegen $p(\tilde{x}_0) = x_0$ ist dann

$$\tilde{f} : \begin{cases} \{x'_0\} & \to \tilde{X}, \\ x'_0 & \mapsto \tilde{x}_0 \end{cases}$$

eine Hochhebung von $f$. Nach Satz 3.35 existiert daher eine Hochhebung

$$\tilde{H} : \{x'_0\} \times [0,1] \to \tilde{X} \text{ von } H \quad \text{mit } \tilde{H}(x'_0, 0) = \tilde{f}(x'_0).$$

Setzen wir

$$\tilde{w} : \begin{cases} [0,1] & \to \tilde{X}, \\ t & \mapsto \tilde{H}(x'_0, t), \end{cases}$$

so gilt

$$(p \circ \tilde{w})(t) = p\big(\tilde{H}(x'_0, t)\big) = H(x'_0, t) = w(t).$$

Es folgt, dass $\tilde{w}$ eine Hochhebung von $w$ mit

$$\tilde{w}(0) = \tilde{H}(x'_0, 0) = \tilde{f}(x'_0) = \tilde{x}_0$$

ist. Ist $\tilde{w}'$ eine weitere Hochhebung von $w$ mit $\tilde{w}'(0) = \tilde{x}_0$, so erfüllt die Abbildung

$$\tilde{H}' : \begin{cases} \{x'_0\} \times [0,1] & \to \tilde{X}, \\ (x'_0, t) & \mapsto \tilde{w}'(t) \end{cases}$$

die Eigenschaft

$$(p \circ \tilde{H}')(x'_0, t) = (p \circ \tilde{w}')(t) = w(t) = H(x'_0, t),$$

ist also eine Hochhebung von $H$ mit

$$\tilde{H}'(x'_0, 0) = \tilde{w}'(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{f}(x'_0).$$

Nach der Eindeutigkeitsaussage von Satz 3.35 folgt nun $\tilde{H}' = \tilde{H}$ und also auch $\tilde{w}' = \tilde{w}$. □

**Korollar 3.37** (Monodromielemma)**.** *Seien $\tilde{X}, X$ topologische Räume, $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $v, w$ Wege in $X$ mit $v \simeq w \text{ rel}\{0,1\}$ und $\tilde{v}, \tilde{w}$ Hochhebungen von $v, w$ mit $\tilde{v}(0) = \tilde{w}(0)$. Dann gilt*

$$\tilde{v} \simeq \tilde{w} \text{ rel}\{0,1\}$$

*und insbesondere $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$.*

*Beweis.* Sei $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ eine Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ zwischen $v$ und $w$. Nach Satz 3.35 gibt es dann eine Hochhebung $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ mit $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{v}$. Folglich ist

$$\tilde{g} : \begin{cases} [0,1] & \to \tilde{X}, \\ t & \mapsto \tilde{H}(0,t) \end{cases} \quad \text{eine Hochhebung von} \quad g : \begin{cases} [0,1] & \to X, \\ t & \mapsto H(0,t). \end{cases}$$

Der Weg $g$ ist konstant, da $H$ eine Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ ist. Nach der Eindeutigkeitsaussage von Korollar 3.36 ist dann auch der Weg $\tilde{g}$ konstant. Es folgt

$$\tilde{H}(0,t) = \tilde{H}(0,0) = \tilde{v}(0) \qquad \text{für alle } t \in [0,1],$$

und analog

$$\tilde{H}(1,t) = \tilde{H}(1,0) = \tilde{v}(1) \qquad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Insbesondere ist $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ zu $\{0,1\}$.

Setzen wir nun noch

$$\tilde{h} : \begin{cases} [0,1] & \to \tilde{X}, \\ s & \mapsto \tilde{H}(s,1), \end{cases}$$

so erhalten wir

$$(p \circ \tilde{h})(s) = p\big(\tilde{H}(s,1)\big) = H(s,1) = w(s) \quad \text{für alle } s \in [0,1].$$

Es sind also $\tilde{h}$ und $\tilde{w}$ beides Hochhebungen von $w$, und es gilt

$$\tilde{h}(0) = \tilde{H}(0,1) = \tilde{v}(0) = \tilde{w}(0).$$

MIt der Eindeutigkeitsaussage von Korollar 3.36 folgt $\tilde{h} = \tilde{w}$ und somit

$$\tilde{H}(s,1) = \tilde{h}(s) = \tilde{w}(s) \qquad \text{für alle } s \in [0,1].$$

Nach Konstruktion von $\tilde{H}$ gilt aber auch

$$\tilde{H}(s,0) = \tilde{v}(s) \qquad \text{für alle } s \in [0,1],$$

so dass $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ zwischen $\tilde{v}$ und $\tilde{w}$ ist. □

**Definition 3.38.** *Ist ein topologischer Raum $X$ wegzusammenhängend und ist $\pi_1(X,x)$ für alle $x \in X$ trivial, so nennen wir $X$* ***einfach zusammenhängend****.*

**Korollar 3.39.** *Seien $\tilde{X}, X$ topologische Räume und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Ist $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend, so nennen wir $p$ eine* ***universelle Überlagerung****. In diesem Fall besitzt $\tilde{X}$ im folgenden Sinne keine echten Überlagerungen: Für jeden wegzusammenhängenden topologischen Raum $X'$ und jede Überlagerung $q : X' \to \tilde{X}$ ist $q$ ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Nach Definition 3.31 ist $q$ stetig, surjektiv und lokal homöomorph. Zum Beweis des Korollars genügt es daher, die Injektivität von $q$ nachzuweisen. Angenommen, $q$ wäre nicht injektiv. Dann gäbe es Punkte $x' \neq y'$ in $X'$ mit $q(x') = q(y')$. Wäre dann $w'$ ein Weg von $x'$ nach $y'$, so wäre $q \circ w'$ eine Schleife in $(\tilde{X}, q(x'))$, also homotop relativ $\{0,1\}$ zum konstanten Weg $c_{q(x')}$. Das Monodromielemma 3.37 besagte in diesem Fall, dass die Endpunkte der Hochhebungen $w'$ und $c_{x'}$ übereinstimmten. Im Widerspruch zu unserer Annahme gälte also $y' = x'$. Es folgt die Injektivität und somit auch das Korollar. □

**Satz 3.40.** $\pi_1(\mathbb{S}^1, \binom{1}{0}) \cong \mathbb{Z}$.

*Beweis.* Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to \pi_1(\mathbb{S}^1, \binom{1}{0}), \\ n & \mapsto [u_n]_{\binom{1}{0}} \end{cases} \quad \text{mit } u_n : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{S}^1, \\ t & \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi n t \\ \sin 2\pi n t \end{pmatrix} \end{cases}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Tatsächlich ist $\Phi$ wohldefiniert,

*denn:* Wegen $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ und der $2\pi$-Periodizität von Kosinus und Sinus ist $u_n$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine Schleife bei $\binom{1}{0}$. #

Nach Teil (b) von Beispiel 3.33 ist

$$p : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{S}^1, \\ t & \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix} \end{cases}$$

eine Überlagerung. Weiter ist offensichtlich

$$v_n : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R}, \\ t & \mapsto nt \end{cases}$$

ein Weg in $\mathbb{R}$ mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt $n$. Wegen $u_n = p \circ v_n$ ist $v_n$ eine Hochhebung von $u_n$.

$\Phi$ ist ein Homomorphismus,

*denn:* Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Für den Weg

$$w : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R}, \\ s & \mapsto m + ns \end{cases}$$

gilt dann

$$(p \circ w)(s) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi(m+ns) \\ \sin 2\pi(m+ns) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi ns \\ \sin 2\pi ns \end{pmatrix} = u_n(s) \quad \text{für alle } s \in [0,1].$$

Es ist daher $w$ eine Hochhebung von $u_n$ mit Anfangspunkt $m$ und Endpunkt $m+n$. Wir erhalten so mit $v_m \star w$ und $v_{m+n}$ zwei Wege in $\mathbb{R}$ mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt $m+n$. Da $\mathbb{R}$ ein konvexer Unterraum von sich selbst ist, erhalten wir mit Teil (b) von Bemerkung 3.13

$$v_m \star w \simeq v_{m+n} \quad \operatorname{rel}\{0,1\}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\Phi(m+n) &= [u_{m+n}]_{\binom{1}{0}} = [p \circ v_{m+n}]_{\binom{1}{0}} = [p \circ (v_m \star w)]_{\binom{1}{0}} \\ &\overset{3.15}{=} [(p \circ v_m) \star (p \circ w)]_{\binom{1}{0}} = [u_m \star u_n]_{\binom{1}{0}} = [u_m]_{\binom{1}{0}} \cdot [u_n]_{\binom{1}{0}} \\ &= \Phi(m) \cdot \Phi(n).\end{aligned}$$

#

$\Phi$ ist injektiv,

*denn:* Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $\Phi(m) = \Phi(n)$, also mit $u_m \simeq u_n \operatorname{rel}\{0,1\}$. Nach Konstruktion ist $v_m$ bzw. $v_n$ eine Hochhebung von $u_m$ bzw. $u_n$, und es gilt $v_m(0) = 0 = v_n(0)$. Mit dem Monodromielemma 3.37 folgt daher

$$m = v_m(1) = v_n(1) = n.$$

#

$\Phi$ ist surjektiv,

*denn:* Sei $[w]_{\binom{1}{0}} \in \pi_1(\mathbb{S}^1, \binom{1}{0})$ gegeben. Wegen $0 \in p^{-1}(\binom{1}{0}) = \mathbb{Z}$ und der Weghochhebungseigenschaft 3.36 gibt es eine Hochhebung $\tilde{w}$ von $w$ nach $\mathbb{R}$ mit $\tilde{w}(0) = 0 = v_n(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund von

$$(p \circ \tilde{w})(1) = w(1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{w}(1) = n = v_n(1)$. Da $\mathbb{R}$ ein konvexer Unterraum von sich selbst ist, folgt daher mit Teil (b) von Bemerkung 3.13

$$\tilde{w} \simeq v_n \quad \operatorname{rel}\{0,1\}.$$

Es folgt

$$[w]_{\binom{1}{0}} = [p \circ \tilde{w}]_{\binom{1}{0}} = [p \circ v_n]_{\binom{1}{0}} = [u_n]_{\binom{1}{0}} = \Phi(n).$$

#

□

**Korollar 3.41.** $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}, \binom{1}{0}) \cong \mathbb{Z}$.

*Beweis.* In Bemerkung 3.8 haben wir eingesehen, dass

$$r : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\} & \to \mathbb{S}^1, \\ x & \mapsto \frac{x}{\|x\|}. \end{cases}$$

eine Homotopieäquivalenz ist. Das Korollar folgt mit Proposition 3.28 und Satz 3.40. □

**Korollar 3.42.** *Es gibt keine stetige Abbildung* $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ *mit* $r|_{\mathbb{S}^1} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.

*Beweis.* Für den Beweis betrachten wir eine stetige Abbildung

$$r : (\mathbb{D}^2, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) \to (\mathbb{S}^1, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$$

und die kanonische Inklusion

$$i : (\mathbb{S}^1, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) \hookrightarrow (\mathbb{D}^2, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}).$$

Wir erhalten eine Sequenz von induzierten Abbildungen

$$\pi_1\big(\mathbb{S}^1, \tbinom{1}{0}\big) \xrightarrow{\pi_1(i)} \pi_1\big(\mathbb{D}^2, \tbinom{1}{0}\big) \xrightarrow{\pi_1(r)} \pi_1\big(\mathbb{S}^1, \tbinom{1}{0}\big).$$

Aufgrund der Konvexität und Beispiel 3.30 ist $\pi_1\big(\mathbb{D}^2, \tbinom{1}{0}\big)$ trivial und somit

$$\pi_1(r \circ i)\big([w]_{\binom{1}{0}}\big) = \pi_1(r)\big(\underbrace{\pi_1(i)([w]_{\binom{1}{0}})}_{=[c_{\binom{1}{0}}]_{\binom{1}{0}}}\big) = [c_{\binom{1}{0}}]_{\binom{1}{0}} \quad \text{für alle } [w]_{\binom{1}{0}} \in \pi_1(\mathbb{S}^1, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}).$$

Da $\pi_1\big(\mathbb{S}^1, \tbinom{1}{0}\big)$ nach Satz 3.40 nichttrivial ist, folgt hieraus

$$\pi_1(r \circ i) \neq \mathrm{id}_{\pi_1\left(\mathbb{S}^1, \binom{1}{0}\right)} \overset{3.22\,(b)}{=} \pi_1\big(\mathrm{id}_{\left(\mathbb{S}^1, \binom{1}{0}\right)}\big)$$

und mit Teil (a) von Proposition 3.22 auch

$$r \circ i \not\simeq \mathrm{id}_{\left(\mathbb{S}^1, \binom{1}{0}\right)} \quad \mathrm{rel}\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}.$$

Offensichtlich gilt dann insbesondere

$$r|_{\mathbb{S}^1} \neq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$$

und somit das Korollar. □

**Korollar 3.43** (Brouwer'scher Fixpunktsatz in Dimension 2)**.** *Jede stetige Abbildung* $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ *hat einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Nehmen wir an, es gäbe eine stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ mit $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathbb{D}^2$. Dann wäre die Abbildung

$$g : \begin{cases} \mathbb{D}^2 & \to \mathbb{D}^2, \\ x & \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot f(2x) & \text{für } \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - \|x\|) \cdot f\big(\frac{x}{\|x\|}\big) & \text{für } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

wohldefiniert,

*denn:* Wegen

$$\|(1-\|x\|)\cdot f(\frac{x}{\|x\|})\| = (1-\|x\|)\cdot\|f(\frac{x}{\|x\|})\| \le 1$$

gälte $g(\mathbb{D}^2)\subseteq\mathbb{D}^2$ und wegen

$$(1-\|x\|)\cdot f(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{1}{2}\cdot f(2x) \quad \text{für } \|x\| = \frac{1}{2}$$

wären die Funktionswerte von $g$ eindeutig gegeben. #

Weiter wäre $g$ offensichtlich stetig und zusätzlich fixpunktfrei,

*denn:* Wäre $x\in\mathbb{D}^2$ ein Fixpunkt von $g$ mit $\|x\|\le\frac{1}{2}$, so gälte $\frac{1}{2}\cdot f(2x)=x$ und also $f(2x)=2x$, was wegen $2x\in\mathbb{D}^2$ und der Fixpunktfreiheit von $f$ nicht möglich wäre.

Wäre $x\in\mathbb{D}^2$ ein Fixpunkt von $g$ mit $\|x\|>\frac{1}{2}$, so gälte

$$\|(1-\|x\|)\cdot f(\frac{x}{\|x\|})\| \le \frac{1}{2}\cdot\|f(\frac{x}{\|x\|})\| \le \frac{1}{2}$$

und also $\|g(x)\|<\|x\|$, was wegen der Fixpunkteigenschaft von $x$ nicht möglich wäre. #

Nach Konstruktion gälte zudem $g(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{S}^1$. Die offensichtlich stetige Abbildung

$$r:\begin{cases}\mathbb{D}^2 & \to \mathbb{S}^1,\\ x & \mapsto \frac{x-g(x)}{\|x-g(x)\|}\end{cases}$$

wäre dann im Widerspruch zu Korollar 3.42 eingeschränkt auf die Einssphäre die Identität. Unsere Annahme, es könne eine fixpunktfreie, stetige Abbildung $f:\mathbb{D}^2\to\mathbb{D}^2$ geben, kann also nicht stimmen und wir haben das Korollar bewiesen. □

## 3.4 Der Abbildungsgrad

In diesem Abschnitt seien fest

$$e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

und

$$\Phi:\begin{cases}\mathbb{Z} & \to \pi_1(\mathbb{S}^1,\binom{1}{0}),\\ n & \mapsto [u_n]_{\binom{1}{0}}\end{cases} \quad \text{mit } u_n:\begin{cases}[0,1] & \to \mathbb{S}^1,\\ t & \mapsto \begin{pmatrix}\cos 2\pi nt\\ \sin 2\pi nt\end{pmatrix}\end{cases}$$

der Gruppenisomorphismus aus Satz 3.40.

**Proposition 3.44.** *Für ein gegebenes $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ gibt es genau eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$, für die das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) \arrow[r, "\pi_1(f)"] & \pi_1(\mathbb{S}^1, f(e_1)) \arrow[r, "h_w"] & \pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) \\
\mathbb{Z} \arrow[u, "\Phi"] \arrow[rr, "\cdot k"] & & \mathbb{Z} \arrow[u, "\Phi"']
\end{tikzcd}$$

*kommutiert, wobei $w$ ein beliebiger Weg in $\mathbb{S}^1$ von $e_1$ nach $f(e_1)$ sei und $h_w$ die Abbildung aus Proposition 3.24. Die Zahl $k$ ist dabei unabhängig von der Wahl von $w$ und heißt der **Abbildungsgrad*** $\mathrm{mdeg}(f)$ *von $f$.*

*Beweis.* Da $\Phi$ ein Isomorphismus ist und $\pi_1(f)$ sowie $h_w$ Homomorphismen sind, ist

$$m := \Phi^{-1} \circ h_w \circ \pi_1(f) \circ \Phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Da $\mathbb{Z}$ zyklisch ist, gibt es somit genau ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $m$ die Multiplikationsabbildung mit $k$ ist, nämlich $k := m(1)$.

Ist $w'$ ein weiterer Weg in $\mathbb{S}^1$ von $e_1$ nach $f(e_1)$, so unterscheiden sich $h_w$ und $h_{w'}$ nach Teil (b) von Proposition 3.26 um einen inneren Automorphismus von $\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1)$, es gibt also ein $\gamma \in \pi_1(\mathbb{S}^1, e_1)$ mit

$$h_{w'}(\alpha) = \gamma \cdot h_w(\alpha) \cdot \gamma^{-1} \quad \text{für alle } \alpha \in \pi_1(\mathbb{S}^1, f(e_1)).$$

Da $\pi_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z})$ nach Satz 3.40 isomorph zu $\mathbb{Z}$ und insbesondere abelsch ist, folgt $h_{w'} = h_w$. Es folgt, dass die Zahl $k$ nicht von der Wahl des Weges $w$ abhängt. □

**Proposition 3.45.** *Für $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ mit $f \simeq g$ gilt* $\mathrm{mdeg}(f) = \mathrm{mdeg}(g)$.

*Beweis.* Seien $v$ ein Weg in $\mathbb{S}^1$ von $f(e_1)$ nach $g(e_1)$ und $w$ ein Weg in $\mathbb{S}^1$ von $e_1$ nach $f(e_1)$. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) \arrow[r, "\pi_1(g)"] \arrow[dr, "\pi_1(f)"'] & \pi_1(\mathbb{S}^1, g(e_1)) \arrow[d, "h_v"] \arrow[dr, "h_{w \star v}"] & \\
& \pi_1(\mathbb{S}^1, f(e_1)) \arrow[r, "h_w"'] & \pi_1(\mathbb{S}^1, e_1)
\end{tikzcd}$$

kommutiert das linke Dreieck nach Proposition 3.27 und das rechte Dreieck nach Teil (d) von Proposition 3.24. Aus der resultierenden Kommutativität des Gesamtdiagramms folgt die behauptete Gleichheit der Abbildungsgrade $\mathrm{mdeg}(f) = \mathrm{mdeg}(g)$. □

Um noch eine zusätzliche multiplikative Struktur zu haben, identifizieren wir für den Rest dieses Abschnittes $\mathbb{R}^2$ mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, die Einssphäre $\mathbb{S}^1$ mit dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $e_1$ mit der Zahl 1. Topologisch entsteht hierbei offensichtlich kein Unterschied.

**Proposition 3.46.** *Die offensichtlich stetige Abbildung*

$$f : \begin{cases} \mathbb{S}^1 & \to \mathbb{S}^1, \\ z & \mapsto z^k \end{cases} \quad \textit{mit } k \in \mathbb{Z}$$

*erfüllt* $\operatorname{mdeg}(f) = k$.

*Beweis.* Wegen $f(1) = 1$ kann $w$ in der Konstruktion des Abbildungsgrads in Proposition 3.44 als konstanter Weg gewählt werden. Nach Teil (c) von Proposition 3.24 gilt dann $h_w = \mathrm{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1,1)}$. In Entartung des Diagramms aus Proposition 3.44 erhalten wir

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \arrow[r, "\pi_1(f)"] & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{Z}, \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

wobei die Abbildung unten die Multiplikation mit einer noch nicht bekannten ganzen Zahl ist. Diese Zahl gilt es nun zu bestimmen. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\pi_1(f)\big(\Phi(n)\big) = \pi_1(f)([u_n]_1) = [f \circ u_n]_1 \quad \text{mit } u_n : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{S}^1, \\ t & \mapsto e^{2\pi i n t}. \end{cases}$$

Mit

$$(f \circ u_n)(t) = \left(e^{2\pi i n t}\right)^k = e^{2\pi i n k t} = u_{nk}(t)$$

folgt

$$\pi_1(f)\big(\Phi(n)\big) = [u_{nk}]_1 = \Phi(nk)$$

und somit $\operatorname{mdeg}(f) = k$. □

**Korollar 3.47.** *Die offensichtlich stetige Abbildung*

$$g : \begin{cases} \mathbb{S}^1 & \to \mathbb{S}^1, \\ z & \mapsto az^k \end{cases} \quad \textit{mit } a \in \mathbb{S}^1 \textit{ und } k \in \mathbb{Z}$$

*erfüllt* $\operatorname{mdeg}(f) = k$.

*Beweis.* Ist $f$ wieder die stetige Abbildung aus Proposition 3.46, so gilt $g \simeq f$ via

$$H : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0,1] & \to \mathbb{S}^1, \\ (z,t) & \mapsto w(t)z^k \end{cases},$$

wobei $w$ ein Weg in $\mathbb{S}^1$ von $a$ nach 1 sei. Mit Proposition 3.45 folgt

$$\operatorname{mdeg}(f) = \operatorname{mdeg}(g) \overset{3.46}{=} k.$$

□

**Korollar 3.48** (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $p \in \mathbb{C}[X]$ nichtkonstant. Dann besitzt $p$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

*Beweis.* Sei $n$ eine nichtnegative ganze Zahl und

$$p(X) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu X^\nu \in \mathbb{C}[X] \quad \text{mit } a_n \neq 0$$

ein Polynom ohne Nullstelle in $\mathbb{C}$. Da für $a_0 = 0$ offensichtlich $p(0) = 0$ gilt, können wir für den Rest des Beweises ohne Einschränkung zusätzlich $a_0 \neq 0$ annehmen. Wegen der angenommenen Nullstellenfreiheit von $p$ in $\mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ sind die offensichtlich stetigen Abbildungen

$$H_0 : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0,1] & \to \mathbb{S}^1, \\ (z,t) & \mapsto \frac{p(tz)}{|p(tz)|} \end{cases}$$

und

$$H_n : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0,1] & \to \mathbb{S}^1, \\ (z,t) & \mapsto \begin{cases} \frac{t^n p(\frac{z}{t})}{|t^n p(\frac{z}{t})|} & \text{für } t \neq 0, \\ \frac{a_n z^n}{|a_n z^n|} & \text{für } t = 0 \end{cases} \end{cases}$$

wohldefiniert. Es definiert

$$\begin{aligned} &H_0 \text{ eine Homotopie zwischen } f_0(z) := \frac{a_0}{|a_0|} \text{ und } f(z) := \frac{p(z)}{|p(z)|}, \\ &H_n \text{ eine Homotopie zwischen } f_n(z) := \frac{a_n z^n}{|a_n z^n|} \text{ und } f(z), \end{aligned}$$

wobei offensichtlich $f_0, f, f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ gilt. Es folgt $f_0 \simeq f_n$, also

$$0 \overset{3.47}{=} \operatorname{mdeg}(f_0) \overset{3.45}{=} \operatorname{mdeg}(f_n) \overset{3.47}{=} n$$

und somit die Konstanz von $p$. □

**Proposition 3.49.** *Ist $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ ungerade, erfüllt also $f(-z) = -f(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$, so ist auch* $\operatorname{mdeg}(f)$ *ungerade.*

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung $f(1) = 1$ annehmen und $f$ sonst durch die zu $f$ homotope Abbildung $\frac{f}{f(1)}$ ersetzen. Wie im Beweis von Proposition 3.46 erhalten wir dann wieder das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \arrow[r, "\pi_1(f)"] & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{Z}. \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Es gilt

$$\pi_1(f)\big(\Phi(1)\big) = \pi_1(f)([u_1]_1) = [f \circ u_1]_1 \quad \text{mit } u_1 : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{S}^1, \\ t & \mapsto e^{2\pi i t}. \end{cases}$$

Setzen wir nun $w := f \circ u_1$, so erhalten wir vermöge der Ungeradheit von $f$

$$w(t+\frac{1}{2}) = f\big(e^{2\pi i t + \pi i}\big) = f\big(-e^{2\pi i t}\big) = -f\big(e^{2\pi i t}\big) = -w(t) \qquad \text{für alle } t \in [0, \frac{1}{2}].$$

Nach der Weghochhebungseigenschaft 3.36 gibt es eine Hochhebung $\tilde{w} : [0,1] \to \mathbb{R}$ von $w : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ bezüglich der Überlagerung

$$p : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{S}^1, \\ t & \mapsto e^{2\pi i t} \end{cases}$$

mit $(p \circ \tilde{w})(0) = w(0) = 1$. Es folgt

$$(p \circ \tilde{w})(t+\frac{1}{2}) = w(t+\frac{1}{2}) = -w(t) = -(p \circ \tilde{w})(t) \qquad \text{für alle } t \in [0, \frac{1}{2}].$$

Diese Erkenntnis können wir wie folgt umformulieren:

$$\text{Für jedes } t \in [0, \frac{1}{2}] \text{ gibt es ein ungerades } k(t) \in \mathbb{Z} \text{ mit } \tilde{w}(t+\frac{1}{2}) = \tilde{w}(t) + \frac{k(t)}{2}.$$

Tatsächlich hängt $k(t)$ nicht von $t$ ab,

*denn:* Die Funktion

$$k : \begin{cases} [0, \frac{1}{2}] & \to \mathbb{Z}, \\ t & \mapsto k(t) = 2\tilde{w}(t+\frac{1}{2}) - 2\tilde{w}(t) \end{cases}$$

ist offensichtlich stetig. Nach Teil (a) von Proposition 2.5 ist daher das Bild der nach Satz 2.18 zusammenhängenden Menge $[0, \frac{1}{2}]$ unter $k$ wieder zusammenhängend. Da $\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie ausgestattet ist und die zusammenhängenden Unterräume von $\mathbb{Z}$ nach Teil (a) von Beispiel 2.3 somit sämtlich null- oder einelementig sind, folgt die Konstanz von $k$. #

Wir erhalten also stärker:

$$\text{Es gibt ein ungerades } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } \tilde{w}(t+\frac{1}{2}) = \tilde{w}(t) + \frac{k}{2} \quad \text{für alle } t \in [0, \frac{1}{2}].$$

Die Proposition folgt, wenn wir $\operatorname{mdeg}(f) = k$ zeigen können. Dafür stellen wir zunächst

$$\tilde{w}(1) = \tilde{w}(\frac{1}{2}) + \frac{k}{2} = \tilde{w}(0) + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = \tilde{w}(0) + k$$

fest. Wegen $1 = (p \circ \tilde{w})(0) = p\big(\tilde{w}(0)\big) = e^{2\pi i \tilde{w}(0)}$ gilt dabei $\tilde{w}(0) \in \mathbb{Z}$. Wir definieren uns einen Weg

$$\tilde{v} : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R}, \\ t & \mapsto \tilde{w}(0) + kt. \end{cases}$$

Dieser erfüllt offenbar $\tilde{v}(0) = \tilde{w}(0)$ und $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(0) + k = \tilde{w}(1)$, nach Teil (b) von Bemerkung 3.13 und der Konvexität von $\mathbb{R}$ auch $\tilde{v} \simeq \tilde{w}$ rel$\{0,1\}$ und nach Teil (d) von Bemerkung 3.13 schließlich $(p \circ \tilde{v}) \simeq (p \circ \tilde{w}) = w$ rel$\{0,1\}$. Es folgt

$$\pi_1(f)(\Phi(1)) = [f \circ u_1]_1 = [w]_1 = [p \circ \tilde{v}]_1.$$

Mit

$$(p \circ \tilde{v})(t) = e^{2\pi i(\tilde{w}(0)+kt)} = e^{2\pi ikt} = u_k(t) \quad \text{für alle } t \in I$$

erhalten wir so

$$\pi_1(f)(\Phi(1)) = [u_k]_1 = \Phi(k)$$

und somit $\operatorname{mdeg}(f) = k$. □

**Proposition 3.50.** *Sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$. Gibt es ein $r \in \mathcal{C}(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)$ mit $r|_{\mathbb{S}^1} = f$, so gilt* $\operatorname{mdeg}(f) = 0$.

*Beweis.* Die offensichtlich stetige Abbildung

$$H : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0,1] & \to \mathbb{S}^1, \\ (z,t) & \mapsto r(tz) \end{cases}$$

erfüllt $H(\cdot, 0) = c_{r(0)}$ und $H(\cdot, 1) = f$ und ist so eine Homotopie zwischen $f$ und $c_{r(0)}$. Es folgt

$$\operatorname{mdeg}(f) = \operatorname{mdeg}(c_{r(0)}) = 0.$$

□

**Bemerkung 3.51.** *Proposition 3.50 liefert einen neuen Beweis für Korollar 3.42,*

*denn: Gäbe es ein $r \in \mathcal{C}(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)$ mit $r|_{\mathbb{S}^1} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, so gälte im Widerspruch zu Proposition 3.50:*

$$\operatorname{mdeg}(r|_{\mathbb{S}^1}) = \operatorname{mdeg}(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}) = 1.$$

*Eine solche Abbildung $r$ kann es also nicht geben, so dass wir Korollar 3.42 nachgewiesen haben.* #

**Satz 3.52** (Satz vom Igel)**.** *Jedes ungerade $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ hat eine Nullstelle.*[1]

*Beweis.* Nehmen wir an, es gäbe ein nullstellenfreies, ungerades $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$. Offensichtlich wäre dann auch die Funktion

$$g : \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \to \mathbb{S}^1, \\ x & \mapsto \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \end{cases}$$

[1]Der Name dieses Satzes bedarf einer Erklärung: Er ist ein ohne den Begriff des Vektorfeldes formulierter Spezialfall der Tatsache, dass es für auf der $n$-Sphäre $\mathbb{S}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ genau dann ein tangentiales, stetiges, nirgends verschwindendes Vektorfeld gibt, wenn $n$ ungerade ist. Der Fall $n = 2$ lässt sich anschaulich in dem von Hilbert eingeführten Merksatz

Jeder stetig gekämmte Igel hat mindestens einen Glatzpunkt.

zusammenfassen.

stetig, nullstellenfrei und ungerade. Wegen der Stetigkeit von

$$h : \begin{cases} \mathbb{D}^2 & \to \mathbb{S}^2, \\ x & \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \end{cases}$$

wäre damit auch die Verknüpfung $(g \circ h) : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ stetig und die Einschränkung $(g \circ h)|_{\mathbb{S}^1}$ hätte nach Proposition 3.50 Abbildungsgrad 0. Andererseits gälte für $x \in \mathbb{S}^1$ auch

$$\begin{aligned} (g \circ h)(-x) &= g(h(-x)) = g((-x, \sqrt{1 - \|-x\|^2})) \\ &= g((-x, 0)) \\ &= g(-(x, \sqrt{1 - \|x\|^2})) = g(-h(x)) \\ &= -g(h(x)) = -(g \circ h)(x), \end{aligned}$$

so dass der Abbildungsgrad von $(g \circ h)|_{\mathbb{S}^1}$ nach Proposition 3.49 ungerade – und insbesondere ungleich 0 – wäre. Unsere Annahme, es gäbe ein solches $f$, kann also nicht stimmen, so dass wir den Satz bewiesen haben. □

**Korollar 3.53** (Satz von Borsuk-Ulam)**.** *Für jedes $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ gilt $f(x) = f(-x)$ für ein $x \in \mathbb{S}^2$.*

*Beweis.* Die offensichtlich stetige Abbildung

$$g : \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \to \mathbb{R}^2, \\ x & \mapsto f(x) - f(-x) \end{cases}$$

erfüllt

$$g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{S}^2.$$

Nach dem Satz vom Igel 3.52 gibt es also ein $x \in \mathbb{S}^2$ mit $g(x) = 0$, also mit $f(x) = f(-x)$. □

**Korollar 3.54.** *Es gibt keine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $A \cong \mathbb{S}^2$.*

*Beweis.* Gäbe es ein $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und einen Homöomorphismus $\mathbb{S}^2 \to A$, so wäre dessen Verknüpfung mit der Inklusion $A \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ eine injektive Abbildung in $\mathcal{C}(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$. Eine solche kann es aber nach dem Satz von Borsuk-Ulam 3.53 nicht geben. □

**Korollar 3.55.** *Sei $\mathbb{S}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit $A_1, A_2, A_3 \Subset \mathbb{S}^2$. Dann gibt es ein $i \in \{1, 2, 3\}$, so dass $A_i$ ein Paar von antipodalen Punkten $\{x, -x\}$ mit $x \in \mathbb{S}^2$ enthält.*

*Beweis.* Wir setzen

$$d_i : \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \to \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \inf_{y \in A_i} \|x - y\|. \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in \{1, 2, 3\},$$

$$f : \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \to \mathbb{R}^2, \\ x & \mapsto \binom{d_1(x)}{d_2(x)}. \end{cases}$$

Da $f$ stetig ist (!), gibt es dann nach dem Satz von Borsuk-Ulam 3.53 ein $x \in \mathbb{S}^2$ mit $d_1(x) = d_1(-x)$ und $d_2(x) = d_2(-x)$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

**Fall 1:** $d_1(x) = 0$**.** Dann liegen nach Definition von $d_1$ sowohl $x$ als auch $-x$ in $A_1$.

**Fall 2:** $d_2(x) = 0$**.** Dann liegen nach Definition von $d_2$ sowohl $x$ als auch $-x$ in $A_2$.

**Fall 3:** $d_1(x) \neq 0 \neq d_2(x)$**.** Dann gilt liegen $x$ und $-x$ beide weder in $A_1$ noch in $A_2$ und wegen $\mathbb{S}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ also in $A_3$. $\square$